RECOPILACION DE APUNTES QUE TRATAN SOBRE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

POR
OSCAR GUERRERO MIRAMONTES
(UACJ)

3.er EDICION

CONTACTO: gumo_99@hotmail.com

CONTENIDO

CAPITULO 1
REPASO CALCULO DIFERENCIAL E CALCULO INTEGRAL

En este capitulo recordamos las reglas que introducen al calculo diferencial, esto es solo una introduccion breve, un recordatorio de lo que ya el lector deberia saber, en todo curso introductorio a ecuaciones diferenciales se asume que el lector posee ya una base solida de como integrar y derivar funciones, lo primero que debemos recordar es la definicion de limite, y las propiedades del limite

1.1 Definicion Limite y Propiedades

Informalmente, decimos que el límite de la función $f(x)$ es L cuando x tiende a a, y escribimos

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \tag{1.1}$$

si se puede encontrar x suficientemente cerca de a tal que $f(x)$ es tan cerca de L como se quiera. (a puede ser finito o infinito.) Es decir, el límite es L si $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a. Más precisamente, decimos que

$$f(x) \to L \iff \forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \tag{1.2}$$

Propiedades o Reglas de Los Limites.

1. siempre que no aparezca la indeterminación ∞

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a}(f(x)) + \lim_{x\to a}(g(x)) \tag{1.3}$$

2. si λ es un escalar diferente de cero

$$\lim_{x\to a}(\lambda f(x)) = \lambda \lim_{x\to a}(f(x)) \tag{1.4}$$

3. siempre y cuando no aparezca la indeterminación $0/0$

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a}(f(x)) \lim_{x\to a}(g(x)) \tag{1.5}$$

4. siempre y cuando no aparezcan las indeterminaciones 0/0 o ∞/∞

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to a}(f(x))}{\lim_{x\to a}(g(x))} \tag{1.6}$$

5. siempre y cuando k sea diferente de cero

$$\lim_{x\to a}(f(x))^k=\left(\lim_{x\to a}(f(x))\right)^k \tag{1.7}$$

6. Siempre y cuando tengan sentido las potencias que aparecen y no se encuentren indeterminaciones

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=\left(\lim_{x\to a}(f(x))\right)^{\lim_{x\to z}(g(x))} \tag{1.8}$$

1.2 Calculo Diferencial

Asumimos que sabes lo que es una funcion $f(x) : f$ toma los valores de x, y resulta un valor para f, el valor de f depende de x, por lo tanto nos referimos a f como la variable dependiente y x como la variable independiente.

Como un ejemplo considera $f(x)=x^2+5$ si $x=5$ el valor de f es

$$f(5)=5^2+5=30$$

Evaluando la funcion para diferentes valores de la variable x se puede crear un grafica que muestra la relacion f(x):f Asumimos que la funcion es continua esto significa que puedes dibujar la grafica de f sin la necesidad de remover el lapiz del papel o mas formalmente

Definicion 1.1 se dice que una función f es continua en un punto a si existe $f(a)$, si existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia a por la derecha, si existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia a por la izquierda, y además coinciden con $f(a)$

La derivada de una funcion denotado por el operador $D()$, d/dx o $f'(x)$, el cual actua es una funcion $f(x_i) : f$ se define por el siguiente limite

$$D(f(x))=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right] \tag{1.9}$$

observamos la derivada mide la razon de cambio de la variable independiente respecto la variable dependiente. demos un ejemplo como calcular la derivada usando la ecuacion 1.9

calcular la derivada de $f(x)=x^2$

$$D(x^2)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{x^2+2x(\Delta x)+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}\right] \tag{1.10}$$

Resolviendo el algebra y el limite en 1.10

$$D(x^2) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{2x(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + (\Delta x)) = 2x \tag{1.11}$$

claramente la funcion debe ser continua antes de poder calcular la derivada.

Una vez obtenido la derivada, puedes tomar la derivada de la derivada apelando a la definicion anterior, como un ejemplo la derivada de la derivada de $f(x) = x^2$ que recibe el nombre de la segunda derivada se calcula a continuacion

$$D(D(x^2)) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{2(x + \Delta x) - 2x}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \to 0} (2) = 2 \tag{1.12}$$

La extencion para derivadas de mayor orden es obvio

1.2.1 La derivada un operador lineal

Uno puede decir que el calculo de la derivada es una operacion lineal como referencia considera $L = af + bg$ donde a y b son escalares e f y g son funciones que dependen de x, calcular la derivada de L respecto de x es como sigue

$$D(L) = D(af + bg) = aD(f) + bD(g) \tag{1.13}$$

la ecuacion anterior nos dice que la derivada de una combinacion lineal de funciones es equivalente a la combinacion lineal de sus derivadas, lo anterior se puede comprobar usando la 1.9

$$D(L) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{L(x + \Delta x) - L(x)}{\Delta x} \right] \tag{1.14}$$

Utilizando algebra y recordando que $L = af + bg$

$$D(L) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{af(x + \Delta x) + bg(x + \Delta x) - af(x) - bg(x)}{\Delta x} \right] \tag{1.15}$$

aplicando una propiedad de los limites

$$D(L) = a \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] + b \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] \tag{1.16}$$

Otra forma como la ecuacion 1.16 se escribe es

$$D(L) = aD(f) + bD(g) \tag{1.17}$$

1.2.2 Regla del producto

Otra definicion util para calcular la derivada del producto dos funciones $L = fg$ se demuestra a continuacion

$$D(L) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{L(x + \Delta x) - L(x)}{\Delta x} \right] \tag{1.18}$$

Utilizando algebra y recordando que $L = fg$

$$D(L) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \right] \tag{1.19}$$

Desarrollando el algebra

$$D(L) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \right] \tag{1.20}$$

aplicando una propiedad de los limites en 1.20

$$D(L) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x+\Delta x) \left[\frac{g(x+\Delta x) + g(x)}{\Delta x} \right] \right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[g(x+\Delta x) \left[\frac{f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x} \right] \right] \tag{1.21}$$

En conclusion la derivada del producto de dos funciones es igual a la primera función multiplicada por la derivada de la segunda function, más la segunda function multplicada por la derivada de la primera funcion.

$$D(L) = D(fg) = fD(g) + gD(f) \tag{1.22}$$

1.2.3 Regla de la Cadena

Usando los mismos principios uno puede deducir la regla de la cadena

En términos intuitivos, si una variable, f, depende de una segunda variable, u, que a la vez depende de una tercera variable, x; entonces, el ratio de cambio de f con respecto a x puede ser computado como el producto del ratio de cambio de f con respecto a u multiplicado por el ratio de cambio de u con respecto a x.la definicion se muestra a continuacion

$$\frac{df}{dx} = \left(\frac{df}{du} \right) \left(\frac{du}{dx} \right) \tag{1.23}$$

mencionemos un ejemplo. Sea $u(x) = x^2 + 1$ y $f(u) = u^2$ para encontrar la derivada de f respecto de x aplicamos la regla de la cadena

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{du}\left(u^2\right) \frac{d}{dx}\left(x^2+1\right) = (2u)(2x) = (4x)\left(x^2+1\right) \tag{1.24}$$

se puede comprobar el resultado usando fuerza bruta, expresando u en terminos de x, asi la variable f es explicita en funcion de x y podemos tomar la derivada

1.2.4 Regla del cociente

Utilizando la defincion de la derivada del producto de dos funciones y la regla de la cadena encontramos la regla del cociente para esto definamos $L = f/g$

$$D(L(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{d}{dx}\left(f[g]^{-1}\right) = [g]^{-1}D(f) - f[g]^{-2}D(g) = \frac{gD(f) - fD(g)}{[g]^2} \tag{1.25}$$

Mencionemos un ejemplo para usar la regla del cociente sea $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-1}$ calcular su derivada es como sigue

$$D\left(\frac{x^2-5x+6}{x-1}\right) = \frac{(x-1)(2x-5)-(1)(x^2-5x+6)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} \tag{1.26}$$

1.2.5 Tablas Derivacion

Depues de las anteriores generalidades, se considera casos especiales que son usados frecuentemente. primero considera $f(x) = x^n$ siendo n un entero positivo. calcular la derivada de f es como sigue.

$$D(x^n) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}\right] \tag{1.27}$$

usando la expansion binomial en $(x+\Delta x)^n$

$$D(f(x)) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!(n-r)!}x^{n-r}(\Delta x)^r}{\Delta x} - x^n\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{nx^{n-1}(\Delta x) + O(\Delta x)^n}{\Delta x}\right] = nx^{n-1} \tag{1.28}$$

asi la derivada de $f(x) = x^n$ es nx^{n-1}

$$D(x^n) = nx^{n-1} \tag{1.29}$$

Es util considerar lo que uno puede hacer para calcular la derivada de $f(x) = x^n$ sin la necesidad de usar la expansion binomial por intuicion en la expancion de un binomio $(x+\Delta x)^n = x^n + \Delta x n x^{n-1} + \ldots \Delta x^n$ al factorisar el factor comun Δx el unico termino sobrevive al aplicar el $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ es nx^{n-1}. la ecuacion anterior tambien puede extenderse para numeros irracionales y para numeros negativos exceptuando $x = -1$. Afortunadamente hace tiempo atras. Los matematicos han elaborado tablas donde se encuentra la derivacion de funciones elementales, como lo son las funciones trigonomatricas, exponenciales, logartimicas, etc. Por referencia adjunto una parte de estas tablas que podran ser utiles. En la lituratura existen tablas matematicas contiene mucho mas informacion un ejemplo de esos libros es Daniel Zwillinger, *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae*, 31st Edition, CRC Press

Formas exponenciales

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}a^x = (\ln a)a^x$$

Formas logaritmicas

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{(\ln a)x}$$

Formas trigonometricas

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = -\sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$$

Formas trigonometricas inversas

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$$

1.3 Derivacion funciones implicitas

Hasta ahora se sabe como encontrar la derivada de dy/dx cuando $y(x)$, en otras palabras la variable dependiente esta relacionada explicitamente por la variable independiente, pero que sucede si las variables y e x estan realacionadas por una ecuacion por ejemplo : $x^2+y^2=R^2$ y te preguntan encontrar la derivada dy/dx.

Existen dos formas de atacar el problema, la primera es intentar expresar y en funcion de x,luego calcular la razon de dy/dx haciendo que x cambie infinitesimalmente. La segunda es imaginar que y e x cambien infinitesimalmente mientras se preserva la forma de las restricciones (por ejemplo un circulo)

Considera la funcion implicita $ax^6+2x^3y-y^7x=10$ y se procede a calcula la derivada de variable y con respecto de la variable x

$$\frac{d}{dx}(ax^6)+\frac{d}{dx}(2x^3y)-\frac{d}{dx}(y^7x)=\frac{d}{dx}(10) \tag{1.30}$$

aplicando la regla del producto en 1.30

$$6ax^5+2x^5\frac{dy}{dx}+6x^2y-y^7-7xy^6\frac{dy}{dx}=0 \tag{1.31}$$

Ahora intentamos depejar para $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^7-6ax^5-6x^2y}{2x^3-7x^6} \tag{1.32}$$

Notese el resultado contiene tanto a x como a y.

Otro metodo para encontrar derivadas implicitas sin necesidad usar la regla del producto es usar derivadas parciales

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial_x(f)}{\partial_y(f)} \tag{1.33}$$

En otras palabras dada un funcion $f(x,y) = 0$ calcular dy/dx es simplemente dividir la derivada parcial de f respecto de x que se denota con el simbolo $\partial_x(f)$, entre la derivada parcial de f respecto de y que se deonta con el simbolo $\partial_y(f)$

Utilisemos este nuevo metodo para encontrar dy/dx dada la funcion implicita del ejemplo anterior $ax^6 + 2x^3y - y^7x = 10$

Lo primero es calular $\partial_x(f)$

$$\partial_x(f) = 6ax^5 + 6x^2y - y^7 \tag{1.34}$$

El segundo paso es calcular $\partial_y(f)$

$$\partial_y(f) = 2x^3 - 7xy^6 \tag{1.35}$$

El tercer paso es usar la ecuacion 1.33

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{6ax^5 + 6x^2y - y^7}{2x^3 - 7xy^6}\right) = \frac{y^7 - 6ax^5 - 6x^2y}{2x^3 - 7x^6} \tag{1.36}$$

Notese que se encuentra el mismo resultado que en el ejemplo anterior

1.4 Interpretacion Geometrica de la Derivada

Primero es necesario recordad la definicion de tangente a una curva dada por la ecuacion $y = f(x)$ en un punto M de la misma. Supongamos una secante que pase por M y un proximo punto P de la curva 1.1

Procedemos ahora a derivar la funcion $f(x)$ segun la regla general y a interpretar cada paso geometricamente en base a la figura 1.1 .

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{NP}{MN} = \tan < NMP = \tan(\ell(\Delta x)) \tag{1.37}$$

Se observa que $\tan < NMP = \tan(\ell(\Delta x))$ que es la pendiente de la secante MP. con esto vemos que la razon de los incrementos Δx y Δy es igual a la pendiente de la secante determinada por los puntos $M(x,y)$ y $P(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Ahora se considera el valor de M como fijo y el punto P ha de moverse a lo largo de la cruva y aproximarse a M como posicion limite.

Es decir que para aproximar P a M la distancia Δx debe tender a cero y por tanto

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}(\tan(\ell(\Delta x))) = \tan(\ell_0) \tag{1.38}$$

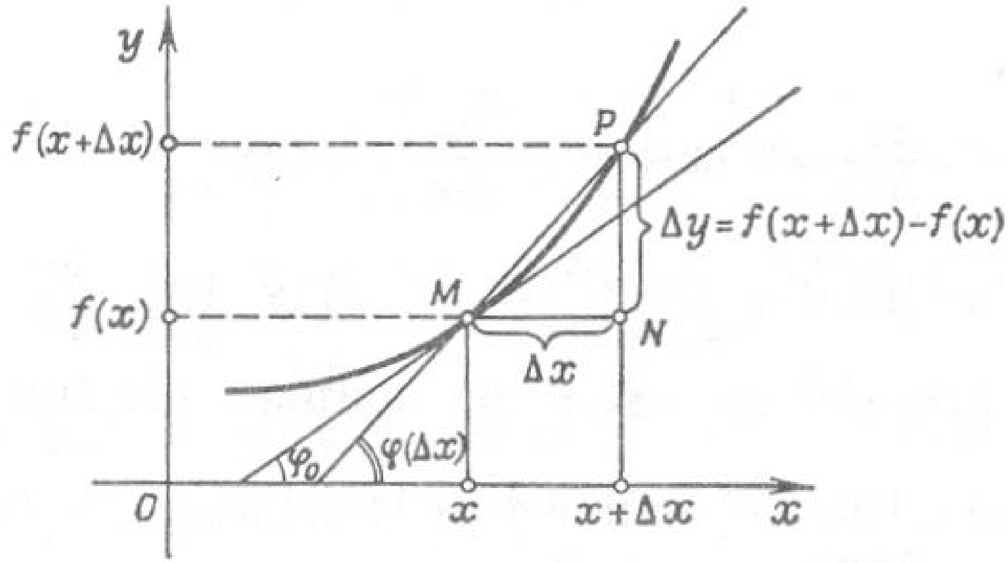


FIGURA 1.1: Interpretacion Geometrica de la Derivada

Asi se establece:

Teorema 1: El valor de la derivada en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la tangente a la curva de aquel punto.

ejemplo : hallar la pendiente y la inclinacion de la tangente dada la funcion $f(x) = 3 + 3x - x^3$ en el punto $x = -1$ y verificar el resultado trasando la curva y la tangente

Lo primero es encontrar la derivada de $f(x)$

$$D(3 + 3x - x^3) = 3 - 3x^2 \tag{1.39}$$

para encontrar la pendiente, se debe evaluar la derivada en el punto $x = -1$

$$f'(-1) = 3 - 3(-1)^2 = 0 \tag{1.40}$$

para encontrar la inclinacion se recurda que $\ell = \arctan(f'(x))$

$$\ell = \arctan(f'(-1)) = \arctan(0) = 0 \tag{1.41}$$

Se verifica el resultado trasando la curva y la tangente

Observando la grafica anterior, observamos que cuando el valor de la derivada de la funcion es igual a cero encontramos el minimo de la funcion, este resultado no es raro, como se menciono antes la derivada mide la pendiente en el punto donde la derivada es evaluada, si la pendiente es igual a cero, entonces encontramos que la recta tangente debe ser paralela al eje x u que es lo mismo decir tiene una inclinacion de cero grados respecto al eje x.

