SERIES DE TIEMPO :

ALGUNOS MÉTODOS DE PROYECCIÓN

Econ. Luis Flores Cebrián

Octubre 2011

A. PROYECCION LINEAL

CONCEPTO

Técnica de proyección y ajuste de una variable Y (desconocida) a partir de una variable conocida (X) que en este caso es el tiempo (variable independiente)

FORMULAS

Formula general :

$$Y = a + b \times X$$

Donde :

a : intercepto
b : coeficiente parcial de regresión
Y : variable independiente (tiempo)
X : variable dependiente

Cálculo de los coeficientes parciales de regresión:

$$\boxed{a = \frac{\sum X^2 \times \sum Y - \sum X \times \sum XY}{n \times \sum X^2 \; - \left(\sum X\right)^2}}$$

$$\boxed{b = \frac{n \times \sum XY - \sum X \times \sum Y}{n \times \sum X^2 \; - \left(\sum X\right)^2}}$$

Cálculo del coeficiente de determinación- R^2

Es una medida de resumen, nos dice que tan exactamente la línea de regresión muestral se ajusta a los datos. Es un valor positivo que oscila entre 0 y 1 (el tiempo no tiene nada que ver con la variable en estudio) .

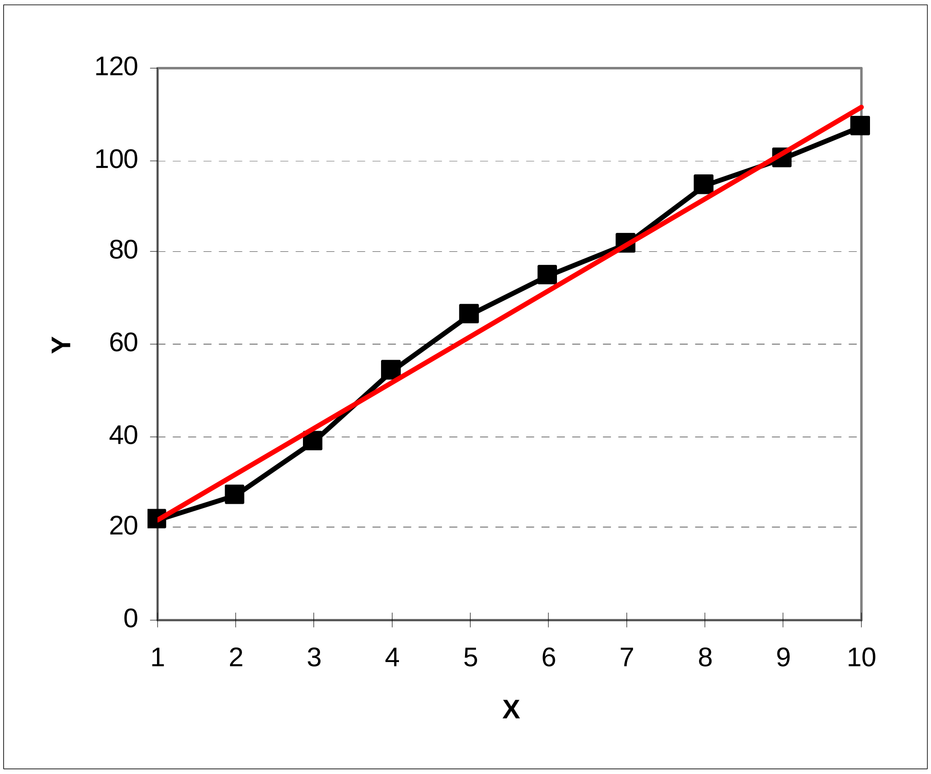
$$\boxed{R^2 = \frac{((a \times \sum Y) + (b \times \sum XY)) - n \times \left(\overline{Y}\right)^2}{\sum Y^2 \; - n \times \left(\overline{Y}\right)^2}}$$

EJEMPLO PRÁCTICO

Se tiene un destino turístico que durante los últimos años ha presentado la siguiente cantidad de visitantes:

Año **X**	Turistas (miles) **Y**
1999	21.7
2000	27.2
2001	38.6
2002	54.1
2003	66.3
2004	74.7
2005	82.0
2006	94.4
2007	100.2
2008	107.2

El gráfico nos permite apreciar que hay una clara tendencia lineal



El cuadro para trabajar la proyección es el siguiente:

X	Y	XY	X^2	Y^2
1	**21.7**	21.7	1	470.89
2	**27.2**	54.4	4	739.84
3	**38.6**	115.8	9	1489.96
4	**54.1**	216.4	16	2926.81
5	**66.3**	331.5	25	4395.69
6	**74.7**	448.2	36	5580.09
7	**82**	574	49	6724
8	**94.4**	755.2	64	8911.36
9	**100.2**	901.8	81	10040.04
10	**107.2**	1072	100	11491.84
55	**666.4**	**4491**	**385**	**52770.52**

