

POLINOMIOS

Escrito por **Prof. A. Rodrigo Farinha**

Publicado en [Octubre de 2010] en mi sitio

www.arfsoft.com.uy

Queda absolutamente prohibido el uso total o parcial de este material sin dar crédito a su autor. Solamente se puede imprimir y sin modificación alguna.

ÍNDICE

Definición de Polinomio	3
Operaciones con polinomios	4
Suma	4
Resta	5
Multiplicación	6
División	7
Polinomios Divisibles	8
Esquema de Ruffini	8
Teorema del Resto	9
Teorema de Descartes	10
Raíces de un polinomio	11
Cómo obtener una fórmula a partir de un dato expresado en forma verbal o gráfica	11
Raíces evidentes	12
Cómo hallar la raíz de un polinomio de 1º grado	12
Cómo hallar las raíces de un polinomio de 2º grado	12
Cómo hallar las raíces de un polinomio de 3º grado	12
Teorema de Descomposición Factorial	13
APÉNDICE	14
Función Lineal y Función Cuadrática	15
Relaciones entre Raíces y Coeficientes de un polinomio de 2º grado	16
Raíces comunes a dos polinomios	17

Definición de Polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0 \in R$$

$$a_n \neq 0$$

$$n \in N$$

n	es el grado del polinomio
$a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_2 x^2, a_1 x, a_0$	son los términos del polinomio
$a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$	son los coeficientes del polinomio
a_n	es el coeficiente principal del polinomio
a_0	es el término independiente del polinomio

Ejemplos

$$A(x) = -2x^3 + 6x^2 + x - 5$$

$$B(x) = -x^2 + 3x + 2$$

$$C(x) = 7x^5 + 2x^4 - 6x^2 + 14x$$

grado	3	grado	2	grado	5
coeficientes	-2 6 1 -5	coeficientes	-1 3 2	coeficientes	7 2 0 -6 14 0
coeficiente principal	-2	coeficiente principal	-1	coeficiente principal	7
término indep.	-5	término indep.	2	término indep.	0

Algunos conceptos básicos

Grado de un polinomio: es el mayor exponente de la variable x (es el **n**)

Polinomio nulo: $P(x) = 0$ (todos sus coeficientes valen 0 y no tiene grado)

Polinomio completo: ninguno de sus coeficientes vale 0 (“tiene todos sus términos”). Ej: A y B

Polinomio incompleto: por lo menos uno de sus coeficientes vale 0 (“faltan términos”). Ej: C

A los polinomios se los denomina con **letras mayúsculas**.

Operaciones con polinomios**SUMA**

Se suman los coeficientes de los términos **de igual exponente**.

Ejemplos:

$$1) \quad A(x) = -5x^3 + 3x^2 - 20x + 12$$

$$B(x) = x^3 - 5x^2 - 5x - 1$$

$$A(x) + B(x) = (-5x^3 + 3x^2 - 20x + 12) + (x^3 - 5x^2 - 5x - 1)$$

$$A(x) + B(x) = \boxed{-5x^3} \quad \overline{+3x^2} \quad \widehat{-20x} \quad \widehat{+12} \quad \boxed{+x^3} \quad \overline{-5x^2} \quad \widehat{-5x} \quad \widehat{-1} =$$

$$A(x) + B(x) = \boxed{-4x^3} \quad \overline{-2x^2} \quad \widehat{-25x} \quad \widehat{+11}$$

$$A(x) + B(x) = -4x^3 - 2x^2 - 25x + 11$$

$$2) \quad A(x) = 6x^3 + 8x^2 - 2x + 5$$

$$B(x) = -4x^3 - 8x^2 + 4$$

$$A(x) + B(x) = (6x^3 + 8x^2 - 2x + 5) + (-4x^3 - 8x^2 + 4)$$

$$A(x) + B(x) = \boxed{6x^3} \quad \overline{+8x^2} \quad \widehat{-2x} \quad \widehat{+5} \quad \boxed{-4x^3} \quad \overline{-8x^2} \quad \widehat{+4}$$

$$A(x) + B(x) = \boxed{2x^3} \quad \overline{+0x^2} \quad \widehat{-2x} \quad \widehat{+9}$$

$$A(x) + B(x) = 2x^3 - 2x + 9$$

RESTA

Se le **suma** al primer polinomio el **opuesto al segundo**.

