Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias

Oscar Guerrero Miramontes
Pais : Mexico - Chihuahua
gumo_99@hotmail.com

Prologo

Esta es una recopilación de apuntes que dan una introducción a las ecuación diferenciales ordinarias, espero que este texto sirva de alguna manera a entender un poco mas sobre el tema, además de querer agradecer los comentarios de correos electrónicos espero que den ideas y si ven algún error por favor hacérmelo saber, pero no errores ortográficos esos yo los corregiré con el tiempo. E recibido el correo de muchas personas pidiendo que le resuelva problemas relacionados con el tema , lo cual esta bien por que parte de esos problemas podrán ser adjuntados en futuras ediciones, pero no esperen conteste todas las preguntas o que recibirán una solución correcta a su problema, además hay algunas persona envían problemas que están fuera del nivel y contexto de este libro y pues muy seguro no me gastare el tiempo buscando la solución a esos problemas complicados.

En todo libro u texto introductorio a las ecuaciones diferenciales se asume el lector tiene bases sólidas de calculo diferencial e integral, asi que el que lee este texto por que esta tomando una clase de ecuaciones diferenciales, pues recomiendo que repase bien el calculo diferencial e integral, espero en futuras ediciones agregar mas ampliamente una introducción a esos temas, es tanto el material que se encuentra en libros y en la Internet de gran calidad que no veo necesario escribir tanto y compactar las ideas básicas del calculo diferencial e integral no es una tarea tan fácil .

Hay mucha gente a pedido que en este texto se agreguen mas aplicacióne s sobre las ecuaciones diferenciales por que dicen ,que, en el Internet se encuentra muy poca información. y que se deberían agregar mas problemas y problemas, pues yo espero agregar aplicaciones útiles en futuras ediciones y sobre el agregar mas problemas debo resaltar este no es un libro es solo apuntes, y pues con uno u dos problemas y viendo como resolverlos paso a paso creo es mas que suficiente para saber los pasos u la técnica utilizada para atacar problemas similares, un libro que recomiendo y que es de costo enconomico donde se puede encontrar problemas para practicar y resolver es el libro de la serie schaum : *Richard Bronson, Schaum's Outline of Differential Equations, McGraw-Hill* , es importante mencionar que estos problemas algunos se repite los mismos pasos casi un proceso mecánico, en otros se requiere de pensar, la idea de estos apuntes es que si una vez se encuentra con una ecuación diferencial similar que se parezca en alguna forma u que este dentro de las clasificación entonces venga a la mente que seria buena idea usar esta técnica u esta herramienta puede serme útil en encontrar la solución. En muchos casos en la vida real se requiere el uso de la computadora y de métodos numéricos para encontrar la solución, este texto no incluye esos métodos numéricos aunque dos software muy conocidos pero no gratuitos son el Mathematica y el Matlab estoy seguro en Internet hay muchas referencias como usar estos dos programass.

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Repaso calculo Diferencial

En este capitulo recordamos las reglas que introducen al calculo diferencial, esto es solo una introduccion breve, un recordatorio de lo que ya el lector deberia saber, en todo curso introductorio a ecuaciones diferenciales se asume que el lector posee ya una base solida de como integrar y derivar funciones, lo primero que debemos recordar es la definicion de limite, y las propiedades del limite

1.1. Definicion Limite y Propiedades

Informalmente, decimos que el límite de la función $f(x)$ es L cuando x tiende a a, y escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{1.1}$$

si se puede encontrar x suficientemente cerca de a tal que $f(x)$ es tan cerca de L como se quiera. (a puede ser finito o infinito.) Es decir, el límite es L si $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a. Más precisamente, decimos que

$$f(x) \to L \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \tag{1.2}$$

Propiedades o Reglas de Los Limites.

1. siempre que no aparezca la indeterminación ∞

$$\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a}(f(x)) + \lim_{x \to a}(g(x)) \tag{1.3}$$

2. si λ es un escalar diferente de cero

$$\lim_{x \to a} (\lambda f(x)) = \lambda \lim_{x \to a}(f(x)) \tag{1.4}$$

3. siempre y cuando no aparezca la indeterminación $0/0$

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a}(f(x))\lim_{x\to a}(g(x)) \tag{1.5}$$

4. siempre y cuando no aparezcan las indeterminaciones $0/0$ o ∞/∞

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a}(f(x))}{\lim_{x\to a}(g(x))} \tag{1.6}$$

5. siempre y cuando k sea diferente de cero

$$\lim_{x\to a}(f(x))^k = \left(\lim_{x\to a}(f(x))\right)^k \tag{1.7}$$

6. Siempre y cuando tengan sentido las potencias que aparecen y no se encuentren indeterminaciones

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = \left(\lim_{x\to a}(f(x))\right)^{\lim_{x\to z}(g(x))} \tag{1.8}$$

1.2. Calculo Diferencial

Asumimos que sabes lo que es una funcion $f(x)$: f toma los valores de x, y resulta un valor para f, el valor de f depende de x, por lo tanto nos referimos a f como la variable dependiente y x como la variable independiente.

Como un ejemplo considera $f(x) = x^2 + 5$ si $x = 5$ el valor de f es

$$f(5) = 5^2 + 5 = 30$$

Asumimos que la funcion es continua esto significa que puedes dibujar la grafica de f sin la necesidad de remover el lapiz del papel o mas formalmente

Definicion 1.1

se dice que una función f es continua en un punto a si existe $f(a)$, si existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia a por la derecha, si existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia a por la izquierda, y además coinciden con $f(a)$

La derivada de una funcion denotado por $f'(x)$,$D(f)$ o df/dx se definide por el siguiente limite

$$D(f) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \tag{1.9}$$

observamos la derivada mide la razon de cambio de la variable independiente respecto la variable dependiente. demos un ejemplo como calcular la derivada usando la ecuacion (1.9)

calcular la derivada de $f(x) = x^2$

$$D(f) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \right] \tag{1.10}$$

Resolviendo el algebra y el limite en (1.10)

$$D(f) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{2x(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + (\Delta x)) = 2x \tag{1.11}$$

claramente la funcion debe ser continua antes de poder calcular la derivada.

Una vez obtenido la derivada, puedes tomar la derivada de la derivada apelando a la definicion anterior Como ejemplo la derivada de la derivada de $f(x) = x^2$ que recibe el nombre de la segunda derivada se calcula a continuacion

$$D^2(f) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{2(x + \Delta x) - 2x)}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \to 0} (2) = 2 \tag{1.12}$$

La extencion para derivadas de mayor orden es obvio

1.2.1. La derivada un operador lineal

Uno puede decir que tomar la derivada es una operacion lineal como referencia considera $L = af + bg$ donde a y b son escalares e f y g son funciones que dependen de x, calcular la derivada de L respecto de x es como sigue

$$D(L) = D(af + bg) = aD(f) + bD(g) \tag{1.13}$$

la ecuacion anterior nos dice que la derivada de una combinacion lineal de funciones es equivalente a la combinacion lineal de sus derivadas, lo anterior se puede comprobar usando la definicion (1.9)

$$D(L) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{L(x + \Delta x) - L(x)}{\Delta x} \right] \tag{1.14}$$

Utilizando algebra y recordando que $L = af + bg$

$$D(L) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{af(x + \Delta x) + bg(x + \Delta x) - af(x) - bg(x)}{\Delta x} \right] \tag{1.15}$$

aplicando una propiedad de los limites

$$D(L) = a \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] + b \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] \tag{1.16}$$

Otra forma como la ecuacion (1.16) se escribe es

$$D(L) = aD(f) + bD(g) \tag{1.17}$$

1.2.2. Regla del producto

Otra definicion util para calcular la derivada del producto dos funciones $L = fg$ se demuestra a continuacion

$$D(L) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{L(x + \Delta x) - L(x)}{\Delta x} \right] \tag{1.18}$$

Utilizando algebra y recordando que $L = fg$

$$D(L) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \right] \tag{1.19}$$

Desarrollando el algebra

$$D(L) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) + f(x + \Delta x)g(x) - f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \right] \tag{1.20}$$

aplicando una propiedad de los limites en (1.20)

$$D(L) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x+\Delta x) \left[\frac{g(x+\Delta x) + g(x)}{\Delta x} \right] \right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[g(x+\Delta x) \left[\frac{f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x} \right] \right] \tag{1.21}$$

En conclusion la derivada del producto de dos funciones es igual a la primer función por la derivada de la segunda, más la segunda por la derivada de la primera.

$$D(L) = D(fg) = fD(g) + gD(f) \tag{1.22}$$

1.2.3. Regla de la Cadena

Usando los mismos principios uno puede deducir la regla de la cadena

En términos intuitivos, si una variable, f, depende de una segunda variable, u, que a la vez depende de una tercera variable, x; entonces, el ratio de cambio de f con respecto a x puede ser computado como el producto del ratio de cambio de f con respecto a u multiplicado por el ratio de cambio de u con respecto a x.la definicion se muestra a continuacion

$$Df(u(x)) = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} \tag{1.23}$$

mencionemos por ejemplo $u(x) = x^2 + 1$ y $f(u) = u^2$ para encontrar la derivada de f respecto de x aplicamos la regla de la cadena

$$Df(u(x)) = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = (2u)(2x) = (4x)(x^2+1) \tag{1.24}$$

se puede comprobar el resultado usando fuerza bruta, expresando u en terminos de x, asi la variable f es explicita en funcion de x y podemos tomar la derivada

$$\begin{aligned} f(u(x)) &= (x^2+1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1 \\ f'(x) &= 4x^3 + 4x = (4x)(x^2+1) \end{aligned} \tag{1.25}$$

Utilizando la defincion de la derivada del producto de dos funciones y la regla de la cadena encontramos la regla del cociente para esto definamos $L = f/g$

$$\frac{dL}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{d}{dx}\left(f[g]^{-1}\right) = [g]^{-1}D(f) - f[g]^{-2}D(g) = \frac{gD(f) - fD(g)}{[g]^2} \tag{1.26}$$

Mencionemos un ejemplo para usar la regla del cociente sea $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-1}$

calcular su derivada es como sigue

$$f'(x) = \frac{(x-1)(2x-5)-(1)(x^2-5x+6)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} \tag{1.27}$$

Depues de las anteriores generalidades, se considera casos especiales que son usados frecuentemente. primero considera $f(x) = x^n$ siendo n un entero positivo. calcular la derivada de f es como sigue.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \right] \tag{1.28}$$

usando la expansion binomial en $(x + \Delta x)^n$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} x^{n-r} (\Delta x)^r}{\Delta x} - x^n \right] = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{nx^{n-1}(\Delta x) + O(\Delta x)^n}{\Delta x} \right] = nx^{n-1} \tag{1.29}$$

asi la derivada de $f(x) = x^n$ es nx^{n-1}

$$D(x^n) = nx^{n-1} \tag{1.30}$$

Es util considerar lo que uno puede hacer para calcular la derivada de $f(x) = x^n$ sin la necesidad de usar la expansion binomial por intuicion en la expancion de un binomio $(x+\Delta x)^n = x^n + \Delta x n x^{n-1} + ... \Delta x^n$ al factorisar el factor comun Δx el unico termino sobrevive al aplicar el $\lim_{\Delta x \to 0}$ es nx^{n-1}. la ecuacion anterior tambien puede extenderse para numeros irracionales y para numeros negativos exceptuando $x = -1$.

1.3. Tablas derivacion

Afortunadamente gente por nosotros elaboro anteriormente tablas donde se encuentra la derivacion de funciones elementales, como lo son las funciones trigonomatricas, exponenciales, logartimicas, etc. Por referencia adjunto parte de estas tablas que podran ser utiles. En la lituratura existen tablas matematicas contiene mucho mas informacion un ejemplo de esos libros es Daniel Zwillinger, *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae*, 31st Edition, CRC Press

TABLE 9.—DERIVATIVES AND INTEGRALS

$d\,ax$	$= a\,dx$	$\int x^n dx$	$= \frac{x^{n+1}}{n+1}$, unless $n = -1$
$d\,uv$	$= \left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right)dx$	$\int \frac{dx}{x}$	$= \log x$
$d\,\frac{u}{v}$	$= \left(\frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}\right)dx$	$\int e^x dx$	$= e^x$
$d\,x^n$	$= nx^{n-1}\,dx$	$\int e^{ax} dx$	$= \frac{1}{a}e^{ax}$
$d\,f(u)$	$= d\,\frac{f(u)}{du}\cdot\frac{du}{dx}\cdot dx$	$\int x^m e^{ax} dx$	$= \frac{x^m e^{ax}}{a} - \frac{m}{a}\int x^{m-1}e^{ax}dx$
$d\,e^x$	$= e^x\,dx$	$\int \log x\,dx$	$= x\log x - x$
$d\,e^{ax}$	$= a\,e^{ax}\,dx$	$\int u\,dv$	$= u\,v - \int v\,du$
$d\log_e x$	$= \frac{1}{x}\,dx$	$\int (a+bx)^n dx$	$= \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)b}$
$d\,x^x$	$= x^x\,(1 + \log_e x)\,dx$		
$d\sin x$	$= \cos x\,dx$	$\int (a^2+x^2)^{-1}dx$	$= \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} = \frac{1}{a}\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$
$d\cos x$	$= -\sin x\,dx$	$\int (a^2-x^2)^{-1}dx$	$= \frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x}$
$d\tan x$	$= \sec^2 x\,dx$	$\int (a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$	$= \sin^{-1}\frac{x}{a}$, or $-\cos^{-1}\frac{x}{a}$
$d\cot x$	$= -\csc^2 x\,dx$	$\int x(a^2\pm x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$	$= \pm(a^2\pm x^2)^{\frac{1}{2}}$
$d\sec x$	$= \tan x\sec x\,dx$	$\int \sin^2 x\,dx$	$= -\frac{1}{2}\cos x\sin x + \frac{1}{2}x$
$d\csc x$	$= -\cot x\cdot\csc x\,dx$	$\int \cos^2 x\,dx$	$= \frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}x$
$d\sin^{-1} x$	$= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$	$\int \sin x\cos x\,dx$	$= \frac{1}{2}\sin^2 x$
$d\cos^{-1} x$	$= -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$	$\int (\sin x\cos x)^{-1}dx$	$= \log\tan x$
$d\tan^{-1} x$	$= (1+x^2)^{-1}\,dx$	$\int \tan x\,dx$	$= -\log\cos x$
$d\cot^{-1} x$	$= -(1+x^2)^{-1}\,dx$	$\int \tan^2 x\,dx$	$= \tan x - x$
$d\sec^{-1} x$	$= x^{-1}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx$	$\int \cot x\,dx$	$= \log\sin x$
$d\csc^{-1} x$	$= -x^{-1}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx$	$\int \cot^2 x\,dx$	$= -\cot x - x$
$d\sinh x$	$= \cosh x\,dx$	$\int \csc x\,dx$	$= \log\tan\frac{1}{2}x$
$d\cosh x$	$= \sinh x\,dx$	$\int x\sin x\,dx$	$= \sin x - x\cos x$
$d\tanh x$	$= \mathrm{sech}^2 x\,dx$	$\int x\cos x\,dx$	$= \cos x + x\sin x$
$d\coth x$	$= -\mathrm{csch}^2 x\,dx$	$\int \tanh x\,dx$	$= \log\cosh x$
$d\,\mathrm{sech}\,x$	$= -\mathrm{sech}\,x\tanh x\,dx$	$\int \coth x\,dx$	$= \log\sinh x$
$d\,\mathrm{csch}\,x$	$= -\mathrm{csch}\,x\cdot\coth x\,dx$	$\int \mathrm{sech}\,x\,dx$	$= 2\tan^{-1}e^x = gd\,u$
$d\sinh^{-1} x$	$= (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx$	$\int \mathrm{csch}\,x\,dx$	$= \log\tanh\frac{x}{2}$
$d\cosh^{-1} x$	$= (x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx$	$\int x\sinh x\,dx$	$= x\cosh x - \sinh x$
$d\tanh^{-1} x$	$= (1-x^2)^{-1}\,dx$	$\int x\cosh x\,dx$	$= x\sinh x - \cosh x$
$d\coth^{-1} x$	$= (1-x^2)^{-1}\,dx$	$\int \sinh^2 x\,dx$	$= \frac{1}{2}(\sinh x\cosh x - x)$
$d\,\mathrm{sech}^{-1} x$	$= -x^{-1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$	$\int \cosh^2 x\,dx$	$= \frac{1}{2}(\sinh x\cosh x + x)$
$d\,\mathrm{csch}^{-1} x$	$= -x^{-1}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx$	$\int \sinh x\cosh x\,dx$	$= \frac{1}{4}\cosh(2x)$

1.4. Derivacion funciones implicitas

Hasta ahora se sabe como encontrar la derivada de dy/dx cuando $y(x)$, en otras palabras la variable dependiente esta relacionada explicitamente por la variable independiente, pero que sucede si las variables y e x estan realacionadas por una ecuacion por ejemplo : $x^2 + y^2 = R^2$ y te preguntan encontrar la derivada dy/dx.

Existen dos formas de atacar el problema, la primera es intentar expresar y en funcion de x,luego calcular la razon de dy/dx haciendo que x cambie infinitesimalmente. La segunda es imaginar que y e x cambien infinitesimalmente mientras se preserva la forma de las restricciones (por ejemplo un circulo)

Considera la funcion implicita $ax^6 + 2x^3y - y^7x = 10$ y se procede a calcula la derivada $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{d}{dx}(ax^6) + \frac{d}{dx}(2x^3y) - \frac{d}{dx}(y^7x) = \frac{d}{dx}(10) \tag{1.31}$$

aplicando la regla del producto en (1.31)

$$6ax^5 + 2x^5\frac{dy}{dx} + 6x^2y - y^7 - 7xy^6\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1.32}$$

Ahora intentamos depejar para $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^7 - 6ax^5 - 6x^2y}{2x^3 - 7x^6} \tag{1.33}$$

Notese el resultado contiene tanto a x como a y.

Otro metodo para encontrar derivadas implicitas sin necesidad usar la regla del producto es usar derivadas parciales

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial_x(f)}{\partial_y(f)} \tag{1.34}$$

En otras palabras dada un funcion $f(x, y)$ calcular $\frac{dy}{dx}$ es simplemente dividir la derivada parcial de f respecto de x que se denota con el simbolo $\partial_x(f)$, entre la derivada parcial de f respecto de y que se deonta con el simbolo $\partial_y(f)$

Utilisemos este nuevo metodo para encontrar $\frac{dy}{dx}$ dada la funcion implicita del ejemplo anterior $ax^6 + 2x^3y - y^7x = 10$

Lo primero es calular $\partial_x(f)$

$$\partial_x(f) = 6ax^5 + 6x^2y - y^7 \tag{1.35}$$

El segundo paso es calcular $\partial_y(f)$

$$\partial_y(f) = 2x^3 - 7xy^6 \tag{1.36}$$

El tercer paso es usar la ecuacion (1.34)

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{6ax^5 + 6x^2y - y^7}{2x^3 - 7xy^6}\right) = \frac{y^7 - 6ax^5 - 6x^2y}{2x^3 - 7x^6} \tag{1.37}$$

Notese que se encuentra el mismo resultado que en el ejemplo anterior

1.5. Interpretacion Geometrica de la Derivada

Primero es necesario recordad la definicion de tangente a una curva dada por la ecuacion $y = f(x)$ en un punto M de la misma. Supongamos una secante que pase por M y un proximo punto P de la curva (fig.1)

Procedemos ahora a derivar la funcion $f(x)$ seguna la regla general (9) y a interpretar cada paso geometricamente ver fig.1.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{NP}{MN} = \tan < NMP = \tan(\ell(\Delta x)) \tag{1.38}$$

Se observa que $\tan < NMP = \tan(\ell(\Delta x))$ que es la pendiente de la secante MP. con esto vemos que la razon de los incrementos Δx y Δy es igual a la pendiente de la secante determinada por los puntos $M(x, y)$ y $P(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Ahora se considera el valor de M como fijo y el punto P ha de moverse a lo largo de la cruva y aproximarse a M como posicion limite.