De la anterior afirmacion se puede decir:

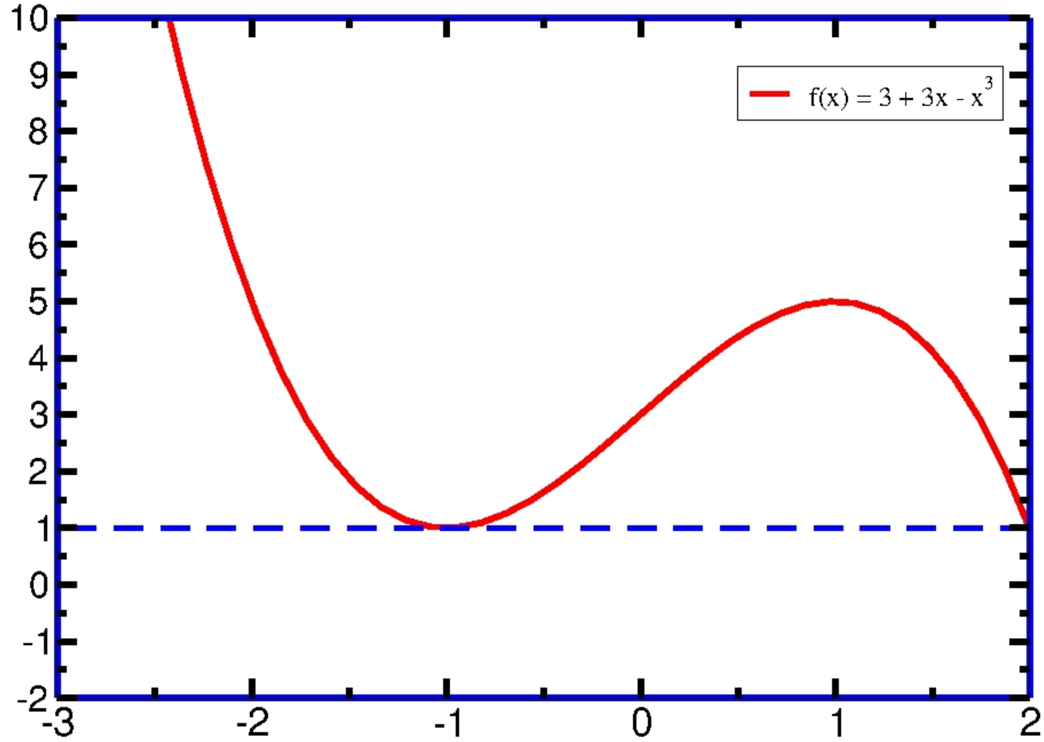


FIGURA 1.2: Grarfica funcion $f(x) = 3 + 3x - x^3$ y tangente en $x = -1$

Definicion 1.2 Cuando la derivada de la funcion sea igual a zero se podra encontrar un maximo, minimo u punto de infelxion. Si $f'(x_o) = 0$ entonces x_o puede ser un maximo, minimo u punto de inflexion

Entonces algo que siempre se debe recordar es que si se quiere encontrar el minimo, maximo u punto de infelxion de una funcion $f(x)$ la derivada $f'(x)$ debera ser igualada a cero, y se deberan encontrar las raices, hasta este momento solo mencione lo que se debe hacer si se requiere encontrar los minimos u maximos de la funcion, ahora con un ejemplo tambien mencionare como saber cual punto es un minimo cual es un maximo.

Como ejemplo regresemos a la funcion $f(x) = 3 + 3x - x^3$ y procedemos a encotrar los maximos, minimos de la funcion

la funcion $f(x) = 3+3x-x^3$ tiene por derivada $f'(x) = 3-3x^2$, para encontrar los maximos y los minimos, acuerdate que $f'(x) = 0$ o sea $3-3x^2 = 0$, encontrando las raices obtenemos dos puntos $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$.

Encontramos existen dos puntos que son candidatos para ser un maximo u minimo, esos puntos son $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$, se podria usar la definion del criterio de la segunda derivada para saber cual punto es el maximo u el minimo pero yo prefiero evaluar la derivada un punto anterior y siguiente y ver si hay un cambio en la pendiente de un valor positivo a un valor negativo.

para el punto $x_1 = 1$, un punto anterior es el $x = 0$ y $x = 2$ el punto siguiente

$f'(0) = 3 - 3(0)^2 = 3 \rightarrow$ *pendiente positiva*

$f'(2) = 3 - 3(4) = -9 \rightarrow$ *pendiente negativa*

como la pendiente cambia de positiva (+) a negativa (-), el punto x_1 es un maximo

ya sabe que x_1 es un maximo, ahora veremos que x_2 es un minimo

para el punto $x_2 = -1$, un punto anterior es el $x = -2$ y $x = 0$ el punto siguiente

$f'(-2) = 3 - 3(4) = -9 \rightarrow$ *pendiente negativa*

$f'(0) = 3 - 3(0) = 3 \rightarrow$ *pendiente positiva*

como la pendiente cambia de positiva (-) a negativa (+), el punto x_2 es un minimo

Asi que encontramos una manera de saber si una funcion tiene un maximo u un minimo.

Despues de un breve repaso para refresacar la memoria en lo que se refiere al calculo diferencial ahora repasaremos las bases del calculo integral.

1.5 Calculo Integral

Ahora emprenderemos a dar un breve repaso del calculo integral. Es muy dificil saber por donde empezar. Primero mencionare la sumatoria de riemann

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \; donde\ a \leqslant f(x_i) \leqslant b$$

La sumatoria de riemman es una forma de poder calcular el area bajo una curva que es representada por la una funcion $f(x)$ en un rango [a,b]. Usare un ejemplo muy util que podra ilustrarnos como es que la sumatoria de riemman funciona.

ejemplo: Calcular el area de un semicirculo de radio $r = 1$ usando la sumatoria de riemman. La funcion representa un semicirculo es $f(x) = (1 - x^2)^{1/2}$. La idea es dividir en segmentos (rectangulos). En este ejemplo dividire el area en $N = 4$ segmentos. Ademas voy a utilisar la propiedad que el semicirculo es simetrico respecto el eje y este tipo de funciones reciben el nombre de funciones pares.

$$S = 2\left(f(-0.75)(0.25) + f(-0.50)(0.25) + f(-0.25)(0.25) + f(0)(0.25)\right)$$
$$S = \frac{1}{2}(0.661 + 0.866 + 0.968 + 1)$$
$$S = 1.756$$

El valor actual del semicirculo puede calcularse facilmente usando la formula $\pi r^2/2$ y es igual a $S = 1.578$. Si el intervalo de incremento (x_i - x_{i-1}) se hace cada ves mas pequenio y por tanto el numero de intervalos N aumenta. La suma de riemman se conviernte en la Integral de riemman

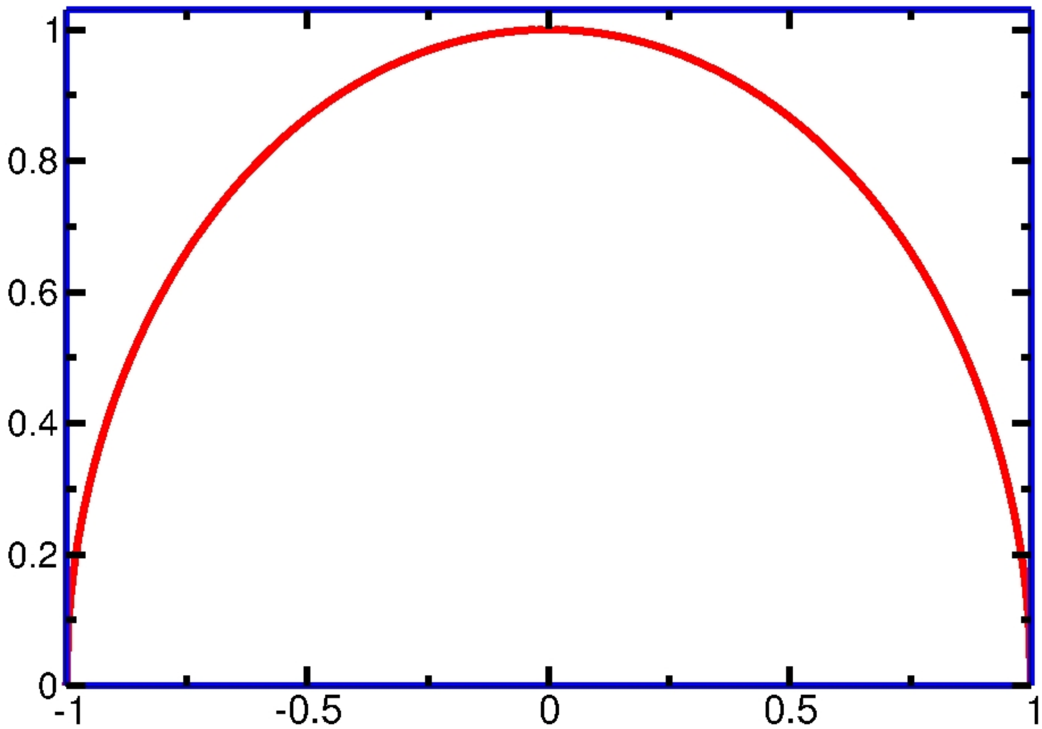


FIGURA 1.3: Imagen de un semicirculo. La funcion representa al semicirculo es $f(x) = (1 - x^2)^{1/2}$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx$$

En resumen encontramos que la integral calcula el area bajo una curva definida por una funcion $f(x)$.La integral es la operacion inversa a la derivada, en ocasiones le integral recibe el nombre de antiderivada. Existen mucas formulas para encontrar la integracion de funciones. No voy a perder el tiempo explicando cada una de la formulas existentes. Esto solo es un repaso del calculo integral. A continuacion muestro un formulario muy util para calcular la integral de algunas funciones. El formulation fue obtenido de la pagina de internet: integral-table.com

Formas Basicas

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \tag{1.42}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x \tag{1.43}$$

$$\int u dv = uv - \int v du \tag{1.44}$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| \tag{1.45}$$

Integrales de funciones racionales

$$\int \frac{1}{(x+a)^2} dx = -\frac{1}{x+a} \tag{1.46}$$

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1 \tag{1.47}$$

$$\int x(x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x-a)}{(n+1)(n+2)} \tag{1.48}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x \tag{1.49}$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} \tag{1.50}$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln|a^2+x^2| \tag{1.51}$$

$$\int \frac{x^2}{a^2+x^2}dx = x - a\tan^{-1}\frac{x}{a} \tag{1.52}$$

$$\int \frac{x^3}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2\ln|a^2+x^2| \tag{1.53}$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \tag{1.54}$$

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}dx = \frac{1}{b-a}\ln\frac{a+x}{b+x},\ a \neq b \tag{1.55}$$

$$\int \frac{x}{(x+a)^2}dx = \frac{a}{a+x} + \ln|a+x| \tag{1.56}$$

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c}dx = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \tag{1.57}$$

Integrales exponentes fraccionarios

$$\int \sqrt{x-a}\,dx = \frac{2}{3}(x-a)^{3/2} \tag{1.58}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x\pm a}}dx = 2\sqrt{x\pm a} \tag{1.59}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x}}dx = -2\sqrt{a-x} \tag{1.60}$$

$$\int x\sqrt{x-a}\,dx = \frac{2}{3}a(x-a)^{3/2} + \frac{2}{5}(x-a)^{5/2} \tag{1.61}$$

$$\int \sqrt{ax+b}\,dx = \left(\frac{2b}{3a}+\frac{2x}{3}\right)\sqrt{ax+b} \tag{1.62}$$

$$\int (ax+b)^{3/2}dx = \frac{2}{5a}(ax+b)^{5/2} \tag{1.63}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x\pm a}}dx = \frac{2}{3}(x\mp 2a)\sqrt{x\pm a} \tag{1.64}$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a-x}}dx = -\sqrt{x(a-x)} - a\tan^{-1}\frac{\sqrt{x(a-x)}}{x-a} \tag{1.65}$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a+x}}dx = \sqrt{x(a+x)} - a\ln\left[\sqrt{x}+\sqrt{x+a}\right] \tag{1.66}$$

$$\int x\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{15a^2}(-2b^2+abx+3a^2x^2)\sqrt{ax+b} \tag{1.67}$$

$$\int \sqrt{x(ax+b)}\,dx = \frac{1}{4a^{3/2}}\left[(2ax+b)\sqrt{ax(ax+b)} - b^2\ln\left|a\sqrt{x}+\sqrt{a(ax+b)}\right|\right] \tag{1.68}$$

$$\int \sqrt{x^3(ax+b)}\,dx = \left[\frac{b}{12a} - \frac{b^2}{8a^2x} + \frac{x}{3}\right]\sqrt{x^3(ax+b)} + \frac{b^3}{8a^{5/2}}\ln\left|a\sqrt{x}+\sqrt{a(ax+b)}\right| \tag{1.69}$$

$$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| \tag{1.70}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \tag{1.71}$$

$$\int x\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{1}{3}\left(x^2\pm a^2\right)^{3/2} \tag{1.72}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| \tag{1.73}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} \tag{1.74}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = \sqrt{x^2\pm a^2} \tag{1.75}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\sqrt{a^2-x^2} \tag{1.76}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{1}{2} a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| \tag{1.77}$$

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{b + 2ax}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{4ac - b^2}{8a^{3/2}} \ln \left| 2ax + b + 2\sqrt{a(ax^2 + bx^+ c)} \right| \tag{1.78}$$

$$\int x \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{48a^{5/2}} \left(2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} - \left(3b^2 + 2abx + 8a(c + ax^2)\right) + 3(b^3 - 4abc) \ln \left| b + 2ax + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + x} \right| \right) \tag{1.79}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| 2ax + b + 2\sqrt{a(ax^2 + bx + c)} \right| \tag{1.80}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b}{2a^{3/2}} \ln \left| 2ax + b + 2\sqrt{a(ax^2 + bx + c)} \right| \tag{1.81}$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} \tag{1.82}$$

Integrales con logaritmos

$$\int \ln ax dx = x \ln ax - x \tag{1.83}$$

$$\int \frac{\ln ax}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln ax)^2 \tag{1.84}$$

$$\int \ln(ax + b) dx = \left(x + \frac{b}{a} \right) \ln(ax + b) - x, a \neq 0 \tag{1.85}$$

$$\int \ln(x^2 + a^2)\, \mathrm{dx} = x \ln(x^2 + a^2) + 2a \tan^{-1} \frac{x}{a} - 2x \tag{1.86}$$

$$\int \ln(x^2 - a^2)\, \mathrm{dx} = x \ln(x^2 - a^2) + a \ln \frac{x + a}{x - a} - 2x \tag{1.87}$$

$$\int \ln\left(ax^2 + bx + c\right) dx = \frac{1}{a} \sqrt{4ac - b^2} \tan^{-1} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} - 2x + \left(\frac{b}{2a} + x \right) \ln\left(ax^2 + bx + c\right) \tag{1.88}$$

$$\int x \ln(ax + b) dx = \frac{bx}{2a} - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{b^2}{a^2} \right) \ln(ax + b) \tag{1.89}$$

$$\int x \ln\left(a^2 - b^2 x^2\right) dx = -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{a^2}{b^2} \right) \ln\left(a^2 - b^2 x^2\right) \tag{1.90}$$

Integrals con exponenciales

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \tag{1.91}$$

$$\int \sqrt{x} e^{ax} dx = \frac{1}{a} \sqrt{x} e^{ax} + \frac{i\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} \operatorname{erf}\left(i\sqrt{ax}\right), \quad \text{where } \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \tag{1.92}$$

$$\int x e^x dx = (x - 1) e^x \tag{1.93}$$

$$\int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax} \tag{1.94}$$

$$\int x^2 e^x dx = \left(x^2 - 2x + 2 \right) e^x \tag{1.95}$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax} \tag{1.96}$$

$$\int x^3 e^x dx = \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6 \right) e^x \tag{1.97}$$

$$\int x^n e^{ax}\, \mathrm{dx} = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax}\, \mathrm{dx} \tag{1.98}$$

$$\int x^n e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}\Gamma[1+n,-ax], \quad \text{where } \Gamma(a,x)=\int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \tag{1.99}$$

$$\int e^{ax^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\mathrm{erf}\left(ix\sqrt{a}\right) \tag{1.100}$$

$$\int e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\mathrm{erf}\left(x\sqrt{a}\right) \tag{1.101}$$

$$\int xe^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2a}e^{-ax^2} \tag{1.102}$$

$$\int x^2e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}\mathrm{erf}(x\sqrt{a}) - \frac{x}{2a}e^{-ax^2} \tag{1.103}$$

Integrales con funciones trigonometricas

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax \tag{1.104}$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \tag{1.105}$$

$$\int \sin^n ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax \;\; {}_2F_1\left[\frac{1}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2 ax\right] \tag{1.106}$$

$$\int \sin^3 ax dx = -\frac{3\cos ax}{4a} + \frac{\cos 3ax}{12a} \tag{1.107}$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax \tag{1.108}$$

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} \tag{1.109}$$

$$\int \cos^p ax dx = -\frac{1}{a(1+p)}\cos^{1+p} ax \times {}_2F_1\left[\frac{1+p}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3+p}{2}, \cos^2 ax\right] \tag{1.110}$$

$$\int \cos^3 ax dx = \frac{3\sin ax}{4a} + \frac{\sin 3ax}{12a} \tag{1.111}$$

$$\int \cos ax \sin bx dx = \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)}, a \neq b \tag{1.112}$$

$$\int \sin^2 ax \cos bx dx = -\frac{\sin[(2a-b)x]}{4(2a-b)} + \frac{\sin bx}{2b} - \frac{\sin[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \tag{1.113}$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3}\sin^3 x \tag{1.114}$$

$$\int \cos^2 ax \sin bx dx = \frac{\cos[(2a-b)x]}{4(2a-b)} - \frac{\cos bx}{2b} - \frac{\cos[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \tag{1.115}$$

$$\int \cos^2 ax \sin ax dx = -\frac{1}{3a}\cos^3 ax \tag{1.116}$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 bx dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2ax}{8a} - \frac{\sin[2(a-b)x]}{16(a-b)} + \frac{\sin 2bx}{8b} - \frac{\sin[2(a+b)x]}{16(a+b)} \tag{1.117}$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 ax dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a} \tag{1.118}$$

$$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a}\ln\cos ax \tag{1.119}$$

$$\int \tan^2 ax dx = -x + \frac{1}{a}\tan ax \tag{1.120}$$

$$\int \tan^n ax dx = \frac{\tan^{n+1} ax}{a(1+n)} \times {}_2F_1\left(\frac{n+1}{2}, 1, \frac{n+3}{2}, -\tan^2 ax\right) \tag{1.121}$$

$$\int \tan^3 ax dx = \frac{1}{a}\ln\cos ax + \frac{1}{2a}\sec^2 ax \tag{1.122}$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| = 2\tanh^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}\right) \tag{1.123}$$

$$\int \sec^2 ax dx = \frac{1}{a}\tan ax \tag{1.124}$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| \tag{1.125}$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x \tag{1.126}$$

$$\int \sec^2 x \tan x dx = \frac{1}{2}\sec^2 x \tag{1.127}$$

$$\int \sec^n x \tan x dx = \frac{1}{n}\sec^n x, n \neq 0 \tag{1.128}$$

$$\int \csc x dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| = \ln|\csc x - \cot x| + C \tag{1.129}$$

$$\int \csc^2 ax dx = -\frac{1}{a}\cot ax \tag{1.130}$$

$$\int \csc^3 x dx = -\frac{1}{2}\cot x \csc x + \frac{1}{2}\ln|\csc x - \cot x| \tag{1.131}$$

$$\int \csc^n x \cot x dx = -\frac{1}{n}\csc^n x, n \neq 0 \tag{1.132}$$

$$\int \sec x \csc x dx = \ln|\tan x| \tag{1.133}$$

Productos de funciones trigonometricas y monomios

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x \tag{1.134}$$

$$\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax \tag{1.135}$$

$$\int x^2 \cos x dx = 2x\cos x + \left(x^2 - 2\right)\sin x \tag{1.136}$$

$$\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x\cos ax}{a^2} + \frac{a^2x^2 - 2}{a^3}\sin ax \tag{1.137}$$

$$\int x^n cos x dx = -\frac{1}{2}(i)^{n+1}\left[\Gamma(n+1, -ix) + (-1)^n\Gamma(n+1, ix)\right] \tag{1.138}$$

$$\int x^n cos ax dx = \frac{1}{2}(ia)^{1-n}\left[(-1)^n\Gamma(n+1, -iax) - \Gamma(n+1, ixa)\right] \tag{1.139}$$

$$\int x \sin x dx = -x\cos x + \sin x \tag{1.140}$$

$$\int x \sin ax dx = -\frac{x\cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} \tag{1.141}$$

$$\int x^2 \sin x dx = \left(2 - x^2\right)\cos x + 2x\sin x \tag{1.142}$$

$$\int x^2 \sin ax dx = \frac{2 - a^2x^2}{a^3}\cos ax + \frac{2x\sin ax}{a^2} \tag{1.143}$$

$$\int x^n \sin x dx = -\frac{1}{2}(i)^n\left[\Gamma(n+1, -ix) - (-1)^n\Gamma(n+1, -ix)\right] \tag{1.144}$$