$$A - B = A + (-B) \quad \text{siendo } -B \text{ el polinomio opuesto de } B$$

Ejemplos:

$$1) \quad A(x) = -5x^3 + 3x^2 - 20x + 12$$

$$B(x) = x^3 - 5x^2 - 5x - 1$$

$$A(x) - B(x) = (-5x^3 + 3x^2 - 20x + 12) - (x^3 - 5x^2 - 5x - 1)$$

$$A(x) - B(x) = (-5x^3 + 3x^2 - 20x + 12) + (-x^3 + 5x^2 + 5x + 1)$$

$$A(x) - B(x) = \boxed{-5x^3} \quad \overline{+3x^2} \quad \widehat{-20x} \quad \widehat{+12} \quad \boxed{-x^3} \quad \overline{+5x^2} \quad \widehat{+5x} \quad \widehat{+1} =$$

$$A(x) - B(x) = \boxed{-6x^3} \quad \overline{+8x^2} \quad \widehat{-15x} \quad \widehat{+13}$$

$$A(x) - B(x) = -6x^3 + 8x^2 - 15x + 13$$

$$2) \quad A(x) = 6x^3 + 8x^2 - 2x + 5$$

$$B(x) = -4x^3 - 8x^2 + 4$$

$$A(x) - B(x) = (6x^3 + 8x^2 - 2x + 5) - (-4x^3 - 8x^2 + 4)$$

$$A(x) - B(x) = (6x^3 + 8x^2 - 2x + 5) + (+4x^3 + 8x^2 - 4)$$

$$A(x) - B(x) = \boxed{6x^3} \quad \overline{+8x^2} \quad \widehat{-2x} \quad \widehat{+5} \quad \boxed{+4x^3} \quad \overline{+8x^2} \quad \widehat{-4}$$

$$A(x) - B(x) = \boxed{10x^3} \quad \overline{+16x^2} \quad \widehat{-2x} \quad \widehat{+1}$$

$$A(x) - B(x) = 10x^3 + 16x^2 - 2x + 1$$

MULTIPLICACIÓN

Se aplica la Propiedad Distributiva
(se multiplica cada término de A por cada término de B y luego se suma todo)

Recordar que para multiplicar 2 términos: se **multiplican los coeficientes** (incluyendo sus signos) y se **suman los exponentes**.

Ejemplo:

$$A(x) = -2x^3 + 5x^2 - 4x + 2$$

$$B(x) = 2x^2 + 6x - 3$$

$$A(x).B(x) = (-2x^3 + 5x^2 - 4x + 2).(2x^2 + 6x - 3)$$

$$(-2x^3).(2x^2 + 6x - 3) = -4x^5 - 12x^4 + 6x^3$$

$$(+5x^2).(2x^2 + 6x - 3) = +10x^4 + 30x^3 - 15x^2$$

$$(-4x).(2x^2 + 6x - 3) = -8x^3 - 24x^2 + 12x$$

$$(+2).(2x^2 + 6x - 3) = +4x^2 + 12x - 6$$

$$A(x).B(x) = \boxed{-4x^5} \quad \overline{-12x^4} \quad \widehat{+6x^3} \quad \overline{+10x^4} \quad \widehat{+30x^3} \quad \overline{-15x^2} \quad \widehat{-8x^3} \quad \overline{-24x^2} \quad \underline{\underline{+12x}} \quad \overline{+4x^2} \quad \underline{\underline{+12x}} \quad \widetilde{-6}$$

$$A(x).B(x) = \boxed{-4x^5} \quad \overline{-2x^4} \quad \widehat{+28x^3} \quad \overline{-35x^2} \quad \underline{\underline{+24x}} \quad \widetilde{-6}$$

$$A(x).B(x) = -4x^5 - 2x^4 + 28x^3 - 35x^2 + 24x - 6$$

Observación:

El grado del polinomio resultante es la suma de los grados de los polinomios que se multiplicaron.