Encontrando a y b (n=10)

$$a = \frac{(385 \times 666.4) - (55 \times 4{,}491)}{(10 \times 385) - (55)^2}$$

$$a = 11.5867$$

Encontrando el valor de b :

$$b = \frac{(10 \times 4{,}491) - (55 \times 666.4)}{(10 \times 385) - (55)^2}$$

$$b = 10.0097$$

la ecuación de la recta es la siguiente :

$$\mathrm{Y} = 11.5867 + 10.0097 \text{ x } X$$

Si queremos proyectar las ventas para el período 11 tendríamos:

$$\mathrm{Y} = 11.5867 + 10.0097 \text{ x } 11$$

$$\mathrm{Y} = 121.69$$

El coeficiente de Determinación – R^2, se obtiene de la siguiente manera :

$$R^2 = \frac{((11.5867 \times 666.4) + (10.0097 \times 4{,}491)) - (10 \times (66.64)^2)}{52{,}770.52 - (10 \times (66.64)^2)}$$

$$R^2 = \frac{52{,}679.94 - 44{,}448.89}{52{,}770.52 - 44{,}448.89}$$

$$R^2 = 0.9885$$

La proyección muestra que la cantidad de turistas que acude al destino turístico tiene una tendencia lineal pues las variable tiene un elevado coeficiente d determinación.

B. PROYECCION EXPONENCIAL

Es un método de proyección apropiado en el caso de que la serie de tiempo describe datos que crecen o decrecen en proporción constante a lo largo del tiempo. Ejemplo ventas de un producto, crecimiento de una población o demanda, propagación de una enfermedad entre otros.
Su expresión matemática es:

$$Y = ab^x$$

Esta modalidad depende de los valores de a y b :

- Si **b** tiene un valor comprendido entre 0 y 1 entonces el valor de **Y** decrecerá al crecer **X**
- Si **b** es mayor que 1 , **Y** crecerá con **X** .

El valor de **a** corresponde a la ordenada al origen

FORMULAS

Formula general:

$$Y = ab^x$$

Si se toman logaritmos a ambos miembros de la ecuación se puede transformar en una relación lineal:

$$LogY = Log\ (a \ .\ b^X)$$

$$LogY = Log\ a + X\ Log\ b$$

Donde :

a : intercepto
b : coeficiente parcial de regresión
Y : variable independiente (tiempo)
X : variable dependiente

Cálculo de los coeficientes parciales :

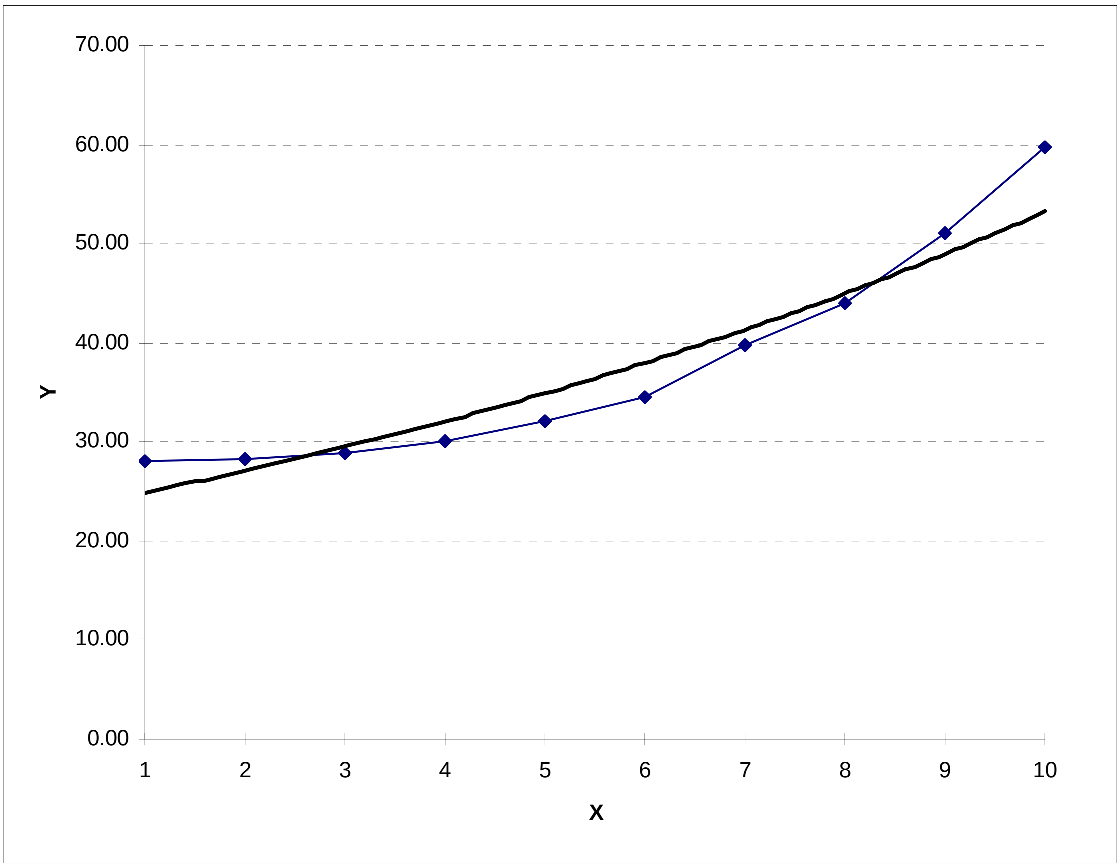
$$\boxed{a = \frac{\sum LogY - b \times \sum X}{n}}$$