Productos funciones trigonometricas y exponenciales

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) \tag{1.145}$$

$$\int e^{bx} \sin ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2}e^{bx}(b\sin ax - a\cos ax) \tag{1.146}$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) \tag{1.147}$$

$$\int e^{bx} \cos ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2}e^{bx}(a\sin ax + b\cos ax) \tag{1.148}$$

$$\int xe^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x - x\cos x + x\sin x) \tag{1.149}$$

$$\int xe^x \cos x dx = \frac{1}{2}e^x(x\cos x - \sin x + x\sin x) \quad (1.150)$$

Integrales funciones hiperbolicas

$$\int \cosh ax dx = \frac{1}{a}\sinh ax \quad (1.151)$$

$$\int e^{ax}\cosh bx dx = \begin{cases} \dfrac{e^{ax}}{a^2-b^2}[a\cosh bx - b\sinh bx] & a \neq b \\ \dfrac{e^{2ax}}{4a} + \dfrac{x}{2} & a = b \end{cases} \quad (1.152)$$

$$\int \sinh ax dx = \frac{1}{a}\cosh ax \quad (1.153)$$

$$\int e^{ax}\sinh bx dx = \begin{cases} \dfrac{e^{ax}}{a^2-b^2}[-b\cosh bx + a\sinh bx] & a \neq b \\ \dfrac{e^{2ax}}{4a} - \dfrac{x}{2} & a = b \end{cases} \quad (1.154)$$

$$\int e^{ax}\tanh bx dx = \begin{cases} \dfrac{e^{(a+2b)x}}{(a+2b)}{}_2F_1\left[1+\dfrac{a}{2b}, 1, 2+\dfrac{a}{2b}, -e^{2bx}\right] \\ \qquad -\dfrac{1}{a}e^{ax}{}_2F_1\left[\dfrac{a}{2b}, 1, 1E, -e^{2bx}\right] & a \neq b \\ \dfrac{e^{ax} - 2\tan^{-1}[e^{ax}]}{a} & a = b \end{cases} \quad (1.155)$$

$$\int \tanh bx dx = \frac{1}{a}\ln\cosh ax \quad (1.156)$$

$$\int \cos ax \cosh bx dx = \frac{1}{a^2+b^2}[a\sin ax\cosh bx + b\cos ax\sinh bx] \quad (1.157)$$

$$\int \cos ax \sinh bx dx = \frac{1}{a^2+b^2}[b\cos ax\cosh bx + a\sin ax\sinh bx] \quad (1.158)$$

$$\int \sin ax \cosh bx dx = \frac{1}{a^2+b^2}[-a\cos ax\cosh bx + b\sin ax\sinh bx] \quad (1.159)$$

$$\int \sin ax \sinh bx dx = \frac{1}{a^2+b^2}[b\cosh bx\sin ax - a\cos ax\sinh bx] \quad (1.160)$$

$$\int \sinh ax \cosh ax dx = \frac{1}{4a}[-2ax + \sinh 2ax] \quad (1.161)$$

$$\int \sinh ax \cosh bx dx = \frac{1}{b^2-a^2}[b\cosh bx\sinh ax - a\cosh ax\sinh bx] \quad (1.162)$$

Despues de un breve repaso para refresaca la memoria en lo que se refiere al calculo diferencial e Calculo integral. Ahora empezare el tema a trata: Las ecuaciones diferenciales.

1.6 Lo que se debe saber sobre las ecuaciones diferenciales

Antes de emprender el tema de las ecuaciones diferenciales, decidi crear una seccion donde brevemente explico lo que yo creo son los fundamentos basicos que todo alumno u lector quiera aprender a resolver ecuaciones diferenciales debe se conocer. En otras palabras aqui establesco las regalas del juego.

Lo primero es, hacernos una pregunta importante : Que es una ecuacion diferencial ? .

Pues la respuesta a mi pregunta es : Una ecuacion diferencial es una expresion matematica que relaciona una funcion $y(x)$ con sus derivadas. Se oye extranio? . Mira empezare con un ejemplo muy sencillo que yo resolvi cuando estaba en la preparatoria. La ecuacion cuadratica que tiene la forma

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

En la ecuacion superior, nuesto objetivo es encontrar el valor de x u los valores de x que cumplan con la igualdad planteada . Es muy sencillo identificar que hay dos valores que son candidatos a ser la solucion, estos valores son: $x = -4$ y $x = 2$. Es muy sencillo comprobar si los valores propuestos , son la solucion a la ecuacion cuadratica, solo debemos sustituir la variable x por el numero . Asi encontramos que:

$$(-4)^2 + 2(-4) - 8 = 0$$

Inmediatamente vemos que al sustituir el valor de $x = -4$ obtenemos que $0 = 0$, y por tanto la igual planteada se cumple, del mismo modo encontramos que $x = 2$ es tambien una solucion al obtener que

$$(2)^2 + 2(2) - 8 = 0$$

y por tanto obviamente $0 = 0$ y de nuevo encontramos la igualdad es satisfacida. Del mismo modo una ecuacion diferencial intenta relacionar variables con sus derivadas, mencionare un ejemplo muy simple. Fijate en la siguiente ecuacion diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Esta expresion es una ecuacion diferencial de segund orden. Como puedo saberlo ? . Pues una forma como las ecuaciones diferenciales se clasifican es por el orden de la mayor derivada en la expresion . En la ecuacion anterior la maxima derivada es de 2ndo orden. Quiero que observes que nuestro el objetivo es encontrar una funcion $y(x)$ que al derivar dos veces , es decir al encontrar la segunda derivada de la funcion , esta funcion debera dar igual a cero. La solucion es muy sencilla y es $y(x) = mx + c$, en donde m e c son constantes. Como puedo yo saber es la solucion a la ecuacion diferencial ? . PUES SOLO HAY QUE SUSTITUIR LA FUNCION $y(x)$ propuesta en la ecuacion diferencial y ver si cumple con la igualdad .

$$\frac{d}{dx^2}(mx + c) = 0$$

Inmediatamente encontramos que $0 = 0$ y por tanto la funcion $y(x) = mx + c$ es la solucion a la ecuacion diferencial . No importa que tan compleja u dificil paresca una ecuacion diferencial, el objetivo siempre sera ek mismo!. Si encontramos una funcion que satisfaga la relacion , entonces el problema estara resuelto. Es importante y debe quedar muy claro que una ecuacion diferencial solo tendra una solucion y esta sera unica. Este importante resultado ya a sido probabo por gente mucho mas competete e inteligente que yo. Esto es muy util por que simplicas nuestra vida cuando intentamos resolver una ecuacion diferencial. Si ya tenemos la solucion, ya ten con seguridad que esa es la solucion y no hay otra posible.

1.6.1 clasificacion de las ecuaciones diferenciales

Hay muchas maneras como una ecuacion diferencial puede clasificarse, por ejemplo si las derivadas son parciales, entonces la ecuacion diferencial recibira el nombre de: Ecuacion diferencial parcial . Otra manera como se clasifican es por el orden de la mayor derivada en la ecuacion diferencial. Am .. Pero la mas importante clasificacion, es saber cuando una ecuacion diferencial es Lineal u no linea.

Una ecuacion diferencial Lineal es aquella que tiene la siguiente forma

$$p(x)y'' + g(x)y' + q(x)y = g(x)$$

en esta ecuacion lineal es importante que la variable dependiente en este caso y no este elevado a un exponente, si la variable esta elevada a un exponen entonces la ecuacio es NO LINEAL y estaremos en graves problemas. Una ecuacion diferencial NO lineal es muy dificil resolver, Lo mas practicto es intentar usar un cambio de variable y ver si la ecuacion no lineal puede convertirse en una ecuacion linea, en caso contrario la solucion no sera facil. Un ejemplo de una ecuacion diferencial no lineal es:

$$q(x)y' + q(x)y^2 = g(x)$$

Observa tenemos el coeficiente y^2 y por tanto esta elevado a un exponente y por tanto la ecuacion diferencial es no lineal.

Una ecuacion lineal tiene una solucion que se dice es de superposicion . En otras palabras la solucion de una ecuacion diferencila lineal es :

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) + y_3(x)....y_n$$

Donde y_1, y_2, y_3 , etc. Son soluciones particulares, la solucion generail $y(x)$ es la suma de cada una de las soluciones particulares. UY esto se volvio muy complicado u no ? . Yo mencione previamente que una ecuacion tiene una solucion unica! y ahora estoy afirmando que hay soluciones particules y_1 , y_2 ..etc . Esto tiene una explicacion y esto debe ser recordado: una ecuacion diferencial de N orden tiene N soluciones particuales , Tienes N constante arbritarias de integracion y por tanto N condiciones iniciales. La solucion general SI ES UNICA. Asi por ejemplo una ecuacion de segundo orden tiene dos soluciones particulaes y_1 e y_2 e dos condiciones iniciales. Retomare un ejemplo anterior para hablar un poco de las condiciones iniciales y por fin terminar de escribir esta seccion , por que ya me canse de tanto escribir.

1.6.2 Condiciones iniciales en una ecuacion diferencial

Una ecuacion diferencial debe tener lo que se llama condiciones iniciales, este mismo termino se aplica a las ecuaciones diferenciales parciales pero la gente la cambio el nombre a condiciones de fronteta. Para explicar lo que es una condicion de fronteta voy a mostrar el ejemplo de la seccion anterior en donde resolvimos la siguiente ecuacion diferencial. Aqui la voy a volver a escribir:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

ya sabemos que la solucion a la ecuacion diferencial es $y = mx + c$ en donde m y c con constants. Ahora voy a imponer condiciones iniciales al problemas. Por ser una ecuacion diferencial de segundo orden, existen dos condiciones iniciales. estas condiciones seran $y(0) = 3$ e $y(5) = 1$ .Las condiciones iniciales estamos imponiendo que la funcion que cumple con la igualdad en la ecuacion diferencial, debe tambien cumplir con la condicion que la funcion evaluada en el punto x=0 sea su valor igual a 3 y que la funcion evaluada en el punto x=5 sea su valor igual a 1 . Estas condiciones proponen lo que la gente llama una solucion particular. Ahora se tiene la siguiente informacion es muy importante: Una ecuacion diferencial de n orden tiene n condiciones. En este libro solo estudiamos ecuaciones diferenciales de segundo orden y primer orden , por tanto en todo lo que resta del libro , si hablo de una condicion inicial siempre hare referencia a dos condiciones iniciales. Pues bien, ya con esta informacion, ahora vamos a intentar de encontrar la solucion particular dada las condiciones iniciales previamente dichas.

Si $y(0) = 3$ entonces $m(0) + c = 3$ lo que implica que la constante c adquiere el valor de tres, por tanto $c = 3$. ahora aplicamos la otra condicion inicial $y(5) = 1$ y entonces obtenemos que $m(5)+3 = 1$ y entonces la constante m adquiere el valor de $m = -2/5$ .Y la solucion particular es

$$y(x) = -\frac{2}{5}x + 3$$

Espero este ejemplo ilustrada claramente como son evaluadas las condiciones iniciales. Un problema puede complicare mucho si las condiciones iniciales son complicadas, Si se tratan de condiciones de frontera en el area de ecuaciones diferenciales parciales, en lo general se tiene que proceder a metodos numericos.

1.7 Soluciones de una ecuación diferencial

Una solución o integral de una ecuación diferencial es **una relación entre las variables, que define a una de ellas como función de la otra, que satisface a la ecuación**

ejemplo:

Comprobar que $y = ASen(x) + BCos(x)$ es una solucion a la ecuacion diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \tag{1.163}$$

sustituyendo el valor de y y el valor de la segunda derivada y'' en la ecuacion diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -ASen(x) - BCos(x)$$

Simplificando terminos

$$-ASen(x) - Bcos(x) + ASen(x) + BCos(x) = 0$$

En el ejemplo A y B son constantes arbitrarias de la misma manera se puede representar como $c1$ y $c2$ respectivamente dan una solución mas general al problema a esta constante arbitraria se le conoce como constante de integración.

ejemplo :

Econtar el valor de A y B para el ejemplo anterior y que satisfaga las siguientes condiciones: y(0)=2, y(0)’=-1

$$ACos(0)+BSen(0)=2$$
$$-ASen(0)+B\cos(0)=-1$$

Obtenemos que el valor de las constantes es A = 2 y B = -1

CAPITULO 2

SOLUCION ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

Una ecuación diferencial de primer orden puede reducirse a la forma

$$Mdx + Ndy = 0 \tag{2.1}$$

Siendo M y N funciones de x e y. Las ecuaciones diferenciales de primer orden pueden dividirse en cuatro grupos.

1. Ecuaciones variable separable
2. Ecuaciones Homogeneas
3. Ecuaciones lineales de la forma $y' + Py = Q$ donde P y Q son funciones de (x) unicamente
4. Ecuaciones que se pueden reducirse a la forma (3)

2.1 Ecuaciones variable separable

Las Ecuaciones con variables separables son las mas faciles de resolver, estas ecuaciones se puede identificar Cuando los terminos de una ecuacion diferencila pueden disponerse de manera que toma la forma $Mdx + Ndy = 0$ siendo M una funcion de x unicamente y N una funcion de y unicamente. el procedimiento de resolucion se llama separacion de variable.

ejemplo : resolver la ecuacion diferencial

$$(1 + x^2)dy - x^2dx = 0 \tag{2.2}$$

Separando las variable

$$\int dy = \int \frac{x^2dx}{(1 + x^2)} \tag{2.3}$$

Integrando ambos lados de la ecuacion

$$y(x) = x - \arctan(x) + C \tag{2.4}$$

2.2 Ecuaciones Homogeneas

Se dice que la ecuacion diferencial $Mdx + Ndy = 0$ es homogenea si M y N son funciones de x e y del mismo grado.

haciendo el cambio de variable

$$y = vx \tag{2.5}$$

encontramos que

$$x\frac{dv}{dx} + v = -\frac{M}{N} \tag{2.6}$$

Donde la ecuacion (2.6) es una ecuacion diferencial de variables separables.

ejemplo : resolver la ecuacion diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} \tag{2.7}$$

identificamos M = $-(y + \sqrt{x^2 + y^2})$ y N = x Ambas funciones son del mismo grado

$$-\frac{M}{N} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} \tag{2.8}$$

Haciendo el cambio de variable y = vx en (2.7) encontramos

$$x\frac{dv}{dx} + v = \sqrt{v^2 + 1} + v \tag{2.9}$$

La ecuacion (2.9) si es separable y de integracion directa

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 + 1}} = \int \frac{dx}{x} \tag{2.10}$$

Resolviendo (2.10) encontramos el resultado

$$\alpha\text{rcsin}[v] = \ln(x) + C \tag{2.11}$$

Ahora hay que acodarnos del cambio de variable que usamos v = y/x, la ecuacion (2.11) se puede rescribir y obtenemos que:

$$\alpha\text{rcsin}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln(x) + C \tag{2.12}$$

Despejando para la variable y, encontramos la solucion a la ecuacion diferencial es:

$$y(x) = x\sin[\ln(x) + C] \tag{2.13}$$

2.3 Ecuaciones Lineales de la forma y'+Py=Q

Una ecuacion diferencial de la forma $y' + Py = Q$ donde P y Q son funciones de x unicamente se puede resolverse aplicando el cambio de variable $y = uz$ donde U y Z son funciones de x que deben determinarse.