DIVISIÓN

Dividir un polinomio **P (dividendo)** entre otro polinomio **D (divisor)** consiste en hallar un polinomio **Q (cociente)** y un polinomio **R (resto)** que cumplan 2 condiciones:

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

$$\text{grado de } R(x) < \text{grado de } D(x) \quad \text{o} \quad R(x) = 0$$

Se suele expresar la división con el siguiente esquema (similar a la división entre números):

$$P(x) \quad \overline{) D(x)}$$

$$R(x) \quad Q(x)$$

IMPORTANTE

El divisor debe ser no nulo ($D(x) \neq 0$)

$$\text{grado de } P \geq \text{grado de } D$$

Ejemplo: $P(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 23$

$$D(x) = x^2 + 4$$

$$\begin{array}{r} \cancel{2x^4} - x^3 + 2x^2 - x - 23 \quad \overline{) \cancel{x^2} + 4} \\ \underline{-2x^4} - 8x^2 - 6 \end{array}$$

$$\rightarrow \frac{2x^4}{x^2} = \boxed{2x^2}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{-x^3} - 6x^2 - x - 23 \\ \underline{+x^3} + 4x \end{array}$$

$$\rightarrow \frac{-x^3}{x^2} = \boxed{-x}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{-6x^2} + 3x - 23 \\ \underline{+6x^2} + 24 \end{array}$$

$$\rightarrow \frac{-6x^2}{x^2} = \boxed{-6}$$

$$3x + 1$$

Entonces: $Q(x) = 2x^2 - x - 6$

$$R(x) = 3x + 1$$

Se puede, para verificar que Q y R son los correctos, comprobar: $P = D \cdot Q + R$

Polinomios Divisibles

$P(x)$ es **divisible** entre $D(x)$ si y solo si **el resto de su división es el polinomio nulo ($R = 0$)**.

Es decir que:

$$P(x) \text{ es divisible entre } D(x) \Leftrightarrow \begin{array}{r} P(x) \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} | \\ \hline D(x) \\ Q(x) \end{array} \quad (\text{dicho de otra forma: } P(x) = D(x) \cdot Q(x))$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} \cancel{5x} + 10 \quad | \quad x + 2 \\ \cancel{-5x} - 10 \quad 5 \\ \hline \end{array}$$

$$0 \rightarrow R = 0 \Rightarrow 5x + 10 \text{ es divisible entre } x + 2$$

ESQUEMA DE RUFFINI

Sirve para dividir polinomios más fácilmente **cuando el divisor es de la forma $x - \alpha$**

Forma general:

$$\begin{array}{c|c} \text{coeficientes del dividendo} & \\ \hline \alpha & \\ \hline \text{coeficientes del cociente} & R \end{array}$$

Los datos que siempre hay que ingresar en el esquema son *los coeficientes del polinomio dividendo* (en la parte superior del esquema) y α (en la casilla izquierda del esquema).

El esquema calcula los coeficientes del polinomio **cociente** (cuyo grado siempre será uno menos que el grado del dividendo) y el **resto** (que siempre será un número ya que el divisor es de grado 1).

Ejemplos:

- 1) Hallar cociente y resto resultantes de dividir

$$P(x) = 2x^3 - 6x + 5 \text{ entre } x - 2$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow \alpha = 2$$

	2	0	-6	5
2		4	8	4
	2	4	2	9

$$Q(x) = 2x^2 + 4x + 2$$

$$R = 9$$

- 2) Hallar cociente y resto resultantes de dividir

$$P(x) = -x^4 + 5x^2 - 6x + 7 \text{ entre } x + 3$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3 \Rightarrow \alpha = -3$$

	-1	0	5	-6	7
-3		3	-9	12	-18
	-1	3	-4	6	-11

$$Q(x) = -x^3 + 3x^2 - 4x + 6$$

$$R = -11$$

Teorema del Resto

$$H) \begin{array}{l} P(x) \quad |x-\alpha \\ R \quad Q(x) \end{array} \quad T) \quad P(\alpha) = R$$