Es decir que para aproximar P a M la distancia Δx debe tender a cero y por tanto

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} (\tan(\ell(\Delta x))) = \tan(\ell_0) \tag{1.39}$$

Asi se establece:

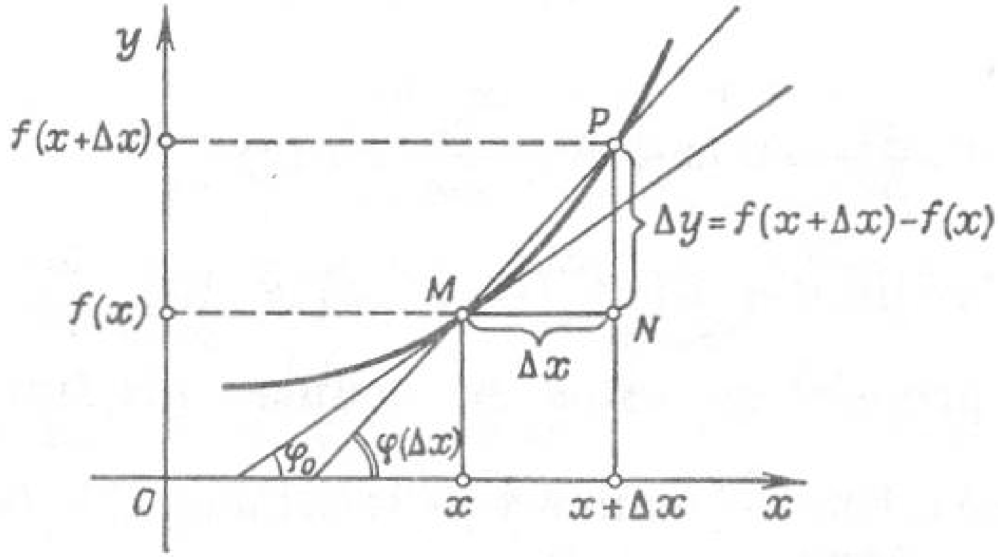

Figura 1.1: Interpretacion Geometrica de la Derivada

Teorema 1:

El valor de la derivada en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la tangente a la curva de aquel punto.

ejemplo : Aplicando el Teorema 1 hallar la pendiente y la inclinacion de la tangente dada la funcion $f(x) = 3 + 3x - x^3$ en el punto $x = -1$ y verificar el resultado trasando la curva y la tangente

Lo primero es encontrar la derivada de $f(x)$

$$f'(x) = 3 - 3x^2 \tag{1.40}$$

luego para encontrar la pendiente evaluar la derivada en el punto $x = -1$

$$f'(-1) = 3 - 3(-1)^2 = 0 \tag{1.41}$$

para encontrar la inclinacion se recurda que $\ell = \arctan(f'(x))$

$$\ell = \arctan(f'(-1)) = \arctan(0) = 0 \tag{1.42}$$

Se verifica el resultado trasando la curva y la tangente

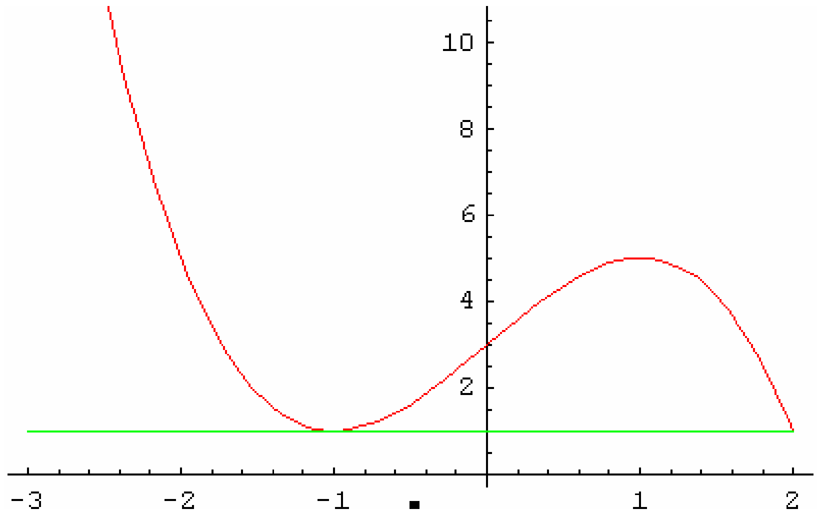

Figura 1.2: Grarfica funcion $f(x) = 3 + 3x - x^3$ y tangente en $x = -1$

Observando la grafica anterior, observamos que cuando el valor de la derivada de la funcion es igual a cero encontramos el minimo de la funcion, este resultado no es raro, como se menciono antes la derivada mide la pendiente en el punto donde la derivada es evaluada, si la pendiente es igual a cero, entonces encontramos que la recta tangente debe ser paralela al eje x u que es lo mismo decir tiene una inclinacion de cero grado respecto al eje x.

De la anterior afirmacion se puede decir que cuando la derivada de la funcion sea igual a zero se podra encontrar un maximo, minimo u punto de infelxion

$$\text{si } f'(x_o) = 0 \text{ entonces } x_o \text{ puede ser un maximo, minimo u}$$
$$\text{punto de inflexion}$$

Entonces algo que siempre se debe recordar es que si se quiere encontrar el minimo, maximo u punto de infelxion de una funcion $f(x)$ la derivada $f'(x)$ debera ser igualada a cero, y se deberan encontrar las raices, hasta este momento solo mencione lo que se debe hacer si se requiere encontrar los minimos u maximos de la funcion, ahora con un ejemplo tambien mencionare como saber cual punto es un minimo cual es un maximo.

Como ejemplo regresemos a la funcion $f(x) = 3 + 3x - x^3$ y encotremos los maximos, minimos de la funcion la funcion $f(x) = 3 + 3x - x^3$ la derivada $f'(x)$ es $f'(x) = 3 - 3x^2$

para encontrar los maximos y minimos acuerdate que $f'(x) = 0$

$\rightarrow 3 - 3x^2 = 0$, encontrando las raices sabemos que $x_1 = 1 \; y \; x_2 = -1$

Encontramos existen dos puntos que son candidatos para ser un maximo u minimo, esos puntos son $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$, se podria usar la definion del criterio de la segunda derivada para saber cual punto es el maximo u el minimo pero yo prefiero evaluar la derivada un punto anterior y siguiente y ver si hay un cambio en la pendiente de un valor positivo a un valor negativo.

encontrando las raices sabemos que $x_1 = 1 \; y \; x_2 = -1$, cual es el minimo u el maximo ?

para el punto $x_1 = 1$, un punto anterior es el $x = 0 \; y \; x = 2$ el punto siguiente

$f'(0) = 3 - 3x^2 = 3 \;\rightarrow\; pendiente\ positiva$

$f'(2) = 3 - 3(4) = -9 \;\rightarrow\; pendiente\, negativa$

como la pendiente cambia de positiva (+) a negativa (-) el punto $x_1 = 1$ es un maximo

ya sabe que x_1 es un maximo, ahora veremos que x_2 es un minimo

encontrando las raices sabemos que $x_1 = 1 \; y \; x_2 = -1$, cual es el minimo u el maximo ?

para el punto $x_2 = -1$, un punto anterior es el $x = -2 \; y \; x = 0$ el punto siguiente

$f'(-2) = 3 - 3(4) = -9 \;\rightarrow\; pendiente\ negativa$

$f'(0) = 3 - 3(0) = 3 \;\rightarrow\; pendiente\, positiva$

como la pendiente cambia de negativa (-) a positiva (+) el punto $x_2 = -1$ es un minimo

Asi que encontramos una manera util de saber como saber si un punto es un maximo u es un minimo, lo cual lo resumiremos a continuacion un punto x_o es un maximo si para el punto el punto anterior $x_1,\ f'(x_1) > 0$ y para un punto superior $x_2,\ f'(x_2) < 0$

un punto x_o es un maximo si para el punto el punto anterior $x_1,\ f'(x_1) < 0$ y para un punto superior $x_2,\ f'(x_2) > 0$

Capítulo 2

Clasificacion ecuaciones diferenciales

Varios problemas de ingenieria, fisica y ciencias sociales se requiere determinar una funcion que satisfaga una ecuacion que contenga una o mas derivadas. estas ecuaciones reciben el nombre de **ecuaciones diferenciales**. Un ejemplo familiar es la segunda ley de Newton

$$m\frac{d^2u(t)}{dt^2} = F\left[t, u(t), \frac{du(t)}{dt}\right] \tag{2.1}$$

Para lo posicion u(t) de una particula bajo una fuerza F donde F puede ser funcion del tiempo (t), la posicion u(t) y la velocidad du/dt. para determinar el movimiento de la particula es necesario encontrar una funcion que satisfaga la ecuacion (2.1).

2.1. Clasificacion de las ecuaciones

1. Ecuaciones ordinarias : la funcion depende de una sola variable independiente

2. Ecuaciones parciales : la funcion depende de varias variable independientes

ejemplo de una ecuacion parcial

$$\nabla^2\varphi + k^2\varphi = 0 \tag{2.2}$$

la ecuacion (2.2) es mucho mas general de lo que parece

- $k^2 = 0$ ecuacion de Laplace
- k^2= (+) constante ecuacion de Helmholtz

- k^2= (-) ecuacion de Difusion (espacial)
- k^2= constante x energia cinetica es la ecuacion de Schrodinger

Ejemplo una ecuacion ordinaria

$$\frac{dp}{dt} = hp \tag{2.3}$$

2.1.1. Ecuaciones lineales independientes y lineales dependientes

las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son linealmente independientes si $k_1 f(x)+k_2 g(x) = 0$ solo cuando $k_1 = k_2 = 0$ donde k_1 y k_2 son numeros escalares.

Decimos que $f(x)$ y $g(x)$ es linealmente dependiente si no es linealmente independiente : es decir donde k_1, k_2 son numeros escalares no todos nulos.

Si la solucion de una ecuacion diferencial es linealmente independientes se construye una solucion de la forma

$$y(x) = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + ...C_n Y_n \tag{2.4}$$

En los tratados sobre ecuaciones diferenciales se demuestra que la solución general de una ecuación diferencial de orden (n), tiene (n) constantes arbitrarias

2.1.2. Wronskiano

En matemática, el Wronskiano es una función llamada así por el matemático Polaco Josef Hoene-Wronski, especialmente importante en el estudio de las ecuaciones diferenciales. Dado un conjunto de n funciones, $f_1, ..., f_n$, el Wronskiano $W(f_1, ..., f_n)$ está dado por:

$$w(f_1, ...f_n) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

El Wronskiano puede usarse para determinar si un conjunto de funciones diferenciales es linealmente independiente en un intervalo dado.**Si el Wronskiano es distinto de cero en algún punto de un intervalo, entonces las funciones asociadas son linealmente independientes en el intervalo** ejemplo : Suponer que $y_1(x) = e^{r_1x}$ y $y_2(x) = e^{r_2x}$ son dos soluciones de la forma (2.5). muestra que la solucion es linealmente independiente si $r_1 \neq r_2$

Utilizando la ecuacion (2.6)

$$W = \begin{bmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} \\ r_1e^{r_1x} & r_2e^{r_2x} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Calculando el determinante

$$\det[W] = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)x} \tag{2.7}$$

Como el exponencial nunca es cero, y $r_2 - r_1 \neq 0$ para $r_2 \neq r_1$ entonces Det[W] no es cero y para cualquier valor de x, y_1 y y_2 forman una solucion lineal independiente.

ejemplo : comprobar que los vectores (2,-1,1), (1,0,1), (3,-1,2) son linealmente dependientes entre si.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_2 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Calculando el determinante de la matriz A

$$\det[A] = 0 \tag{2.9}$$

Como el determinante de A es igual a cero los vectores son linealmente dependientes

2.1.3. Ecuaciones Lineales o no lineales

Una clasificacion crucial de las ecuaciones diferenciales es acorde a si son o no lineales. Una ecuacion diferencial ordinaria

$$F(x, y, y', ...y^{(n)}) = 0 \tag{2.10}$$

Es lineal si F es una funcion lineal de las variable $x, y, y', ...y^{(n)}$ una definicion similar se aplica a ecuaciones diferenciales parciales. Asi la ecuacion general lineal ordinaria de orden (n) es

$$a_o(x)y^n + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = g(x) \tag{2.11}$$

ejemplo : Un problema que es no lineal es la oscilacion de un pendulo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}Sin(\theta) = 0 \tag{2.12}$$

Las teorias matematicas y tecnicas para resolver ecuaciones diferenciales lineales es solido y confiable, en contraste con las ecuaciones no lineales la situacion no es tan satisfactoria.

por suerte muchos problemas tienden a ecuaciones diferenciales lineales o aproximadamente. Por ejemplo la ecuacion (2.12) si el angulo θ es pequeno entonces $\sin(\theta) \approx \theta$ la ecuacion (2.12) puede ser remplasada por la ecuacion lineal

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{2.13}$$

2.2. Verificacion Ecuaciones diferenciales

Antes de emprender el problema de resolver ecuaciones diferenciales, Mostraremos como se verifica una solución dada.

Considere la ecuacion cuadratica

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.14}$$

la ecuacion anterior es un ejemplo una ecuacion algebraica en la cual los valores desconosidos de la potencia x aparecen y dada esta informacion nuestro objetivo es determinar esos valores.

Ahora se intentara encontrar el valor de x que cumple la relacion para la ecuacion cuadratica

$$
\begin{aligned}
&ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x^2 + px + q = 0 \rightarrow \\
&x^2 + px = -q \rightarrow x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q \\
&\rightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q \rightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

Despues de un poco desarrollo de algebra se encuentra el valor de x en relacion a las constante a, b, c este resultado puede comprobarse si se introduce la solucion general encontrada en la ecuacion cuadratica y el resultado debera ser igual a cero...

Una ecuacion diferencial es algo similar, una ecuacion diferencial expresa una relacion entre una funcion y sus derivadas y nuestro objetivo es encontrar una funcion satisfaga esa relacion.

Se pueden encontrar muchos ejemplo de ecuaciones difereciales que tiene aplicaciones.

por ejemplo la ecuacion describe un movimiento harmonico :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2 x = 0 \tag{2.15}$$

otro ejemplo es la ecuacion de onda para una cuerda vibrando

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0 \tag{2.16}$$

Otro ejemplo famoso es la ecuacion sine-Gordon

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \sin\psi = 0 \tag{2.17}$$

En cada uno de los ejemplo anteriores, nuestro objetivo es encontrar una funcion, dada una informacion relacionando la funcion y sus derivadas. cuando encontremos esta funcion se habra resuelto la ecuacion diferencial.

En el siguiente capitulo se aprende como clasificar ecuacion diferenciales, por ejemploe la ecuacion de onda y de sine-gordon son ejemplos ecuaciones diferenciales parciales.

Hay muchos trucos para poder resolver ecuaciones diferenciales, pero esto no cambia la regla del juego. Dada una funcion si se sustituyen en la ecuacion diferencial y cumple la igualdad se habra resuelto.

ejemplo : dada la funcion

$$y = c_1 + 2x + c_2 x^2 \tag{2.18}$$

Comprobar es solucion de la ecuacion diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} = 0 \tag{2.19}$$

Derivando la ecuacion (2.18)

$$\frac{dy}{dx} = 2 + 2c_2 x \tag{2.20}$$

Derivando dos veces la ecuacion (2.18)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2c_2 \tag{2.21}$$

Haciendo la sustitucion de la primera y segunda derivada de en (2.19)

$$2c_2 - \frac{1}{x}(2 + 2c_2 x) + \frac{2}{x} = 0 \tag{2.22}$$

Expandiendo terminos en (2.22)

$$2c_2 - \frac{2}{x} - 2c_2 + \frac{2}{x} = 0 \tag{2.23}$$

Por lo tanto (2.18) es solucion a la ecuacion diferencial (2.19)

ejemplo : dada la solucion

$$s = c_1 \cos(2t + c_2) \tag{2.24}$$

comprobar es la solucion correcta para la ecuacion diferencial

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 0 \tag{2.25}$$

Derivando dos veces (2.24)

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -4\cos(2t + c_2)c_1 \tag{2.26}$$

Sustiyendo (2.24) y (2.26) en (2.25)

$$-4\cos(2t + c_2)c_1 + 4\cos(2t + c_2)c_1 = 0 \tag{2.27}$$

Por lo tanto (2.24) es solucion de (2.25)

En los problemas anterios c_1 y c_2 son constantes arbritarias. el valor de estas constantes depende de las condiciones se imponga a la solucion y dan una solución mas general al problema a esta constante arbitraria se le conoce como constante de integración.

Esta constante es de gran importancia cuando se imponen condiciones de frontera al problema, en otras palabra no solo se debe encontrar una funcion que satisfaga la ecuacion diferencial y que cumpla con estas condiciones de frontera, intentare dar una explicacion rapida con un ejemplo clasico el cual es resolver la siguiente ecuaciones diferencial :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \;\rightarrow\; y = mx + b$$

La funcion satisface la ecuacion diferencial es la ecuacion de la linea recta, si todavia duda es la solucion solo debe insertar la solucion en la ecuacion diferencial, aunque el resultado intuitivamente tiene sentido, es decir se debe encontrar una funcion que derivada dos veces su valor sea igual a cero.

Muchos dirian que otra solucion es $y = mx$ es decir no es necesario agregar la constante b lo cual es ciero, pero esta constante debe agregarse al dar una solucion mas general, el valor de esa constante b depende de las condiciones de frontera.

Supongamos que ahora la condicion no es solo que la funcion satisfaga la ecuacion diferencial, mas que el valor de la funcion en $x = 0$ sea igual a 3, por tanto la funcion satisface esa condicion es :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \;\rightarrow\; y = mx + b \;\; pero\, si\, y(0) = 3\, entonces\, b = 3$$
$$\rightarrow y = mx + 3$$

Para este caso particular el valor de b es igual a tres, de igual manera se podria agregar otra condicion de frontera la cual seria que el valor de la derivada de la funcion sea igual a una constante o inclusive igual a otra funcion , es decir dependiendo de las conficiones de fronteras el problema puede complicarse y inclusive no tener una solucion analitica y recurir a metodos numericos.

Ahora mencionare otro ejemplo el cual es decribir el movimiento de una particula moviendose en una dimension bajo la influencia de la fuerza de gravedad

$$F_z = m\frac{d^2z}{dt^2} \; pero \; F_z = mg \;\rightarrow\; \frac{d^2z}{dt^2} = g \rightarrow z = \frac{1}{2}gt^2 + bt + c$$

Este resultado debe de ser muy conocido, observamos hay dos constantes arbitrarias b y c que sus valores dependeran de las condiciones de frontera, por ejemplo si impones las condiciones que la posicion de la particula en el tiempo cero es igual a cero y que la rapidez de la particula es constante en el tiempo cero entonces :

$$z = \frac{1}{2}gt^2 + bt + c \;\text{ pero }\; z(0) = 0 \text{ y } z'(0) = v_o$$
$$\rightarrow c = 0 \text{ y } b = v_0 \rightarrow z = \frac{1}{2}gt^2 + v_o t$$

En el siguiente capitulo se aprendera a resolver ecuaciones diferencial de primer orden

Capítulo 3

Solucion ecuaciones ordinarias de primer orden

Una ecuación de primer orden puede reducirse a la forma

$$Mdx + Ndy = 0 \tag{3.1}$$

Siendo M y N funciones de x e y. las ecuaciones diferenciales de primer orden pueden dividirse en cuatro grupos.