$$\boxed{b = \frac{n \times \sum X.LogY - \sum LogY \times \sum X}{n \times \sum X^2 - \left(\sum X\right)^2}}$$

Ejemplo :

Se tienen los siguientes datos :

X	Y
1	**28.00**
2	**28.30**
3	**28.90**
4	**30.10**
5	**32.10**
6	**34.50**
7	**39.80**
8	**43.90**
9	**51.10**
10	**59.70**
55	**376.4**



Vemos que la tendencia lineal sólo cruza a los datos reales en dos puntos. Por tanto usar la proyección lineal no va ser una buena decisión. En este caso vamos a utilizar la proyección exponencial.

TABLA DE DATOS

X	Y	Log Y	Log X	X.LogY	X²	(LogY)²
1	**28.00**	1.4472	0.0000	1.4472	1	2.0943
2	**28.30**	1.4518	0.3010	2.9036	4	2.1077
3	**28.90**	1.4609	0.4771	4.3827	9	2.1342
4	**30.10**	1.4786	0.6021	5.9143	16	2.1862
5	**32.10**	1.5065	0.6990	7.5325	25	2.2696
6	**34.50**	1.5378	0.7782	9.2269	36	2.3649
7	**39.80**	1.5999	0.8451	11.1992	49	2.5596
8	**43.90**	1.6425	0.9031	13.1397	64	2.6977
9	**51.10**	1.7084	0.9542	15.3758	81	2.9187
10	**59.70**	1.7760	1.0000	17.7597	100	3.1541
55	**376.4**	**15.6095**	**6.5598**	**88.8816**	**385**	**24.4869**

Reemplazando : (n=10)

$$Log\ \ a\ =\frac{15.6095-0.03672\times 55}{10}$$

$$Log\ a = 1.3590$$

$$Antilog\ a = 22.8552$$

$$Log\ \ b\ =\frac{10\times 88.8816-15.6095\times 55}{10\times 385-55^{2}}$$

$$Log\ b = 0.03672$$

$$Antilog\ b = 1.0882$$

La ecuación sería :

$$\mathrm{Y} = 22.8552 \text{ x } 1.0882^{\mathrm{X}}$$

La proyección para el período 11 sería :