Ahora emprenderemos Encontar la solucion general a las ecuaciones diferencial de primer orden del tipo (III). Estas ecuaciones como ya se menciones son

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q \tag{2.14}$$

Lo primero que se debe hacer es procedor hacer un cambio de variable $y=uz$, sustituyendo en la ecuacion diferencial original se obtiene

$$\frac{du}{dx}z+\frac{dz}{dx}u+Puz=Q \tag{2.15}$$

Agrupando terminos

$$\frac{dz}{dx}u+\left(\frac{du}{dx}+Pu\right)z=Q \tag{2.16}$$

Para determinar u igualaremos el coeficiente entre parentesis () a cero

$$\frac{du}{dx}+Pu=0 \tag{2.17}$$

Para determina el valor valor de z , se iguala el termino restante de la ecuacion diferencial a la funcion Q . En este momento hemos logrado separar las variables!.

$$\frac{dz}{dx}u=Q \tag{2.18}$$

Resolviendo la ecuacion diferencial en (2.17), obtenemos el valor de u

$$u=e^{-\int Pdx} \tag{2.19}$$

Sustituyendo el valor encontrado de u en (2.18) y resolviendo para z

$$z=\int\frac{Q}{u}dx+C=\int Qe^{\int Pdx}dx+C \tag{2.20}$$

Ahora nos acordamos del cambio de variable $y=uz$, solo hay que sustituir los valores encontrados para la variable z e u y encontramos que la solucion a las ecuaciones diferenciales de primer orden del tipo (iii) es

$$y=e^{-\int Pdx}\left(\int Qe^{\int Pdx}dx+C\right) \tag{2.21}$$

ejemplo : Resolver la ecuacion

$$\frac{ds}{dt}-s\cot(t)=1-(t+2)\cot(t) \tag{2.22}$$

Usando la ecuacion (2.21) con $P=-\cot(t)$ y $Q=1-(t+2)\cot(t)$

$$s=e^{\int\cot(t)}\left(\int[1-(t+2)\cot(t)]e^{-\int\cot(t)}dt+C\right) \tag{2.23}$$

$$s = \sin(t)\left(\int [1-(t+2)\cot(t)]\csc(t)dt + C\right) \tag{2.24}$$

Resolviendo la integral

$$s = \sin(t)\left(\frac{1}{2}t\cot\left(\frac{t}{2}\right) + 2\csc(t) + \frac{1}{2}t\tan\left(\frac{t}{2}\right) + C\right) \tag{2.25}$$

Simplificando y reduciendo terminos obtenemos

$$s = (2+t)\csc(t)\sin(t) + C\sin(t) \tag{2.26}$$

2.3.1 Circuito RL en serie

ejemplo : Un circuito en serie donde se encuentra un voltaje constante V una resistencia R y un inductor L. Encontrar el valor de la corriente I para cualquier tiempo

La suma de las caidas de voltaje en un circuito cerrado es igual a cero

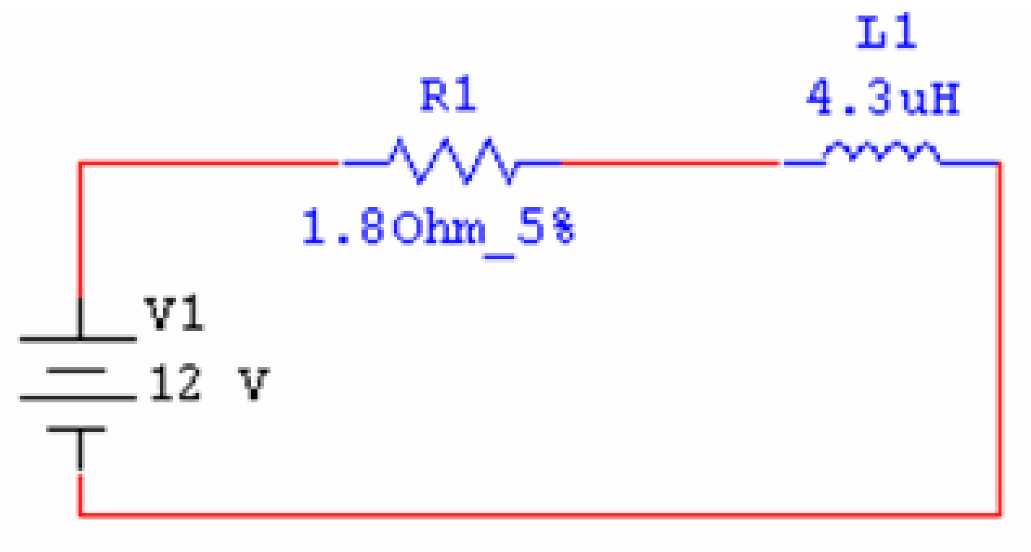


FIGURA 2.1: Circuito RL

La ecuacion diferencial para la figura (2.1) es

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V \tag{2.27}$$

Diviendiendo entre L ambos lados de la ecuacion (2.27)

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L} \tag{2.28}$$

La ecuacion (2.28) es del tipo (III) y puede resolverse usando la solucion general (2.21). en donde $P = R/L$ y $Q = V/L$.

$$i = e^{-\int \frac{R}{L}dt}\left(\int \frac{V}{L}e^{\int \frac{R}{L}dt}dt + C\right) \tag{2.29}$$

Resolviendo la ecuacion (2.29)

$$i = e^{-\frac{Rt}{L}}\left(\frac{V}{R}e^{\frac{Rt}{L}} + C\right) \tag{2.30}$$

Simplificando terminos en (2.30)

$$i(t) = \frac{V}{R} + Ce^{-\frac{Rt}{L}} \tag{2.31}$$

En la ecuacion (2.31) C es una constante arbritaria. Si se impone la condicion que la corriente sea cero en tiempo cero $i(0) = 0$. Entonces C adquiere el valor de $C = -V/R$ sustituyendo el valor de C en la ecuacion (2.31)

$$i(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) \tag{2.32}$$

2.3.2 Circuito RC en serie

ejemplo: Un circuito en serie donde se encuentra un voltaje constante V una resistencia R y un capacitor C. Encontrar el valor de la corriente i para cualquier tiempo

La ecuacion diferencial rige el comportamiento del circuito RC es :

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V \to \frac{dq}{dt} + \left(\frac{1}{RC}\right)q = \frac{V}{R}$$

identificando las variables, que $P = 1/RC$ y que $Q = V/R$

$$q = e^{-\int \frac{dt}{RC}}\left(\int \frac{V}{R}\, e^{\int \frac{dt}{RC}}dt + k\right)$$

Resolviendo la ecuacion superior :

$$q = e^{-\frac{t}{RC}}\left(\frac{V}{R}e^{\frac{t}{RC}}(RC) + k\right) \to q = VC + k\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

Imponiendo la condicion inicial $q(0) = 0$ la ecuacion superior se reduce a :

$$q(t) = VC(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

El comportamiento de la corriente en el circuito RC se encuentra con la relacion $i = dq/dt$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left[VC(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\right] \to \frac{V}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

El comportamiento del voltage en el capacitor puede encontrarse usando la ley de kirchoff, la cual establece que las caidas de voltage en un circuito cerrado deben ser igual a cero

$$-V + V_R + V_C = 0 \to V_C = V - iR = V(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

En donde V_C representa la caida de voltage en el capacitor, V_R la caida del voltage en la resistencia y V es la fuente de voltage constante.

2.4 Ecuacion de Bernoulli

un caso bien conosido de una ecuacion diferencial de primer orden no lineal que puede reducirse a una ecuacion no lineal usando un cambio de variable es la ecuacion de bernoulli

la ecuacion de bernoulli es la siguiente

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n \tag{2.33}$$

La ecuacion de Bernoull de puede rescrbir

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=q(x) \tag{2.34}$$

la ecuacion es lineal para n =1 y para n = 0 es separable por lo tanto en el desarollo de la solucion n diferente de 1 y 0.

proponiendo el cambio de variable $w=y^{1-n}$

$$\frac{dw}{dx}=\frac{dw}{dy}\frac{dy}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \tag{2.35}$$

por lo tanto el dy/dx de puede poner en funcion de w

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^n}{(1-n)}\frac{dw}{dx} \tag{2.36}$$

sustituyendo dy/dx y w en la ecuacion diferencial orginal

$$\frac{dw}{dx}=(1-n)[q(x)-wp(x)] \tag{2.37}$$

La ecuacion es del tipo III y puede resolverse usando el factor integrante

2.5 APLICACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

2.5.1 Decaimiento radioactivo

Un isoto radioactivo se desintegra a una razon porporcional a la cantidad de masa m_o. si la masa de este elemento se reduce a m_f en un tiempo δt. Encontar la ecuacion gobierna al sistema y la vida media del isotopo (la vida media es el intervalo de tiempo que tarda en decaer la masa del isotopo a la mitad de su masa original)

El modelo del decaimiento radioactivo se basa en que el cambio de masa en el tiempo es proporcional a la masa inicial de isotopo

$$\frac{dm}{dt} = \gamma m \tag{2.38}$$

en la ecuacion superior γ representa la constante de proporcionalidad.

$$\int_{m_o}^{m_f} \frac{dm}{m} = \gamma \int_0^t dt \tag{2.39}$$

resolviendo (2.39)

$$\log\left(\frac{m_f}{m_o}\right) = \gamma t \tag{2.40}$$

notese que por ser una integral definida no hay constante de integracion. Despejando para m_f en (2.40) y notese Δt =t, lo cual es el intervalo de tiempo

$$m(t) = m_o e^{\gamma t} \tag{2.41}$$

Donde la constante γ puede obtenerse de (2.40)

$$\gamma = \frac{\log\left(\frac{m_f}{m_o}\right)}{\Delta t} \tag{2.42}$$

La vida media τ , es el intervalo de tiempo para que la masa m_o decaiga a la mitad u sea $m_f = m_o/2$

$$\tau = \frac{-\log(1/2)}{\gamma} \tag{2.43}$$

ejemplo : Un isotopo radiacotivo thorium 234 se desintegra a una razon proporcional a la cantidad presente de 100 mg. si el material se reduce a 82.04 mg en una semana. encontar la cantidad presente en cualquier tiempo. y el intervalo de tiempo para que el isotopo decaiga la mitad de su masa original.

Lo primero es reconocer constantes sea m_o=100 mg (masa inicial) y sea m_f=82.04 mg (masa final). el intervalo de tiempo δt es igual a una semana o 7 dias.

encontramos el valor de γ es igual a

$$\gamma = \frac{\log\left(\frac{82.04 \text{ mg}}{100 \text{ mg}}\right)}{7 \text{ dias}} = -0.02828 \text{ dias}^{-1} \tag{2.44}$$

Sustituyendo el valor de γ y m_o en la ecuacion (2.41)

$$\mathrm{m(t)} = 100\mathrm{e}^{-0.02828\mathrm{t}} \tag{2.45}$$

la vida media se encuentra usando la ecuacion (2.43)

$$\tau = \frac{-\log(0.50)}{-0.02828} = 24.5 \; dias \tag{2.46}$$

2.5.2 Mezclas

ejemplo : En tiempo cero un tanque contiene Q_o kg de sal disuelta en 100 litros de agua. Asuma agua que contiene 1/4 kg de sal por litro entra al tanque a 3 litros/min. y que agua sale del tanque a la misma proporcion. Encuentra la cantidad de sal en el tanque en un tiempo (t).

La razon de cambio de sal en el tiempo es igual a la diferencia en la cantidad de sal entra y sale del tanque por tanto :

$$\frac{dQ}{dt} = \left(\frac{1}{4}\frac{\text{kg}}{\text{lt}}\right)\left(3\frac{\text{lt}}{\text{min}}\right) - \left(3\frac{\text{lt}}{\text{min}}\right)\frac{Q(t)}{100\text{lt}} \tag{2.47}$$

Resolviendo la ecuacion superior:

$$Q(t) = 25 + Ce^{-0.03t} \tag{2.48}$$

imponiendo la condicion $Q(0) = Q_0$, encontramos el valor de la constante de integracion $C = Q_o - 25$ y sustituyendo en el valor de la constante se obtiene:

$$Q(t) = 25(1 - e^{-0.03t}) + Q_o e^{-0.03t} \tag{2.49}$$

2.5.3 Caida libre

ejemplo : Un objeto de masa m va en caida libre y el medio ofrece una resistencia k proporcional a la velocidad instantanea del objeto v. Asumiendo la fuerza gravitacional es constante, encuentre la posicion y el tiempo del objeto. demuestra que mientras que t tiende a infinito la velocidad instantanea del objeto se convierte en constante.

La ecuacion diferencial es :

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \tag{2.50}$$

Reacomodando terminos en la ecuacion:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \tag{2.51}$$

Resolviendo la ecuacion superior:

$$v = \frac{mg}{k} + Ce^{\frac{-kt}{m}} \tag{2.52}$$

si la velocidad es cero en el tiempo cero $v(0) = 0$ el valor de $C = -mg/k$ sustituyendo en la ecuacion superior

$$v = \frac{mg}{k}(1 - e^{\frac{-kt}{m}}) \tag{2.53}$$

Para obtener la posicion x se sustituye $v = dx/dt$ e integrando ambos lados e imponiendo la condicion $x(0) = 0$

$$x = \frac{mg}{k}t - \frac{m^2 g}{k^2}(1 - e^{-\frac{kt}{m}}) \tag{2.54}$$

Si en la ecuacion (2.54) resolvemos el limite de t cuando tienda a infinito

$$v = \lim_{t\to\infty} \frac{mg}{k}(1 - e^{\frac{-kt}{m}}) = \frac{mg}{k} \tag{2.55}$$

2.5.4 Problemas

1. Un cuarto cotiene 1200 ft^3 de aire libre de moxido de carbono en un tiempo t = 0. El humo de un cigarro cotiene 4 porciento de moxido de carbono y es introducido al cuarto a una razon de 0.1 ft^3/min el aire sale del cuarto a la misma proporcion. a) Encuentra la concentracion de monoxido de carbono para un tiempo t. b) Si el ser humano es expuesto a una concentracion de 0.00012 por periodos largos de tiempo es danino. encuentre el tiempo t para esta concentracion.

2. Una persona pide un prestamo de 8000$ a un banco. el interes por el prestamo es de 10 % anual. Asumiendo que el interes es constante y que el deudor da pagos constantes anualmente encontrar El valor de (k) para pagar el prestamo en 3 anos.

CAPITULO 3
ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

Ahora se emprendera a resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden. Una razon para estudiar estas ecuaciones es por que son vitales para las areas de fisica y matematicas en el desarrollo en mecanica de fluidos. conduccion de calor, movimiento ondulatorio, fenomenos electromagneticos, etc.

Una ecuacion diferencial ordinaria de segundo orden tiene la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \tag{3.1}$$

la ecuacion (3.1) es lineal si

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = g(x) - p(x)\frac{dy}{dx} - q(x)y \tag{3.2}$$

Donde g, p y q son funciones de la variable independiente x. y la ecuacion (3.1) se convierte en

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{3.3}$$

Otra forma como la ecuacion (3.3) se puede rescribir es

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x) \tag{3.4}$$

Dividiendo la ecuacion (3.4) entre $P(x)$ regresamos a la ecuacion (3.3) e identificamos $p(x)$, $q(x)$, $g(x)$ de la ecuacion (3.3) como

$$p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} \quad q(x) = \frac{R(x)}{P(x)} \quad g(x) = \frac{G(x)}{P(x)} \tag{3.5}$$

Una ecuacion diferencial de segundo orden se dice que es homogenea cuando el termnio $G(x)$ o $g(x)$ es igual a cero. y no homogena en caso contrario. En los siguientes capitulos de demostrara que una vez encontrada la solucion homogenea de la ecuacionc diferencial es siempre posible encontar la solucion no homegenea de la ecuacion (3.3) o por lo menos expresar la solucion como una integral.

Ejemplos ecuaciones diferenciales de segundo orden son:

La ecuacion de bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0 \tag{3.6}$$

La ecuacion de legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0 \tag{3.7}$$

las ecuaciones (3.6) y (3.7) son ecuaciones diferenciales de segundo orden. Hasta ahora con las herramientas matematicas del capitulo I y II no es posible resolver estas ecuaciones. Antes de emprender e introducir el metodo serie de potencial se examinara casos especiales de la ecuacion (3.3)

3.1 Ecuaciones diferenciales de segundo orden coeficientes constantes

La ecuacion diferencial de segundo orden lineal , tiene como terminos $p(x)$ y $q(x)$ si estos coeficientes son constantes es decir son (numeros escalares) la ecuacion diferencial se segundo orden general se transforma en :

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \tag{3.8}$$

En donde a, b y c son numeros escalares. la solucion a (3.8) es proponer $y = e^{rx}$ y sustituyendo el valor de y obtenemos

$$\left(ar^2 + br + c\right)e^{rx} = 0 \tag{3.9}$$

Para no obterner una solucion trivial debemos hacer que el termino $e^{rx} \neq 0$ por lo tanto

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{3.10}$$

Encontramos una ecuacion caracteristica. Su significado radica que r es la raiz de un polinomio de segundo grado. Por lo tanto nuestra ecuacion diferencial tiene dos soluciones admisibles, La solucion general es la superposion lineal de las dos solucion individuales que se encuentra al resolver la ecuacion caracteritica (3.10) y obtener los valores r. Estas soluciones podran ser diferentes $r_1 \neq r_2$, iguales $r_1 = r_2$, complejas $r = a + ib$. Ahora examinaremos cada uno de los escensario posibles

3.1.1 Cuando las raices son diferentes y reales

Si $r_1 \neq r_2$ la solucion es una combinacion lineal y obtenemos la solucion es igual a:

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} \tag{3.11}$$

Se resolvera el sigieuiente ejemplo :

Dada la siguiente ecuacion diferencial encontrar su solucion

$$y'' - 2y' - 3y = 0 \tag{3.12}$$

la ecuacion (3.12) es una ecuacion diferencial de segundo orden , en dos los coeficientes

$p(x)$ y $q(x)$ son numeros escalares. Lo primero es econtrar la ecuacion caracteristica

$$r^2 - 2r - 3 = 0 \tag{3.13}$$

obteniendo el valor de r=-1 y r=3. Encontramos que la solucion a la ecuacion diferencial es:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} \tag{3.14}$$

3.1.2 Las raices son complejas

Si las raices de la ecuacion caracteristica son complejas $r_1 = a+ib$ y $r_2 = a-ib$ los exponentes tambien seran complejos y entonces :

$$y = c_1 e^{(a+ib)x} + c_2 e^{(a-ib)x} \tag{3.15}$$

Sacando factor comun en (3.15)

$$y = e^{ax}(c_1 e^{ibx} + c_2 e^{-ibx}) \tag{3.16}$$

usando la formula u relacion de Euler

$$y = e^{ax}[(c_1 + c_2)\cos(bx) + i(c_1 - c_2)\sin(bx)] \tag{3.17}$$

sea $A = c_1 + c_2$ y $B = i(c_1 - c_2)$ en (3.17) y la expresion se reduce a :

$$y = e^{ax}[A\cos(bx) + B\sin(bx)] \tag{3.18}$$

La ecuacion (3.18) puede simplificarse mas usando la identidad

$$A\cos(bx) + B\sin(bx) = C\cos(bx - \alpha) \tag{3.19}$$

En donde α se define como $\arctan(B/A)$ y $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, para B >0 sustituyendo esta identidad en (3.18) :

$$y = e^{ax}[C\cos(bx - \alpha)] \tag{3.20}$$

y la ecuacion (3.18) o (3.20) es la solucion general cuando r_1 y r_2 son complejos.