1. Ecuaciones variable separable
2. Ecuaciones Homogeneas
3. Ecuaciones lineales de la forma $y' + Py = Q$ donde P y Q son funciones de (x) unicamente
4. Ecuaciones que se pueden reducirse a la forma (3)

3.1. Ecuaciones variable separable

Ecuaciones con variables separables Cuando los terminos de una ecuacion diferencila pueden disponerse de manera que toma la forma $f(x)dx+f(y)dy = 0$ siendo $f(x)$ una funcion de x unicamente y $f(y)$ una funcion de y unicamente. el procedimiento de resolucion se llama separacion de variable.

ejemplo : resolver la ecuacion diferencial

$$(1 + x^2)dy - x^2dx = 0 \tag{3.2}$$

Separando las variable

$$\int dy = \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)} \tag{3.3}$$

Integrando ambos lados de la ecuacion

$$y(x) = x - \arctan(x) \tag{3.4}$$

ejemplo Comprobar que (3.4) es la solucion es la correcta para (3.2). Sustituyendo (3.4) en (3.2)

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} - x^2 = 0 \tag{3.5}$$

encontrando dy/dx de la ecuacion (3.4)

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{1+x^2} \tag{3.6}$$

sustituyendo (3.6) en (3.5)

$$(1+x^2)(1 - \frac{1}{1+x^2}) - x^2 = 0 \tag{3.7}$$

Por lo tanto (3.4) es solucion de (3.2)

3.2. Ecuaciones Homogeneas

Ecuaciones homogeneas Se dice que la ecuacion diferencial $Mdx + Ndy = 0$ es homogenea si M y N son funciones de x e y del mismo grado.

haciendo el cambio de variable

$$y = vx \tag{3.8}$$

encontramos que

$$x\frac{dv}{dx} + v = -\frac{M}{N} \tag{3.9}$$

Donde la ecuacion (3.9) es una ecuacion diferencial de variables separables.se resolvera la siguiente ecuacion homogenea.

$$-(y + \sqrt{x^2+y^2})dx + xdy = 0 \tag{3.10}$$

donde M = $-(y+\sqrt{x^2+y^2})$ y N = x Ambas son homogeneas y de primer grado

$$-\frac{M}{N}=\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x} \tag{3.11}$$

Haciendo el cambio de variable y = vx en (3.11) encontramos

$$x\frac{dv}{dx}+v=\sqrt{v^2+1}+v \tag{3.12}$$

La ecuacion (3.12) si es separable y de integracion directa

$$\int\frac{dv}{\sqrt{v^2+1}}=\int\frac{dx}{x} \tag{3.13}$$

Resolviendo (3.13) encontramos el resultado

$$\operatorname{arcsin}[v]=\ln(x)+C \tag{3.14}$$

Por el cambio de variable (3.8) v = y/x sustituyendo en (3.14)

$$\operatorname{arcsin}\left(\frac{y}{x}\right)=\ln(x)+C \tag{3.15}$$

Despejando para la variable (y) en (3.15)

$$y(x)=x\sinh[\ln(x)+C] \tag{3.16}$$

la ecuacion (3.16) es la solucion a la ecuacion diferencial (3.10)

3.3. Ecuaciones Lineales de la forma y'+Py=Q

Una ecuacion diferencial de la forma $y'+Py=Q$ donde P y Q son funciones de x unicamente se puede resolverse aplicando el cambio de variable $y=uz$ donde U y Z son funciones de x que deben determinarse.

ejemplo : Encontar la solucion general a las ecuaciones de primer orden tipo (III)

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q \tag{3.17}$$

Haciendo el cambio de variable $y=uz$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(uz)}{dx}=\frac{du}{dx}z+\frac{dz}{dx}u \tag{3.18}$$

Sustituyendo (3.18) en (3.17)

$$\frac{du}{dx}z + \frac{dz}{dx}u + Puz = Q \tag{3.19}$$

Agrupando terminos en (3.19)

$$\frac{dz}{dx}u + \left(\frac{du}{dx} + Pu\right)z = Q \tag{3.20}$$

Para determinar u igualaremos el coeficiente de z a cero

$$\frac{du}{dx} + Pu = 0 \tag{3.21}$$

Se determina el valor de z con la siguiente ecuacion

$$u\frac{dz}{dx} = Q \tag{3.22}$$

Resolviendo la ecuacion (3.21)

$$u = ke^{-\int Pdx} \tag{3.23}$$

Sustituyendo en (3.22) el valor de u encontrado en (3.23) y resolviendo para z

$$dz = \frac{Q}{u}dx = \frac{Q}{k}e^{\int Pdx}dx \tag{3.24}$$

Integrando ambos lados de la ecuacion (3.24)

$$\int dz = \frac{1}{k}\int Qe^{\int Pdx}dx \tag{3.25}$$

Sustituyendo el valor de (z) e (u) en $y = uz$ por el cambio de variable encontramos la solucion general.

$$y = e^{-\int Pdx}\left(\int Qe^{\int Pdx}dx + C\right) \tag{3.26}$$

ejemplo : Resolver la ecuacion

$$\frac{ds}{dt} - s\cot(t) = 1 - (t+2)\cot(t) \tag{3.27}$$

Usando la ecuacion (3.26) con $P = -\cot(t)$ y $Q = 1 - (t+2)\cot(t)$

$$s = e^{\int \cot(t)} \left(\int [1 - (t+2)\cot(t)] e^{-\int \cot(t)} dt + C \right) \tag{3.28}$$

Desarrollando (3.34) obtenemos

$$\sin(t) \left(\int [1 - (t+2)\cot(t)] \csc(t) dt + C \right) \tag{3.29}$$

Resolviendo la integral en (3.35)

$$\sin(t) \left(\frac{1}{2} t \cot\left(\frac{t}{2}\right) + 2\csc(t) + \frac{1}{2} t \tan\left(\frac{t}{2}\right) + C \right) \tag{3.30}$$

Simplificando terminos en (3.36)

$$s = (2+t)\csc(t)\sin(t) + C\sin(t) \tag{3.31}$$

Por lo tanto la solucion de la ecuacion (3.33) es

$$s = t + 2 + C\sin(t) \tag{3.32}$$

3.3.1. Circuito RL en serie

ejemplo : Un circuito en serie donde se encuentra un voltaje constante V una resistencia R y un inductor L. Encontrar el valor de la corriente I para cualquier tiempo

La suma de las caidas de voltaje en un circuito cerrado es igual a cero

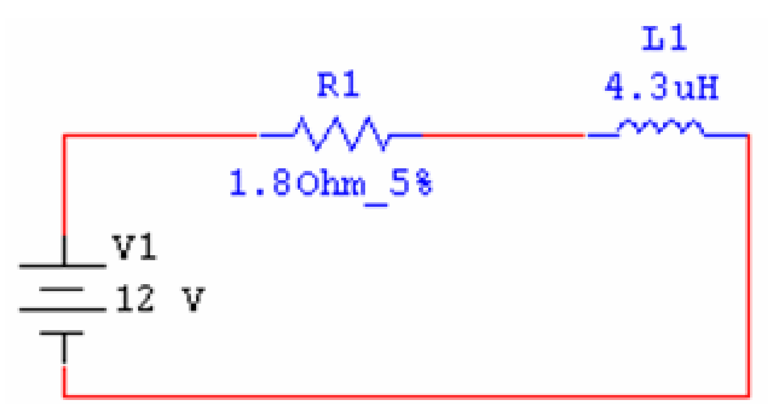

Figura 3.1: Circuito RL

La ecuacion diferencial para la figura (3.1) es

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V \tag{3.33}$$

Diviendiendo entre L ambos lados de la ecuacion (3.27)

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L} \tag{3.34}$$

La ecuacion (3.28) es del tipo (III) y puede resolverse usando la solucion general (3.26). en donde $P = R/L$ y $Q = V/L$.

$$I = e^{-\int \frac{R}{L}dt}\left(\int \frac{V}{L}e^{\int \frac{R}{L}dt}dt + C\right) \tag{3.35}$$

Resolviendo la ecuacion (3.29)

$$I = e^{-\frac{Rt}{L}}\left(\frac{V}{R}e^{\frac{Rt}{L}} + C\right) \tag{3.36}$$

Simplificando terminos en (3.30)

$$I(t) = \frac{V}{R} + Ce^{-\frac{Rt}{L}} \tag{3.37}$$

En la ecuacion (3.31) C es una constante arbritaria. si se impone la condicion que la corriente sea cero en tiempo cero, C adquiere el valor de $-V/R$ sustituyendo el valor de C en la ecuacion (3.31)

$$I(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) \tag{3.38}$$

La ecuacion (3.32) es la solucion particular de un circuito RL con la condicion $I(0) = 0$.

3.3.2. Circuito RC en serie

ejemplo: Un circuito en serie donde se encuentra un voltaje constante V una resistencia R y un capacitor C. Encontrar el valor de la corriente I para cualquier tiempo

La ecuacion diferencial rige el comportamiento del circuito RC es :

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=V \rightarrow \frac{dq}{dt}+\left(\frac{R}{C}\right)q=\frac{V}{R}$$

identificando las variables, que $P=1/RC$ y que $Q=V/R$

$$q=e^{-\int \frac{dt}{RC}}\left(\int \frac{V}{R}e^{\int \frac{dt}{RC}}dt+k\right)$$

Resolviendo la ecuacion superior :

$$q=e^{-\frac{t}{RC}}\left(\frac{V}{R}e^{\frac{t}{RC}}(RC)+k\right) \rightarrow q=VC+k\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

Imponiendo la condicion inicial $q(0)=0$ la ecuacion superior se reduce a :

$$q(t)=VC(1-e^{-\frac{t}{RC}})$$

El comportamiento de la corriente en el circuito RC se encuentra con la relacion $i=dq/dt$

$$I(t)=\frac{dq}{dt}=\frac{d}{dt}\left[VC(1-e^{-\frac{t}{RC}})\right] \rightarrow \frac{V}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

3.4. Ecuacion de Bernoulli

un caso bien conosido de una ecuacion diferencial de primer orden no lineal que puede reducirse a una ecuacion no lineal usando un cambio de variable es la ecuacion de bernoulli

la ecuacion de bernoulli es la siguiente

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n \tag{3.39}$$

La ecuacion de Bernoull de puede rescrbir

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=q(x) \tag{3.40}$$

la ecuacion es lineal para n =1 y para n = 0 es separable por lo tanto en el desarollo de la solucion n diferente de 1 y 0.

proponiendo el cambio de variable $w = y^{1-n}$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy}\frac{dy}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \tag{3.41}$$

por lo tanto el dy/dx de puede poner en funcion de w

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^n}{(1-n)}\frac{dw}{dx} \tag{3.42}$$

sustituyendo dy/dx y w en la ecuacion diferencial orginal

$$\frac{dw}{dx} = (1-n)[q(x) - wp(x)] \tag{3.43}$$

La ecuacion es del tipo III y puede resolverse usando el factor integrante

Capítulo 4

Aplicacion de las ecuaciones diferenciales de primer orden

4.1. Decaimiento radioactivo

Un isoto radioactivo se desintegra a una razon porporcional a la cantidad de masa m_o. si la masa de este elemento se reduce a m_f en un tiempo δt. encontar la ecuacion gobierna al sistema y la vida media del isotopo (la vida media es el intervalo de tiempo que tarda en decaer la masa del isotopo a la mitad de su masa original)

Sea k la constante de proporcionalidad por tanto el cambio de masa en el tiempo es

$$\frac{dm}{dt} = km \tag{4.1}$$

la ecuacion (4.1) es por separacion de variables

$$\int_{m_o}^{m_f} \frac{dm}{m} = k \int_{t_o}^{t_f} dt \tag{4.2}$$

resolviendo (4.2) notese que por ser una integral definida no hay constante integracion.

$$Ln\left(\frac{m_f}{m_o}\right) = k(t_f - t_o) \tag{4.3}$$

Despejando para m_f en (4.3) y sea $(t_f - t_o) = t$ para incluir cualquier tiempo

$$m(t) = m_o e^{kt} \tag{4.4}$$

Donde la constante k puede obtenerse de (4.3)

$$k = \frac{Ln\left(\frac{m_f}{m_o}\right)}{t_f - t_o} \tag{4.5}$$

La vida media es el intervalo de tiempo $t_f - t_0$ para que la masa m_o decaiga a $m_f = m_o/2$ sea $t_f - t_0 = \tau$ y resolviendo para (4.5).

$$k\tau = -Ln(1/2) \tag{4.6}$$

ejemplo : Un isotopo radiacotivo thorium 234 se desintegra a una razon proporcional a la cantidad presente de 100 mg. si el material se reduce a 82.04 mg en una semana. encontar la cantidad presente en cualquier tiempo. y el intervalo de tiempo para que el isotopo decaiga la mitad de su masa original.

Lo primero es reconocer constantes sea m_o=100 mg (masa inicial) y sea m_f=82.04 mg (masa final). el intervalo de tiempo δt es igual a una semana o 7 dias.

Usando (4.5) encontramos el valor de k.

$$\mathrm{k} = \frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{82.04\ \mathrm{mg}}{100\ \mathrm{mg}}\right)}{7\ \mathrm{dias}} = -0.02828\ \mathrm{dias}^{-1} \tag{4.7}$$

Sustituyendo el valor de k y m_o en la ecuacion (4.4)

$$\mathrm{m(t)} = 100\mathrm{e}^{-0.02828\mathrm{t}} \tag{4.8}$$

la vida media se encuentra usando la ecuacion (4.6)

$$\tau = \frac{\mathrm{Ln(0.50)}}{0.02828} \approx 24.5\ dias \tag{4.9}$$

4.2. Mezclas

ejemplo : En tiempo cero un tanque contiene Q_o kg de sal disuelta en 100 litros de agua. Asuma agua que contiene 1/4 kg de sal por litro entra al tanque a 3 litros/min. y que agua sale del tanque a la misma proporcion. Encuentra la cantidad de sal en el tanque en un tiempo (t).

La razon de cambio de sal en el tiempo es igual a la diferencia en la cantidad de sal entra y sale del tanque por tanto :

$$\frac{Q_o}{dt} = \left(\frac{1}{4}\frac{kg}{lt}\right)\left(3\frac{lt}{\text{mín}}\right) - \left(3\frac{lt}{\text{mín}}\right)\frac{Q(t)}{100lt} \tag{4.10}$$

Resolviendo la ecuacion (4.10)

$$Q(t) = 25 + Ce^{-0.03t} \tag{4.11}$$

Encontramos el valor de la constante de integracion $C = Q_o - 25$ imponiendo la condicion $Q(0) = Q_0$ y sustituyendo en (4.11)

$$Q(t) = 25(1 - e^{-0.03t}) + Q_o e^{-0.03t} \tag{4.12}$$

4.3. Caida libre

ejemplo : Un objeto de masa m va en caida libre y el medio ofrece una resistencia k proporcional a la velocidad instantanea del objeto v. Asumiendo la fuerza gravitacional es cosntante, encuentre la posicion y el tiempo del objeto. demuestra que mientras que t tiende a infinito la velocidad instantanea del objeto se convierte en constante.

La ecuacion diferencial es :

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \tag{4.13}$$

Reacomodando terminos en la ecuacion (4.13)

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \tag{4.14}$$

Resolviendo la ecuacion (4.14)

$$v = \frac{mg}{k} + Ce^{\frac{-kt}{m}} \tag{4.15}$$

si la velocidad es cero en el tiempo cero $v(0) = 0$ el valor de $C = -mg/k$ sustituyendo en (4.15)

$$v = \frac{mg}{k}(1 - e^{\frac{-kt}{m}}) \tag{4.16}$$

Para obtener la posicion x se sustituye en (4.16) $v = dx/dt$ integrando ambos lados e imponiendo la condicion $x(0) = 0$

$$x = \frac{mg}{k}t - \frac{m^2g}{k^2}(1 - e^{-\frac{kt}{m}}) \tag{4.17}$$

Si en la ecuacion (4.16) resolvemos el limite pata t tienda a infinito

$$v = \lim_{t\to\infty} \frac{mg}{k}(1 - e^{\frac{-kt}{m}}) = \frac{mg}{k} \tag{4.18}$$

4.4. Problemas

1. Un cuarto cotiene 1200 ft^3 de aire libre de moxido de carbono en un tiempo $t = 0$. El humo de un cigarro cotiene 4 porciento de moxido de carbono y es introducido al cuarto a una razon de 0.1 ft^3/min el aire sale del cuarto a la misma proporcion.

a) Encuentra la concentracion de monoxido de carbono para un tiempo t.
b) Si el ser humano es expuesto a una concentracion de 0.00012 por periodos largos de tiempo es danino. encuentre el tiempo t para esta concentracion.

2. Una persona pide un prestamo de 8000$ a un banco. el interes por el prestamo es de 10 % anual. Asumiendo que el interes es constante y que el deudor da pagos constantes anualmente encontrar El valor de (k) para pagar el prestamo en 3 anos.

Capítulo 5

Ecuaciones Diferenciales de segundo Orden

Ahora se emprendera a resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden. Una razon para estudiar estas ecuaciones es por que son vitales para las areas de fisica y matematicas en el desarrollo en mecanica de fluidos. conduccion de calor, movimiento ondulatorio, fenomenos electromagneticos. etc Una ecuacion diferencial ordinaria de segundo orden tiene la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \tag{5.1}$$

la ecuacion (5.1) es lineal si

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = g(x) - p(x)\frac{dy}{dx} - q(x)y \tag{5.2}$$

Donde g, p y q son funciones de la variable independiente x. y la ecuacion (5.1) es convierte en

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{5.3}$$

Otra forma como la ecuacion (5.3) se escribe es

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x) \tag{5.4}$$

Dividiendo la ecuacion (5.4) entre $P(x)$ regresamos a la ecuacion (5.3)

$$y'' + \frac{Q(x)}{P(x)}y' + \frac{R(x)}{P(x)}y = \frac{G(x)}{P(x)} \tag{5.5}$$

e identificamos $p(x)$, $q(x)$, $g(x)$ de la ecuacion (5.3) como

$$p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} \;\; q(x) = \frac{R(x)}{P(x)} \;\; g(x) = \frac{G(x)}{P(x)} \tag{5.6}$$

Una ecuacion diferencial de segundo orden se dice que es homogenea cuando el termnio $G(x)$ o $g(x)$ en (5.3) o (5.4) es igual a cero. y no homogena en caso contrario.en los siguientes capitulos de demostrara que una vez encontrada la solucion homogenea de la ecuacion diferencial es siempre posible encontar la solucion no homegenea de la ecuacion (5.4) o por lo menos expresar la solucion como una integral.

Ejemplos ecuaciones diferenciales de segundo orden

La ecuacion de bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0 \tag{5.7}$$

La ecuacion de legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0 \tag{5.8}$$

las ecuaciones (5.7) y (5.8) son ecuaciones diferenciales de segundo orden. hasta ahora con las herramientas matematicas del capitulo I,II no es posible resolver estas ecuaciones.antes de emprender e introducir el metodo serie de potencial se examinara casos especiales de la ecuacion (5.3)

5.1. Ecuaciones diferenciales de segundo orden coeficientes constantes

si en (5.3) o (5.4) P(x),Q(x),R(x),p(x),q(x) son constantes (numeros escalares) la ecuacion diferencial se segundo orden general se transforma en :

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \tag{5.9}$$

En donde a, b y c son numeros escalares. la solucion (5.9) es proponer $y = e^{rx}$ y sustituyendo el valor de y en (5.9)

$$\left(ar^2 + br + c\right) e^{rx} = 0 \tag{5.10}$$

Para no obterner una solucion trivial en (5.10) $e^{rx} \neq 0$ por lo tanto

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{5.11}$$

(5.11) es la ecuacion caracteristica de (5.9). su significado radica que r es la raiz de un polinomio de segundo grado. por lo tanto r tendra dos soluciones estas soluciones podran ser diferentes ($r_1 \neq r_2$),iguales ($r_1 = r_2$),complejas ($r = a + ib$)

5.1.1. Cuando las raices son diferentes y reales

Si ($r_1 \neq r_2$) la solucion es una combinacion lineal (2.4) por lo tanto si $y = e^{rx}$ obtenemos la solucion

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \tag{5.12}$$

Se resolvera el sigieuiente ejemplo :

Dada la siguiente ecuacion diferencial encontrar su solucion

$$y'' - 2y' - 3y = 0 \tag{5.13}$$

la ecuacion (5.13) es de la forma (5.9),econtramos la ecuacion caracteristica

$$r^2 - 2r - 3 = 0 \tag{5.14}$$

la solucion (5.14) es r=-1 y r=3. sustituyendo en (5.12)

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} \tag{5.15}$$

5.1.2. Las raices son complejas

Si las raices de la ecuacion auxiliar (5.11) son complejas $r_1 = a + ib$ y $r_2 = a - ib$ los exponentes en (5.12) tambien seran complejos entonces :

$$y = c_1 e^{(a+ib)x} + c_2 e^{(a-ib)x} \tag{5.16}$$

Sacando factor comun en (5.16)

$$y = e^{ax}(c_1 e^{ibx} + c_2 e^{-ibx}) \tag{5.17}$$

usando la fórmula o relación de Euler

$$y = e^{ax}[(c_1 + c_2)\cos(bx) + i(c_1 - c_2)\sin(bx)] \tag{5.18}$$

sea $A = c_1 + c_2$ y $B = i(c_1 - c_2)$ en (5.18)se reduce a :

$$y = e^{ax}[A\cos(bx) + B\sin(bx)] \tag{5.19}$$

La ecuacion (5.19) puede simplificarse mas usando la identidad

$$A\cos(bx) + B\sin(bx) = C\cos(bx + \alpha) \tag{5.20}$$

En donde α se define como $\arctan(A/B)$ y $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ sustituyendo esta identidad en (5.19) :

$$y = e^{ax}[C\sin(bx + \alpha)] \tag{5.21}$$

y la ecuacion (5.19) o (5.21) es la solucion general para (5.9) cuando r_1 y r_2 son complejos.

ejemplo : resolver la siguiente ecuacion diferencial

$$y'' + k^2 y = 0 \tag{5.22}$$

Encontrando la ecuacion auxiliar es

$$r^2 + k^2 = 0 \tag{5.23}$$

resolviendo la ecuacion auxiliar el valor de r es igual a $r = \pm ik$ sustiyuyendo en la ecuacion (5.12)

$$y = c_1 e^{ik} + c_2 e^{-ik} \tag{5.24}$$

usando la ecuacion (5.19) la solucion (5.25)se puede escribirse tambien como :

$$y = A\cos(kx) + B\sin(kx) \tag{5.25}$$

y la ecuacion (5.26) puede simplicarse mas usando (5.21)

$$y = C\sin(kx + \alpha) \tag{5.26}$$

Por lo tanto (5.26) o (5.25) es la solucion a la ecuacion diferencial (5.23)

5.1.3. Cuando las raices son iguales

Las raices seran iguales solo si en la ecuacion caracteristica (5.11) el valor de $p^2 = 4q$ y por lo tanto otra forma la ecuacion (5.11) puede escribirse es

$$r^2 + pr + \frac{1}{4}p^2 = (r + \frac{1}{2}p)^2 = 0 \tag{5.27}$$

En vez de usar las letras (a,b,c) para definir los coeficientes constantes se usa (p) y (q). Si la ecuacion (5.9) se rescribe como :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{b}{a}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{c}{a}\right)y = 0 \tag{5.28}$$

Donde indetificamos el valor de $p = b/c$ y el valor de $q = c/a$ y por tanto para la ecuacion (5.9) cuando las raices son iguales su ecuacion caracteristica es (5.28) y (5.29) se rescribe como :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0 \tag{5.29}$$

Siendo las raices en (5.28) $r_1 = r_2 = -(1/2)p$ y en este caso la solucion a la ecuacion (5.9) es

$$y = e^{r_1 x}(c_1 + xc_2) \tag{5.30}$$

para comprobar la ecuacion (5.31) es solucion a (5.30) o (5.9) cuando las raices son iguales debemos sustituir la solucion en la ecuacion diferencial (5.30).

