CAPÍTULO III

MOMENTO DE INERCIA EN ÁREAS PLANAS

Este capítulo comprende diversas propiedades geométricas de secciones (para casos prácticos, secciones de vigas) siendo la más importante el momento de inercia. Entre otras propiedades estudiadas están los conceptos de centroide, radio de giro y el teorema de Steiner o de los ejes paralelos.

3.1 CENTROIDE

Antes de poder empezar a definir el concepto de momento de inercia es necesario entender completamente lo que es un centroide y cómo se obtiene. El centroide de un área se refiere al punto que define el centro geométrico del área.

El enfoque dado al estudio del centroide es ejemplificar cómo se obtiene el centroide de una sección compuesta por diferentes áreas geométricas. Puesto que el concepto básico no necesita gran atención por su simplicidad, se empieza por resolver un ejemplo de una sección compuesta.

Para fines prácticos, el paquete estudia una sección transversal que se obtiene de una viga cargada mediante una animación (Figura 3.1 y 3.2). Esto para captar la atención del usuario y vea alguna de las aplicaciones inmediatas del concepto.

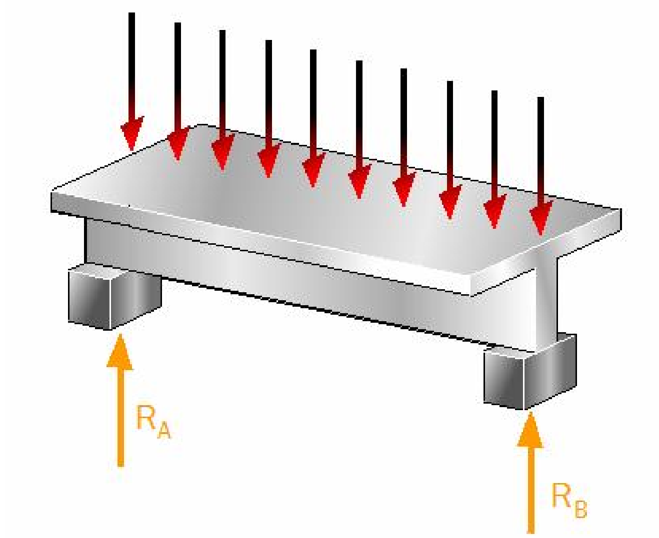


Figura 3.1 Viga

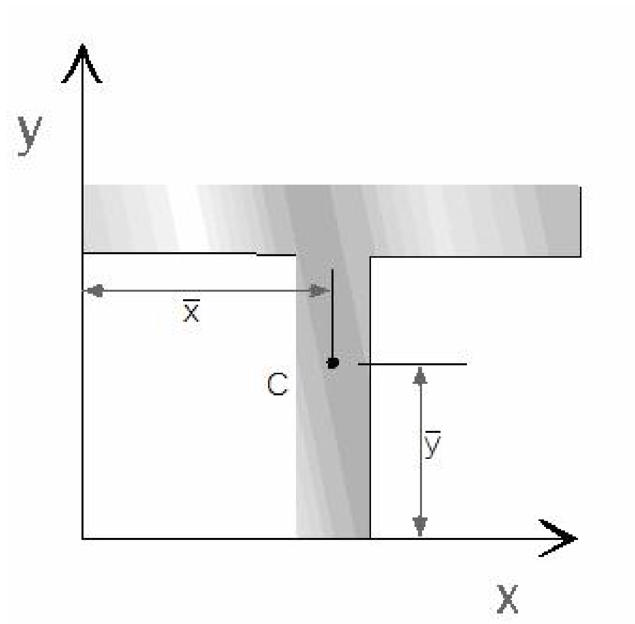


Figura 3.2 Sección transversal de viga

Obtenida la sección, se divide en áreas sencillas, manejando diferentes colores para cada una y así poder distinguirlas fácilmente. A continuación se presentan las dimensiones de cada área, cada dato de un color diferente, lo cual será de ayuda posteriormente (Figura 3.3).