$$\mathrm{Y} = 22.8552 \text{ x}1.0882^{11}$$

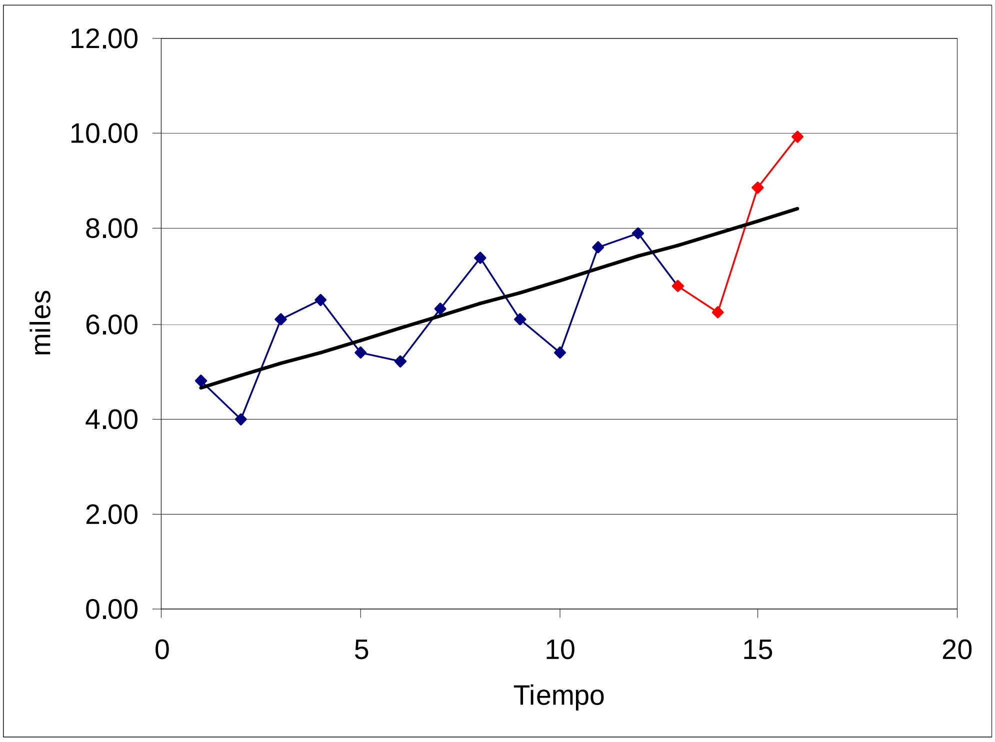
$$\mathrm{Y} = 57.91$$

C. AJUSTE A LA TENDENCIA

Con frecuencia se tiene una serie estadística que tiene un patrón estacional, es decir un conjunto de datos secundarios que se repiten con cierta frecuencia en una serie de años. Esto es frecuente por ejemplo en las cifras de negocios que tienen temporadas en las que las ventas aumentan y disminuyen (ciclo de negocios), como las ventas de útiles escolares, los productos veraniegos o las temporadas en el negocio turístico.

Como ejemplo observamos la siguiente serie de datos:

AÑO	X	Y	
1	1	4.80	
	2	4.00	
	3	6.10	
	4	6.50	
2	5	5.40	
	6	5.20	
	7	6.30	
	8	7.40	
3	9	6.10	
	10	5.40	
	11	7.60	
	12	7.90	



¿ Cómo se trabajan estos datos?

1º Se calculan los promedios de cada año

AÑO	X	Y	prom
1	1	4.80	5.350
	2	4.00	
	3	6.10	
	4	6.50	
2	5	5.40	6.075
	6	5.20	
	7	6.30	
	8	7.40	
3	9	6.10	6.750
	10	5.40	
	11	7.60	
	12	7.90	

2º Se obtienen los índices desestacionalizados - ID

AÑO	X	Y	ŷ	ID
1	1	4.80		0.8966
	2	4.00	5.3500	0.8012
	3	6.10		1.1010
	4	6.50		1.2011
2	5	5.40		0.8966
	6	5.20	6.0750	0.8012
	7	6.30		1.1010
	8	7.40		1.2011
3	9	6.10		0.8966
	10	5.40	6.7500	0.8012
	11	7.60		1.1010
	12	7.90		1.2011

$$ID_1 = \frac{\frac{4.8}{5.35} + \frac{5.4}{6.075} + \frac{6.10}{6.75}}{3}$$

3º Se obtiene la demanda desestacionalizada - DD

AÑO	X	Y	ŷ	ID	DD
1	1	4.80		0.8966	5.3536
	2	4.00	5.3500	0.8012	4.9924
	3	6.10		1.1010	5.5402
	4	6.50		1.2011	5.4115
2	5	5.40		0.8966	6.0228
	6	5.20	6.0750	0.8012	6.4902
	7	6.30		1.1010	5.7218
	8	7.40		1.2011	6.1608
3	9	6.10		0.8966	6.8035
	10	5.40	6.7500	0.8012	6.7398
	11	7.60		1.1010	6.9025
	12	7.90		1.2011	6.5771

$DD_1 = 4.8 \div 0.8966$

La línea de tendencia lineal se obtiene de la columna de demanda desestacionalizada – DD y obtenemos la siguiente ecuación:

$$Y = 4.5424 + 0.2332\,X$$

4º Se proyectan, con esta ecuación, los datos del año 4

4	13	7.574
	14	7.8072
	15	8.0404
	16	8.2736

5º Se ajusta la demanda proyectada usando los indices desestacionalizados vistos en el punto 2º:

Año	X	LT	ID	DD
4	13	7.574	0.8966	**6.7908**
	14	7.8072	0.8012	**6.2552**
	15	8.0404	1.1010	**8.8529**
	16	8.2736	1.2011	**9.9378**

Estos serían los valores de la demanda estimados para el año 4 y respetan la tendencia histórica.