Calculando la primera derivada de (5.31)

$$y' = e^{rx}[c_2 + r(c_1 + xc_2)] \tag{5.31}$$

Calculando la segunda derivada de (5.31)

$$y'' = e^{rx}[2rc_2 + r^2(c_1 + xc_2)] \tag{5.32}$$

Sustituyendo (5.31),(5.32) y (5.33) en (5.30)

$$e^{rx}c_1[q + r(p + r)] + e^{rx}c_2[p + 2r + (q + r)(p + r)x] = 0 \tag{5.33}$$

Dividiendo (5.34) entre e^{rx} y sustituyendo el valor de $r = (-1/2)p$ y $q = p^2/4$ se encuentra $0 = 0$ y en conclusion (5.31) es la solucion de la ecuacion (5.9) cuando las raices son iguales.

ejemplo : Resolver la siguiente ecuacion diferencial

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + s = 0 \tag{5.34}$$

Encontrando la ecuacion auxiliar en (5.35)

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \tag{5.35}$$

resolviendo la ecuacion auxiliar (5.36) $r_1 = r_2 = -1$ y usando (5.31) la solucion es

$$s = e^{-t}(c_1 + c_2 t) \tag{5.36}$$

5.2. Aplicaciones ecuaciones segundo orden coeficientes constantes

5.2.1. El oscilador armonico

El oscilador armónico es uno de los sistemas más estudiados en la física, ya que todo sistema que oscila al rededor de un punto de equilibrio estable se puede estudiar en primera aproximación como si fuera un oscilador.

La característica principal de un oscilador armónico es que está sometido a una fuerza recuperadora, que tiende a devolverlo al punto de equilibrio estable, con una intensidad proporcional a la separación respecto de dicho punto. donde k es la constante de recuperación,m es la masa y x es la posición de equilibrio. usando la segunda ley de newton encontramos la ecuacion diferencial para el oscilador armonico (figura 5.1)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{5.37}$$

Identificamos (5.38) como una ecuacion diferencial de segundo orden coeficientes constantes. encontrando la ecuacion caracteristica

$$mr^2 + k = 0 \tag{5.38}$$

resolviendo la ecuacion caracteristica $r = \sqrt{-\frac{k}{m}}$ para elegancia r se puede reescribir como $r = iw_o$ y w_o recibe el nombre de frecuencia natural. usando la

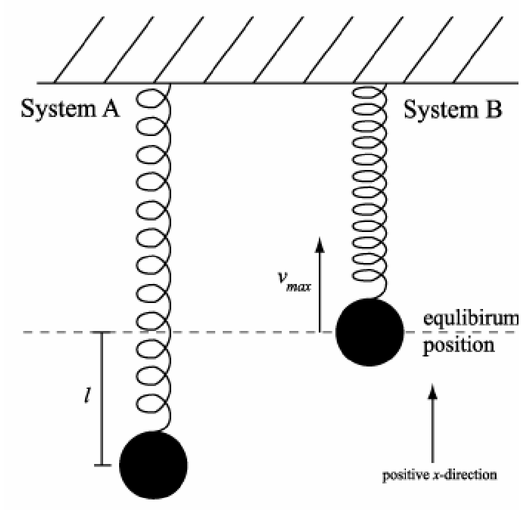

Figura 5.1: ejemplo oscilador

ecuacion (5.19) encontramos la solucion general

$$x(t) = A\cos(w_o t) + B\sin(w_o t) \tag{5.39}$$

imponiendo las condiciones iniciales $X(0) = X_o$ y $X'(0) = 0$ en (5.40) en donde x_o es la separación respecto al punto de equilibrio

$$x(t) = X_o \cos(w_o t) \tag{5.40}$$

ejemplo : Una masa de 0.5 kg cuelga de un resorte (ver figura 5.1) si el resorte se mueve una distancia de 0.2 metros de su posicion de equilibrio y se suelta con una velocidad inicial de cero. encontrar la posicion del resorte para cualquier tiempo t la constante de recuperación, k tiene un valor de 2 N/m, ignore friccion.

Usando la ecuacion (5.41) notese las unidades de la frecuencia natural es 1/s (s son segundos)

$$w_o = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2}{0.50}} = 4s^{-1} \tag{5.41}$$

Sustituyendo el valor de w_o y X_o en (5.41)

$$X(t) = 0.2\cos(4t) \tag{5.42}$$

5.2.2. Oscilador armónico amortiguado

Este caso más realista consiste en tener en cuenta el rozamiento del aire, sea k la constante de recuperacion y b un coeficiente de friccion proporcional a la velocidad y m la masa. Usando la segunda ley de newton se encuentra la ecuacion diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{5.43}$$

La ecuacion (5.44) es una ecuacion diferencial de segundo orden coeficientes constantes encontrando la ecuacion auxiliar

$$mr^2 + br + k = 0 \tag{5.44}$$

resolviendo la ecuacion auxiliar (5.45)

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} = \frac{b}{2m}\left(-1 \pm \sqrt{b^2 - 4km}\right) \tag{5.45}$$

la solucion a la ecuacion (5.45) depende del termino dentro de la raiz en (5.46)

Caso A : cuando las raices son reales

$$b^2 - 4km > 0 \tag{5.46}$$

la solucion genereal (5.44) sustituyendo r en (5.12)

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \tag{5.47}$$

Caso B : cuando las raices son iguales

$$b^2 - 4km = 0 \tag{5.48}$$

La solucion general (5.44) sustituyendo el valor de r (5.31)

$$x(t) = e^{\frac{-bt}{2m}}(c_1 + c_2 t) \tag{5.49}$$

Caso C : cuando las raices son complejas

$$b^2 - 4km < 0 \tag{5.50}$$

La solucion general (5.44) sustituyendo el valor de r en (5.19)

$$x(t) = e^{\frac{-bt}{2m}}[A\cos(wt) + B\sin(wt)] \tag{5.51}$$

donde $w = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ si en (5.52) se impone la condicion $X(0) = X_o$ y $X'(0) = 0$ la ecuacion (5.52) se rescribe como

$$x(t) = X_o e^{-bt/2m}\cos(wt + \phi) \tag{5.52}$$

En todos los casos la solution $X(t)$ tiende a cero mientras que $t \to \infty$ esto ocurre independientemente de los valores de las constantes de integracion y condiciones iniciales. esto confirma nuestra intuicion que el oscilador disipa gradualmente energia del sistema deteniendo su movimiento.

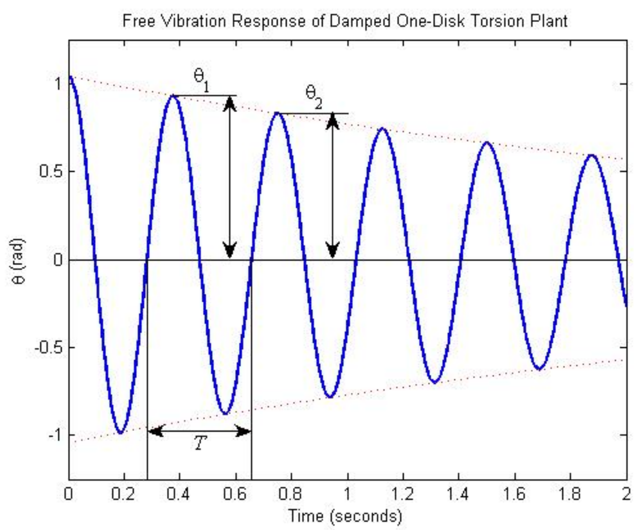

Figura 5.2: Oscilador amortiguado

ejemplo : Una masa pesa 4 lb y cuelga de un resorte. si el resorte se mueve una distancia de 2 in a causa de la masa y luego el resorte se mueve 6 in de su posicion de equilibrio y se suelta con una velocidad inicial de cero, encuentre la ecuacion diferencial del sistema, considere el medio ofrece una resistencia al movimiento de 6 lb cuando las masa tiene una velocidad de 3 ft/s.

encontrar el coeficiente de friccion $b = 6lb/(3ft/sec) = 2(lb - sec/ft)$
encontrar el coeficiente recupracion $k = F/\delta x = 4lb/(1/6ft) = 24(lb/ft)$
encontrar la masa $m = 4lb/(32ft/sec^2) = (1/8)slug$

Sustituyendo el valor de k, m y b en (5.44) se obtiene la ecuacion diferencial

$$\frac{1}{8}x'' + 2x' + 24x = 0 \tag{5.53}$$

La ecuacion (5.44) se puede resolver a mano y encontrar las raices usando la ecuacion auxiliar pero teniendo las soluciones generales solo basta saber si (5.44) es caso (A,B o C)

$$b^2 - 4km = (2)^2 - 4(24)(1/8) = -8 \tag{5.54}$$

como $b^2-4km < 0$ la ecuacion (5.54) es caso C (cuando las raices son complejas) por lo tanto sustituyendo los valores de k,m y b en (5.52)

$$x(t) = e^{-8t}[A\cos(\sqrt{128}t) + B\sin(\sqrt{128}t)] \tag{5.55}$$

Como el problema tiene la condicion $X(0) = \frac{1}{2}$ y $X'(0) = 0$ la ecuacion (5.56) se rescribe como

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{-8t}\cos(\sqrt{128}t + \phi) \tag{5.56}$$

Y en conlusion (5.57) es solucion a (5.54)

5.3. Artificios ecuaciones diferenciales segundo orden

5.3.1. Ecuaciones segundo orden P(x)y” + Q(x)y’ = G(x)

Cuando la ecuacion diferencial (5.3) o (5.4) tiene la forma

$$P(x)y'' + Q(x)y' = G(x) \tag{5.57}$$

Haciendo un cambio de variable $y' = v$ la ecuacion (5.58) se rescribe como una ecuacion de primer orden $v' = f(x,v)$,el valor de y se obtiene de integrar $dy/dx = v$ la primera constante de integracion se obtiene a resolver v y la segunda constante al resolver para y.

$$P(x)v' + Q(x)v = G(x) \tag{5.58}$$

ejemplo : resolver la siguiente ecuacion diferencial

$$x^2y'' + 2xy' - 1 = 0 \tag{5.59}$$

aplicando el cambio de variable $y' = v$ en (5.60)

$$x^2 v' + 2xv - 1 = 0 \tag{5.60}$$

(5.61) es de primer orden y se resuelva usando los metodos previos del capitulo III (ver pagina 14).

$$v = e^{-\int \frac{2}{x}dx}[\int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2}{x}dx} dx + c_1] \tag{5.61}$$

resolviendo la ecuacion (5.62) se encuentra el valor de v

$$v = \frac{1}{x} + \frac{c_1}{x^2} \tag{5.62}$$

Por el cambio de variable $v = dy/dx$ sustituyendo en (5.63) se encuentra el valor de y

$$y = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{c_1}{x^2} \right) dx \tag{5.63}$$

Resolviendo la integral (5.64) se encuentra la solucion de la ecuacion (5.60)

$$y = \ln(x) - \frac{c_1}{x} + c_2 \tag{5.64}$$

ejemplo : resolver la siguente ecuacion diferencial

$$y'' + y' = e^{-x} \tag{5.65}$$

Usando el cambio de variable

$$v' + v = e^{-x} \tag{5.66}$$

Resolviendo para el valor de v en (5.67)

$$v = e^{-\int dx}[\int e^{-x} e^{\int dx} dx + c_1] \tag{5.67}$$

Integrando (5.68) encontramos la solucion para (5.66)

$$y = \int e^{-x}(x + c_1)dx = -e^{-x}(1 + x + c_1) + c_2 \tag{5.68}$$

5.3.2. Ecuaciones segundo orden y”=F(y,y’)

Ecuaciones de la forma $y'' = f(y, y')$ la variable independiente x no aparece explicitamente, haciendo el cambio de variable $y' = v$ se obtiene $dv/dx = f(y, v)$ como el lado derecho depende de las variable y y v no de x. pero pensando que y es la variable independiente, usando la regla de la cadena $\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dy}v$

ejemplo : Resolver la siguiente ecuacion diferencial

$$yy'' + (y')^2 = 0 \tag{5.69}$$

usando el cambio de variable $\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dy}v$ en (5.70)

$$y\left(\frac{dv}{dy}\right)v + (v)^2 = \frac{dv}{dy} + \frac{v}{y} = 0 \tag{5.70}$$

Separando las variables en (5.71)

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dy}{y} \tag{5.71}$$

Resolviendo (5.72) y despejando para la variable v

$$v = \frac{e^{c_1}}{y} \tag{5.72}$$

Por el cambio de variable $v = dy/dx$ sustituyendo en (5.73)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{c_1}}{y} \tag{5.73}$$

Resolviendo (5.74) se encuentra la solucion de la ecuacion (5.70)

$$y = \sqrt{2(e^{c_1}x + c_2)} \tag{5.74}$$

ejemplo : resolver la siguiente ecuacion diferencial

$$y'' + (y')^2 = 2e^{-y} \tag{5.75}$$

Usando el cambio de variable en (5.76)

$$\left(\frac{dv}{dy}\right)v + v^2 = 2e^{-y} \tag{5.76}$$

Reagrupando terminos en (5.77)

$$\frac{dv}{dy} + v = 2e^{-y}v^{-1} \tag{5.77}$$

(5.78) es una ecuacion de Bernoulli. resolviendo (5.78) haciendo un nuevo de cambio variable $w = 1/v^{-2}$

$$\frac{1}{2}\frac{dw}{dy} + w = 2e^{-y} \tag{5.78}$$

La ecuacion (5.79) es una ecuacion de primer orden usando (3.36) encontramos la solucion a (5.79)

$$v = \sqrt{e^{-2y}(4e^{y} + c_1)} \tag{5.79}$$

Encontrando el valor de v usando el primer cambio de variable $v = dy/dx$ encontramos y

$$\int \frac{dy}{\sqrt{e^{-2y}(4e^{y} + c_1)}} = \int dx \tag{5.80}$$

resolviendo la intergral en (5.81) y despejando para la variable y encontramos la solucion a la ecuacion diferencial (5.76)

$$e^{y} = (c_2 + x)^2 - c_1/4 \tag{5.81}$$

En conclusion hay ecuaciones diferencial no lineales ejemplo la ecuacion bernoulli (5.78) que por un cambio de variable se pueden rescribir en forma lineal y resolver con los metodos ya conocidos.

5.4. Ecuaciones no Homogeneas

La solucion genreal a una ecuacion no homogenea (5.3) puede escribirse de la siguiente forma

$$y(x) = c_1y_1 + c_2y_2 + Y \tag{5.82}$$

En la ecuacion (5.83) y_1 e y_2 son las soluciones a la ecuacion homogenea e Y una solucion especifica de la ecuacion no homogenea. en las secciones anteriores se aprendio como encontrar la solucion homogenea de las ecuacion diferencial ahora se estudiaran dos metodos para encontrar la solucion no homogenea (Coeficientes indeterminados) y (Variacion de paramteros)

5.4.1. Metodos coeficientes indeterminados

El metodo de los coeficientes indeterminados requiere que asumamos la forma de la solucion no homogenea Y por esta razon este metodo es usado solo para problemas en que la ecuacion diferencial tiene coeficientes constantes y la solucion Y es restringida para una cantidad pequena de funciones en lo particular se considera terminos homogeneos que consisten de polinomios, funciones exponenciales, senos y cosenos. Los siguientes ejemplos ilutraran la aplicacion del metodo.

ejemplo resolver la siguiente ecuacion diferencial

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x} \tag{5.83}$$

La ecuacion (5.84) es de segundo orden y no homogenea. se encuentra la solucion especifica Y proponiendo que $Y = Ae^{2x}$ donde el coeficiente A debe ser determinado, para encontar el valor de A se debe sustituir el valor de Y en la ecuacion diferencial (5.84)

$$y' = 2Ae^{2x} \tag{5.84}$$

$$y'' = 4Ae^{2x} \tag{5.85}$$

Sustituyendo Y,Y' e Y'' en (5.84)

$$4Ae^{2x} - 6Ae^{2x} - 4Ae^{2x} = 3e^{2x} \tag{5.86}$$

$$4A - 6A - 4A = -6A = 3 \tag{5.87}$$

Por $-6A = 3$ entonces $A = -1/2$ y la solucion particular a (5.84) es

$$Y(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} \tag{5.88}$$

La solucion homogenea a (5.84) es cuando $y'' - 3y' - 4y = 0$ resolviendo se obtiene $c_1e^{-x} + c_2e^{4x}$ combinando la solucion particular y homogenea (5.83) se obtiene la solucion general (5.90) de la ecuacion (5.84)

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{4x} - \frac{1}{2}e^{2x} \tag{5.89}$$

ejemplo resolver la siguiente ecuacion diferencial

$$y'' - 3y' - 4y = 2\sin(x) \tag{5.90}$$

Proponemos que la solucion particular sea $Y = A\cos(x) + B\sin(x)$ sustituyendo en la ecuacion diferencial (5.91) como en el ejemplo anterior.

$$[-B + 3A - 4B]\sin(x) + [-A - 3B - 4A]\cos(x) = 2\sin(x) \tag{5.91}$$

Igualando los coeficientes en (5.92)

$$3A - 5B = 2 \tag{5.92}$$

$$-5A - 3B = 0 \tag{5.93}$$

Resolviendo (5.93) y (5.94) encotramos $A = 3/17$ y $B = -5/17$, por lo tanto la solucion particular de la ecuacion (5.91) es

$$Y(x) = -\frac{5}{17}\sin(x) + \frac{3}{17}\cos(x) \tag{5.94}$$

la solucion general de la ecuacion (5.91) es (5.96)

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x} - \frac{5}{17}\sin(x) + \frac{3}{17}\cos(x) \tag{5.95}$$

ejemplo : resolver la siguiente ecuacion diferencial

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^x\cos(2x) \tag{5.96}$$

Proponemos que la solucion particular sea $Y = Ae^x\cos(2x) + Be^x\sin(2x)$ sustituyendo en la ecuacion diferencial (5.91) como en el ejemplo anterior.

5.4.2. Oscilador Forzado

Decimos que un oscilador está forzado si sobre él se aplica una fuerza externa. El caso más interesante es cuando la fuerza de forzamiento es también periódica, por ejemplo.

$$my'' + \gamma y' + ky = F_o\cos(wt) \tag{5.97}$$

En la ecuacion diferencial (5.98) la constante m es la masa, γ es el coeficiente de friccion, k es la constante proporcionalidad y $F_o\cos(wt)$ es una fuerza periodica de frecuencia w. la unica diferencia entre la ecuacion (5.44) y (5.98) es el termino no homogeneo.

Para encontrar la solucion particular proponemos que la solucion Y sea de la forma

$$Y(t) = A\cos(wt) + B\sin(wt) \tag{5.98}$$

En donde A y B son coeficientes deben ser determinados sustituyendo la solucion propuesta (5.99) en la ecuacion diferencial (5.98).