Demostración :

por Hipótesis : $P(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x) + R$ (ver definición de división)

evaluando en $x = \alpha$: $P(\alpha) = (\alpha - \alpha) \cdot Q(\alpha) + R$

$$P(\alpha) = 0 \cdot Q(\alpha) + R$$

$$P(\alpha) = 0 + R$$

$$P(\alpha) = R \quad (\text{SE LLEGÓ A LA TESIS})$$

Ejemplo:

Sea $P(x) = 5x^2 + 4x - 2$

Si dividimos $P(x)$ entre $x - 1$ (hay que hacer la división), el resto es 7.

Es decir que:
$$\boxed{\begin{array}{l} P(x) \quad |x-1 \\ 7 \quad Q(x) \end{array}}$$

Y al evaluar $P(x)$ en 1 (en este caso $\alpha=1$), podemos comprobar que se cumple lo afirmado por la tesis del teorema: $\boxed{P(1)=7}$

Teorema de Descartes

$$P(x) \text{ es divisible entre } (x-\alpha) \Leftrightarrow P(\alpha) = 0$$

Para demostrar esto, hay que demostrar el Directo (\Rightarrow) y el Recíproco (\Leftarrow):

DIRECTO

$$H) P(x) \text{ es divisible entre } (x-\alpha) \quad T) P(\alpha) = 0$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \text{por Hipótesis: } P(x) &= (x-\alpha).Q(x) && (\text{ver definición de polinomios divisibles}) \\ \text{evaluando en } x = \alpha: P(\alpha) &= (\alpha-\alpha).Q(\alpha) \\ P(\alpha) &= 0.Q(\alpha) \\ P(\alpha) &= 0 && (\text{SE LLEGÓ A LA TESIS DEL DIRECTO}) \end{aligned}$$

RECÍPROCO

$$H) P(\alpha) = 0 \quad T) P(x) \text{ es divisible entre } (x-\alpha)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \text{dividamos } P \text{ entre } (x-\alpha): \quad P(x) &\overline{) x-\alpha} \\ &\quad R \quad Q(x) \\ \text{o sea que se cumplirá que: } P(x) &= (x-\alpha).Q(x) + R && (\text{ver definición de división}) \\ \text{evaluando en } x = \alpha: P(\alpha) &= (\alpha-\alpha).Q(\alpha) + R \\ P(\alpha) &= 0.Q(\alpha) + R \\ P(\alpha) &= 0 + R \\ P(\alpha) &= R \\ \text{por Hipótesis: } P(\alpha) &= 0 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} P(\alpha) &= R \\ \text{por Hipótesis: } P(\alpha) &= 0 \end{aligned}} \right\} \Rightarrow R = 0$$

por definición de divisibilidad de polinomios: $R = 0 \Rightarrow P(x)$ es divisible entre $(x-\alpha)$
(SE LLEGÓ A LA TESIS DEL RECÍPROCO)

Ejemplo:

$$\text{Sea } P(x) = -3x^2 + 3x + 6$$

Si dividimos $P(x)$ entre $x-2$ (hay que hacer la división), el resto es 0.

Es decir que: $P(x)$ es divisible entre $x-2$

Y al evaluar $P(x)$ en 2 (en este caso $\alpha=2$), podemos comprobar

que se cumple lo afirmado por el teorema: $P(2) = 0$

Raíces de un polinomio

Son los valores de la variable x para los cuales el valor numérico del polinomio vale 0.