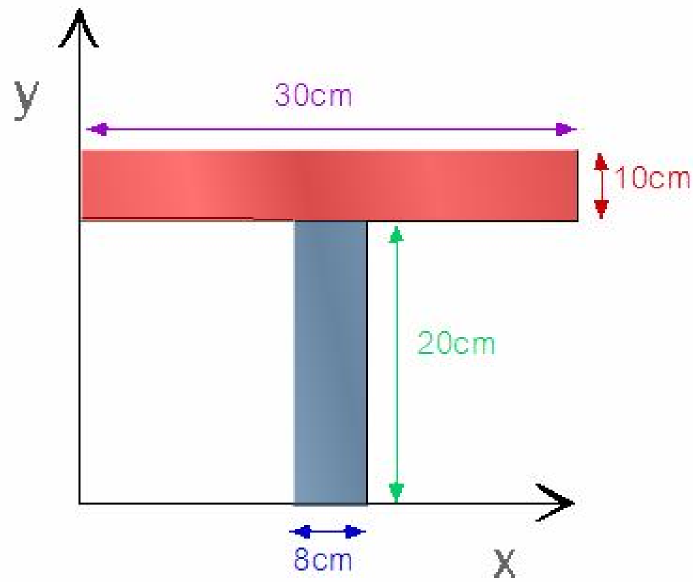


Figura 3.3 División de la sección

Se le da la opción al usuario de elegir qué respecto a que eje desea obtener el centroide. Una vez que este selecciona una opción aparece el eje de referencia necesario. También se presentan la distancia de los centroides de cada área individual hacia el eje (Figura 3.4).

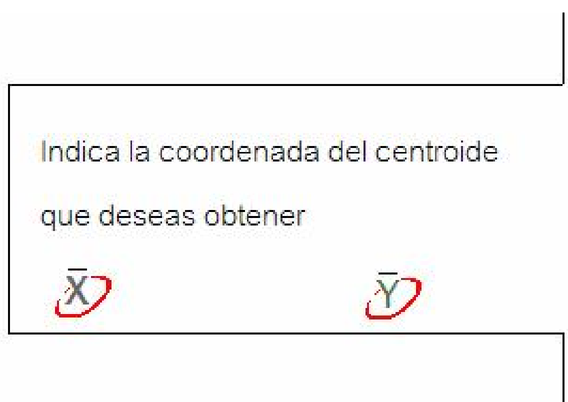


Figura 3.4 Punto de decisión

Aparece la demostración de la fórmula de centroide de áreas compuestas:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \bar{x}_i A_i}{\Sigma A_i}$$

Los momentos estáticos del área total del eje x/y deberán ser igual a la sumatoria de momentos estáticos de las áreas parciales respecto al mismo eje. Seguido de esto se visualiza la expresión necesaria para obtener el centroide deseado.

Al aplicar la expresión del centroide en el paquete se observa cómo los datos son arrastrados desde la figura de la sección transversal hasta la fórmula. Con ayuda de los colores el usuario puede ubicar de dónde proviene cada dato y así comprenderá más rápido cómo debe usarse la expresión (Figura 3.5).

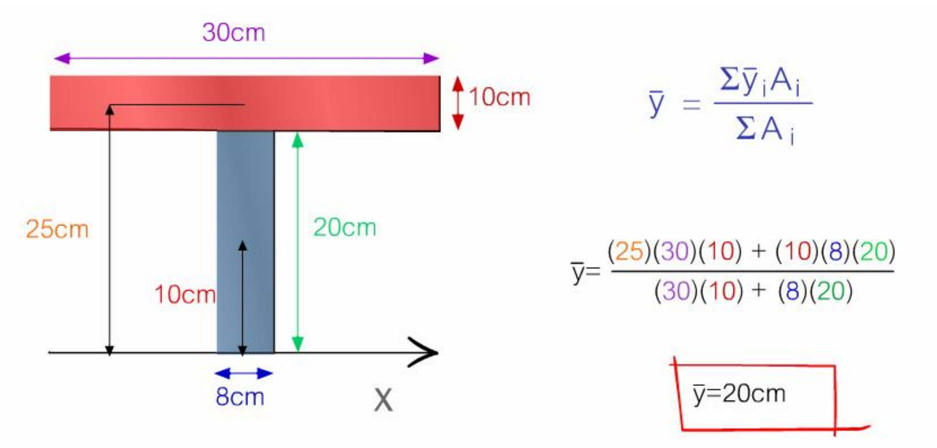


Figura 3.5 Obtención la coordenada y del centroide

Terminada la obtención de un centroide, el usuario vuelve a encontrar la opción para decidir si desea ver el ejemplo del centroide respecto al otro eje o seguir a otro tema.