Encotrando la primera derivada de $Y(t)$ (5.99)

$$Y'(t) = -Aw\sin(wt) + Bw\cos(wt) \tag{5.99}$$

Encotrando la segunda derivada de $Y(t)$

$$Y''(t) = -Aw^2\sin(wt) - Bw^2\cos(wt) \tag{5.100}$$

Sustiyuendo la segunda (5.101), primera (5.100) derivadas y la solucion particular (5.99) en la ecuacion diferencial (5.98) encontramos el valor de A y de B

$$\begin{aligned} -Amw^2 + B\gamma w + Ak &= F_o \\ -Bmw^2 - A\gamma w + Bk &= 0 \end{aligned} \tag{5.101}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (5.102) el valor de A es

$$A = \frac{F_o}{(k - mw^2) + (\gamma w)^2} \tag{5.102}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (5.102) el valor de B es

$$B = \frac{\gamma w F_o}{(k - mw^2) + (\gamma w)^2} \tag{5.103}$$

Sustituyendo el valor de A y B en la solucion propuesta (5.99) se obtiene

$$Y(t) = \frac{F_o}{(k - mw^2)^2 + (\gamma w)^2}\left[(k - mw^2)\cos(wt) + \gamma w\sin(wt)\right] \tag{5.104}$$

La expresion dentro de los corchetes $[(k - mw^2)\cos(wt) + \gamma w\sin(wt)]$ puede simplificarse mas usando la entidad (5.20) y reconociendo que $mw_o^2 = k$ la solucion particular a (5.98) es (5.106)

$$Y(t) = \frac{F_o}{\sqrt{m^2(w_o^2 - w^2) + (\gamma w)^2}}\cos(wt + \phi) \tag{5.105}$$

Donde el valor de $\phi = \arctan\left(\frac{m^2(w_o^2-w^2)}{\gamma w}\right)$ en (5.106). La solucion general a (5.98) es agregar la solucion de la ecuacion homogenea y por tanto es :

$$y(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} + \frac{F_o}{\sqrt{m^2(w_o^2 - w^2) + (\gamma w)^2}}\cos(wt + \phi) \tag{5.106}$$

Como vemos, la solución particular $Y(t)$, es la única que importa para tiempos grandes, ya que todas las soluciones de la ecuación homogénea decaen exponencialmente (solucion transitoria). Así, pues, tenemos un estado estacionario.

$$y(t) = \lim_{t\to\infty}[y(t)] = \frac{F_o}{\sqrt{m^2(w_o^2 - w^2) + (\gamma w)^2}}\cos(wt + \phi) \tag{5.107}$$

5.4.3. Metodo variacion parametros

En esta seccion se describe otro metodo para encontrar la solucion particular a una ecuacion no homogenea. Este metodo recibe el nombre de variacion de parametros la ventaja de este metodo es que es general; en principio o al menos se puede aplicar a cualquier ecuacion y no requiere asumir la forma de la solucion una desventaja es el hecho debemos evaluar ciertas integrales y esto puede presentar dificultades.

La ecuacion no homogenea de segundo grado que ya se a visto es $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$, la idea principal del metodo es sustituir en la solucion homogenea $y = c_1y_1 + c_2y_2$ los coeficientes c_1 y c_2 por funciones u_1 y u_2 resultado $y = u_1y_1+u_2y_2$ e imponiendo la condicion $u_1'y_1+u_2'y_2 = 0$ se procede a sustituit en la ecuacion diferencial no homogenea la solucion y.

$$u_1[y_1^{``}+p(x)y_1^{`}+q(x)y_1]+u_2[y_2^{``}+p(x)y_2^{`}+q(x)y_2]+u_1^{`}y_1^{`}+u_2^{`}y_2^{`} = g(x) \tag{5.108}$$

la expresion dentro de los parantesis [] es cero por que y_1 y y_2 son ambas solucion a la ecuacion homogenea y la ecuacion se reduce a

$$u_1^{`}y_1^{`} + u_2^{`}y_2^{`} = g(x) \tag{5.109}$$

las funciones u_1 y u_2 son soluciones al siguiente sistema

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ u_1^{`}y_1^{`} + u_2^{`}y_2^{`} = g(x) \end{cases} \tag{5.110}$$

Lo que implica que

$$\begin{cases} u_1 = -\int \frac{y_2 g(x)}{W(y_1,y_2)} dx + c_1 \\ u_2 = \int \frac{y_1 g(x)}{W(y_1,y_2)} dx + c_2 \end{cases} \tag{5.111}$$

y por lo tanto la solucion particular $Y(x)$ es

$$Y(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1,y_2)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1,y_2)} dx \tag{5.112}$$

y la solucion general es

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + Y(x) \tag{5.113}$$

Examinando la solucion general, observamos dos grandes dificultades en usar el metodo de varaicion de parametros, la solucion no homogenea $Y(x)$ depende explicitamente de la solucion a la ecuacion homogenea y_1 e y_2 ,la cual puede contener coeficientes variables, la segunda dificultad es en evaluar las integrales que aparecen en la ecuacion (xx),pero aunque no se pueda evaluar estas integrales por metodos analiticos por lo general pueden aproximarse por metodos numericos (Regla de Simpson,etc).

ejemplo : resolver la siguiente ecuacion diferencial

$$y'' + 4y = 3\csc(x) \tag{5.114}$$

El primer paso es encontrar la solucion a la ecuacion diferencial homogenea $y'' + 4y = 0$ y su solucion es $y_1 = cos(2x)$ e $y_2 = sin(2x)$, el segundo paso es encontrar el wroksiano $w(y_1, y_2)$

$$\det[w] = \begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\sin(2x) \end{pmatrix} = 2[\sin^2(x) + \cos^2(x)] = 2 \tag{5.115}$$

Conociendo la solucion a la ecuacion homogenea y el wroksiano sustituimos para encontrar u1 e u2

$$u_1 = -\int \frac{\sin(2x) 3\csc(x)}{2} dx = -3\sin(x) + c_1 \tag{5.116}$$

$$u_2 = \int \frac{\cos(2x) 3\csc(x)}{2} dx = \frac{3}{2}\ln[\csc(x) - \cot(x)] + 3\cos(x) + c_2 \tag{5.117}$$

sustituyendo el valor de u_1 y u_2 y conociendo y_1 e y_2 encontramos la solucion particular a la ecuacion no homogenea y se muestra a continuacion

$$Y(x) = -3\sin(x)\cos(2x) + \frac{3}{2}\ln[\csc(x) - \cot(x)]\sin(2x) + 3\cos(x)\sin(2x) \tag{5.118}$$

la solucion general es la siguiente

$$y(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) - 3\sin(2x)\cos(2x) + \frac{3}{2}\ln[\csc(x) - \cot(x)]\sin(2x) + 3\cos(x)\sin(2x) \tag{5.119}$$

5.4.4. Reducción de orden

En matemáticas, la reducción de orden es una técnica utilizada para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Se utiliza cuando la primera de dos soluciones y_1 es conocida y se busca la segunda y_2.

En la ecuacion diferencial de segundo orden general : $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Se propone que la segunda solucion sea $y_2 = vy_1$ en donde v es funcion de x
la ecuacion diferencial general :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

proponiendo que $y_2 = vy_1$

$$\begin{aligned} y_2^{/} &= \frac{d}{dx}(vy_1) = vy_1^{/} + y_1v^{/} \\ y_2^{//} &= \frac{d}{dx}(y_2^{/}) = vy_1^{//} + 2v^{/}y_1^{/} + y_1v^{//} \end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuacion general:

$$\begin{aligned} &vy_1^{//} + 2v^{/}y_1^{/} + y_1v^{//} + p(x)[vy_1^{/} + y_1v^{/}] + q(x)vy_1 = 0 \\ &vy_1^{//} + 2v^{/}y_1^{/} + y_1v^{//} + p(x)vy_1^{/} + p(x)y_1v^{/} + q(x)vy_1 = 0 \\ &y_1v^{//} + 2v^{/}y_1^{/} + p(x)y_1v^{/} + v[y_1^{//} + p(x)y_1^{/} + q(x)y_1] = 0 \end{aligned}$$

Se debe notar que $y_1^{//} + p(x)y_1^{/} + q(x)y_1 = 0$

$$\begin{aligned} &y_1v^{//} + 2v^{/}y_1^{/} + p(x)y_1v^{/} = 0 \\ &v^{//} + v^{/}\left(\frac{2y_1^{/}}{y_1} + p(x)\right) = 0 \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable, haciendo que $w = v'$

$$w' + w\left(\frac{2y_1'}{y_1} + p(x)\right) = 0$$

La ecuacion superior es una ecuacion diferencial de primer orden, ahora se procede a resolverla:

$$\int \frac{dw}{w} = \int -\left(\frac{2y_1'}{y_1} + p(x)\right) dx \rightarrow \ln(w) = -2\ln(y_1) - \int p(x)dx$$

Procediendo a resolver para la variable w

$$w = \frac{1}{y_1^2}\left(e^{-\int p(x)dx}\right)$$

Ahora nos acordamos del cambio de variable impuesto anteriormente $w = v'$ y la ecuacion anterior se puede poner en funcion de v

$$v' = \frac{1}{y_1^2}\left(e^{-\int p(x)dx}\right) \rightarrow v = \int \frac{1}{y_1^2}\left(e^{-\int p(x)dx}\right) dx$$

Encontrando v la solucion $y_2 = vy_1$ y por lo tanto:

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2}\left(e^{-\int p(x)dx}\right) dx$$

Capítulo 6

Introduccion a series

En matemáticas, una serie es la suma de los términos de una sucesión. Se representa una serie con términos a_n como

$$S_n = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + a_3 ... \tag{6.1}$$

donde N es el índice final de la serie.

Si en una serie, N, es finito tambien la sumatoria de terminos sera finita, la pregunta es que sucede cuando el termino $N \to \infty$?, sera la suma de numero infinitos, finita, o en otras palabras la serie converge a un valor ?. Para entender lo anterior usemos la paradoja de zenon, *Aquiles y la tortuga* que se menciona a continuacion

> Aquiles el guerrero decide salir a competir en una carrera contra una tortuga. Ya que corre mucho más rápido que ella, y seguro de sus posibilidades, le da una ventaja inicial. Al darse la salida, Aquiles recorre en poco tiempo la distancia que los separaba inicialmente, pero al llegar allí descubre que la tortuga ya no está, sino que ha avanzado, más lentamente, un pequeño trecho. Sin desanimarse, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, esta ha avanzado un poco más. De este modo, Aquiles no ganará la carrera, ya que la tortuga estará siempre por delante de él.
>
> Actualmente, se conoce que Aquiles realmente alcanzará a la tortuga, ya que una suma de infinitos términos puede tener un resultado finito. Los tiempos en los que Aquiles recorre la distancia que le

separa del punto anterior en el que se encontraba la tortuga son cada vez más y más pequeños, y su suma da un resultado finito, que es el momento en que alcanzará a la tortuga.

Para plantear la paradoja de *Aquiles y la tortuga* se hace una serie que sume la mitad, luego la mitad de la mitad, luego la mitad de la mitad de la mitad y así, hasta el infinito

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}..... \tag{6.2}$$

Regresando a la pregunta anterior, que sucede cuando $N \to \infty$ en la serie para plantear la paradoja de zenon?. Se entiende que si se deteniene la serie a un valor de N finito, la sumatoria sera menor que uno, pero la diferencia puede hacerse lo mas pequeno posible usando un valor de N muy grande asi podemos decir que la serie converge al numero uno.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}..... = 1 \qquad \text{Cuando } N \to \infty \tag{6.3}$$

El problema anterior puede analisarse con mas detalle observando la ecuacion (6.3) es un caso especial de la serie geometrica $a/(1-r)$.

Interpretemos matematicamente el concepto de convergencia y divergencia.

En la serie S_n en funcion de n, si hacemos que el numero de terminos n tienda a infinito puede ocurrir una de las dos cosas siguientes:

I. Que S_n tienda hacia un limite, digamos u; es decir que

$$\lim_{n\to\infty} [S_n] = u \tag{6.4}$$

En este caso cuando se cumple (6.4) se dice que la serie es convergente y que converge al valor de u, o que tiene el valor de u.

II. Que S_n no tienda hacia ningun limite. en este caso se dice que la serie infinita es divergente.

Como ya hemos dicho, en una serie convergente el valor de la serie es un numero $\lim_{n\to\infty} [S_n] = u$. Si Representamos graficamente a una serie convergente en una recta orientada los puntos determinados por los valores S_1, S_2, S_3..etc. Entonces cuando n aumenta estos puntos se acercaran al punto determinado u o se agruparan alrededor de este punto.

6.1. Clasificacion de series

Series Alternadas

Se da este nombre a las series que sus terminos son alternativamente positivos y negativos, por ejemplo :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(-1)^{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}.... \tag{6.5}$$

Serie Oscilante

La suma de terminos no aumenta indefindamente y no tiende hacia un limite

$$\sum_{n=1}^{\infty} -(-1)^{n} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1......$$

6.2. criterios comparacion

No en todas las series calcular el limite (6.4) es posible,facil o manejable,excepto se usara la computadora y aproximacion numerica, mas aun la mayor parte del tiempo solo importa si la serie converge o diverge no el valor de u, a continuacion se muestrarn criterios de comparacion para saber la convergencia de series en general.

Ratio test o Razon de D Alambert

Sea S_n una serie infinita de terminos positivos, El criterio de D'Alambert se utiliza para clasificar las series numéricas.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = l \tag{6.6}$$

Entonces:

1. cuando $l < 1$, la serie es convergente

2. cuando $l > 1$, la serie es divergente

3. cuando $l = 1$, el criterio falla

note que no importa que l sea menor que uno, eso no es suficiente para la convergencia, es el limite de n cuando tiene a infinito lo que importa. En otras palabras cuando $l < 1$ podemos elegir n tan grande que la razon $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ difiera tan poco de l como queramos.

como un ejemplo saber si la siguiente serie converge o diverge usando la Razon de D Alambert.

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \tag{6.7}$$

lo primero es identificar a_n

$$a_n = \frac{n}{3^n} \tag{6.8}$$

para encontrar a_{n+1} sustituir en a_n la variable n por $n+1$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+!}} \tag{6.9}$$

usar la razon de alambert

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{3n} \right) = \frac{1}{3} \tag{6.10}$$

El valor de $l < 1$ por lo tanto la serie (6.9) converge. Si la serie se extendiera un numero infinito de terminos se encuentra que el $\lim_{n\to\infty}[S_n] = 3/4$.

Integral Test

Sea S_n una serie infinita de terminos positivos,y decresiente entonces si la integral :

6.3. Serie de Potencias

En este seccion se estudiara la manera de poder representar una funcion por una serie de potencias.

En general una funcion $f(x)$ puede representarse alrededor de un punto a por una sucesion de terminos esta sucesion recibe el nombre de serie de potencias.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 ... \tag{6.11}$$

Entonces si una funcion se representa por una serie de potencias,cual debe ser la forma de los coeficientes $a_0, a_1, ...a_n$?, el valor de los coeficientes se decribe usando la serie de Taylor, Si $a = 0$, a la serie se le llama serie de Maclauri

$$a_n = \frac{f^n(a)}{n!} \qquad \text{para } n \geq 0 \tag{6.12}$$

En la ecuacion anterior f^n representa la enesima derivada de la funcion $f(x)$ evaluada en el punto a. Usemos la definicion anterior para interpretar la funcion $f(x) = \cos(x)$ en una serie alrededor del punto $a = 0$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n[\cos(0)]}{n!} x^n = \frac{\cos(0)}{0!} - \frac{\sin(0)}{1!}x - \frac{\cos(0)}{2!}x^2 + \frac{\sin(0)}{3!}x^3 + \frac{\cos(0)}{4!}x^4 - \frac{\sin(0)}{5!}x^5 - \frac{\cos(0)}{6!}x^6 \text{...etc} \tag{6.13}$$

la sucesion anterior puede extenderse un numero infinito de terminos, si encontramos un patron la serie puede simplificarse

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... - ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \tag{6.14}$$

6.3.1. Operaciones con Series Infinitas

Muchas de las operaciones del Algebra y del Calculo se pueden efectuar con series convergentes.

sumatoria

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones desarrolladas en series convergente de potencias,alrededor del mismo punto a para efectuar la sumatoria entre ellas los indicides finales e iniciales deben ser iguales y es como sigue

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_o)^n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x - x_o)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x - x_o)^n \tag{6.15}$$

La sumatoria de las serie $f(x)$ y $g(x)$ en (6.15) es posible por que los indices iniciales y finales son iguales $n = 1$ y $N \to \infty$

El siguiente ejemplo demuestra el caso en que dos series no pueden sumarse

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_o)^n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x - x_o)^n \tag{6.16}$$

En la ecuacion (6.16) la sumatoria entre las dos series no puede efectuarse por que los indicies inciales son diferentes, en le primera $n = 0$ y en la segunda $n = 1$.

En (6.16) para poder sumar las series se puede aplicar los siguientes dos metodos

se puede desarrollar la primera serie un termino asi quedando

$$f(x) \pm g(x) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_o)^n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x - x_o)^n = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x - x_o)^n \tag{6.17}$$

Otra manera es hacer un cambio en el indice en la segunda serie en (6.16) asi quedando

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_o)^n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x - x_o)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_o)^n \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} (x - x_o)^{k+1} \tag{6.18}$$

note que los indices k y n en (6.18) son iguales, entoces no importa la variable que se use al momento declarar los indices pero su valor a este tipo de variable se la denomina *variable muda*.

La suma de serie en $(6{,}18)$ se plantea a continuacion

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_o)^n \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} (x - x_o)^{k+1} = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \pm b_{m+1} x)(x - x_o)^m \tag{6.19}$$

Multiplicacion

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones desarrolladas en series convergente de potencias,alrededor del mismo punto a para efectuar la mutiplicacion entre ellas los indicides finales e iniciales deben ser iguales y es como sigue

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - c)^n \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j (x - c)^{i+j} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \right) (x - c)^n. \end{aligned} \tag{6.20}$$

La sucesion $m_n := \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ se conoce como la convolucion de an con bn.

Division

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones desarrolladas en series convergente de potencias,alrededor del mismo punto a para efectuar la division entre ellas los indicides finales e iniciales deben ser iguales y es como sigue

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-a)^n \tag{6.21}$$

En la mayoria de los casos los coeficientes d_n en la ecuacion (6.21) pueden obternerse con facilidad igualando coeficientes en la relacion equivalente :

$$f(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-c)^n \right) \tag{6.22}$$

Derivacion

Una vez una funcion $f(x)$ se represente como una serie de potencias, si es continua y converge, la derivacion de la serie es igual a derivar termino a termino. La derivada $f'(x)$ tendra el mismo intervalo de convergencia que la serie original original.

Como un ejemplo considere la serie a continuacion :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...a_n x^n \tag{6.23}$$

Derivar la serie en (6.23) es igual a encontrar la derivara termino a termino y por tanto

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + ...n a_n x^{n-1} \tag{6.24}$$

O en un caso mas general alrededor de un punto a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n \left(x-a\right)^{n-1} \tag{6.25}$$

Integracion

Una vez una funcion $f(x)$ se represente como una serie de potencias, si es continua y converge, la integracion de la serie es igual a integrar termino a termino. La integral $\int f(x)dx$ tendra el mismo intervalo de convergencia que la serie original.

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\,(x-c)^{n+1}}{n+1} + C \tag{6.26}$$

Cambio de indices o Shift of index of Summation

El indice en la sumatoria de series infinitas es una variable muda, de la misma manera lo es la variable de integracion en integrales definidas. Es conveniente hacer cambios en el indice de la sumaoria cuando se calcula soluciones a ecuaciones diferenciales usando series.

A continuacion se monstraran ejemplos :

Escribe la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_n(x-a)^{n-2}$ como una serie con el termino $(x-a)^{n-2} = (x-a)^n$. Sea $n-2=k$ por lo tanto $n=k+2$, sustituyendo el nuevo valor de n en la serie original se obtiene

$$\sum_{k+2=2}^{\infty}(k+2+2)(k+2+1)a_{k+2}(x-a)^{k+2-2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+4)(k+3)a_{k+2}(x-a)^k \tag{6.27}$$

Se puede comprobar que ambas series al expanderse son iguales pero note que el indice inicial de la sumatoria de las series es diferente

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_n(x-a)^{n-2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+4)(k+3)a_{k+2}(x-a)^k \tag{6.28}$$

Considera el siguiente ejemplo : comprobar que la series $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nx^n$ y $\sum\limits_{m=0}^{\infty}a_{m+2}x^{m+2}$ son iguales. Para comprobar la afirmacion anterior solo es necesario expandir ambas series y comparar.