3.1.3 Cuando las raices son iguales

Las raices seran iguales solo si en la ecuacion caracteristica el valor de $p^2 = 4q$. este resultado debe ser muy conocido por el lector. En caso no este enterado es necesario repasar polinomios de segundo grado con una incognita. Por lo tanto otra forma como la ecuacion (3.8) puede escribirse es

$$r^2 + pr + \frac{1}{4}p^2 = (r + \frac{1}{2}p)^2 = 0 \tag{3.21}$$

En vez de usar las letras (a,b,c) para definir los coeficientes constantes se usa (p) y (q). Desarrollando el alebra obtenemos :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{b}{a}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{c}{a}\right)y = 0 \tag{3.22}$$

Donde indetificamos el valor de $p = b/c$ y el valor de $q = c/a$ y por tanto para cuando las raices son iguales su ecuacion caracteristica es (3.21) :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0 \tag{3.23}$$

Siendo las raices $r_1 = r_2 = -(1/2)p$ y en este caso la solucion a la ecuacion (3.23) es

$$y = e^{r_1 x}(c_1 + xc_2) \tag{3.24}$$

ejemplo : Resolver la siguiente ecuacion diferencial

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + s = 0 \tag{3.25}$$

Encontrando la ecuacion auxiliar

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \tag{3.26}$$

resolviendo la ecuacion auxiliar encontramos que $r_1 = r_2 = -1$ y la solucion es

$$s = e^{-t}(c_1 + c_2 t) \tag{3.27}$$

3.2 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden cuando los coeficientes son constantes

3.2.1 El oscilador armonico

El oscilador armonico es uno de los sistemas mas estudiados en la fisica, ya que todo sistema que oscila alrededor de un punto de equilibrio estable se puede estudiar en primera aproximacion como si fuera un oscilador.

La caracteristica principal de un oscilador armonico es que este esta sometido a una fuerza recuperadora, que tiende a devolverlo al punto de equilibrio estable, con una intensidad proporcional a la separacion respecto de dicho punto.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{3.28}$$

Donde k es la constante de recuperacion,m es la masa y x es la posicion de equilibrio. usando la segunda ley de newton encontramos la ecuacion diferencial para el oscilador armonico. Identificamos el modelo que describe el movimiento harmonico como una ecuacion diferencial de segundo orden donde los coeficientes constantes. Ahora procedemos a encontrar la ecuacion caracteristica

$$mr^2 + k = 0 \tag{3.29}$$

resolviendo la ecuacion caracteristica $r = \sqrt{-\frac{k}{m}}$ para elegancia r se puede rescribir como $r = iw_o$ y w_o recibe el nombre de frecuencia natural. En este caso especifico el valor r es complejo y la solucion general por tanto es igual a

$$x(t) = A\cos(w_o t) + B\sin(w_o t) \tag{3.30}$$

imponiendo las condiciones iniciales $X(0) = X_o$ y $X'(0) = 0$ en donde x_o es la separacion respecto al punto de equilibrio

$$x(t) = X_o \cos(w_o t) \tag{3.31}$$

ejemplo : Una masa de 0.5 kg cuelga de un resorte (ver figura 5.1) si el resorte se mueve una distancia de 0.2 metros de su posicion de equilibrio y se suelta con una velocidad inicial de cero. encontrar la posicion del resorte para cualquier tiempo t la constante de recuperacion, k tiene un valor de 2 N/m, ignore friccion.

Usando la ecuacion indical obtenemos que la frecuencia angular $w_o = \sqrt{-\frac{k}{m}}$ notese las unidades de la frecuencia natural es 1/s (s son segundos)

$$w_o = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2}{0.50}} = 4s^{-1} \tag{3.32}$$

Sustituyendo el valor de w_o y X_o en la solucion general encontrada para el oscilador hermonico encontramos el compartamiento de la posicion en funcion del tiempo t

$$X(t) = 0.2\cos(4t) \tag{3.33}$$

3.2.2 Oscilador armonico amortiguado

Este caso mas realista consiste en tener en cuenta el rozamiento del aire, sea k la constante de recuperacion y b un coeficiente de friccion proporcional a la velocidad y m la masa. Usando la segunda ley de newton se encuentra la ecuacion diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{3.34}$$

La ecuacion que describe el movimiento armonico armortiguado es una ecuacion diferencial de segundo orden coeficientes constantes. Procedemos a encontrar la ecuacion auxiliar

$$mr^2 + br + k = 0 \tag{3.35}$$

resolviendo la ecuacion auxiliar

$$r_{1,}r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} = \frac{b}{2m}\left(-1 \pm \sqrt{b^2 - 4km}\right) \tag{3.36}$$

la solucion a la ecuacion depende del termino dentro de la raiz $\sqrt{b^2 - 4mk}$

Caso A : cuando las raices son reales

$$b^2 - 4km > 0 \tag{3.37}$$

la solucion general al oscilador harmonico amortiguado es

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \tag{3.38}$$

Caso B : cuando las raices son iguales

$$b^2 - 4km = 0 \tag{3.39}$$

La solucion general del oscilador harmonico amortiguado es

$$x(t) = e^{\frac{-bt}{2m}}(c_1 + c_2 t) \tag{3.40}$$

Caso C : cuando las raices son complejas

$$b^2 - 4km < 0 \tag{3.41}$$

La solucion general al oscilador harmonico amortiguado es

$$x(t) = e^{\frac{-bt}{2m}}[A\cos(wt) + B\sin(wt)] \tag{3.42}$$

donde $w = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ si se impone la condicion $X(0) = X_o$ y $X'(0) = 0$ la ecuacion (3.42) se rescribe como

$$x(t) = X_o e^{-bt/2m}\cos(wt + \phi) \tag{3.43}$$

En todos los casos la solution $X(t)$ tiende a cero mientras que $t \to \infty$ esto ocurre independientemente de los valores de las constantes de integracion y condiciones iniciales. esto confirma nuestra intuicion que el oscilador disipa gradualmente energia del sistema deteniendo su movimiento.

ejemplo : Una masa pesa 4 lb y cuelga de un resorte. si el resorte se mueve una distancia de 2 *in* a causa de la masa y luego el resorte se mueve 6 in de su posicion de equilibrio y se suelta con una velocidad inicial de cero, encuentre la ecuacion diferencial del sistema, considere el medio ofrece una resistencia al movimiento de 6 lb cuando las masa tiene una velocidad de 3 ft/s.

primero debemos encontrar el coeficiente de friccion

$$\mathrm{b} = {}^{6\mathrm{lb}}\!/\!\left(3\tfrac{\mathrm{ft}}{\mathrm{s}}\right) = 2\frac{\mathrm{lb}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{ft}}$$

ahora se debe encontrar el coeficiente recupracion

$$k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{4\mathrm{lb}}{0.1666\,\mathrm{ft}} = 24\frac{\mathrm{lb}}{\mathrm{ft}}$$

encontrar la masa del sistema

$$\mathrm{m} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{g}} = \frac{4\mathrm{lb}}{32\,{}^{\mathrm{ft}}\!/\!_{\mathrm{s}^2}} = \frac{1}{8}\,\mathrm{slug}$$

Sustituyendo el valor de k, m y b en (3.34) se obtiene la ecuacion diferencial

$$\frac{1}{8}x'' + 2x' + 24x = 0 \tag{3.44}$$

La ecuacion diferencial se puede resolver a mano y encontrar las raices usando la ecuacion auxiliar pero teniendo las soluciones generales solo basta saber si (3.44) es caso (A,B o C)

$$b^2 - 4km = (2)^2 - 4(24)(1/8) = -8 \tag{3.45}$$

como $b^2 - 4km < 0$ la ecuacion (3.44) es caso C (cuando las raices son complejas) por lo tanto sustituyendo los valores de k,m y b en (3.42)

$$x(t) = e^{-8t}[A\cos(\sqrt{128}t) + B\sin(\sqrt{128}t)] \tag{3.46}$$

Como el problema tiene la condicion $X(0) = \frac{1}{2}$ y $X'(0) = 0$ que deben satisfacerse, entonces la solucion a la ecuacion diferencial es

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{-8t}\cos(\sqrt{128}t + \phi) \tag{3.47}$$

3.3 Artificios ecuaciones diferenciales segundo orden

3.3.1 Ecuaciones segundo orden P(x)y” + Q(x)y’ = G(x)

Cuando la ecuacion diferencial general de segundo orden tiene la siguiente forma

$$P(x)y'' + Q(x)y' = G(x) \tag{3.48}$$

Haciendo un cambio de variable $y' = v$ la ecuacion se puede rescribir como una ecuacion de primer orden $v' = f(x,v)$,el valor de y se obtiene de integrar $dy/dx = v$ la primera constante de integracion se obtiene a resolver v y la segunda constante al resolver para y.

$$P(x)v' + Q(x)v = G(x) \tag{3.49}$$

ejemplo : resolver la siguiente ecuacion diferencial

$$x^2y'' + 2xy' - 1 = 0 \tag{3.50}$$

aplicando el cambio de variable $y' = v$

$$x^2v' + 2xv - 1 = 0 \tag{3.51}$$

Convertimos la ecuacion diferencial de segundo orden a una ecuacion diferencial de primer orden y se que se puede resolver usando los metodos previamente mencionados en los capitulos anteriores

$$v = e^{-\int \frac{2}{x}dx}[\int \frac{1}{x^2}e^{\int \frac{2}{x}dx}dx + c_1] \tag{3.52}$$

se encuentra el valor de v es igual a

$$v = \frac{1}{x} + \frac{c_1}{x^2} \tag{3.53}$$

Por el cambio de variable $v = dy/dx$ se procede a encontrar el valor de y

$$y = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{c_1}{x^2} \right) dx \tag{3.54}$$

Resolviendo la integral se encuentra la solucion de la ecuacion (3.50)

$$y = \ln(x) - \frac{c_1}{x} + c_2 \tag{3.55}$$

ejemplo : resolver la siguente ecuacion diferencial

$$y'' + y' = e^{-x} \tag{3.56}$$

Usando el cambio de variable

$$v' + v = e^{-x} \tag{3.57}$$

Resolviendo para el valor de v en (3.57)

$$v = e^{-\int dx}[\int e^{-x} e^{\int dx} dx + c_1] \tag{3.58}$$

Por el cambio de variable $v = dy/dx$ se procede a encontrar el valor de y

$$y = \int e^{-x}(x + c_1)dx = -e^{-x}(1 + x + c_1) + c_2 \tag{3.59}$$

3.3.2 Ecuaciones segundo orden y”=F(y,y’)

Ecuaciones de la forma $y'' = f(y, y')$ la variable independiente x no aparece explicitamente, haciendo el cambio de variable $y' = v$ se obtiene $dv/dx = f(y, v)$ como el lado derecho depende de las variable y y v no de x. pero pensando que y es la variable independiente, usando la regla de la cadena $\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dy}v$

ejemplo : Resolver la siguiente ecuacion diferencial

$$yy'' + (y')^2 = 0 \tag{3.60}$$

usando el cambio de variable $\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dy}v$ en (3.60)

$$y\left(\frac{dv}{dy}\right)v + (v)^2 = \frac{dv}{dy} + \frac{v}{y} = 0 \tag{3.61}$$

Separando las variables en (3.61)

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dy}{y} \tag{3.62}$$

Resolviendo (3.62) y despejando para la variable v

$$v = \frac{e^{c_1}}{y} \tag{3.63}$$

Por el cambio de variable $v = dy/dx$ sustituyendo en (3.63)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{c_1}}{y} \tag{3.64}$$

Resolviendo la integral, se encuentra la solucion de la ecuacion (3.60)

$$y = \sqrt{2(e^{c_1}x + c_2)} \tag{3.65}$$

ejemplo : resolver la siguiente ecuacion diferencial

$$y'' + (y')^2 = 2e^{-y} \tag{3.66}$$

Usando el cambio de variable en (3.66)

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) v + v^2 = 2e^{-y} \tag{3.67}$$

Reagrupando terminos en (3.67)

$$\frac{dv}{dy} + v = 2e^{-y}v^{-1} \tag{3.68}$$

(3.68) es una ecuacion de Bernoulli. resolviendo la ecuacion y haciendo un nuevo de cambio variable $w = 1/v^{-2}$

$$\frac{1}{2}\frac{dw}{dy} + w = 2e^{-y} \tag{3.69}$$

La ecuacion (3.69) es una ecuacion de primer orden y con facilidad encontramos la solucion

$$v = \sqrt{e^{-2y}(4e^y + c_1)} \tag{3.70}$$

Encontrando el valor de v usando el primer cambio de variable $v = dy/dx$ encontramos y

$$\int \frac{dy}{\sqrt{e^{-2y}(4e^y + c_1)}} = \int dx \tag{3.71}$$

resolviendo la intergral en (3.71) y despejando para la variable y encontramos la solucion a la ecuacion diferencial (3.66)

$$e^y = (c_2 + x)^2 - c_1/4 \tag{3.72}$$

En conclusion hay ecuaciones diferencial no lineales ejemplo la ecuacion bernoulli (3.66) que por un cambio de variable se pueden rescribir en forma lineal y resolver con los metodos ya conocidos.

3.4 Ecuaciones no Homogeneas

La solucion genreal a una ecuacion no homogenea (3.3), es decir donde el termino $g(x)$ no es nulo. Puede escribirse de la siguiente forma

$$y(x) = c_1y_1 + c_2y_2 + Y \tag{3.73}$$

En la ecuacion (3.73) y_1 e y_2 son las soluciones a la ecuacion homogenea e Y una solucion especifica de la ecuacion no homogenea. en las secciones anteriores se aprendio como encontrar la solucion homogenea de las ecuacion diferencial ahora se estudiaran dos metodos para encontrar la solucion no homogenea (Coeficientes indeterminados) y (Variacion de paramteros)

3.4.1 Metodos coeficientes indeterminados

El metodo de los coeficientes indeterminados requiere que asumamos la forma de la solucion no homogenea Y por esta razon este metodo es usado solo para problemas en que la ecuacion diferencial tiene coeficientes constantes y la solucion Y es restringida para una cantidad pequena de funciones en lo particular se considera terminos homogeneos que consisten de polinomios, funciones exponenciales, senos y cosenos. Los siguientes ejemplos ilutraran la aplicacion del metodo.

ejemplo resolver la siguiente ecuacion diferencial

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x} \tag{3.74}$$

La ecuacion (3.74) es de segundo orden y no homogenea. se encuentra la solucion especifica Y proponiendo que $Y = Ae^{2x}$ donde el coeficiente A debe ser determinado, para encontar el valor de A se debe sustituir el valor de Y en la ecuacion diferencial (3.74)

$$y' = 2Ae^{2x} \tag{3.75}$$

$$y'' = 4Ae^{2x} \tag{3.76}$$

Sustituyendo Y,Y' e Y'' en (3.74)

$$4Ae^{2x} - 6Ae^{2x} - 4Ae^{2x} = 3e^{2x} \tag{3.77}$$

$$4A - 6A - 4A = -6A = 3 \tag{3.78}$$

Por $-6A = 3$ entonces $A = -1/2$ y la solucion particular a (3.74) es

$$Y(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} \tag{3.79}$$

La solucion homogenea es cuando $y'' - 3y' - 4y = 0$ resolviendo se obtiene $c_1e^{-x} + c_2e^{4x}$ combinando la solucion particular y homogenea se obtiene la solucion general de la ecuacion

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{4x} - \frac{1}{2}e^{2x} \tag{3.80}$$

ejemplo resolver la siguiente ecuacion diferencial

$$y'' - 3y' - 4y = 2\sin(x) \tag{3.81}$$

Proponemos que la solucion particular sea $Y = A\cos(x) + B\sin(x)$ sustituyendo en la ecuacion diferencial como en el ejemplo anterior.

$$[-B + 3A - 4B]\sin(x) + [-A - 3B - 4A]\cos(x) = 2\sin(x) \tag{3.82}$$

Igualando los coeficientes en (3.82)

$$3A - 5B = 2 \tag{3.83}$$

$$-5A - 3B = 0 \tag{3.84}$$

Resolviendo el sistema lineal de ecuaciones, encotramos $A = 3/17$ y $B = -5/17$, por lo tanto la solucion particular de la ecuacion es

$$Y(x) = -\frac{5}{17}\sin(x) + \frac{3}{17}\cos(x) \tag{3.85}$$

la solucion general de la ecuacion es

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x} - \frac{5}{17}\sin(x) + \frac{3}{17}\cos(x) \tag{3.86}$$

ejemplo : resolver la siguiente ecuacion diferencial

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^{x}\cos(2x) \tag{3.87}$$

Proponemos que la solucion particular sea $Y = Ae^{x}\cos(2x) + Be^{x}\sin(2x)$ sustituyendo en la ecuacion diferencial como en el ejemplo anterior, se puede resolver, se deja para el lector como un ejersicio.

3.4.2 Oscilador Forzado

Decimos que un oscilador esta forzado si sobre el se aplica una fuerza externa. El caso mas interesante es cuando la fuerza de forzamiento es tambien periodica, por ejemplo.

$$my'' + \gamma y' + ky = F_o\cos(wt) \tag{3.88}$$

En la ecuacion diferencial (3.88) la constante m es la masa, γ es el coeficiente de friccion, k es la constante proporcionalidad y $F_o\cos(wt)$ es una fuerza periodica de frecuencia w. la unica diferencia entre la ecuacion del amortiguado y el oscilador Forzado es el termino no homogeneo.