3.2 MOMENTO DE INERCIA

La integral

$$I_x = \int_A y^2 \, dA$$

representa el momento de inercia respecto al eje *x*. Popov dice:

> " La integral depende sólo de las propiedades geométricas del área transversal. En mecánica esta cantidad lleva el nombre de momento de inercia (o momento de segundo orden) del área de la sección respecto al eje centroidal, cuando y se mide desde tal eje. Es una constante definida para la forma del área en particular y se designa por I" (1982).

El paquete trata de la manera más práctica posible el concepto de momento de inercia, puesto que es una propiedad geométrica y sin ninguna representación física

Para iniciar se toma la sección transversal de una viga y en ella se definen dA y y (Figura 3.6). Posteriormente, al momento de realizar la integral, el área de la viga se va fraccionando, lo que representa los diferentes dA que forman parte de la integral (Figura 3.7), para cada uno de estos, dA implica una "y" nueva. Como ayuda visual al realizar la integral, las expresiones de Ix e Iy se van "llenando" de tinta roja, expresando que hasta que se tomen en cuenta todos los dA el Ix estará completo. Al mismo tiempo, la sección de la viga se va tornando roja (Figura 3.8).

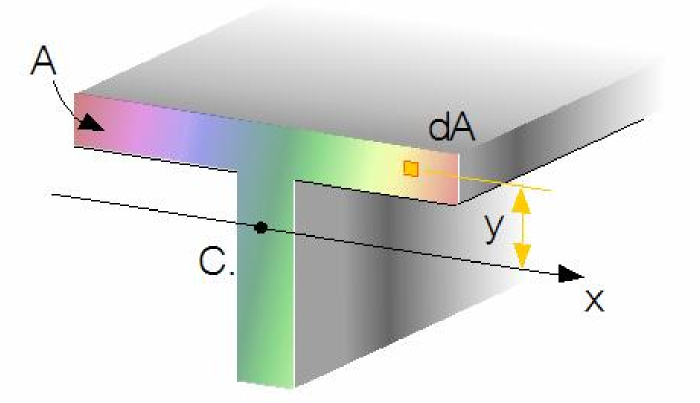


Figura 3.6 Variables que participan en la integral $I_x = \int_A y^2\, dA$

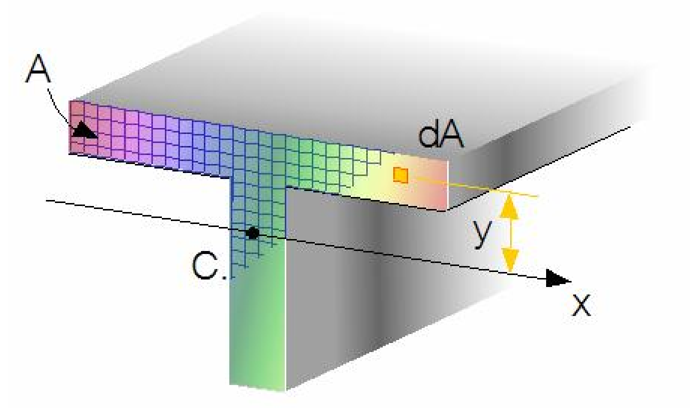


Figura 3.7 Se presentan todos los dA que se pueden encontrar en el área.

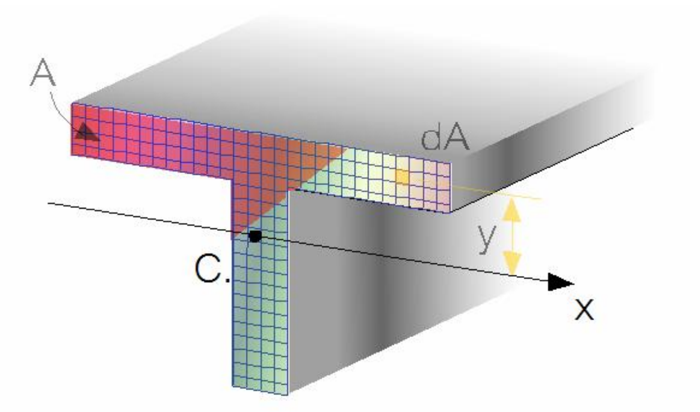


Figura 3.8 Al momento de integrar

Como es sabido, estas integrales ya han sido resueltas para las figuras con geometría básica: rectángulo, círculo, triángulo. Estas expresiones quedan expresadas en función de variables que representan las dimensiones del elemento. En la vida real la aplicación de estas fórmulas resulta ser la manera más práctica de obtener los momentos de inercia.