Primero se expande la segunda serie

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_{m+2}x^{m+2} = a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5... \tag{6.29}$$

Luego se expande la primera serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 ... \tag{6.30}$$

Comparamos la primera con la segunda y se observa los terminos son identicos por tanto ambas series son iguales:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2} x^{m+2} \tag{6.31}$$

De nuevo note que no importa que letra se use para declarar los indices ya sea n o m da los mismo

6.3.2. Convergencia series potencias

Ahora se muestra como los criterios de comparacion mencionados en la seccion (6.2), pueden utilizarse para saber la convergencia de series de potencias, tambien se menciona dos nuevos conceptos la convergencia absoluta y convergencia condicional.

converegencia absoluta : Se dice una serie es absolutamente convergente cuando es convergente la serie formada por los valores absolutos de sus terminos. Las otras series alternadas convergentes se llaman condicionalmente convergente.

Capítulo 7

Solucion Ecuaciones Diferenciales Metodo Series de Potencias

Ahora se considera metodos para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden lineales, cuando los coeficientes son funciones de una variable independiente.

La idea es proponer que la solucion a la ecuacion diferencial sea una serie de potencias $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, se recuerda que para proponer una solucion en forma de potencias la funcion debe ser continua en el punto a. dicho lo anterior surgen dos preguntas.

1. Para que valores de x la serie converge.
2. Para que valores de x la solucion en forma de serie resuelve la ecuacion diferencial.

La primera pregunta puede resolverse calculando el radio de convergencia usando criterios de comparacion, pero ambas preguntas se resuelven usando el teorema de funch's que se menciona a continuacion

Teorema de Fuchs. Considerar la ecuación diferencial $y'' + p(t)y' + q(t) = 0$ y con las condiciones iniciales de la forma $y(0) = y_0$ y $y'(0) = y'_0$. Dejar $r > 0$. Si $p(t)$ y $q(t)$ tienen series de Taylor, que convergen en el intervalo $(-r, r)$, después la ecuación diferencial tiene una solución única $y(t)$ en forma de serie de potencias, que también converge en el intervalo $(-r, r)$. El radio de convergencia de la solución en forma de serie a la ecuacion diferencial, es por lo menos tan grande como el mínimo de los radios de convergencia de $p(t)$ y de $q(t)$.

Mostremos un simple ejemplo para aprender como funciona el metodo de serie de potencias :

Dada la ecuacion diferencial $y'' + y = 0$ encontrar la solucion usando el metodo de series :

$$\begin{aligned}
&y'' + y = 0 \text{ proponiendo } y = \sum_{n=0} a_n x^n \\
&\sum_{n=2} (n-1)(n) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0} a_n x^n = 0 \\
&\sum_{p=0} (p+1)(p+2) a_{p+2} x^p + \sum_{n=0} a_n x^n = 0 \\
&\sum_{p=0} [(p+1)(p+2) a_{p+2} + a_p] x^p = 0 \; pero \; x^p \neq 0
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Como $x^p \neq 0$ entonces :

$$(p+1)(p+2)a_{p+2} + a_p = 0 \rightarrow a_{p+2} = \frac{-a_p}{(p+1)(p+2)} \tag{7.2}$$

la ecuacion (7.2) recive el nombre de relacion de recurrencia y mediante de esta relacion las coeficientes an pueden ser definidos,

$$\begin{aligned}
&a_{p+2} = \frac{-a_p}{(p+2)(p+1)} \\
&for\; p = 0 \; a_2 = \frac{-a_o}{(1)(2)} \\
&for\; p = 1 \; a_3 = \frac{-a_1}{(2)(3)} \\
&for\; p = 2 \; a_4 = \frac{-a_2}{(3)(4)} = \frac{a_o}{(1)(2)(3)(4)} \\
&for\; p = 3 \; a_5 = \frac{-a_3}{(4)(5)} = \frac{a_1}{(2)(3)(4)(5)}
\end{aligned}$$

Encontrar un patron en los coeficientes es una tarea dificil y se requiere de practica, ser observa que los coeficientes de la series dependen de a_0 y de a_1

$$y = a_0 \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \rightarrow a_0 \cos(x) + a_1 \sin(x)$$

7.0.3. Ecuacion de Airy

Otro ejemplo es la ecuacion de airy que se define por :

$$y'' \pm k^2 xy = 0$$

Un caso importante es cuando el valor de k es igual a uno y se considera el signo negativo:

$$\begin{aligned}
&y'' - xy = 0 \;\; proponiendo\, y = \sum_{n=0} a_n x^n \\
&\sum_{n=2} (n-1)(n) a_n x^{n-2} - x \sum_{n=0} a_n x^n = 0 \\
&\sum_{n=2} (n-1)(n) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0} a_n x^{n+1} = 0 \\
&\sum_{p=0} (p+1)(p+2) a_{p+2} x^p - \sum_{p=1} a_{p-1} x^p = 0 \\
&2a_2 + \sum_{n=0} [(p+1)(p+2)a_{p+2} - a_{p-1}] x^p = 0
\end{aligned} \tag{7.3}$$

se encuentra la relacion de recurrencia:

$$\begin{aligned}
&(p+1)(p+2)a_{p+2} - a_{p-1} = 0 \rightarrow a_{p+2} = \frac{a_{p-1}}{(p+1)(p+2)} \\
&a_2 = 0
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Ahora observemos los primeros terminos usando la relacion de recurrencia :

$$\begin{aligned}
&a_2 = 0 \\
&a_3 = \frac{a_0}{(2)(3)} \quad a_7 = \frac{a_4}{(6)(7)} = \frac{a_1}{(3)(4)(6)(7)} \\
&a_4 = \frac{a_1}{(3)(4)} \quad a_8 = \frac{a_1}{(7)(8)} = 0 \\
&a_5 = \frac{a_2}{(4)(5)} = 0 \quad a_9 = \frac{a_6}{(8)(9)} = \frac{a_0}{(2)(3)(5)(6)(8)(9)} \\
&a_6 = \frac{a_3}{(5)(6)} = \frac{a_0}{(2)(3)(5)(6)}
\end{aligned}$$

Es dificil encontrar un patron en la serie pero por oberservacion hay que notar que : 1.los coeficientes $a_{3k+2} = 0$, 2.los coeficientes a_{3k} son multiplos de a_0, 3.

los coeficientes a_{3k+1} son multiplos de a_1

$$y = a_0 \left[1 + \sum_{n=1} \frac{x^{3n}}{(3n)(3n-1)(3n-4)...(3)(2)}\right] + ...$$
$$a_1 \left[x + \sum_{n=1} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-3)...(4)(3)}\right]$$

Los terminos dentro de los corchetes en la ecuacion superior son las funciones de airy $Ai(x)$ y $Bi(x)$ y por tanto la solucion a la ecuacion diferencial es :

$$y = a_0 Ai(x) + a_1 Bi(x)$$

7.0.4. Ecuacion de Hermite

Otro ejemplo importante es le ecuacion de hermite :

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \tag{7.5}$$

Usando el metodo de serie de potencias:

$$y - 2xy' + \lambda y = 0 \ \ proponer\ que\ y = \sum_{n=0} a_n x^n$$
$$\sum_{n=2} (n-1)(n) a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1} (n) a_n x^{n-1} + \lambda \sum_{n=0} a_n x^n = 0$$
$$\sum_{p=0} (p+2)(p+1) a_{p+2} x^p - 2 \sum_{n=1} (n) a_n x^n + \lambda \sum_{n=0} a_n x^n = 0$$
$$2a_2 + \lambda a_0 + \sum_{p=1} \{(p+2)(p+1) a_{p+2} + a_p(-2p+\lambda)\} x^p = 0$$

La relacion de recurrencia es la siguiente:

$$2a_2 + \lambda a_0 = 0 \rightarrow a_2 = \frac{-\lambda a_0}{2}$$
$$(p+2)(p+1) a_{p+2} + a_p(-2p+\lambda) = 0 \rightarrow a_{p+2} = \frac{(2p-\lambda)}{(p+2)(p+1)} a_p$$

Expandiendo la serie encontramos que la solucion es :

$$y = a_0 \mathrm{H}_n(x) + a_1 \mathrm{HypergeometricF1}[-\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, x^2]$$

En donde n y λ se relacionan por $n = \lambda/2$ por lo tanto λ debera ser par. cabe resaltar que cuando n sea par las soluciones serean polinomios y cuando n sea impar solo la solucion de Hermite sera un polinomio.
Ahora mencionaremos unas propiedades importantes de los poilnomios de hermite :

1. Los polinomios de Hermite H_n pueden representarse por la formula de Rodriguez

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \ \ para \ \ n = 0, 1, 2, 3...$$

2. Ortogonalidad : Los polinomios de Hermite $H_n(x)$, forman un sistema ortogonal en el intervalo $-\infty < x < \infty$ con la funcion de peso $w = e^{-x^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}$$

Usando la ortogonalidad de las funciones de Hermite una funcion $f(x)$ puede expresarse en funcion de los polinomios de hermite:

$$f(x) = \sum_{n=0} C_n H_n(x) \ \ donde \ \ C_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x) dx$$

3. Un polinomio de Hermite es una funcion par cuando n es par e impar cuando n es impar

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

4. los polinomios de hermite cumplen con la siguiente relacciones:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$
$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

7.1. Puntos Singulares

Hasta ahora solo se an resuelto ecuaciones diferenciales donde los coeficientes son polinomios de n grado, pero en muchos ejemplos los coeficientes tienen discontinudades es decir puntos donde el comportamiento de la funcion tiende a infinito, estos puntos reciben el nombre de puntos singulares. Es importante enfatisar que proponer una serie de taylor no es posible en estos casos ya que la derivada de la funcion debe ser continua en el punto evaluada.

Aun asi El metodo de frobenious garantisa que por lo menos una solucion de la ecuacion diferencial sera obtenido:

El metodo de fobrenious propone una serie de potencias de la forma :

$$y = x^r \sum_{n=0} a_n x^n \;\; en\, donde\, a_0 \neq 0$$

Donde el valor de r debe ser determinado, una manera facil de determinar el valor de r es usando la ecuacion indical

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

los coeficientes p_0 y q_0 son el valor de evaluar el limite en los puntos singulares de la ecuacion diferencial, si el limite existe entonces el punto recibe el nombre de punto singular regular y en caso que no exista el limite entonce se denomina punto singular irregular.

$$\begin{aligned} &\text{la ecuacion diferencial } y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ &\text{entonces } \lim_{x\to x_0} [p(x)(x-x_0)] = p_0 \text{ y } \lim_{x\to x_0} [q(x)(x-x_0)^2] = q_0 \end{aligned}$$

7.1.1. Ecuacion de Legendre

Ejemplo : La ecuacion de legendre muy importante en la simetria esferica

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0 \;\rightarrow\; y'' - \frac{2x}{(1-x^2)}y' + \frac{l(l+1)}{(1-x^2)}y = 0$$

Observamos que $p(x) = -2x/(1-x^2)$ y que $q(x) = l(l+1)/(1-x^2)$ estas dos funciones no estan definidas para $x = \pm 1$ por tanto son puntos singulares. Ahora emprenderemos a encontrar el valor de r

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{-2x}{(1-x^2)}(x-1)\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{2x}{1+x}\right] = \frac{2(1)}{1+1} = 1$$
$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{l(l+1)}{(1-x^2)}(x-1)^2\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{l(l+1)2(x-1)}{1-2x}\right] = 0$$
$$\lim_{x\to -1}\left[\frac{-2x}{(1-x^2)}(x+1)\right] = \lim_{x\to -1}\left[\frac{-2x}{1-x}\right] = \frac{-2(-1)}{1-(-1)} = 1$$
$$\lim_{x\to -1}\left[\frac{l(l+1)}{(1-x^2)}(x+1)^2\right] = \lim_{x\to -1}\left[\frac{l(l+1)2(x+1)}{1-2x}\right] = 0$$

Por que existen los limites se puede decir que los puntos $x = 1$ y $x = -1$ son puntos singulares regulares y usando la ecuacion indical con $p_0 = 1$ y $q_0 = 0$ se encuentra el valor de r.

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 \rightarrow r(r-1) + (1)r + 0 = 0 \rightarrow r = 0$$

y por tanto el valor de r para expandir la ecuacion de legendre usando la serie de fobrenious es igual a cero. Usando el valor encontrado de r se emprendera a resolver la ecuacion de legendre por el metodo de fobrenious:

$$proponiendo\ \ la\ \ serie\ \ de\ \ potencias\ \ y = x^r \sum_{n=0} a_n x^n con\ \ r = 0$$

Ahora se desarrollan terminos:

$$(1-x^2)\sum_{n=0}(n-1)(n)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=0}(n)a_n x^{n-1} + l(l+1)\sum_{n=0} a_n x^n = 0$$
$$\sum_{n=0}(n-1)(n)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}(n-1)(n)a_n x^n - 2\sum_{n=0}(n)a_n x^n + l(l+1)\sum_{n=0} a_n x^n = 0$$
$$\sum_{n=2}(n-1)(n)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}(n-1)(n)a_n x^n - 2\sum_{n=0}(n)a_n x^n + l(l+1)\sum_{n=0} a_n x^n = 0$$
$$\sum_{n=0}(p+1)(p+2)a_{p+2}x^p - \sum_{n=0}(n-1)(n)a_n x^n - 2\sum_{n=0}(n)a_n x^n + l(l+1)\sum_{n=0} a_n x^n = 0$$
$$\sum_{p=0}\{(p+1)(p+2)a_{p+2} - (p-1)(p)a_p - 2(p)a_p + l(l+1)a_p\}x^p = 0$$

y la relacion de recurencia encontrada es :

$$(p+1)(p+2)a_{p+2} + a_p(-p(p+1) + l(l+1)) = 0 \rightarrow a_{p+2} = \frac{p(p+1) - l(l+1)}{(p+1)(p+2)} a_p$$

Desarrollemos la relacion para los primeros 5 terminos

$$
\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{1}{2}l(1+l)a_0 & a_3 &= -\frac{1}{6}(-2+l+l^2)a_1 \\
a_4 &= \frac{1}{24}l(1+l)(-6+l+l^2)a_0 & a_5 &= \frac{1}{120}(-12+l+l^2)(-2+l+l^2)a_1 \\
a_6 &= -\frac{1}{720}l(1+l)(-20+l+l^2)(-6+l+l^2)a_0
\end{aligned}
$$

Observemos existen dos solucion, los coeficientes pares dependen de a_0 por mientras que los coeficientes impares dependen de a_1

$$
y = a_0\left[1+\sum_{n=1}(-1)^n\frac{[(l-2n+2)...(l-2)l][(l+1)(l+3)...(l+2n-1)]}{(2n)!}x^{2n}\right]+...
$$
$$
a_1\left[x+\sum_{n=1}(-1)^n\frac{[(l-2n+1)...(l-3)(l-1)][(l+2)(l+4)...(l+2n)]}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right]
$$

Los terminos entre corchetes son las funciones de legendre de primera clase $P_l(x)$ y segunda clase $Q_l(x)$. y la solucion a la ecuacion de legendre es :

$$
y(x) = AP_l(x) + BQ_l(x)
$$

Ahora se mencionara algunas propiedades de las funciones de legendre de primera clase :

1. una forma de generar los polinomios de legendre es usando la representacion de rogdriguez:

$$
P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l
$$

2. Ortogonalidad: los polinomios de legendre forman un sistem ortogonal en el intervelo $-1 < x < 1$ con la funcion de peso $w = 1$

$$
f(x) = \sum_{n=0} C_n P_n(x) \; donde \; C_n = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} P_m(x)f(x)dx
$$

3.Los polinomios de Legendre son también útiles en la expansion de funciones de la forma:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2-2\eta x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k P_k(x)$$

4.Los polinomios de Legendre son simétricos o antisimetricos, tal que

$$P_k(-x) = (-1)^k P_k(x).$$

5. Los polinomios de especie uno y dos solo estan definidos para el rango $|x| < 1$, solo los polinomios P_l son analiticos en los puntos $x \pm 1$

7.1.2. Ecuacion de Bessel

Ejemplo : Otra ecuacion diferencial de gran importancia es la ecuacion de diferencial de Bessel que aparece en problemas donde se involucra simetria cilindrica:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0 \to y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{v^2}{x^2}) = 0$$

Observamos que $p(x) = 1/x$ y $q(x) = 1 - v^2/x^2$ y por lo tanto la funcion no es analitica en el punto $x = 0$ por lo tanto es un punto singular. Utilizando la ecuacion indical encontramos el valor de r para expandir en la serie de fobrenious.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}x\right] = 1$$
$$\lim_{x\to 0}[x^2 - v^2] = -v^2$$

Por que existen los limites se puede decir que el punto $x = 0$ es un punto singular regular y usando la ecuacion indical con $p_0 = 1$ y $q_0 = -v^2$ se encuentra el valor de r.

$$r(r-1) + p_0r + q_0 = 0 \to r(r-1) + (1)r - v^2 = 0 \to r = \pm v$$

Existen dos valores para r, por conveniencia se usara el valor de $r = v$ y se limita $v > 0$ para expandir la serie:

$$proponiendo\ la\ serie\, y = x^r \sum_{n=0} a_n x^n\ \ con\ r = v$$

Ahora se procede a expandir en forma serie de potencias :

$$x^2 \sum_{n=0} (n+v-1)(n+v)a_n x^{n+v-2} + x \sum_{n=0} (n+v)a_n x^{n+v-1} + (x^2 - v^2) \sum_{n=0} a_n x^{n+v} = 0$$
$$\sum_{n=0} (n+v-1)(n+v)a_n x^{n+v} + \sum_{n=0} (n+v)a_n x^{n+v} + (x^2 - v^2) \sum_{n=0} a_n x^{n+v} = 0$$
$$\sum_{n=0} (n+v-1)(n+v)a_n x^{n+v} + \sum_{n=0} (n+v)a_n x^{n+v} + \sum_{n=0} a_n x^{n+v+2} - v^2 \sum_{n=0} a_n x^{n+v} = 0$$

Cambiando el exponente $n + v + 2$ por el nuevo exponente $p + v$

$$\sum_{n=0} (n+v-1)(n+v)a_n x^{n+v} + \sum_{n=0} (n+v)a_n x^{n+v} + \sum_{p=2} a_{p-2} x^{p+v} - v^2 \sum_{n=0} a_n x^{n+v} = 0$$

dividiendo la ecuacion superior por x^v

$$\sum_{n=0} (p+v-1)(p+v)a_p x^p + \sum_{n=0} (p+v)a_p x^p + \sum_{p=2} a_{p-2} x^p - v^2 \sum_{n=0} a_p x^p = 0$$
$$(1+2v)a_1 x + \sum_{n=2} [(p+v-1)(p+v)a_p + (p+v)a_p + a_{p-2} - v^2 a_p] x^p = 0$$

Es importante resaltar que $x^p \neq 0$ y tambien $x \neq 0$ por tanto

$$(p+v-1)(p+v)a_p + (p+v)a_p + a_{p-2} - v^2 a_p = 0 \rightarrow a_p = \frac{-a_{p-2}}{p(p+2v)} \; para\, p = 2, 3, 4...$$
$$(1+2v)a_1 x = 0 \rightarrow a_1 = 0$$

Usando la relacion recurencia encontramos los primeros coeficientes de la serie

$$a_1 = 0$$
$$a_2 = \frac{a_0}{2(2+2v)}$$
$$a_3 = 0$$
$$a_4 = -\frac{a_2}{4(4+2v)} = \frac{a_0}{(2)(4)(2+2v)(4+2v)} = \frac{a_0}{(2^{2.2})(2!)(1+v)(2+v)}$$
$$a_5 = 0$$
$$a_6 = -\frac{a_4}{(6)(6+2v)} = -\frac{a_0}{2.4.6(2+2v)(4+2v)(6+2v)} = -\frac{a_0}{2^{2.2}3!(1+v)(2+v)(3+v)}$$

y si tienes suerte podras ver el patron en los coeficientes:

$$\frac{1}{(1+v)(2+v)...(m+v)} \rightarrow \frac{v!}{(v+m)!} \; si\, v\, es\, numero\, entero$$

En el caso mas general donde v puede tomar cualquier valor mayor que cero se usa la funcion gamma.

$$\frac{1}{(1+v)(2+v)...(m+v)} \rightarrow \frac{\Gamma(1+v)}{\Gamma(1+v+m)} \; para\, v > 0$$

algo mas que mencionar es que solo los coeficientes pares a_{2m} tienen un valor mientras los impares valen cero por tanto los coeficientes son :

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0 \Gamma(1+v)}{2^{2m} m! \Gamma(1+v+m)}$$

y una solucion a la ecuacion de bessel es :

$$y = x^v \sum_{n=0} a_n x^n \rightarrow x^v \sum_{m=0} a_{2m} x^{2m} \rightarrow a_0 \Gamma(1+v) x^v \sum_{n=0} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} m! \Gamma(1+v+m)}$$

La constante no definida a_0 toma el siguiente valor : $a_0 = 1/2^v \Gamma(1+v)$ entonces la ecuacion superior toma la forma :

$$y_1(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^v \sum_{m=0} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} m! \Gamma(1+v+m)} = J_v(x)$$

Donde J_v es la funcion de Bessel de primera especie. La segunda solucion es posible encontrarse usando el metodo de Reduccion de orden.

$$\mathrm{y}_2(x) = y_1(x) \int \left(\frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx} \right) dx = J_v(x) \int \left(\frac{1}{J_v^2(x)} e^{-\int (1/x)dx} \right) dx \rightarrow ...$$
$$J_v(x) \int \frac{1}{x J_v^2(x)} dx = \frac{\pi}{2} Y_v(x)$$

Y el resultado son las funciones de Bessel de segunda especie o tambien llamadas funciones de Neumann y se representan usando el simbolo $N_n(x)$ o $Y_n(x)$. Es importante resaltar que la solucion a la integral se obtuvo usando tablas de integrales que ya definen el resultado.