Es decir que

$$\alpha \text{ es raíz de } P(x) \Leftrightarrow P(\alpha) = 0$$

Ejemplos: $P(x) = x^3 - 3x + 18$ Investigar si 2 y -3 son raíces de ese polinomio.

$$P(2) =$$

$$P(-3) =$$

Cuando se pide “resolver $P(x) = 0$ ” significa **hallar las raíces de $P(x)$**

Siempre un polinomio de grado n tiene n raíces (no necesariamente todas tienen que ser reales: puede suceder que algunas sean reales y otras sean “imaginarias”, pero en total siempre son n raíces)

Cómo obtener una fórmula a partir de un dato expresado en forma verbal o gráfica

DATO

FÓRMULA

<p>"α es raíz de $P(x)$"</p> <p>"$P(x)$ es divisible entre $(x - \alpha)$"</p> <p>"$P(x)$ dividido entre $(x - \alpha)$ dá resto 0"</p> <p>La gráfica de una función de expresión $P(x)$ corta al eje Ox en α</p>	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\}$	$\Rightarrow P(\alpha) = 0$
---	---	-----------------------------

<p>"$P(x)$ dividido entre $(x - \beta)$ dá resto R"</p>	$\Rightarrow P(\beta) = R$
--	----------------------------

<p>El punto de coordenadas (α, β) pertenece a la gráfica de una función de expresión $P(x)$</p>	$\Rightarrow P(\alpha) = \beta$
--	---------------------------------

<p>La gráfica de una función de expresión $P(x)$ corta al eje Oy en k</p>	$\Rightarrow P(0) = k$
---	------------------------

$\left(\begin{array}{l} k \text{ es el término independiente} \\ \text{del polinomio} \end{array} \right)$

Raíces Evidentes

Se le llaman raíces evidentes de un polinomio a -1 , 0 y 1 porque para chequear si cierto polinomio posee alguna de esas raíces *no es necesario evaluarlo y ver si da 0*. Hay **reglas** que permiten, simplemente observando los coeficientes del polinomio, saber si alguna de esas es raíz del polinomio.

El polinomio no tiene término independiente	→ una de sus raíces es 0
La suma de los coeficientes del polinomio da 0	→ una de sus raíces es 1
La suma de los coeficientes de los términos de exponente par es igual a la suma de los coeficientes de los términos de exponente impar	→ una de sus raíces es -1

Ejemplos:

$$\begin{array}{lll}
 P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x & \rightarrow \text{no tiene término independiente} & \rightarrow \text{una de sus raíces es } 0 \\
 P(x) = -x^3 + 2x^2 + 11x - 12 & \rightarrow -1 + 2 + 11 - 12 = 0 & \rightarrow \text{una de sus raíces es } 1 \\
 P(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10 & \rightarrow 1 - 13 = -2 - 10 & \rightarrow \text{una de sus raíces es } -1
 \end{array}$$

Cómo hallar la raíz de un polinomio de 1° grado

$$P(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$$

Se iguala el polinomio a 0 y luego se despeja la x.

Cómo hallar las raíces de un polinomio de 2° grado

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Cómo hallar las raíces de un polinomio de 3° grado

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

Si se da como dato alguna de sus raíces:

1. Se “baja el grado del polinomio por Ruffini” en esa raíz dada.
2. Quedó un polinomio de 2° grado → se obtienen las otras 2 raíces (ver caso anterior)

Si NO se da como dato alguna de sus raíces:

1. Buscar una raíz **evidente**.
2. Se “baja el grado del polinomio por Ruffini” en esa raíz evidente.
3. Quedó un polinomio de 2° grado → se obtienen las otras 2 raíces (ver caso anterior)

TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL

Un polinomio $P(x)$ de grado n se puede expresar de la siguiente forma:

$$P(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

siendo... a el **coeficiente principal** del polinomio
 x_1, x_2, \dots, x_n las **n raíces** del polinomio

Ejemplos:

1) Hallar la descomposición factorial de $P(x) = -2x^2 - 4x + 6$

Las raíces de ese polinomio son 1 y -3, así que aplicando el TDF: $P(x) = -2(x-1)(x-(-3))$
 $P(x) = -2(x-1)(x+3)$

Observación: si se desarrolla esa expresión (aplicando propiedad distributiva), se obtiene la versión original del polinomio. $-2(x-1)(x+3) = -2x^2 - 4x + 6$