Por lo tanto, estas fórmulas se le presentan al usuario en un pequeño menú sencillo donde tendrá que escoger entre la figura que desee saber su fórmula (Figura 3.9), una vez seleccionada, aparece la fórmula (Figura 3.10) y puede regresar al pequeño menú para elegir otra figura o continuar a otro tema

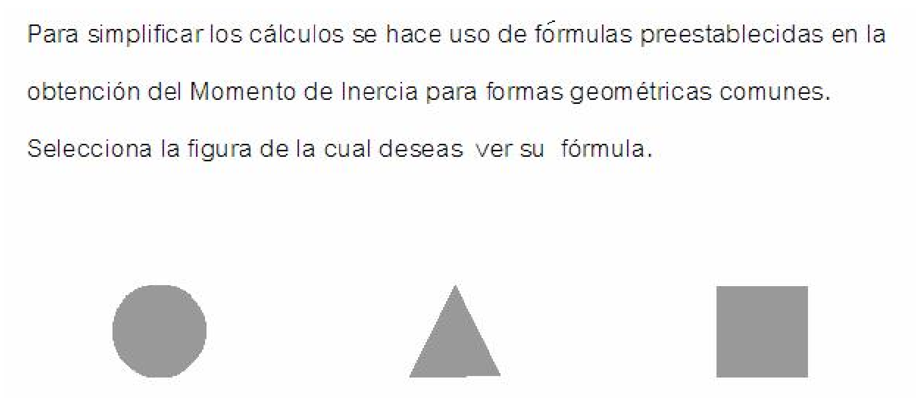
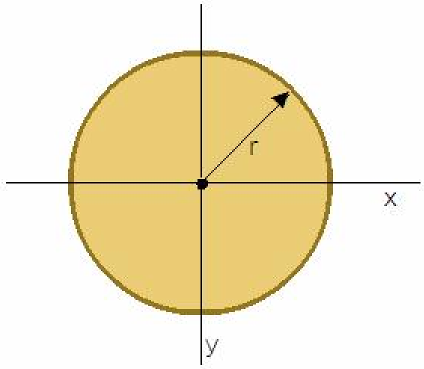


Figura 3.9 Menú de momento de inercia de figuras básicas



$$I_x = I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$$

Figura 3.10 Momento de inercia para un círculo

3.3 RADIO DE GIRO

El radio de giro de un área respecto al eje *x* se define como la cantidad r_x que satisface la relación:

$$I_x = r^2_x A$$

En el paquete se empieza la explicación con una viga sometida a cargas y la definición anterior de radio de giro. Se prosigue realizando una ampliación a la sección transversal. Se definen el Área y el Momento de Inercia (la integral $I_x = \int_A y^2 dA$) y en ese instante ya se cuenta con los elementos participantes en la expresión de Radio de Giro (Figura 3.11).

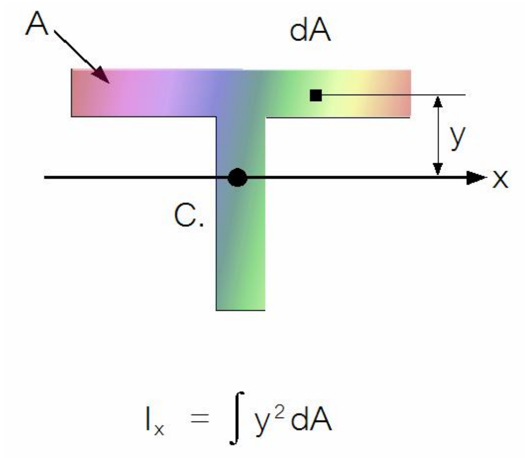


Figura 3.11 Sección a la que se le encontrará el radio de giro

El propósito del paquete didáctico es representar visualmente lo que la expresión significa. Según la ecuación, el radio de giro representa la distancia en que se concentra toda el área para que se cumpla la expresión $I_x = r^2_x A$

Entonces se presenta una animación que parte de la sección transversal con su centroide y el área es transportada hacia una nueva ubicación (Figura 3.12); en este momento es cuando el área se transforma en un pequeño círculo, representando la concentración del área en un punto. Enseguida se muestra la cota de r_x que es la distancia necesaria para que se cumpla la expresión $I_x = r^2_x A$ (Figura 3.13).