Ahora casos especificos de la ecuacion de Bessel:

Cuando en la ecuacion de Bessel el valor de $v = \pm 1/2$ encontramos un caso especial que lo definiremos como la ecuacion de bessel de orden $1/2$ para este caso la solucion sera:

$$y = C_1 J_{1/2}(x) + C_2 J_{-1/2}(x) \ en\, donde\ :$$
$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x) \quad J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x)$$

La solucion a la ecuacion de bessel depende si el valor de v es entero o no es entero

$$y = C_1 J_v(x) + C_2 J_{-v}(x) \ si\, v\, no\, es\, numero\, entero$$
$$y = C_1 J_v(x) + C_2 Y_v(x) \ si\, v\, es\, un\, numero\, entero$$

Una relacion importante entre $J_v(x)$ y $J_{-v}(x)$ es la siguiente :

$$J_{-v}(x) = (-1)^m J_v(x) \quad solo\, cuando\, v\, es\, entero\, v \notin \mathbb{Z}$$

Ahora se mencionan propiedades de las funciones de Bessel:

1. Solo la funcion de Bessel de primera especie $J_v(x)$ es analltica en $x = 0$ mientras que $Y_v(x)$ tiende a menos infinito

2. La funcion $J_v(x)$ tiene el rango $-\infty < x < \infty$ cuando v es un numero entero, en caso de no ser entero el rango cambia a $x \geq 0$

3. Las funciones de Bessel de segunda especie, denotadas por $Y_v(x)$, Para v; no enteros, se definen a partir de las funciones de primera especie $J_v(x)$ mediante la siguiente fórmula:

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}, \quad \forall \alpha \notin \mathbb{Z}$$

En el caso en el que tengamos un orden entero n, la función es definida como el siguiente límite sólo válido para v no enteros:

$$Y_n(x) = \lim_{\alpha \to n} Y_\alpha(x), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

que nos da el siguiente resultado en forma integral:

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x\sin\theta - n\theta)d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[e^{nt} + (-1)^n e^{-nt}\right]e^{-x\sinh t}dt$$

4. Otra definición de las funciones de Bessel para valores enteros de v es la siguiente representación integral de la función de Bessel:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\tau - x\sin\tau)d\tau$$

Esta fue la forma con la que Bessel definió a estas funciones y de esta definición obtuvo distintas propiedades de la función. Otra representación integral es la siguiente:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n\tau - x\sin\tau)}d\tau$$

5. Otra formulación importante de las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel son las funciones de Hankel $H_v^{(1)}(x)$ y $H_v^{(2)}(x)$ así definidas:

$$H_\alpha^{(1)}(x) = J_\alpha(x) + iY_\alpha(x)$$
$$H_\alpha^{(2)}(x) = J_\alpha(x) - iY_\alpha(x)$$

La siguiente relación es válida para todo valor de v, sea entero o no:

$$H_{-\alpha}^{(1)}(x) = e^{\alpha\pi i}H_\alpha^{(1)}(x)$$
$$H_{-\alpha}^{(2)}(x) = e^{-\alpha\pi i}H_\alpha^{(2)}(x)$$

6. Ortogonalidad: las funciones de Bessel de primera especie forman un sistema ortogonal en el intervelo $0 < x < 1$ con la funcion de peso $w = x$

$$\sum_{r=1} C_r J_v(x\alpha_r) \ donde \ C_r = \frac{2}{[J_{v+1}(\alpha_r)]^2}\int\limits_0^1 xf(x)J_v(\alpha_r x)dx$$

7.2. Metodo separacion variables

Uno de los metodos mas viejos en la resolucion de ecuaciones diferenciales parciales es el metodo de separacion variables, Este metodo implica separar la ecuacion diferencial parcial, en ecuaciones diferenciales ordinarias.

A continuacion se usara el mencionado metodo para resolver la ecuacion de derivada parciales eliptica de Helmholtz

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$$

7.2.1. Ecuacion Helmholtz coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^2\psi = 0$$

Proponemos que la solucion sea el producto de las variables independientes en la ecuacion diferencial : $\Psi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$

$$YZ\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + XZ\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + XY\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2XYZ = 0$$

Dividiendo la ecuacion superior entre XYZ :

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 = 0$$
$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - k^2 = -l^2$$

El lado izquierdo es una función de x nada más, mientras que el lado derecho depende únicamente de y, z. La ecuacion superior es una clase de paradoja. Una función de x es igualada a una función de y, z, pero x, y, z son variables independientes. Esta independencia significa que el comportamiento de x no está determinado por las otras dos variables. La paradoja se resuelve si igualamos ambos lados a una constante que en este caso elijimos que sea $-l^2$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = -l^2$$
$$-\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - k^2 = -l^2$$

La variable x ya se encuentra separada, ahora se procede a separar y e z

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - k^2 + l^2 = -m^2$$

De nuevo encontramos la misma paradoja dos variables independientes no pueden igualarse por tanto se agrega ahora la constante m

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -m^2$$
$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = m^2 - k^2 + l^2 = -n^2$$

Para obtener un conjunto simetrico hacemos que $m^2 - k^2 + l^2 = -n^2$, por ultimo obervamos que nuestro objetivo que era separar las variables esta echo, ahora son ecuaciones diferenciales ordinarias y la solucion general es

$$\psi = \sum_{l.m.n} a_{lmn}\psi_{lmn} \;\; donde \;\; \psi_{lmn} = X_l(x)Y_m(y)Z_n(z)$$

Los coeficientes constantes a_{lmn} son finalmente escogidos para que satisfaga las condiciones iniciales o de frontera.

7.2.2. Ecuacion Helmholtz coordenadas Cilindricas

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^2\psi = 0$$

Ahora se emprendera a separar la ecuacion de Helmholtz en coordenadas Cilindircas proponiendo la solucion sea multiplo de las tres variables independientes: $\psi(\rho,\phi,z) = P(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$

$$\frac{\Phi Z}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right) + \frac{PZ}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + P\Phi\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 P\Phi Z = 0$$

Dividiendo entre $P\Phi Z$

$$\frac{1}{\rho P}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 = 0$$
$$\frac{1}{\rho P}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + k^2 = -\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -l^2$$

De nuevo igualamos a una constante

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = l^2$$
$$\frac{1}{\rho P}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + k^2 = -l^2$$

La elección de signo para la constante de separación es arbitraria. Sin embargo, se escoje un signo negativo para la coordenada axial z en espera de una posible dependencia exponencial sobre z. Se escoje un signo positivo para la coordenada Φ en espera de una dependencia periódica en Φ

$$\frac{\rho}{P}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+(l^2+k^2)\rho^2=-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=m^2$$

Haciendo que $l^2+k^2=n^2$ para simplificar

$$\frac{\rho}{P}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+n^2\rho^2-m^2=0\rightarrow\rho^2\frac{d^2P}{d\rho^2}+\rho\frac{dP}{d\rho}+(n^2\rho^2-m^2)P=0$$
$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=-m^2$$

Identificamos facilmente que la dependencia radial ρ resulta ser la ecuacion de Bessel que en previos capitulos fue resuelta

7.2.3. Ecuacion Helmholtz coordenadas Esfericas

$$\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\left[\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right]+k^2\psi=0$$

Ahora, otra vez, proponemos una solución en forma factorizada $\psi=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$

$$\frac{1}{Rr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{1}{\Theta r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\Phi r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=-k^2$$

Si multiplicamos por $r^2\sin^2(\theta)$ podemos aislar Φ para obtener

$$\frac{\sin^2(\theta)}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{\sin(\theta)}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+r^2\sin^2(\theta)k^2=\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=-m^2$$

Otra vez, debemos igualar ambos lados a una misma constante $-m^2$

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{\partial\phi^2}=-m^2$$
$$\frac{1}{Rr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{1}{\Theta r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)-\frac{m^2}{r^2\sin^2(\theta)}=-k^2$$

multiplicando por r^2 y reacomodando términos, obtenemos:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) + r^2k^2 = -\frac{1}{\Theta\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} = Q$$

Otra vez, las variables están separadas. Igualamos cada lado a una constante Q y obtenemos finalmente:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + k^2R - \frac{QR}{r^2} = 0 \rightarrow r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} + (k^2r^2 - Q)R = 0$$
$$\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)}\Theta + Q\Theta = 0$$

Observamos que la parte radial R es la ecuacion esferica de Bessel y la solucion a esta ecuacion son las funciones esfericas de Bessel de primer y segunda especie, La parte Azimutal y elevacion se pueden juntar y la solucion son los esfericos Harmonicos.

En la seccion de Funciones especiales se hablara con mas detalles de estas funciones.

Capítulo 8

Serie de Fourier

En este capitulo se mencionara brevemente la Serie de fourier, no es mi intencion proporcionar teoremas u cosas complicadas.

La Serie de fourier es como lo dice una sumatoria de terminos, lo ventaja es el poder interpretar una funcion $f(x)$, y esta interpretacion es la siguiente

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{8.1}$$

La ecuacion superior recibe el nombre de serie de Fourier, en donde a_n y b_n son coefficientes que deben ser determinados, para determinar los coeficientes hay que tener en cuenta las siguientes relaciones entre la funcion seno y coseno

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n'\pi x}{L}\right) dx = 0$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n'\pi x}{L}\right) dx = L\delta_{nn'}$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n'\pi x}{L}\right) dx = L\delta_{nn'}$$

Estas propiedades que poseen las funciones seno y coseno indica que las funciones forman un sistema completo ortogonal. Ahora se procede a encontrar el valor de los coficientes a_n y b_n

para encontrar a_n usaremos la propiedad de ortogonalidad

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)dx = \frac{a_o}{2}\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)dx \ ...$$

$$+b_n\int_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)dx$$

la expresion anterior se reduce a

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)dx = \frac{a_o L\sin(n\pi)}{n\pi} + a_n L\delta_{nn'} \rightarrow a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

De la misma manera encontramos el valor del coeficiente b_n

para encontrar b_n usaremos la propiedad de ortogonalidad

$$\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)dx = \frac{a_o}{2}\int_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)dx \ ...$$

$$+b_n\int_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)dx$$

la expresion anterior se reduce a

$$\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)dx = b_n L\delta_{nn'} \rightarrow b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

Ahora que sabemos como encontrar el valor de los coeficiente a_n e b_n desarrollaremos la serie de fourier para 3 casos clasicos : La funcion de sierra, la funcion triangular y la funcion de un pulso cuadrado

Ejemplo : Expandir la funcion $f(x) = x \ para \ -L < x < L$ en serie de fourier

Todo se resume a encontra el valor de los coeficiente a_n e b_n

$$\text{si } f(x) = x \text{ en el intervalo } -L < x < L$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} x\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = -\frac{2L}{n\pi}$$

por lo tanto la serie de fourier sustituyendo el valor de los coeficientes en (8.1)

$$f(x) = -\frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

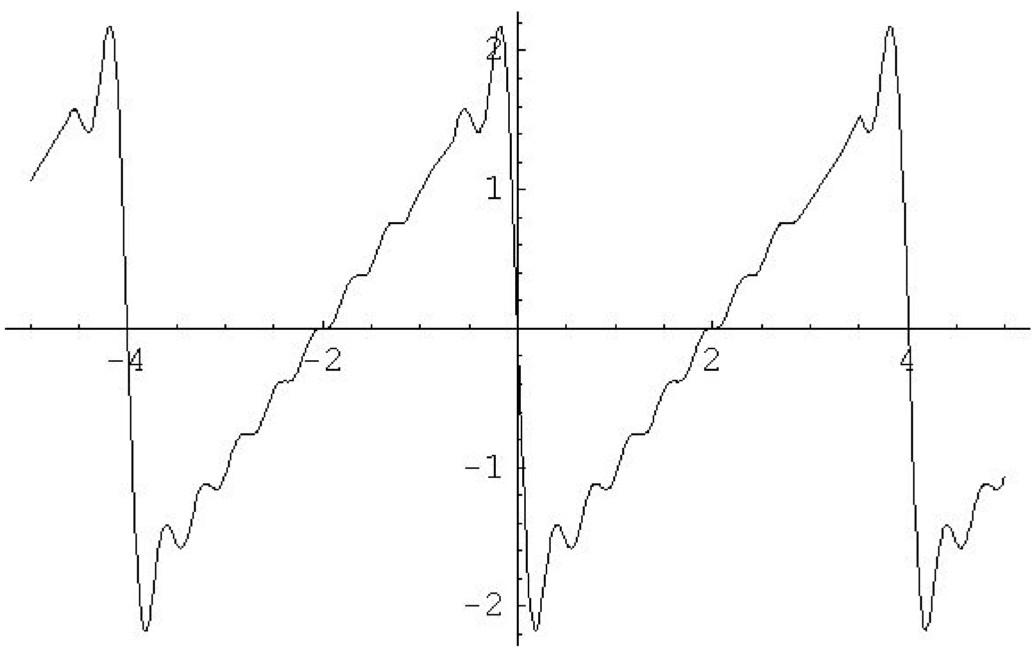

Figura 8.1: Grafica de funcion Sierra, con L=2

Ejemplo : Expandir la siguiente funcion en serie de fourier

$$f(x) = \begin{cases} -a \;\; en\ el\ rango \; -L < x < 0 \\ a \;\; en\ el\ rango \;\; 0 < x < L \end{cases}$$

Todo se resume a encontra el valor de los coeficiente a_n e b_n

$f(x)$ es una funcion impar por lo tanto $a_n = 0$

$$b_n = \frac{2a}{L}\int\limits_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2a\left(L - L\cos(n\pi)\right)}{Ln\pi} = \frac{2a}{L}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}$$

por lo tanto la serie de fourier sustituyendo el valor de los coeficientes en (8.1)

$$f(x) = \frac{2a}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

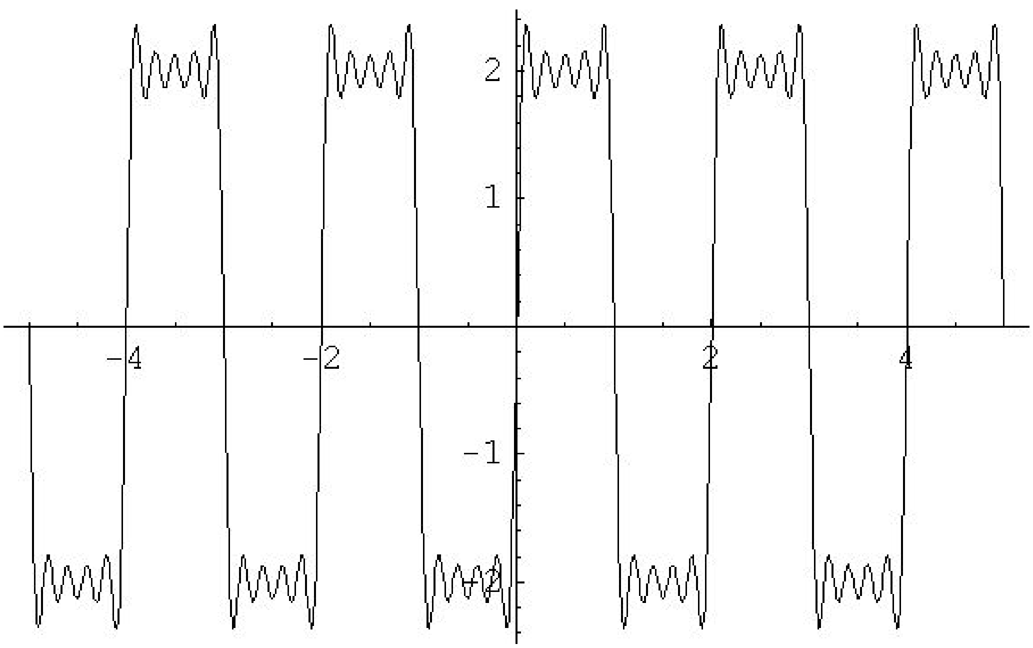

Figura 8.2: Grafica funcion cuadrada con a=2 y L=1

Ejemplo: Expandir la siguiente funcion en serie de fourier

$$f(x) = \begin{cases} x \quad rango \ -L < x < 0 \\ -x \ rango \ 0 < x < L \end{cases}$$

Todo se resume a encontra el valor de los coeficiente a_n e b_n

la funcion $f(x) = \begin{cases} x \quad rango \; -L < x < 0 \\ -x \; rango \; 0 < x < L \end{cases}$ es una funcion par

por lo tanto $b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L x\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{2L}{n^2\pi^2}(-1+(-1)^n)$$

$$a_o = \frac{2}{L}\int_0^L x = L$$

por lo tanto la serie de fourier sustituyendo el valor de los coeficientes en (8.1)

$$f(x) = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1+(-1)^n)}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

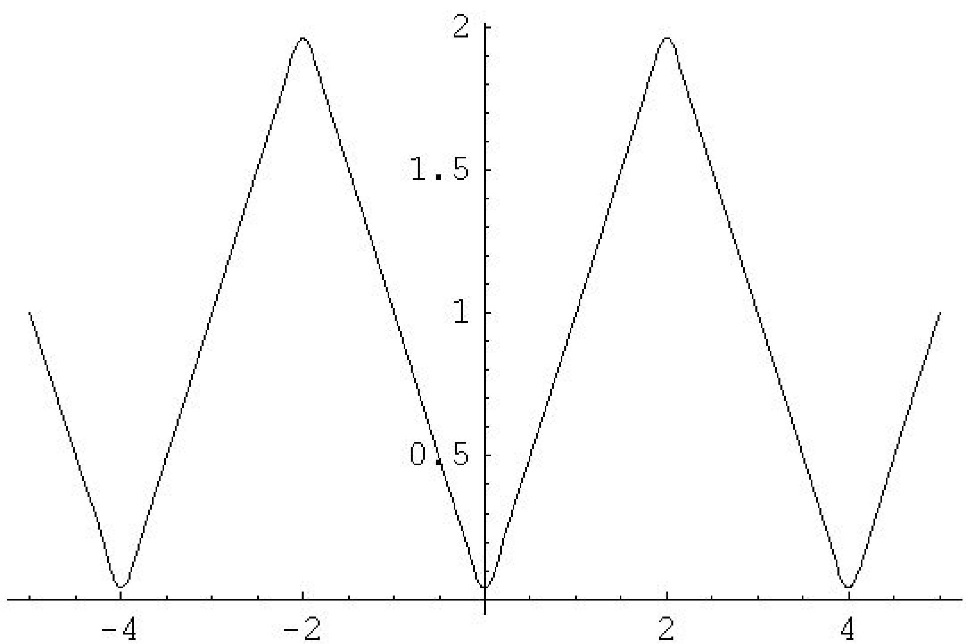

Figura 8.3: Grafica funcion triangular con L=2

Capítulo 9

Funciones Especiales

9.1. Polinomios Asociados de Legendre

Anteriormente observamos que la ecuacion de Helmtholtz en su dependencia angular Θ, es la ecuacion de legendre Associada, este caso es mas general y con el valor de $m = 0$ la expresion se reduce a la ecuacion de legendre.