Para encontrar la solucion particular proponemos que la solucion Y sea de la forma

$$Y(t) = A\cos(wt) + B\sin(wt) \tag{3.89}$$

En donde A y B son coeficientes deben ser determinados sustituyendo la solucion propuesta en la ecuacion diferencial

Encotrando la primera derivada de $Y(t)$

$$Y'(t) = -Aw\sin(wt) + Bw\cos(wt) \tag{3.90}$$

Encotrando la segunda derivada de $Y(t)$

$$Y''(t) = -Aw^2\sin(wt) - Bw^2\cos(wt) \tag{3.91}$$

Sustiyuendo la segunda y primera derivadas y la solucion particular en la ecuacion diferencial encontramos el valor de A y de B

$$\begin{aligned} -Amw^2 + B\gamma w + Ak = F_o \\ -Bmw^2 - A\gamma w + Bk = 0 \end{aligned} \tag{3.92}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones el valor de A es

$$A = \frac{(k - mw^2)F_o}{(k - mw^2)^2 + (\gamma w)^2} \tag{3.93}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones el valor de B es

$$B = \frac{\gamma w F_o}{(k - mw^2)^2 + (\gamma w)^2} \tag{3.94}$$

Sustituyendo el valor de A y B en la solucion propuesta (3.89) se obtiene

$$Y(t) = \frac{F_o}{(k - mw^2)^2 + (\gamma w)^2}\left[(k - mw^2)\cos(wt) + \gamma w\sin(wt)\right] \tag{3.95}$$

La expresion dentro de los corchetes $\left[(k - mw^2)\cos(wt) + \gamma w\sin(wt)\right]$ puede simplificarse mas usando la entidad (3.19) y reconociendo que $mw_o^2 = k$ la solucion particular es

$$Y(t) = \frac{F_o}{\sqrt{m^2(w_o^2 - w^2) + (\gamma w)^2}}\cos(wt - \phi) \tag{3.96}$$

Donde el valor de $\phi = \arctan\left(\frac{\gamma w}{m^2(w_o^2 - w^2)}\right)$. La solucion general es agregar la solucion de la ecuacion homogenea y por tanto es :

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \frac{F_o}{\sqrt{m^2(w_o^2 - w^2) + (\gamma w)^2}}\cos(wt - \phi) \tag{3.97}$$

Como vemos, la solucion particular $Y(t)$, es la unica que importa para tiempos grandes, ya que todas las soluciones de la ecuacion homogenea decaen exponencialmente (solucion transitoria). Asi, pues, tenemos un estado estacionario.

$$y(t) = \lim_{t\to\infty}[y(t)] = \frac{F_o}{\sqrt{m^2(w_o^2 - w^2) + (\gamma w)^2}}\cos(wt - \phi) \tag{3.98}$$

3.4.3 Metodo variacion parametros

En esta seccion se describe otro metodo para encontrar la solucion particular a una ecuacion no homogenea. Este metodo recibe el nombre de variacion de parametros la ventaja de este metodo es que es general; en principio o al menos se puede aplicar a cualquier ecuacion y no requiere asumir la forma de la solucion una desventaja es el hecho debemos evaluar ciertas integrales y esto puede presentar dificultades.

La ecuacion no homogenea de segundo grado que ya se a visto es $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$, la idea principal del metodo es sustituir en la solucion homogenea $y = c_1y_1 + c_2y_2$ los coeficientes c_1 y c_2 por funciones u_1 y u_2 resultado $y = u_1y_1 + u_2y_2$ e imponiendo la condicion $u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$ se procede a sustituit en la ecuacion diferencial no homogenea la solucion y.

$$u_1[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + u_2[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] + u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(x) \tag{3.99}$$

la expresion dentro de los parantesis [] es cero por que y_1 y y_2 son ambas solucion a la ecuacion homogenea y la ecuacion se reduce a

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(x) \tag{3.100}$$

las funciones u_1 y u_2 son soluciones al siguiente sistema

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(x) \end{cases} \tag{3.101}$$

Lo que implica que

$$\begin{cases} u_1 = -\int \frac{y_2 g(x)}{W(y_1,y_2)} dx + c_1 \\ u_2 = \int \frac{y_1 g(x)}{W(y_1,y_2)} dx + c_2 \end{cases} \tag{3.102}$$

y por lo tanto la solucion particular $Y(x)$ es

$$Y(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1,y_2)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1,y_2)} dx \tag{3.103}$$

y la solucion general es

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + Y(x) \tag{3.104}$$

Examinando la solucion general, observamos dos grandes dificultades en usar el metodo de varaicion de parametros, la solucion no homogenea $Y(x)$ depende explicitamente de la solucion a la ecuacion homogenea y_1 e y_2 ,la cual puede contener coeficientes variables, la segunda dificultad es en evaluar las integrales que aparecen en la ecuacion (xx),pero aunque no se pueda evaluar estas integrales por metodos analiticos por lo general pueden aproximarse por metodos numericos (Regla de Simpson,etc).

ejemplo : resolver la siguiente ecuacion diferencial

$$y'' + 4y = 3\csc(x) \tag{3.105}$$

El primer paso es encontrar la solucion a la ecuacion diferencial homogenea $y'' + 4y = 0$ y su solucion es $y_1 = cos(2x)$ e $y_2 = sin(2x)$, el segundo paso es encontrar el wroksiano $w(y_1,y_2)$

$$\det[w] = \begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\sin(2x) \end{pmatrix} = 2[\sin^2(x) + \cos^2(x)] = 2 \tag{3.106}$$

Conociendo la solucion a la ecuacion homogenea y el wroksiano sustituimos para encontrar u1 e u2

$$u_1 = -\int \frac{\sin(2x)3\csc(x)}{2}dx = -3\sin(x) + c_1 \tag{3.107}$$

$$u_2 = \int \frac{\cos(2x)3\csc(x)}{2}dx = \frac{3}{2}\ln[\csc(x) - \cot(x)] + 3\cos(x) + c_2 \tag{3.108}$$

sustituyendo el valor de u_1 y u_2 y conociendo y_1 e y_2 encontramos la solucion particular a la ecuacion no homogenea y se muestra a continuacion

$$Y(x) = -3\sin(x)\cos(2x) + \frac{3}{2}\ln[\csc(x) - \cot(x)]\sin(2x) + 3\cos(x)\sin(2x) \tag{3.109}$$

la solucion general es la siguiente

$$y(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) - 3\sin(2x)\cos(2x) + \frac{3}{2}\ln[\csc(x) - \cot(x)]\sin(2x) + 3\cos(x)\sin(2x) \tag{3.110}$$

3.4.4 Reduccion de orden

En matematicas, la reduccion de orden es una tecnica utilizada para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Se utiliza cuando la primera de dos soluciones y_1 es conocida y se busca la segunda y_2.

En la ecuacion diferencial de segundo orden general : $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Se propone que la segunda solucion sea $y_2 = vy_1$ en donde v es funcion de x

la ecuacion diferencial general :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

proponiendo que $y_2 = vy_1$

$$y_2' = \frac{d}{dx}(vy_1) = vy_1' + y_1v'$$
$$y_2'' = \frac{d}{dx}(y_2') = vy_1'' + 2v'y_1' + y_1v''$$

sustituyendo en la ecuacion general:

$$vy_1'' + 2v'y_1' + y_1v'' + p(x)[vy_1' + y_1v'] + q(x)vy_1 = 0$$
$$vy_1'' + 2v'y_1' + y_1v'' + p(x)vy_1' + p(x)y_1v' + q(x)vy_1 = 0$$
$$y_1v'' + 2v'y_1' + p(x)y_1v' + v[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] = 0$$

Se debe notar que $y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$

$$y_1 v'' + 2v' y_1' + p(x) y_1 v' = 0$$

$$v'' + v' \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p(x) \right) = 0$$

Haciendo un cambio de variable, haciendo que $w = v'$

$$w' + w \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p(x) \right) = 0$$

La ecuacion superior es una ecuacion diferencial de primer orden, ahora se procede a resolverla:

$$\int \frac{dw}{w} = \int -\left(\frac{2y_1'}{y_1} + p(x) \right) dx \rightarrow \ln(w) = -2\ln(y_1) - \int p(x)dx$$

Procediendo a resolver para la variable w

$$w = \frac{1}{y_1^2} \left(e^{-\int p(x)dx} \right)$$

Ahora nos acordamos del cambio de variable impuesto anteriormente $w = v'$ y la ecuacion anterior se puede poner en funcion de v

$$v' = \frac{1}{y_1^2} \left(e^{-\int p(x)dx} \right) \rightarrow v = \int \frac{1}{y_1^2} \left(e^{-\int p(x)dx} \right) dx$$

Encontrando v la solucion $y_2 = vy_1$ y por lo tanto:

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \left(e^{-\int p(x)dx} \right) dx$$

CAPITULO 4
INTRODUCCION A SERIES

En matematicas, una serie es la suma de los terminos de una sucesion. Se representa una serie con terminos a_n como

$$S_n = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + a_3 \ldots \tag{4.1}$$

donde N es el indice final de la serie.

Si en una serie, N, es finito tambien la sumatoria de terminos sera finita, la pregunta es que sucede cuando el termino $N \to \infty$, sera la suma de numero infinitos, finita, o en otras palabras la serie converge a un valor ?. Para entender lo anterior usemos la paradoja de zenon, *Aquiles y la tortuga* que se menciona a continuacion

> Aquiles el guerrero decide salir a competir en una carrera contra una tortuga. Ya que corre mucho mas rapido que ella, y seguro de sus posibilidades, le da una ventaja inicial. Al darse la salida, Aquiles recorre en poco tiempo la distancia que los separaba inicialmente, pero al llegar alli descubre que la tortuga ya no esta, sino que ha avanzado, mas lentamente, un pequeno trecho. Sin desanimarse, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, esta ha avanzado un poco mas. De este modo, Aquiles no ganaria la carrera, ya que la tortuga estara siempre por delante de el.

> Actualmente, se conoce que Aquiles realmente alcanzaria a la tortuga, ya que una suma de infinitos terminos puede tener un resultado finito. Los tiempos en los que Aquiles recorre la distancia que le separa del punto anterior en el que se encontraba la tortuga son cada vez mas y mas pequenos, y su suma da un resultado finito, que es el momento en que alcanzarÃ¯a a la tortuga.

Para plantear la paradoja de *Aquiles y la tortuga* se hace una serie que sume la mitad, luego la mitad de la mitad, luego la mitad de la mitad de la mitad y asi, hasta el infinito

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots.. \tag{4.2}$$

Regresando a la pregunta anterior, que sucede cuando $N \to \infty$ en la serie para plantear la paradoja de zenon?. Se entiende que si se deteniene la serie a un valor de N finito, la sumatoria sera menor que uno, pero la diferencia puede hacerse lo mas pequeno posible usando un valor de N muy grande asi podemos decir que la serie converge al numero uno.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}..... = 1 \qquad \text{Cuando } N \to \infty \tag{4.3}$$

El problema anterior puede analisarse con mas detalle observando la ecuacion (4.3) es un caso especial de la serie geometrica $a/(1-r)$.

Interpretemos matematicamente el concepto de convergencia y divergencia.

En la serie S_n en funcion de n, si hacemos que el numero de terminos n tienda a infinito puede ocurrir una de las dos cosas siguientes:

I. Que S_n tienda hacia un limite, digamos u; es decir que

$$\lim_{n\to\infty} [S_n] = u \tag{4.4}$$

En este caso cuando se cumple (4.4) se dice que la serie es convergente y que converge al valor de u, o que tiene el valor de u.

II. Que S_n no tienda hacia ningun limite. en este caso se dice que la serie infinita es divergente.

Como ya hemos dicho, en una serie convergente el valor de la serie es un numero $\lim_{n\to\infty} [S_n] = u$. Si Representamos graficamente a una serie convergente en una recta orientada los puntos determinados por los valores S_1, S_2, S_3..etc. Entonces cuando n aumenta estos puntos se acercaran al punto determinado u o se agruparan alrededor de este punto.

4.1 Clasificacion de series

Series Alternadas

Se da este nombre a las series que sus terminos son alternativamente positivos y negativos, por ejemplo :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(-1)^{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}.... \tag{4.5}$$

Serie Oscilante

La suma de terminos no aumenta indefindamente y no tiende hacia un limite

$$\sum_{n=1}^{\infty} -(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1......$$

4.2 criterios comparacion

No en todas las series calcular el limite (4.4) es posible,facil o manejable,excepto se usara la computadora y aproximacion numerica, mas aun la mayor parte del tiempo solo importa si la serie converge o diverge no el valor de u, a continuacion se muestrarn criterios de comparacion para saber la convergencia de series en general.

Ratio test o Razon de D Alambert

Sea S_n una serie infinita de terminos positivos, El criterio de D'Alambert se utiliza para clasificar las series numericas.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = l \tag{4.6}$$

Entonces:

1. cuando $l < 1$, la serie es convergente
2. cuando $l > 1$, la serie es divergente
3. cuando $l = 1$, el criterio falla

note que no importa que l sea menor que uno, eso no es suficiente para la convergencia, es el limite de n cuando tiene a infinito lo que importa. En otras palabras cuando $l < 1$ podemos elegir n tan grande que la razon $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ difiera tan poco de l como queramos.

como un ejemplo saber si la siguiente serie converge o diverge usando la Razon de D Alambert.

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n} \tag{4.7}$$

lo primero es identificar a_n

$$a_n = \frac{n}{3^n} \tag{4.8}$$

para encontrar a_{n+1} sustituir en a_n la variable n por $n+1$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+!}} \tag{4.9}$$

usar la razon de alambert

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{3n}\right) = \frac{1}{3} \tag{4.10}$$

El valor de $l < 1$ por lo tanto la serie (4.9) converge. Si la serie se extendiera un numero infinito de terminos se encuentra que el $\lim_{n\to\infty}[S_n] = 3/4$.

4.3 Serie de Potencias

En este seccion se estudiara la manera de poder representar una funcion por una serie de potencias.

En general una funcion $f(x)$ puede representarse alrededor de un punto a por una sucesion de terminos esta sucesion recibe el nombre de serie de potencias.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 \ldots \tag{4.11}$$

Entonces si una funcion se representa por una serie de potencias,cual debe ser la forma de los coeficientes $a_0, a_1, \ldots a_n$?, el valor de los coeficientes se decribe usando la serie de Taylor, Si $a = 0$, a la serie se le llama serie de Maclauri

$$a_n = \frac{f^n(a)}{n!} \qquad \text{para } n \geq 0 \tag{4.12}$$

En la ecuacion anterior f^n representa la enesima derivada de la funcion $f(x)$ evaluada en el punto a. Usemos la definicion anterior para interpretar la funcion $f(x) = \cos(x)$ en una serie alrededor del punto $a = 0$

$$\begin{aligned}\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n[\cos(0)]}{n!} x^n = \frac{\cos(0)}{0!} - \frac{\sin(0)}{1!} x - \frac{\cos(0)}{2!} x^2 + \frac{\sin(0)}{3!} x^3 + \\ \frac{\cos(0)}{4!} x^4 - \frac{\sin(0)}{5!} x^5 - \frac{\cos(0)}{6!} x^6 \ldots \text{etc}\end{aligned} \tag{4.13}$$

la sucesion anterior puede extenderse un numero infinito de terminos, si encontramos un patron la serie puede simplificarse

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \tag{4.14}$$

4.3.1 Operaciones con Series Infinitas

Muchas de las operaciones del Algebra y del Calculo se pueden efectuar con series convergentes.

sumatoria

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones desarrolladas en series convergente de potencias,alrededor del mismo punto a para efectuar la sumatoria entre ellas los indicides finales e iniciales deben ser iguales y es como sigue

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_o)^n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x - x_o)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x - x_o)^n \tag{4.15}$$

La sumatoria de las serie $f(x)$ y $g(x)$ en (4.15) es posible por que los indices iniciales y finales son iguales $n = 1$ y $N \to \infty$

El siguiente ejemplo demuestra el caso en que dos series no pueden sumarse

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_o)^n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x - x_o)^n \tag{4.16}$$

En la ecuacion (4.16) la sumatoria entre las dos series no puede efectuarse por que los indicies inciales son diferentes, en le primera $n = 0$ y en la segunda $n = 1$.

En (4.16) para poder sumar las series se puede aplicar los siguientes dos metodos se puede desarrollar la primera serie un termino asi quedando

$$f(x) \pm g(x) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_o)^n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x-x_o)^n = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-x_o)^n \tag{4.17}$$

Otra manera es hacer un cambio en el indice en la segunda serie en (4.16) asi quedando

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_o)^n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x-x_o)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_o)^n \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}(x-x_o)^{k+1} \tag{4.18}$$

note que los indices k y n en (4.18) son iguales, entoces no importa la variable que se use al momento declarar los indices pero su valor a este tipo de variable se la denomina *variable muda*.

La suma de serie en (4.18) se plantea a continuacion

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_o)^n \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}(x-x_o)^{k+1} = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \pm b_{m+1}x)(x-x_o)^m \tag{4.19}$$

Multiplicacion

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones desarrolladas en series convergente de potencias,alrededor del mismo punto a para efectuar la mutiplicacion entre ellas los indicides finales e iniciales deben ser iguales y es como sigue

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j (x-c)^{i+j} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right)(x-c)^n. \end{aligned} \tag{4.20}$$

La sucesion $m_n := \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ se conoce como la convolucion de an con bn.

Division

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones desarrolladas en series convergente de potencias,alrededor del mismo punto a para efectuar la division entre ellas los indicides finales e iniciales deben ser iguales y es como sigue

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-a)^n \tag{4.21}$$

En la mayoria de los casos los coeficientes d_n en la ecuacion (4.21) pueden obtenerse con facilidad igualando coeficientes en la relacion equivalente :

$$f(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-c)^n \right) \tag{4.22}$$

Derivacion

Una vez una funcion $f(x)$ se represente como una serie de potencias, si es continua y converge, la derivacion de la serie es igual a derivar termino a termino. La derivada $f'(x)$ tendra el mismo intervalo de convergencia que la serie original original.

Como un ejemplo considere la serie a continuacion :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n \tag{4.23}$$

Derivar la serie en (4.23) es igual a encontrar la derivara termino a termino y por tanto

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + \ldots n a_n x^{n-1} \tag{4.24}$$

O en un caso mas general alrededor de un punto a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n \, (x-a)^{n-1} \tag{4.25}$$

Integracion

Una vez una funcion $f(x)$ se represente como una serie de potencias, si es continua y converge, la integracion de la serie es igual a integrar termino a termino. La integral $\int f(x)dx$ tendra el mismo intervalo de convergencia que la serie original.

$$\int f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \, (x-c)^{n+1}}{n+1} + C \tag{4.26}$$

Cambio de indices o Shift of index of Summation

El indice en la sumatoria de series infinitas es una variable muda, de la misma manera lo es la variable de integracion en integrales definidas. Es conveniente hacer cambios en el indice de la sumaoria cuando se calcula soluciones a ecuaciones diferenciales usando series.