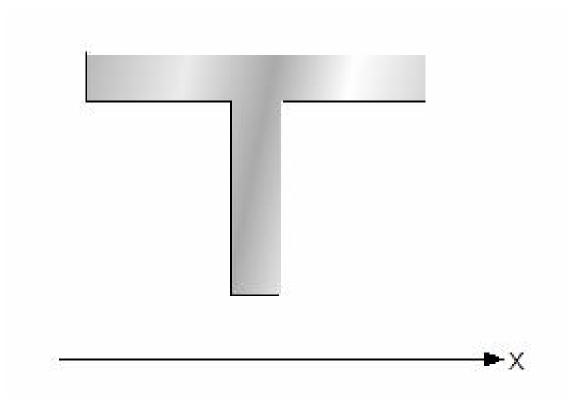


Figura 3.12 El área cambiará de ubicación a una distancia *r*

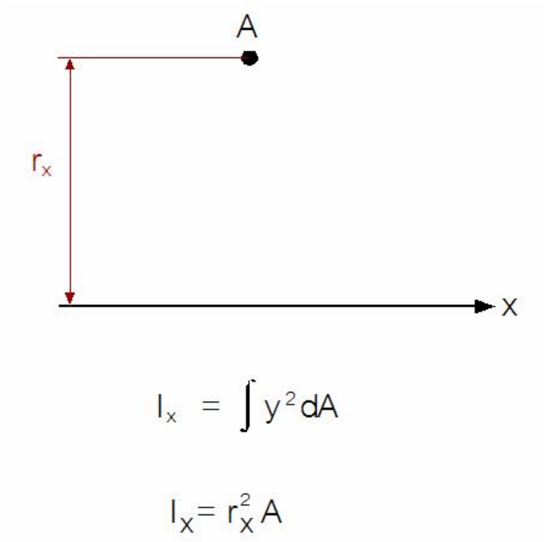


Figura 3.13 El área es concentrada en un punto a una distancia *r* del eje

3.4 TEOREMA DE LOS EJES DE PARALELOS O DE STEINER

Como se sabe, si se conoce el momento de inercia de un área respecto al eje de inercia centroidal, su momento de inercia puede determinarse respecto a un eje paralelo usando el teorema de los ejes paralelos o de Steiner.

La primera escena se enfoca en la demostración del teorema de Steiner y cómo se utiliza el concepto de los ejes paralelos. Para ello se presenta una sección con su área, su eje centroidal, y al lado la fórmula de Ix (Figura 3.14).

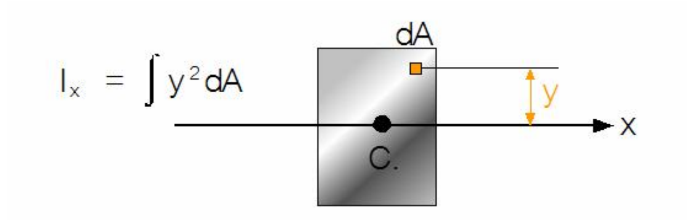


Figura 3.14 Momento de inercia respecto al eje centroidal

A continuación se le explica al usuario que se obtendrá ese mismo momento de inercia pero ahora desde otro eje paralelo al original (el centroidal) (Figura 3.15). Una vez presentado el nuevo eje, aparecen las cotas desde éste hasta los puntos necesarios de la fórmula de Ix (distancia desde el eje al centroide y desde el centroide del área hasta *dA*) (Figura 3.16).