2) Hallar un polinomio $A(x)$ sabiendo que tiene raíces -2 y 3 ; y que $A(2) = 12$

$$\text{raíz: } -2 \Rightarrow \text{factor: } (x - \text{raíz}) = (x - (-2)) = (x + 2)$$

$$\text{raíz: } 3 \Rightarrow \text{factor: } (x - \text{raíz}) = (x - 3)$$

$$\text{Aplicando TDF: } A(x) = a(x+2)(x-3) \quad (*)$$

$$\text{Para hallar el valor de } a \text{ se usa el dato } A(2)=12: A(2) = a(2+2)(2-3)$$

$$A(2) = a(4)(-1)$$

$$A(2) = -4a$$

$$-4a = 12 \Rightarrow a = -3$$

Se sustituye el valor hallado de a en $(*)$ y se desarrolla:

$$A(x) = -3(x+2)(x-3)$$

.....

$$A(x) = -3x^2 + 3x + 18$$

Para estar seguros de que ese es el polinomio correcto,

se puede verificar que cumple con todos los datos dados: $A(-2) = 0$

$$A(3) = 0$$

$$A(2) = 12$$

APÉNDICE

Función Lineal

$$f(x) = ax + b \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$$

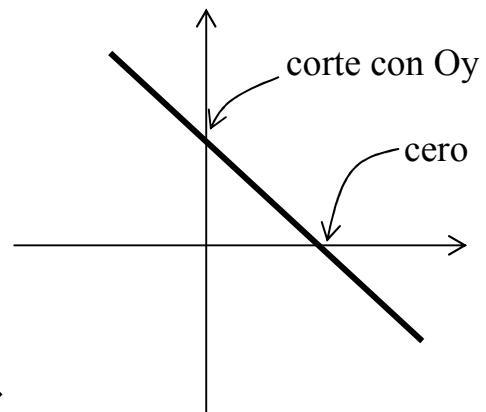
✓ Representación Gráfica: **recta**

✓ Dominio: \mathbb{R}

✓ Cero: $x = -\frac{b}{a}$

✓ Corte con Oy: $y = b$

✓ Crecimiento:

$$\text{si } a \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{recta creciente} \\ < 0 \Rightarrow \text{recta decreciente} \end{cases}$$


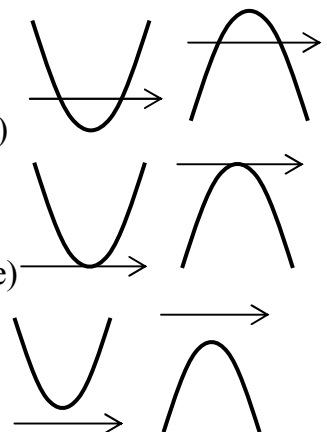
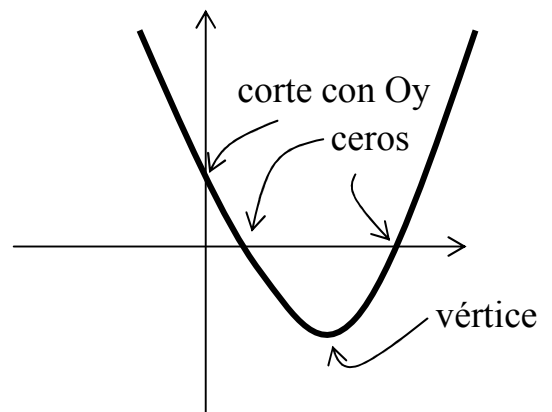
Función Cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

✓ Representación Gráfica: **parábola**

✓ Dominio: \mathbb{R}

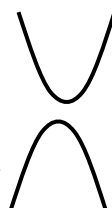
✓ Ceros:

$$\text{si } b^2 - 4ac \begin{cases} > 0 \Rightarrow 2 \text{ ceros} & x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ & (\text{la parábola corta al eje } 0x \text{ en 2 puntos distintos}) \\ = 0 \Rightarrow 1 \text{ cero doble} & x = -\frac{b}{2a} \\ & (\text{la parábola corta al eje } 0x \text{ en un solo punto: el vértice}) \\ < 0 \Rightarrow \text{no tiene ceros (la parábola no corta al eje } 0x) \end{cases}$$