Claro que a simple vista no parece ser la ecuacion de Legendre pero es por que no esta simplificada, la ecuacion de legendre tiene la sustitucion $x = cos(\theta)$

$$\sin(\theta)\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)}\Theta + Q\Theta = 0$$

La ecuacion superior se puede escribir como sigue:

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{d\Theta}{d\theta} + \Theta\left(Q - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)}\right) = 0$$

$$haciendo\ el\ cambio\ x = \cos(\theta)$$

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d\Theta}{dx} = -\sin(\theta)\frac{d\Theta}{dx}$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\left(-\sin(\theta)\frac{d\Theta}{dx}\right) = -\cos(\theta)\frac{d\Theta}{dx} + \sin^2(\theta)\frac{d^2\Theta}{dx^2}$$

Sustituyendo en la primera ecuacion las derivadas respecto la nueva variable x y repitiendo que $x = \cos(x)$ entonces $\sin^2(\theta) = 1 - x^2$

$$\sin^2(\theta)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2\cos(\theta)\frac{d\Theta}{dx} + \Theta\left(Q - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)}\right) = 0$$

$$(1 - x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \Theta\left(Q - \frac{m^2}{1 - x^2}\right) = 0$$

Ahora si obeservamos que esta ecuacion se asemeja mas a la ecuacion de legendre si $m = 0$ y reconocemos que $Q = l(l+1)$

La solucion a esta ecuacion son los polinomios asociados de legendre, y con el factor $m = 0$ estos polinomios se simplifican a los polinomios de legendre encontrados en la seccion anterior.

$$y(x) = P_l^m(x) + Q_l^m(x)$$

Las funciones asociadas de legendre de primera y segunda especie, para valores de m no negativos se encuentran relacionadas con las funciones de legendre de la siguiente forma:

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_l}{dx^m} \rightarrow \frac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$$
$$Q_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m Q_l}{dx^m}$$

De igual forma las polinomios asociados cumplen con la siguiente relacion:

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x) \tag{9.1}$$

9.2. Funciones Esfericas de Bessel

Anteriormente observamos que al resolver la ecuacion de HelmHoltz en coordenadas esfericas encontramos que la parte radial R, es la ecuacion diferencial esferica de Bessel, la razon recibir este nombre es por que esta ecuacion es muy parecieda a la ecuacion de Bessel original y se puede reducir a esta ecuacion por medio de cambios de variables.

$$r^2\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + k^2R - \frac{QR}{r^2} = 0 \rightarrow r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} + (k^2r^2 - Q)R = 0$$

Ahora se procede hacer el cambio de variable haciendo que $R(r) = r^{-1/2}S(r)$ en donde $Q = l(l+1)$

$$r^2\frac{d^2S}{dr^2} + r\frac{dS}{dr} + \left(k^2r^2 - \left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right)S = 0$$

Finalmente haciendo otro cambio de varaible siendo $x = kr$ e $y(x) = S(kr)$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2\right) y = 0$$

E inmeditamente indentificamos que la solucion a esta ecuacion diferencial son las funciones de Bessel de primera y segunda especia de orden $l + 1/2$

$$y(x) = AJ_{l+1/2}(x) + BY_{l+1/2}(x) \rightarrow R(r) = r^{-1/2}[AJ_{l+1/2}(kr) + BY_{l+1/2}(kr)]$$

Las funciones $J_{l+1/2}(x)$ e $Y_{l+1/2}(x)$ crean unas nuevas funciones llamadas esfericos de Bessel:

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x)$$
$$y_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{l+1/2}(x) = (-1)^{l+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-l-1/2}(x)$$

Las funciones esféricas de Bessel se pueden obtener a partir de las siguientes fórmulas:

$$j_n(x) = (-x)^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\sin x}{x}$$
$$y_n(x) = -(-x)^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\cos x}{x}$$

Y la solucion a la ecuacion diferencial encontrada puede ponerse en funcion de estas funciones

$$R(r) = r^{-1/2}[AJ_{l+1/2}(kr) + BY_{l+1/2}(kr)] \rightarrow \sqrt{\frac{2k}{\pi}} \left(Aj_l(kr) + Bn_l(kr)\right)$$

A continuacion mostramos el desarrollo de las primeras funciones esfericas de Bessel de orden n

Para n = 0,1 y 2 tenemos:

$$
\begin{aligned}
j_0(x) &= \frac{\sin(x)}{x}\\
j_1(x) &= \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{\cos(x)}{x}\\
j_2(x) &= \left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\frac{\sin(x)}{x} - \frac{3\cos(x)}{x^2}\\
y_0(x) &= -j_{-1}(x) = -\frac{\cos x}{x}\\
y_1(x) &= j_{-2}(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}\\
y_2(x) &= -j_{-3}(x) = \left(-\frac{3}{x^2} + 1\right)\frac{\cos x}{x} - \frac{3\sin x}{x^2}
\end{aligned}
$$

Las funciones esféricas de Hankel se definen de forma análoga a las no esféricas:

$$
\begin{aligned}
h_n^{(1)}(x) &= j_n(x) + iy_n(x)\\
h_n^{(2)}(x) &= j_n(x) - iy_n(x)
\end{aligned}
$$

9.3. Esfericos Harmonicos

Los esfericos harmonicos son la solucion a la parte angular Θ e Φ de la ecuacion de Helmholtz:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2 = 0 \rightarrow \Phi(\phi) = C\cos(m\phi) + D\sin(m\phi)\\
&(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \left(Q - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta = 0 \rightarrow \Theta(\theta) = P_l^m(\cos(\theta)) + Q_l^m(\sin(\theta))
\end{aligned}
$$

La solucion debe estar limitada para $0 \leq \phi \leq 2\pi$, y $0 \leq \theta \leq \pi$ por tanto se remuven las funciones asociadas de legendre de segunda especie Q_l^m por no ser analitica en los puntos $0, \pi$

$$
Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi) = P_l^m(\cos(\theta))(C\cos(m\phi) + D\sin(m\phi))
$$

Donde los valor de m e l son enteros con $-l \leq m \leq l$ y por tanto para cubrir los valores negativos se usa la identidad (9.1)

$$
Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^m \left[\frac{2l + 1(l-m)!}{4\pi(l+m)!}\right] P_l^m(\cos(\theta))\exp(im\phi)
$$

Y la siguiente identidad es muy util:

$$Y_l^{-m}(\theta,\phi) = (-1)^m [Y_l^m(\theta,\phi)]^*$$

9.3.1. Serie de Laplace

Usando la propiedad de Ortogonalidad que tienen los harmonicos es posible representar una funcion $f(\theta,\phi)$ usando esfericos harmonicos

$$f(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} A_l^m Y_l^m(\theta,\phi) \;\; donde \;\; A_l^m = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\phi) Y_l^m(\theta,\phi)^* \sin(\theta) d\theta d\phi$$

9.4. Polinomios Chebyshev

La ecuacion de Chebysev es la siguiente:

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$$

La solucion a esta ecuacion diferencial puede encontrarse usando un cambio de variable $x = \cos(t) \to t = -\arccos(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{1-x^2}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\frac{dy}{dt}$$

Sustituyendo las derivadas encontramos que:

$$(1-x^2)\left(\frac{1}{1-x^2}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\frac{dy}{dt}\right) - x\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{dt}\right) + n^2 y = 0 \to ...$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2 y = 0 \to y(t) = A\cos(nt) + B\sin(nt)$$

recordando el cambio de variable, la solucion $y(t)$ puede ponerse en funcion de la variable x

$$y(x) = A\cos(n\arccos(x)) + B\sin(n\arccos(x)) \to b_1 T_n(x) + b_2\sqrt{1-x^2}U_{n-1}(x)$$

Los terminos $T_n(x)$ e $U_{n-1}(x)$ son los polinomios de legendre de primera y segunda especie, es obvio que estos polinomios se defininen por

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) = \cos(nt) \;\; \textit{por el cambio de} \;\; t = -\arccos(x)$$
$$U_{n-1}(x) = \sin(n \arccos(x)) = \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}$$

Las expresiones superiores pueden expanderse usando la formula para la suma de angulos para el coseno y seno

$$T_0(x) = \cos(0) = 1$$
$$T_1(x) = \cos(t) \to x$$
$$T_2(x) = \cos(t)\cos(t) - \sin(t)\sin(t) = 2(\cos(t))^2 - 1 \to 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 4(\cos(t))^3 - 3\cos(t) \to 4x^3 - 3x$$
$$T_n(x) = \cos(nt)$$
$$\sin n\theta = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^k\theta \, \sin^{n-k}\theta \, \sin\left(\frac{1}{2}(n-k)\pi\right)$$
$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^k\theta \, \sin^{n-k}\theta \, \cos\left(\frac{1}{2}(n-k)\pi\right)$$

Ahora se mencionaran propiedades importantes de los polinomios de Chebysev:

1. Ortogonalidad : Los polinomios de chebyseb de primera y segunda especie son ortogonales en el intervalor $-1 \leq x \leq 1$

$$f(x) = \sum_{n=0} C_n T_n(x) \;\; donde \;\; C_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \;\; C_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

9.5. Polinomios de Laguerre

A continuacion se estudiara otra ecuacion diferencial importante y es la ecuacion diferencial de laguerre:

$$xy'' + (v + 1 - x)y' + \lambda y = 0$$

Para valores de λ positivos y enteros la ecuacion no tiene puntos singulares y se procede a usar el metodo serie de potencias:

$$x\sum_{n=2}(n-1)(n)a_nx^{n-2}+(v+1-x)\sum_{n=1}(n)a_nx^{n-1}+\lambda\sum_{n=0}a_nx^n=0$$
$$\sum_{n=2}(n-1)(n)a_nx^n+v\sum_{n=1}(n)a_nx^{n-1}+\sum_{n=1}(n)a_nx^{n-1}-\sum_{n=1}(n)a_nx^n+\lambda\sum_{n=0}a_nx^n=0$$

Haciendo que $n-1=p$ entonces $n=p+1$ y se obtiene:

$$\sum_{p=1}(p)(p+1)a_{p+1}x^p+v\sum_{p=0}(p+1)a_{p+1}x^p+\sum_{p=0}(p+1)a_{p+1}x^p-\sum_{p=1}(p)a_px^p+\lambda\sum_{p=0}a_px^p=0$$

expandiendo las series para que la sumatoria empiece en $p=1$ se obtiene que:

$$va_1+a_1+\lambda a_0=0$$
$$\sum_{p=1}\{a_{p+1}[(p+1)(p+v+1)]+a_p[\lambda-p]\}x^p=0\rightarrow a_{p+1}[(p+1)(p+v+1)]+a_p[\lambda-p]=0$$

Y las relaciones de recurrencia son :

$$a_1=\frac{-\lambda a_0}{(v+1)}$$
$$a_{p+1}=\frac{\lambda-p}{(p+1)(p+v+1)}a_p$$

cuando λ es un numero entero no negativo y el valor de $v=0$, para este caso en especial la relacion recurencia se reduce a los polinomios de laguerre $L_\lambda(x)$:

$$y(x)=L_\lambda(x)$$

Ahora se mencionaran propiedades de los polinomios de laguerre:

1.Usando la relacion de Rodriguez los polinomios de laguerre pueden encontrarse usando la siguiente relacion:

$$L_n(x)=\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^ne^x\right)$$

2.Los polinomios de laguerre satisfacen la siguiente relacion de recurrencia:

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

3. Ortogonalidad, los polinomios de laguerre son ortogonales en el intervalo [0,∞) con la funcion de peso $w(x) = x^k e^{-x}$

$$f(x) = \sum_{n=0} C_n L_n^v(x) \;\; donde \;\; C_n = \frac{n!}{(n+v)!} \int_0^{\infty} x^v e^{-x} f(x) L_m^v(x) dx$$

4. La siguiente integral es de gran importancia en el tratamiento del atomo de hidrogeno

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha+1} \left[L_n^{(\alpha)}\right]^2 dx = \frac{(n+\alpha)!}{n!}(2n+\alpha+1)$$

9.6. Funcion Gamma

la función gamma es una función que extiende el concepto de factorial a los números complejos y se define a continuacion:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1}\, e^{-x}\, dx$$

Si la parte real del número complejo z es positivo, entonces la integral converge absolutamente.

Una relacion muy importante es la siguiente:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

La relacion anterior es validad para cualquier numero $n > 0$, y se obtiene usando integracion por partes:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \left[-x^n e^{-x}\right]_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \rightarrow \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

Observando que $\Gamma(1) = 1$, y usando induccion se obtiene la relacion antes mencionada $\Gamma(n+1) = n!$

$para\ n = 0$

$$\Gamma(n+1) = \Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}dt = \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b e^{-t}dt = -\lim_{b\to\infty} e^{-t}\Big|_0^b = -\lim_{b\to\infty}(e^{-b}-1) = 1 = 0! = n!$$

$Ahora\ se\, asume\, es\, ciero\, para\, n\, en\, general$

$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$

$\Gamma(n+3) = (n+2)(n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)(n+2)n! = (n+2)!$

$\Gamma(n+p) = (n+p-1)(n+p-2)...\Gamma(n+1) = (n+p-1)!$

el valor más conocido, para un número no entero, de la función gamma, es cuando n=1/2 que es igual a :

$$\Gamma(n) = \int\limits_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx\ \ haciendo\, que\ x = y^2$$

$$\Gamma(n) = 2\int\limits_0^\infty y^{2n-1}e^{-y^2}dy\ haciendo\, que\, n = 1/2$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int\limits_0^\infty e^{-y^2}dy = \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}$$

Usando la propiedad de recursividad de la funcion gamma :

$$\Gamma(n+p) = (n+p-1)(n+p-2)...n\Gamma(n)$$

y utilizando la definicion del valor de $\Gamma(1/2)$ econtramos:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \left(\frac{1}{2}+1-1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$
$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$$

Ahora se mencionana otras propiedades importantes de la funcion gamma :

1.La funcion gamma no se encuentra definida para valores de n que sean enteros negativos

2. La aproximacion de stirling que sirve para calcular el factorial de un numero n muy grande es:

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{n\ln(x)-x} dx \;\; \textit{haciendo que } x = n + y$$

$$\ln(x) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{y}{n}\right) = \ln(n) + \frac{y}{n} - \frac{y^2}{2n^2} + \frac{y^3}{3n^3} - ...$$

sustituyendo la nueva expresion de logaritmo en la funcion orginal, y considerando que n es un numero suficientemente grande es decir tiende a infinito

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_{-n}^\infty \exp[n(\ln(n) + \frac{y}{n} - \frac{y^2}{2n^2} + \frac{y^3}{3n^3} - ...) - n - y]dy$$

$$n! \approx e^{n\ln(n)-n} \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2/(2n)} dy = e^{n\ln(n)-n}\sqrt{2\pi n} = \sqrt{2\pi n}(n^n e^{-n})$$

3. La n-ésima derivada de ax^b (donde n es un número natural) se puede ver de la siguiente manera:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(ax^b\right) = (b-n+1)\cdots(b-2)(b-1)\,bax^{b-n} = \frac{b!}{(b-n)!}ax^{b-n}$$

como $n! = \Gamma(n+1)$ entonces $\frac{d^n}{dx^n}\left(ax^b\right) = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b-n+1)}ax^{b-n}$ donde n puede ser cualquier número

Capítulo 10

Computadora

En este capitulo se enumera lista de codigo creado usando Mathematica, por lo complicado es escribir el codigo directamente se agregan en anexo los notebook impresos y solo se hace una breve descripcion de para que sirve cada codigo

10.1. Fourier Bessel

Las funciones de Bessel son ortogonales en el intervalo $0 < x < 1$, este codigo se usa para representar un pulso rectangular, aunque puede modificarse para representar otras funciones...

10.2. Fourier Serie

Una funcion puede representar usando cosenos y senos, esta codifo encuentra los coeficientes an y bn ,se muestran un ejemplo al representar la funcion tipo sierra en el intervalo [-1,1]

10.3. Laplace Serie

Otra serie importante usada para representar funciones con dependencia angular $F[\theta, \phi]$ usando esfericos harmonicos...

Ortogonalidad Funciones de Bessel

Texto creado por Oscar Guerrero Miramontes

Las funciones de Bessel de primera especie exiben la propiedad de ortogonalidad en el intervalo 0<x<1

In[1]:=
```
<< NumericalMath`BesselZeros`
```

A continuacion se muestra como encontrar los coeficientes que definen la serie en funcion de las funciones de Bessel de orden "v"

In[37]:=
```
v = 0;
p = 10;
Φ[x_] = 1;
zeros = BesselJZeros[0, p];
α[n_] := zeros[[n]]
```

Φ[x_]es la funcion que se quiere expander en serie de Fourier Bessel mientras que α son los zeros de la funcion de Bessel de primera especie con v=0

In[42]:=
```
m =
  Table[{c_{n-1}, n - 1, (2 / (BesselJ[v + 1, α[n]])^2) *
     NIntegrate[x * Φ[x] * BesselJ[v, α[n] * x], {x, 0, 0.5}]}, {n, 1, p}];
m // Together // TableForm
```

Out[43]//TableForm=

c_0	0	0.769756
c_1	1	0.661472
c_2	2	−0.282963
c_3	3	−0.464336
c_4	4	0.198712
c_5	5	0.378402
c_6	6	−0.160955
c_7	7	−0.327418
c_8	8	0.138625
c_9	9	0.292704

A continuacion se muestran los primeros 10 coeficientes de la serie, se usa NIntegrate para calcular numericamente el valor de la integral

Finalmente teniendo los coeficiente se procede a expander la funcion

Series de Fourier

Una funcion continua puede representarse mediante una serie de senos y cosenos esto es de gran importancia y tiene muchas aplicaciones

Para empezar el producto interno entre Cos[nx] e Sin[mx] en el intervalor {-π,π} es igual a cero

In[1]:=

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos}[n*x]*\text{Sin}[m*x]\,dx$$

Out[1]=

```
0
```

Esto significa que no hay forma de generar una funcion Cos[x] usando la funcion Sin[x] o viceversa en otra palabras son independientes uno respecto la otra

Otra relacion es la propiedad de ortogonalidad , cuando m=n el valor de la integral es igual a π en otro caso es cero

In[1]:=

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos}[n*x]*\text{Cos}[m*x]\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{Sin}[n*x]*\text{Sin}[m*x]\,dx$$

Y por tanto una funcion F[x] se expande de la siguiente forma

$$F[x] = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,\text{Cos}[nx] + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\text{Sin}[nx]$$

El valor de los coefcientes se encuentra de la siguiente forma :

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \Phi[x]\,\text{Cos}\left[\frac{n\pi x}{L}\right] dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \Phi[x]\,\text{Sin}\left[\frac{n\pi x}{L}\right] dx$$

Usemos un simple ejemplo como usar esta serie : Generemos la funcion de sierra...

Serie de Laplace

Texto creado por : Oscar Guerrero Miramontes

La serie de laplace es la representacion de una funcion que depende de θ y ϕ en esfericos Harmonicos, A continuacion se da un ejemplo

Primero definimos la funcion que se desea expander :

In[7]:=
```
F[θ_, ϕ_] = Sin[θ] * Cos[ϕ] + Sin[θ] * Sin[ϕ] + 2 * Cos[θ];
```

Luego imponer el valor de l en el cual se desea expander la serie, para este caso el valor de l=1 pero puede cambiarse y debe cambiarse hasta que los coeficientes sean todos ceros en le expansion por medio de los esfericos harmonicos

In[8]:=
```
l = 1;
p = Table[SphericalHarmonicY[l, m, θ, ϕ], {m, -l, l}];
u = ComplexExpand[Conjugate[p]];
```

Calculamos los esfericos harmonicos para el rango l y -l<m<l, y el conjugado de estas funciones

Ahora usando la propiedad de Ortogonalidad se calcula los coeficientes de la serie, en caso la integral no este definida es posible usar un metodo numerico , usando el comando NIntegrate[]

In[16]:=
```
m = Table[{a_n, l, n - (l + 1), Y[l, n - (l + 1)],
    Integrate[Integrate[u[[n]] * F[θ, ϕ] * Sin[θ], {θ, 0, π}], {ϕ, 0, 2 * π}]},
   {n, 1, 2 * l + 1}];
TableForm[m,
 TableHeadings → {None, {"const", "l", "m", "A.esferico", "valor"}}]
```

Out[17]//TableForm=

const	l	m	A.esferico	valor
a_1	1	-1	Y[1, -1]	$(1+i)\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$
a_2	1	0	Y[1, 0]	$4\sqrt{\frac{\pi}{3}}$
a_3	1	1	Y[1, 1]	$(-1+i)\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$

Observamos el valor de los coeficientes, la segunda y la tercera columna es el valor que posse l e m para ese harmonico esferico

Por ultimo observamos que al expander en la serie el valor no das cero y eso significa que la serie en harmonicos y la funcion orginal son iguales

Bibliografía

[1] Granville, *Calculo diferencial e integral*, editorial LIMUSA

[2] Dennis D. Berkey, Paul Blanchard, *Calculos*, Saunders College Publishing

[3] William E. Boyce, *Elementary Differential Equations*, Wiley John and Sons

[4] George B. Arfken, Hans J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press

[5] Richard Bronson, *Schaum's Outline of Differential Equations*, McGraw-Hill

[6] Ireneo Peral Alonso, *Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Addison Wesley, Universidad Autónoma de Madrid, 1995