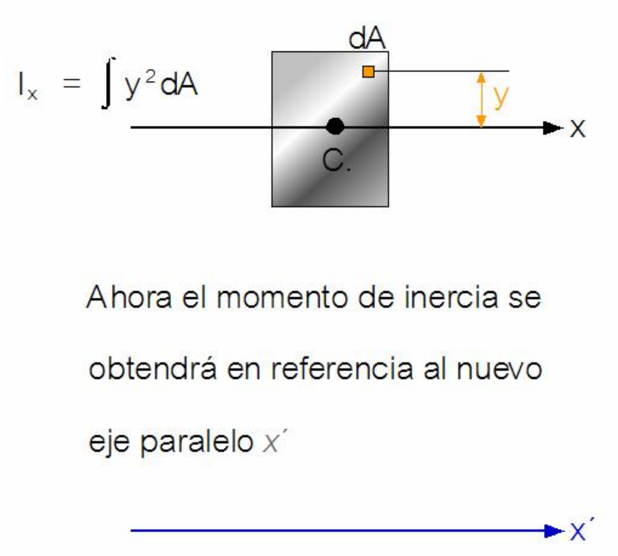


Figura 3.15 Nuevo eje sobre el cual se obtendrá el momento de inercia

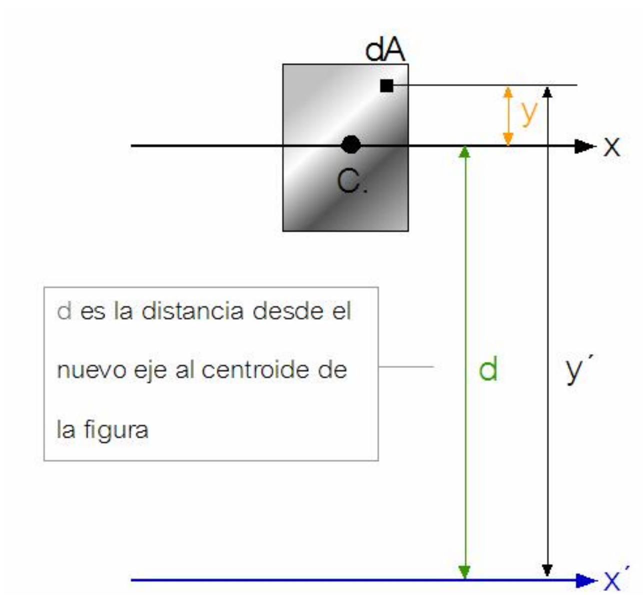


Figura 3.16 Elementos necesarios para el teorema de Steiner

Partiendo de la integral original de momento de inercia, se guía al usuario paso a paso en la sustitución de los nuevos valores hasta llegar a la nueva expresión del “Teorema de ejes paralelos”.

$$I_{x'} = I_x + Ad^2$$

Terminando la explicación de la determinación de la fórmula, el usuario puede continuar a un ejemplo de áreas compuestas para que se comprenda la aplicación de la expresión.

La sección empleada en el ejemplo es la misma utilizada para el concepto de centroide, ya que el usuario está familiarizado con esta sección y conoce su centroide (Figura 3.17). De igual manera que en el ejemplo anterior, se le da al usuario la opción de elegir el Momento de Inercia respecto al eje que él decida (Figura 3.18). Puesto que la sección es una viga T simétrica respecto al eje *y*, los cálculos de Ix son mucho más extensos que los de Iy.