A continuacion se monstraran ejemplos :

Escribe la serie $\sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_n(x-a)^{n-2}$ como una serie con el termino $(x-a)^{n-2} = (x-a)^n$. Sea $n-2=k$ por lo tanto $n=k+2$, sustituyendo el nuevo valor de n en la serie original se obtiene

$$\sum_{k+2=2}^{\infty}(k+2+2)(k+2+1)a_{k+2}(x-a)^{k+2-2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+4)(k+3)a_{k+2}(x-a)^{k} \tag{4.27}$$

Se puede comprobar que ambas series al expanderse son iguales pero note que el indice inicial de la sumatoria de las series es diferente

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n}(x-a)^{n-2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+4)(k+3)a_{k+2}(x-a)^{k} \tag{4.28}$$

Considera el siguiente ejemplo : comprobar que la series $\sum_{n=2}^{\infty}a_n x^n$ y $\sum_{m=0}^{\infty}a_{m+2}x^{m+2}$ son iguales. Para comprobar la afirmacion anterior solo es necesario expandir ambas series y comparar.

Primero se expande la segunda serie

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_{m+2}x^{m+2}=a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5\ldots \tag{4.29}$$

Luego se expande la primera serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n x^n=a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5\ldots \tag{4.30}$$

Comparamos la primera con la segunda y se observa los terminos son identicos por tanto ambas series son iguales:

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n x^n=\sum_{m=0}^{\infty}a_{m+2}x^{m+2} \tag{4.31}$$

De nuevo note que no importa que letra se use para declarar los indices ya sea n o m da los mismo

CAPITULO 5

SOLUCION ECUACIONES DIFERENCIALES METODO SERIES DE POTENCIAS

Ahora se considera metodos para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden lineales, cuando los coeficientes son funciones de una variable independiente.

La idea es proponer que la solucion a la ecuacion diferencial sea una serie de potencias $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, se recuerda que para proponer una solucion en forma de potencias la funcion debe ser continua en el punto a. dicho lo anterior surgen dos preguntas.

1. Para que valores de x la serie converge.

2. Para que valores de x la solucion en forma de serie resuelve la ecuacion diferencial.

La primera pregunta puede resolverse calculando el radio de convergencia usando criterios de comparacion, pero ambas preguntas se resuelven usando el teorema de funch's que se menciona a continuacion

Teorema de Fuchs. Considerar la ecuacion diferencial $y'' + p(t)y' + q(t) = 0$ y con las condiciones iniciales de la forma $y(0) = y_0$ y $y'(0) = y'_0$. Dejar $r > 0$. Si $p(t)$ y $q(t)$ tienen series de Taylor, que convergen en el intervalo $(-r, r)$, despues la ecuacion diferencial tiene una solucion unica $y(t)$ en forma de serie de potencias, que tambien converge en el intervalo $(-r, r)$. El radio de convergencia de la solucion en forma de serie de potencias a la ecuacion diferencial, es por lo menos tan grande como el miniimo de los radios de convergencia de $p(t)$ y de $q(t)$.

Mostremos un simple ejemplo para aprender como funciona el metodo de serie de potencias :

ejemplo:

Dada la ecuacion diferencial $y'' + y = 0$ encontrar la solucion usando el metodo de series serie de potencias

$$
\begin{aligned}
&y'' + y = 0 \text{ proponiendo } y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\
&\sum_{p=0}^{\infty} (p+1)(p+2) a_{p+2} x^p + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\
&\sum_{p=0}^{\infty} [(p+1)(p+2) a_{p+2} + a_p] x^p = 0 \; pero \; x^p \neq 0
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Como $x^p \neq 0$ entonces :

$$
(p+1)(p+2)a_{p+2} + a_p = 0 \rightarrow a_{p+2} = \frac{-a_p}{(p+1)(p+2)} \tag{5.2}
$$

la ecuacion (5.2) recive el nombre de relacion de recurrencia y mediante de esta relacion las coeficientes *an* pueden ser definidos,

$$
\begin{aligned}
&a_{p+2} = \frac{-a_p}{(p+2)(p+1)} \\
&for \; p = 0 \; a_2 = \frac{-a_o}{(1)(2)} \\
&for \; p = 1 \; a_3 = \frac{-a_1}{(2)(3)} \\
&for \; p = 2 \; a_4 = \frac{-a_2}{(3)(4)} = \frac{a_o}{(1)(2)(3)(4)} \\
&for \; p = 3 \; a_5 = \frac{-a_3}{(4)(5)} = \frac{a_1}{(2)(3)(4)(5)}
\end{aligned}
$$

Encontrar un patron en los coeficientes es una tarea dificil y se requiere de practica, ser observa que los coeficientes de la series dependen de a_0 y de a_1

$$
y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \rightarrow a_0 \cos(x) + a_1 \sin(x)
$$

5.0.2 Ecuacion de Airy

Otro ejemplo es la ecuacion de airy que se define por :

$$
y'' \pm k^2 xy = 0
$$

Un caso importante es cuando el valor de k es igual a uno y se considera el signo negativo:

$$\begin{aligned}
&y'' - xy = 0 \;\; proponiendo\, y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n) a_n x^{n-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\
&\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \\
&\sum_{p=0}^{\infty} (p+1)(p+2) a_{p+2} x^p - \sum_{p=1}^{\infty} a_{p-1} x^p = 0 \\
&2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} [(p+1)(p+2)a_{p+2} - a_{p-1}] x^p = 0
\end{aligned} \tag{5.3}$$

se encuentra la relacion de recurrencia:

$$\begin{aligned}
&(p+1)(p+2)a_{p+2} - a_{p-1} = 0 \rightarrow a_{p+2} = \frac{a_{p-1}}{(p+1)(p+2)} \\
&a_2 = 0
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Ahora observemos los primeros terminos usando la relacion de recurrencia :

$$\begin{aligned}
&a_2 = 0 \\
&a_3 = \frac{a_0}{(2)(3)} \quad a_7 = \frac{a_4}{(6)(7)} = \frac{a_1}{(3)(4)(6)(7)} \\
&a_4 = \frac{a_1}{(3)(4)} \quad a_8 = \frac{a_1}{(7)(8)} = 0 \\
&a_5 = \frac{a_2}{(4)(5)} = 0 \quad a_9 = \frac{a_6}{(8)(9)} = \frac{a_0}{(2)(3)(5)(6)(8)(9)} \\
&a_6 = \frac{a_3}{(5)(6)} = \frac{a_0}{(2)(3)(5)(6)}
\end{aligned}$$

Es dificil encontrar un patron en la serie pero por oberservacion hay que notar que : 1.los coeficientes $a_{3k+2} = 0$, 2.los coeficientes a_{3k} son multiplos de a_0, 3. los coeficientes a_{3k+1} son multiplos de a_1

$$\begin{aligned}
&y = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)(3n-1)(3n-4)\ldots(3)(2)} \right] + \ldots \\
&a_1 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-3)\ldots(4)(3)} \right]
\end{aligned}$$

Los terminos dentro de los corchetes en la ecuacion superior son las funciones de airy $Ai(x)$ y $Bi(x)$ y por tanto la solucion a la ecuacion diferencial es :

$$y = a_0 Ai(x) + a_1 Bi(x)$$

5.0.3 Ecuacion de Hermite

Otro ejemplo importante es le ecuacion de hermite :

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \tag{5.5}$$

Usando el metodo de serie de potencias:

$$y - 2xy' + \lambda y = 0 \;\; proponer\ que\ y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(n)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty}(n)a_n x^{n-1} + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{p=0}^{\infty}(p+2)(p+1)a_{p+2}x^p - 2\sum_{n=1}^{\infty}(n)a_n x^n + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$2a_2 + \lambda a_0 + \sum_{p=1}^{\infty}\{(p+2)(p+1)a_{p+2} + a_p(-2p+\lambda)\}x^p = 0$$

La relacion de recurrencia es la siguiente:

$$2a_2 + \lambda a_0 = 0 \rightarrow a_2 = \frac{-\lambda a_0}{2}$$

$$(p+2)(p+1)a_{p+2} + a_p(-2p+\lambda) = 0 \rightarrow a_{p+2} = \frac{(2p-\lambda)}{(p+2)(p+1)}a_p$$

Expandiendo la serie encontramos que la solucion es :

$$y = a_0 \mathrm{H}_n(x) + a_1 \mathrm{HypergeometricF1}[-\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, x^2]$$

En donde n y λ se relacionan por $n = \lambda/2$ por lo tanto λ debera ser par. cabe resaltar que cuando n sea par las soluciones serean polinomios y cuando n sea impar solo la solucion de Hermite sera un polinomio.

Ahora mencionaremos unas propiedades importantes de los poilnomios de hermite :

1. Los polinomios de Hermite H_n pueden representarse por la formula de Rodriguez

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \;\; para\ \ n = 0, 1, 2, 3...$$

2. Ortogonalidad : Los polinomios de Hermite $H_n(x)$, forman un sistema ortogonal en el intervalo $-\infty < x < \infty$ con la funcion de peso $w = e^{-x^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}$$

Usando la ortogonalidad de las funciones de Hermite una funcion $f(x)$ puede expresarse en funcion de los polinomios de hermite:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n(x) \;\; donde \;\; C_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x) dx$$

3. Un polinomio de Hermite es una funcion par cuando n es par e impar cuando n es impar

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

4. los polinomios de hermite cumplen con la siguiente relacciones:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$
$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

5.1 Puntos Singulares

Hasta ahora solo se an resuelto ecuaciones diferenciales donde los coeficientes son polinomios de n grado, pero en muchos ejemplos los coeficientes tienen discontinudades es decir puntos donde el comportamiento de la funcion tiende a infinito, estos puntos reciben el nombre de puntos singulares. Es importante enfatisar que proponer una serie de taylor no es posible en estos casos ya que la derivada de la funcion debe ser continua en el punto evaluada.

Aun asi El metodo de frobenious garantisa que por lo menos una solucion de la ecuacion diferencial sera obtenido:

El metodo de fobrenious propone una serie de potencias de la forma :

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \;\; en\, donde\, a_0 \neq 0$$

Donde el valor de r debe ser determinado, una manera facil de determinar el valor de r es usando la ecuacion indical

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

los coeficientes p_0 y q_0 son el valor de evaluar el limite en los puntos singulares de la ecuacion diferencial, si el limite existe entonces el punto recibe el nombre de punto singular regular y en caso que no exista el limite entonce se denomina punto singular irregular.

la ecuacion diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$
entonces $\lim_{x\to x_0}[p(x)(x-x_0)] = p_0$ y $\lim_{x\to x_0}[q(x)(x-x_0)^2] = q_0$

5.1.1 Ecuacion de Legendre

Ejemplo : La ecuacion de legendre muy importante en la simetria esferica

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0 \rightarrow y'' - \frac{2x}{(1-x^2)}y' + \frac{l(l+1)}{(1-x^2)}y = 0$$

Observamos que $p(x) = -2x/(1-x^2)$ y que $q(x) = l(l+1)/(1-x^2)$ estas dos funciones no estan definidas para $x = \pm 1$ por tanto son puntos singulares. Ahora emprenderemos a encontrar el valor de r

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{-2x}{(1-x^2)}(x-1)\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{2x}{1+x}\right] = \frac{2(1)}{1+1} = 1$$
$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{l(l+1)}{(1-x^2)}(x-1)^2\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{l(l+1)2(x-1)}{1-2x}\right] = 0$$
$$\lim_{x\to -1}\left[\frac{-2x}{(1-x^2)}(x+1)\right] = \lim_{x\to -1}\left[\frac{-2x}{1-x}\right] = \frac{-2(-1)}{1-(-1)} = 1$$
$$\lim_{x\to -1}\left[\frac{l(l+1)}{(1-x^2)}(x+1)^2\right] = \lim_{x\to -1}\left[\frac{l(l+1)2(x+1)}{1-2x}\right] = 0$$

Por que existen los limites se puede decir que los puntos $x = 1$ y $x = -1$ son puntos singulares regulares y usando la ecuacion indical con $p_0 = 1$ y $q_0 = 0$ se encuentra el valor de r.

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 \rightarrow r(r-1) + (1)r + 0 = 0 \rightarrow r = 0$$

y por tanto el valor de r para expandir la ecuacion de legendre usando la serie de fobrenious es igual a cero. Usando el valor encontrado de r se emprendera a resolver la ecuacion de legendre por el metodo de fobrenious:

$$proponiendo\ \ la\ \ serie\ \ de\ \ potencias\ \ y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n con\ \ r = 0$$

Ahora se desarrollan terminos:

$$(1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n)a_nx^{n-2}-2x\sum_{n=0}^{\infty}(n)a_nx^{n-1}+l(l+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n)a_nx^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n)a_nx^n-2\sum_{n=0}^{\infty}(n)a_nx^n+l(l+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(n)a_nx^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n)a_nx^n-2\sum_{n=0}^{\infty}(n)a_nx^n+l(l+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(p+1)(p+2)a_{p+2}x^p-\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n)a_nx^n-2\sum_{n=0}^{\infty}(n)a_nx^n+l(l+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$
$$\sum_{p=0}^{\infty}\{(p+1)(p+2)a_{p+2}-(p-1)(p)a_p-2(p)a_p+l(l+1)a_p\}x^p=0$$

y la relacion de recurencia encontrada es :

$$(p+1)(p+2)a_{p+2}+a_p(-p(p+1)+l(l+1))=0\rightarrow a_{p+2}=\frac{p(p+1)-l(l+1)}{(p+1)(p+2)}a_p$$

Desarrollemos la relacion para los primeros 5 terminos

$$a_2=-\frac{1}{2}l(1+l)a_0 \qquad a_3=-\frac{1}{6}(-2+l+l^2)a_1$$
$$a_4=\frac{1}{24}l(1+l)(-6+l+l^2)a_0 \quad a_5=\frac{1}{120}(-12+l+l^2)(-2+l+l^2)a_1$$
$$a_6=-\frac{1}{720}l(1+l)(-20+l+l^2)(-6+l+l^2)a_0$$

Observemos existen dos solucion, los coeficientes pares dependen de a_0 por mientras que los coeficientes impares dependen de a_1

$$y=a_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{[(l-2n+2)\ldots(l-2)l][(l+1)(l+3)\ldots(l+2n-1)]}{(2n)!}x^{2n}\right]+\ldots$$
$$a_1\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{[(l-2n+1)\ldots(l-3)(l-1)][(l+2)(l+4)\ldots(l+2n)]}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right]$$

Los terminos entre corchetes son las funciones de legendre de primera clase $P_l(x)$ y segunda clase $Q_l(x)$. y la solucion a la ecuacion de legendre es :

$$y(x)=AP_l(x)+BQ_l(x)$$

Ahora se mencionara algunas propiedades de las funciones de legendre de primera clase :

1. una forma de generar los polinomios de legendre es usando la representacion de rogdriguez:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$$

2. Ortogonalidad: los polinomios de legendre forman un sistem ortogonal en el intervelo $-1 < x < 1$ con la funcion de peso $w = 1$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x) \; donde \; C_n = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} P_m(x) f(x) dx$$

3.Los polinomios de Legendre son tambien util en la expansion de funciones de la forma:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2-2\eta x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k P_k(x)$$

4.Los polinomios de Legendre son simetricos o antisimetricos, tal que

$$P_k(-x) = (-1)^k P_k(x).$$

5. Los polinomios de especie uno y dos solo estan definidos para el rango $|x| < 1$, solo los polinomios P_l son analiticos en los puntos $x \pm 1$

5.1.2 Ecuacion de Bessel

Ejemplo : Otra ecuacion diferencial de gran importancia es la ecuacion de diferencial de Bessel que aparece en problemas donde se involucra simetria cilindrica:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0 \to y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{v^2}{x^2}) = 0$$

Observamos que $p(x) = 1/x$ y $q(x) = 1 - v^2/x^2$ y por lo tanto la funcion no es analitica en el punto $x = 0$ por lo tanto es un punto singular. Utilizando la ecuacion indical encontramos el valor de r para expandir en la serie de fobrenious.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}x\right] = 1$$
$$\lim_{x\to 0}[x^2 - v^2] = -v^2$$

Por que existen los limites se puede decir que el punto $x = 0$ es un punto singular regular y usando la ecuacion indical con $p_0 = 1$ y $q_0 = -v^2$ se encuentra el valor de r.