✓ Corte con Oy: $y = c$

✓ Vértice: $x_v = -\frac{b}{2a}$ $y_v = -\frac{b^2}{4a} + c$

✓ Concavidad:

$$\text{si } a \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{positiva} \\ < 0 \Rightarrow \text{negativa} \end{cases}$$


Relaciones entre Raíces y Coeficientes de un polinomio de 2º grado

Sea un polinomio de 2º grado cualquiera: $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) con raíces reales α y β

Aplicando el Teorema de Descomposición Factorial visto anteriormente, se cumple:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

Aplicando distributiva en el lado derecho de la igualdad:

$$ax^2 + bx + c = (ax - a\alpha)(x - \beta)$$

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - ax\beta - a\alpha x + a\alpha\beta$$

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(\alpha + \beta)x + a\alpha\beta$$

Por identidad de polinomios, los coeficientes de los términos de igual exponente son iguales:

$$\boxed{ax^2} + \boxed{bx} + \boxed{c} = \boxed{ax^2} - \boxed{a(\alpha + \beta)x} + \boxed{a\alpha\beta}$$

Coeficientes de x^2 : $a = a$ (igualdad trivial)

Coeficientes de x : $-a(\alpha + \beta) = b \rightarrow \boxed{\alpha + \beta = -\frac{b}{a}}$ suma de las raíces

Términos independientes: $a\alpha\beta = c \rightarrow \boxed{\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}}$ producto de las raíces

Ejemplo:

$$P(x) = 2x^2 - 6x - 20$$

Sus raíces son $\left(\text{aplicando } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \alpha = 5 \quad \beta = -2$

Entonces:

$$\alpha = 5 \quad \beta = -2 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 5 + (-2) = 5 - 2 = \boxed{3} \\ \alpha \cdot \beta = (5) \cdot (-2) = \boxed{-10} \end{cases}$$

$$a = 2 \quad b = -6 \quad c = -20 \rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{2} = -(-3) = \boxed{3} \\ \frac{c}{a} = \frac{-20}{2} = \boxed{-10} \end{cases}$$

Raíces comunes a dos polinomios

Primer Teorema

Si una raíz es común a dos polinomios, es también raíz de cualquier combinación lineal de esos polinomios.

H) α es raíz de $A(x)$ y de $B(x)$

T) α es raíz de $k.A(x) + p.B(x)$ ($k \in R$, $p \in R$, $k^2 + p^2 \neq 0$)

Demostración:

Por hipótesis: α es raíz de $A(x) \Rightarrow A(\alpha) = 0$

α es raíz de $B(x) \Rightarrow B(\alpha) = 0$

Sea el polinomio: $C(x) = k.A(x) + p.B(x)$ (k y p reales cualesquiera no nulos simultáneamente)

Evaluándolo en $x = \alpha$: $C(\alpha) = k.A(\alpha) + p.B(\alpha) = k.0 + p.0 = 0 + 0 = 0$

Se llegó a que $C(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha$ es raíz de $C(x)$ (TESIS)

Segundo Teorema

Si una raíz es común a dos polinomios, es también raíz del resto de la división de esos polinomios.

H) α es raíz de $A(x)$ y de $B(x)$

$\text{gr}(A) \geq \text{gr}(B)$

T) α es raíz de $R(x)$ (resto de dividir A y B)

Demostración:

Por hipótesis: α es raíz de $A(x) \Rightarrow A(\alpha) = 0$

α es raíz de $B(x) \Rightarrow B(\alpha) = 0$

Se dividen los polinomios:
$$\begin{array}{r} A(x) \overline{) B(x)} \\ R(x) \quad Q(x) \end{array}$$

En toda división de polinomios se cumple: $A(x) = B(x).Q(x) + R(x)$

Evaluando esa expresión en $x = \alpha$: $A(\alpha) = B(\alpha).Q(\alpha) + R(\alpha)$

$$0 = 0.Q(\alpha) + R(\alpha)$$

$$0 = 0 + R(\alpha)$$

$$0 = R(\alpha)$$

Se llegó a que $R(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha$ es raíz de $R(x)$ (TESIS)