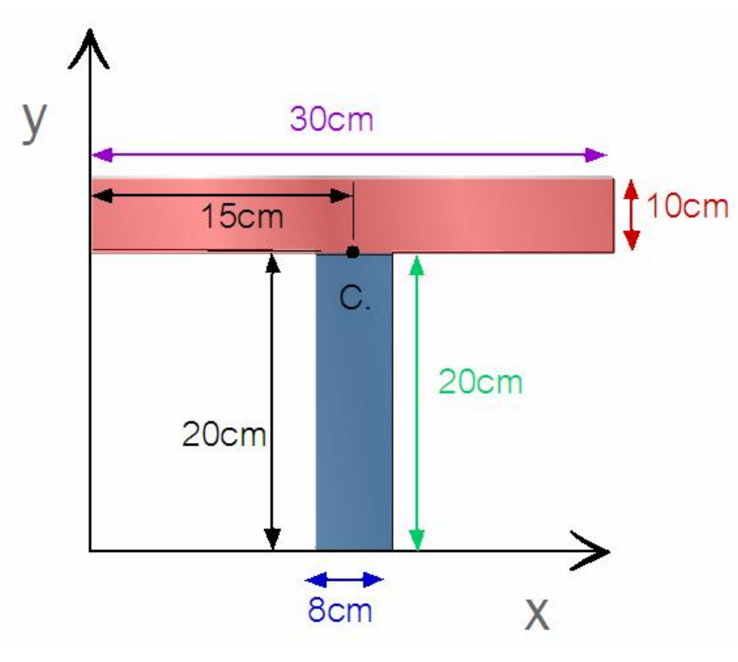


Figura 3.17 Sección transversal con la ubicación de sus centroide

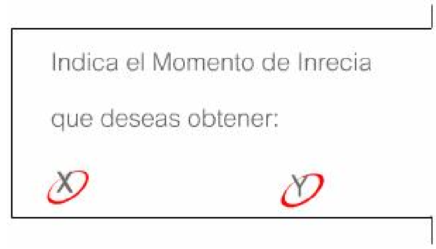


Figura 3.18 Punto de decisión

Al elegir "momento de inercia en *x*", se traza un nuevo eje *x* en el centroide de la sección total, así como las distancias de éste hasta el centroide de las figuras individuales (Figura 3.19).

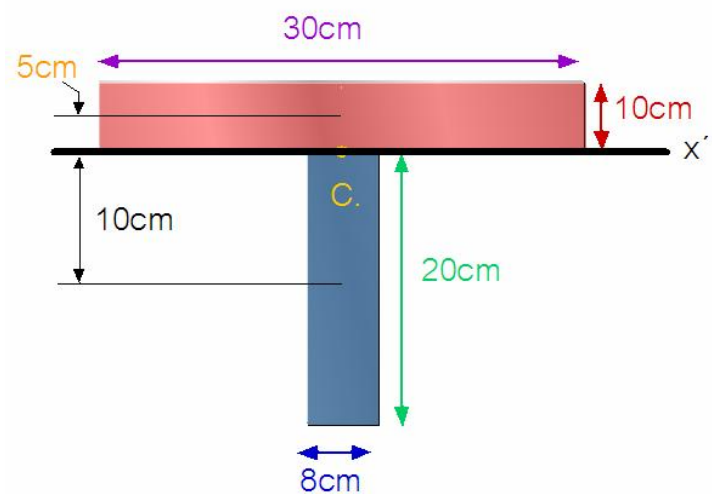


Figura 3.19 Distancias desde el eje centroidal *x* hasta el centroide de cada área

Aparece la fórmula del teorema de Steiner y se calculan los Ix de cada área individual con ayuda de la expresión de $bh^3/12$, ya que las secciones son rectangulares. Con una animación se llevan los datos desde la figura hasta la fórmula, para que el usuario pueda entender de dónde surge cada valor.

Para el Iy es más sencillo pues el eje centroidal de toda la figura coincide con todos los centroides de las figuras individuales (Figura 3.20). Entonces se explica que se debe cancelar el término de Ad^2 de la expresión, quedando la sumatoria de los momentos de inercia de las secciones individuales (Figura 3.21).

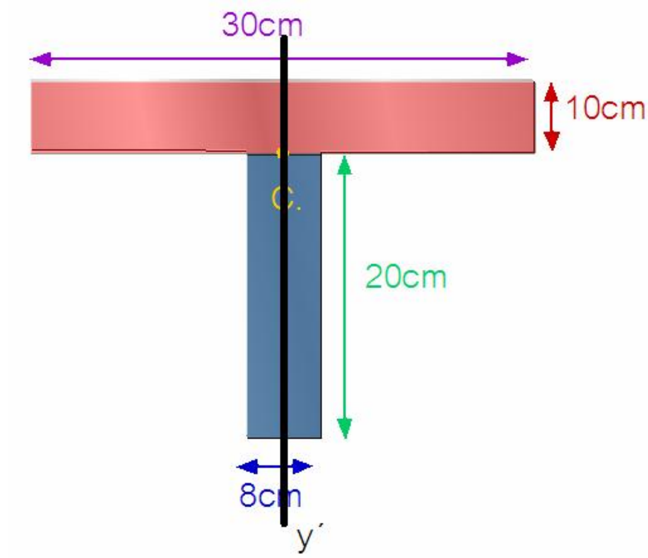


Figura 3.20 Eje centroidal en *y*

$$I_{y'} = I_{y1} + Ad^2 + I_{y2} + Ad^2$$

$$I_{y'} = I_{y1} + I_{y2}$$

Figura 3.21 Reducción de la fórmula de ejes paralelos para Iy para el ejemplo