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 \to r(r-1) + (1)r - v^2 = 0 \to r = \pm v$$

Existen dos valores para r, por conveniencia se usara el valor de $r = v$ y se limita $v > 0$ para expandir la serie:

$$proponiendo\ la\ serie\, y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \;\; con\ r = v$$

Ahora se procede a expandir en forma serie de potencias :

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+v-1)(n+v)a_nx^{n+v-2}+x\sum_{n=0}^{\infty}(n+v)a_nx^{n+v-1}+(x^2-v^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+v}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+v-1)(n+v)a_nx^{n+v}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+v)a_nx^{n+v}+(x^2-v^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+v}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+v-1)(n+v)a_nx^{n+v}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+v)a_nx^{n+v}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+v+2}-v^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+v}=0$$

Cambiando el exponente $n+v+2$ por el nuevo exponente $p+v$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+v-1)(n+v)a_nx^{n+v}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+v)a_nx^{n+v}+\sum_{p=2}^{\infty}a_{p-2}x^{p+v}-v^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+v}=0$$

dividiendo la ecuacion superior por x^v

$$\sum_{n=0}^{\infty}(p+v-1)(p+v)a_px^p+\sum_{n=0}^{\infty}(p+v)a_px^p+\sum_{p=2}^{\infty}a_{p-2}x^p-v^2\sum_{n=0}^{\infty}a_px^p=0$$

$$(1+2v)a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}[(p+v-1)(p+v)a_p+(p+v)a_p+a_{p-2}-v^2a_p]x^p=0$$

Es importante resaltar que $x^p\neq 0$ y tambien $x\neq 0$ por tanto

$$(p+v-1)(p+v)a_p+(p+v)a_p+a_{p-2}-v^2a_p=0\rightarrow a_p=\frac{-a_{p-2}}{p(p+2v)}\;para\,p=2,3,4...$$

$$(1+2v)a_1x=0\rightarrow a_1=0$$

Usando la relacion recurencia encontramos los primeros coeficientes de la serie

$$a_1=0$$

$$a_2=\frac{a_0}{2(2+2v)}$$

$$a_3=0$$

$$a_4=-\frac{a_2}{4(4+2v)}=\frac{a_0}{(2)(4)(2+2v)(4+2v)}=\frac{a_0}{(2^{2.2})(2!)(1+v)(2+v)}$$

$$a_5=0$$

$$a_6=-\frac{a_4}{(6)(6+2v)}=-\frac{a_0}{2.4.6(2+2v)(4+2v)(6+2v)}=-\frac{a_0}{2^{2.2}3!(1+v)(2+v)(3+v)}$$

y si tienes suerte podras ver el patron en los coeficientes:

$$\frac{1}{(1+v)(2+v)...(m+v)}\rightarrow\frac{v!}{(v+m)!}\;si\,v\,es\,numero\,entero$$

En el caso mas general donde v puede tomar cualquier valor mayor que cero se usa la funcion gamma.

$$\frac{1}{(1+v)(2+v)\ldots(m+v)} \to \frac{\Gamma(1+v)}{\Gamma(1+v+m)} \; para\, v > 0$$

algo mas que mencionar es que solo los coeficientes pares a_{2m} tienen un valor mientras los impares valen cero por tanto los coeficientes son :

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0 \Gamma(1+v)}{2^{2m} m! \Gamma(1+v+m)}$$

y una solucion a la ecuacion de bessel es :

$$y = x^v \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to x^v \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{2m} \to a_0 \Gamma(1+v) x^v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} m! \Gamma(1+v+m)}$$

La constante no definida a_0 toma el siguiente valor : $a_0 = 1/2^v \Gamma(1+v)$ entonces la ecuacion superior toma la forma :

$$y_1(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^v \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} m! \Gamma(1+v+m)} = J_v(x)$$

Donde J_v es la funcion de Bessel de primera especie. La segunda solucion es posible encontrarse usando el metodo de Reduccion de orden.

$$\mathrm{y}_2(x) = y_1(x) \int \left(\frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx} \right) dx = J_v(x) \int \left(\frac{1}{J_v^2(x)} e^{-\int (1/x)dx} \right) dx \to \ldots$$
$$J_v(x) \int \frac{1}{x J_v^2(x)} dx = \frac{\pi}{2} Y_v(x)$$

Y el resultado son las funciones de Bessel de segunda especie o tambien llamadas funciones de Neumann y se representan usando el simbolo $N_n(x)$ o $Y_n(x)$. Es importante resaltar que la solucion a la integral se obtuvo usando tablas de integrales que ya definen el resultado.

Ahora casos especificos de la ecuacion de Bessel:

Cuando en la ecuacion de Bessel el valor de $v = \pm 1/2$ encontramos un caso especial que lo definiremos como la ecuacion de bessel de orden 1/2 para este caso la solucion sera:

$$y = C_1 J_{1/2}(x) + C_2 J_{-1/2}(x) \; en\, donde\, :$$
$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x) \;\; J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x)$$

La solucion a la ecuacion de bessel depende si el valor de v es entero o no es entero

$$y = C_1 J_v(x) + C_2 J_{-v}(x) \; si\, v\, no\, es\, numero\, entero$$
$$y = C_1 J_v(x) + C_2 Y_v(x) \; si\, v\, es\, un\, numero\, entero$$

Una relacion importante entre $J_v(x)$ y $J_{-v}(x)$ es la siguiente :

$$J_{-v}(x) = (-1)^m J_v(x) \;\; solo\, cuando\, v\, es\, entero\, v \notin \mathbb{Z}$$

Ahora se mencionan propiedades de las funciones de Bessel:

1. Solo la funcion de Bessel de primera especie $J_v(x)$ es analltica en $x = 0$ mientras que $Y_v(x)$ tiende a menos infinito

2. La funcion $J_v(x)$ tiene el rango $-\infty < x < \infty$ cuando v es un numero entero, en caso de no ser entero el rango cambia a $x \geq 0$

3. Las funciones de Bessel de segunda especie, denotadas por $Y_v(x)$, Para v; no enteros, se definen a partir de las funciones de primera especie $J_v(x)$ mediante la siguiente formula:

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}, \quad \forall \alpha \notin \mathbb{Z}$$

En el caso en el que tengamos un orden entero n, la funcion es definida como el siguiente limite lo siguiente no es valido para v no enteros:

$$Y_n(x) = \lim_{\alpha\to n} Y_\alpha(x), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

que nos da el siguiente resultado en forma integral:

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin\theta - n\theta)d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[e^{nt} + (-1)^n e^{-nt}\right] e^{-x\sinh t} dt$$

4. Otra definicion de las funciones de Bessel para valores enteros de v es la siguiente representacion integral de la funcion de Bessel:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\tau - x\sin\tau)d\tau$$

Esta fue la forma con la que Bessel definio a estas funciones y de esta definicion obtuvo distintas propiedades de la. Otra representacion integral es la siguiente:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n\tau - x\sin\tau)}d\tau$$

5. Otra formulacion importante de las dos soluciones linealmente independientes de la ecuacion de Bessel son las funciones de Hankel $H_v^{(1)}(x)$ y $H_v^{(2)}(x)$ que estan definidas de la siguiente forma:

$$H_\alpha^{(1)}(x) = J_\alpha(x) + iY_\alpha(x)$$
$$H_\alpha^{(2)}(x) = J_\alpha(x) - iY_\alpha(x)$$

La siguiente relacion es valida para todo valor de v, sea entero o no:

$$H_{-\alpha}^{(1)}(x) = e^{\alpha\pi i} H_\alpha^{(1)}(x)$$
$$H_{-\alpha}^{(2)}(x) = e^{-\alpha\pi i} H_\alpha^{(2)}(x)$$

6. Ortogonalidad: las funciones de Bessel de primera especie forman un sistema ortogonal en el intervelo $0 < x < 1$ con la funcion de peso $w = x$

$$\sum_{r=1}^{\infty} C_r J_v(x\alpha_r) \; donde \; C_r = \frac{2}{[J_{v+1}(\alpha_r)]^2} \int_0^1 x f(x) J_v(\alpha_r x) dx$$

5.2 Metodo separacion variables

Uno de los metodos mas viejos en la resolucion de ecuaciones diferenciales parciales es el metodo de separacion variables, Este metodo implica separar la ecuacion diferencial parcial, en ecuaciones diferenciales ordinarias.

A continuacion se usara el mencionado metodo para resolver la ecuacion de derivada parciales eliptica de Helmholtz

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$$

5.2.1 Ecuacion Helmholtz coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0$$

Proponemos que la solucion sea el producto de las variables independientes en la ecuacion diferencial : $\Psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$

$$YZ\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + XZ\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + XY\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 XYZ = 0$$

Dividiendo la ecuacion superior entre XYZ :

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 = 0$$

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - k^2 = -l^2$$

El lado izquierdo es una funcion de x, mientras que el lado derecho depende unicamente de y, z. La ecuacion superior es una clase de paradoja. Una funcion de x es igualada a una funcion de y, z, pero x, y, z son variables independientes. Esta independencia significa que el comportamiento de x no esta determinado por las otras dos variables. La paradoja se resuelve si igualamos ambos lados a una constante que en este caso elijimos que sea $-l^2$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = -l^2$$

$$-\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - k^2 = -l^2$$

La variable x ya se encuentra separada, ahora se procede a separar y e z

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - k^2 + l^2 = -m^2$$

De nuevo encontramos la misma paradoja dos variables independientes no pueden igualarse por tanto se agrega ahora la constante m

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} = -m^2$$
$$\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = m^2 - k^2 + l^2 = -n^2$$

Para obtener un conjunto simetrico hacemos que $m^2 - k^2 + l^2 = -n^2$, por ultimo obervamos que nuestro objetivo que era separar las variables esta echo, ahora son ecuaciones diferenciales ordinarias y la solucion general es

$$\psi = \sum_{l.m.n} a_{lmn}\psi_{lmn} \ \ donde \ \ \psi_{lmn} = X_l(x)Y_m(y)Z_n(z)$$

Los coeficientes constantes a_{lmn} son finalmente escogidos para que satisfaga las condiciones iniciales o de frontera.

5.2.2 Ecuacion Helmholtz coordenadas Cilindricas

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^2\psi = 0$$

Ahora se emprendera a separar la ecuacion de Helmholtz en coordenadas Cilindircas proponiendo la solucion sea multiplo de las tres variables independientes: $\psi(\rho,\phi,z) = P(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$

$$\frac{\Phi Z}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right) + \frac{PZ}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + P\Phi\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 P\Phi Z = 0$$

Dividiendo entre $P\Phi Z$

$$\frac{1}{\rho P}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 = 0$$
$$\frac{1}{\rho P}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + k^2 = -\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -l^2$$

De nuevo igualamos a una constante

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = l^2$$
$$\frac{1}{\rho P}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + k^2 = -l^2$$

La eleccion de signo para la constante de separacion es arbitraria. Sin embargo, se escoje un signo negativo para la coordenada axial z en espera de una posible dependencia exponencial sobre z. Se escoje un signo positivo para la coordenada Φ en espera de una dependencia periodica en Φ

$$\frac{\rho}{P}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+(l^2+k^2)\rho^2=-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=m^2$$

Haciendo que $l^2+k^2=n^2$ para simplificar

$$\frac{\rho}{P}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+n^2\rho^2-m^2=0\rightarrow\rho^2\frac{d^2P}{d\rho^2}+\rho\frac{dP}{d\rho}+(n^2\rho^2-m^2)P=0$$
$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=-m^2$$

Identificamos facilmente que la dependencia radial ρ resulta ser la ecuacion de Bessel que en previos capitulos fue resuelta

5.2.3 Ecuacion Helmholtz coordenadas Esfericas

$$\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\left[\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right]+k^2\psi=0$$

Ahora, otra vez, proponemos una solucion en forma factorizada $\psi=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$

$$\frac{1}{Rr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{1}{\Theta r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\Phi r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=-k^2$$

Si multiplicamos por $r^2\sin^2(\theta)$ podemos aislar Φ para obtener

$$\frac{\sin^2(\theta)}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{\sin(\theta)}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+r^2\sin^2(\theta)k^2=\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=-m^2$$

Otra vez, debemos igualar ambos lados a una misma constante $-m^2$

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{\partial\phi^2}=-m^2$$
$$\frac{1}{Rr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{1}{\Theta r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)-\frac{m^2}{r^2\sin^2(\theta)}=-k^2$$

multiplicando por r^2 y reacomodando terminos, obtenemos:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+r^2k^2=-\frac{1}{\Theta\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2(\theta)}=Q$$

Otra vez, las variables estan separadas. Igualamos cada lado a una constante Q y obtenemos finalmente:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+k^2R-\frac{QR}{r^2}=0\rightarrow r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}+(k^2r^2-Q)R=0$$
$$\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2(\theta)}\Theta+Q\Theta=0$$

Observamos que la parte radial R es la ecuacion esferica de Bessel y la solucion a esta ecuacion son las funciones esfericas de Bessel de primer y segunda especie, La parte Azimutal y elevacion se pueden juntar y la solucion son los esfericos Harmonicos.

En la seccion de Funciones especiales se hablara con mas detalles de estas funciones.

CAPITULO 6
SERIE DE FOURIER

En este capitulo se mencionara brevemente la Serie de fourier, no es mi intencion proporcionar teoremas u cosas complicadas.

La Serie de fourier es como lo dice una sumatoria de terminos, lo ventaja es el poder interpretar una funcion $f(x)$, y esta interpretacion es la siguiente

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{6.1}$$

La ecuacion superior recibe el nombre de serie de Fourier, en donde a_n y b_n son coeficientes que deben ser determinados, para determinar los coeficientes hay que tener en cuenta las siguientes relaciones entre la funcion seno y coseno

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n'\pi x}{L}\right) dx = 0$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n'\pi x}{L}\right) dx = L\delta_{nn'}$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n'\pi x}{L}\right) dx = L\delta_{nn'}$$

Estas propiedades que poseen las funciones seno y coseno indica que las funciones forman un sistema completo ortogonal. Ahora se procede a encontrar el valor de los coficientes a_n y b_n

para encontrar a_n usaremos la propiedad de ortogonalidad

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)dx = \frac{a_o}{2}\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)dx \ldots$$

$$+b_n\int_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)dx$$

la expresion anterior se reduce a

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)dx = \frac{a_oL\sin(n\pi)}{n\pi} + a_nL\delta_{nn'} \rightarrow a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

De la misma manera encontramos el valor del coeficiente b_n

para encontrar b_n usaremos la propiedad de ortogonalidad

$$\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)dx = \frac{a_o}{2}\int_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)dx \ldots$$

$$+b_n\int_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)dx$$

la expresion anterior se reduce a

$$\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)dx = b_nL\delta_{nn'} \rightarrow b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

Ahora que sabemos como encontrar el valor de los coeficiente a_n e b_n desarrollaremos la serie de fourier para 3 casos clasicos : La funcion de sierra, la funcion triangular y la funcion de un pulso cuadrado

Ejemplo : Expandir la funcion $f(x) = x \ para \ -L < x < L$ en serie de fourier

Todo se resume a encontra el valor de los coeficiente a_n e b_n

si $f(x) = x$ en el intervalo $-L < x < L$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} x\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = -\frac{2L}{n\pi}$$

por lo tanto la serie de fourier sustituyendo el valor de los coeficientes en (7.1)

$$f(x) = -\frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

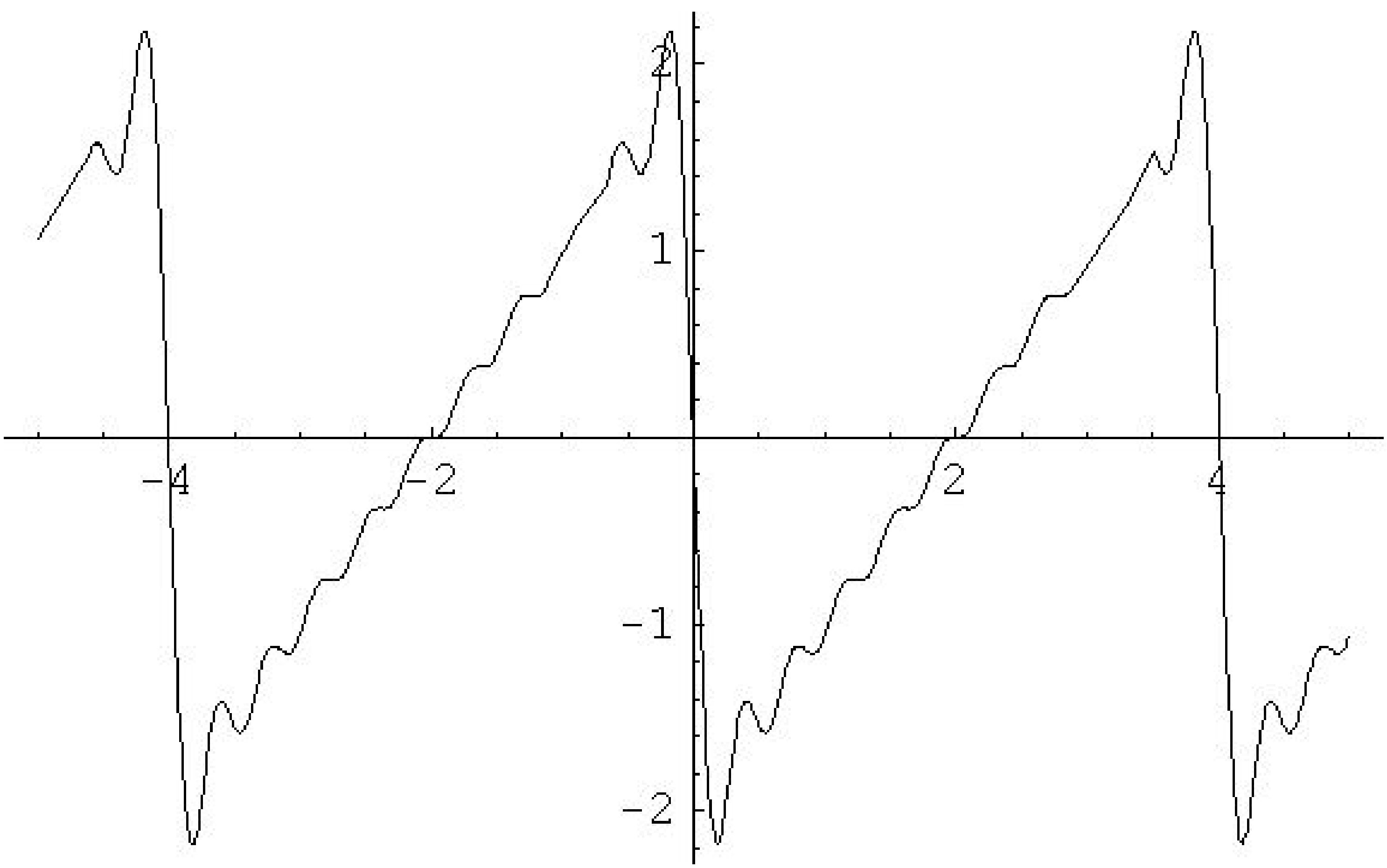


FIGURA 6.1: Grafica de funcion Sierra, con L=2

Ejemplo : Expandir la siguiente funcion en serie de fourier

$$f(x) = \begin{cases} -a \;\; en\; el\; rango \;\; -L < x < 0 \\ a \;\; en\; el\; rango \;\;\; 0 < x < L \end{cases}$$

Todo se resume a encontra el valor de los coeficiente a_n e b_n

$f(x)$ es una funcion impar por lo tanto $a_n = 0$

$$b_n = \frac{2a}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2a\,(L - L\cos(n\pi))}{Ln\pi} = \frac{2a}{L}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}$$

por lo tanto la serie de fourier sustituyendo el valor de los coeficientes en (7.1)

$$f(x) = \frac{2a}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

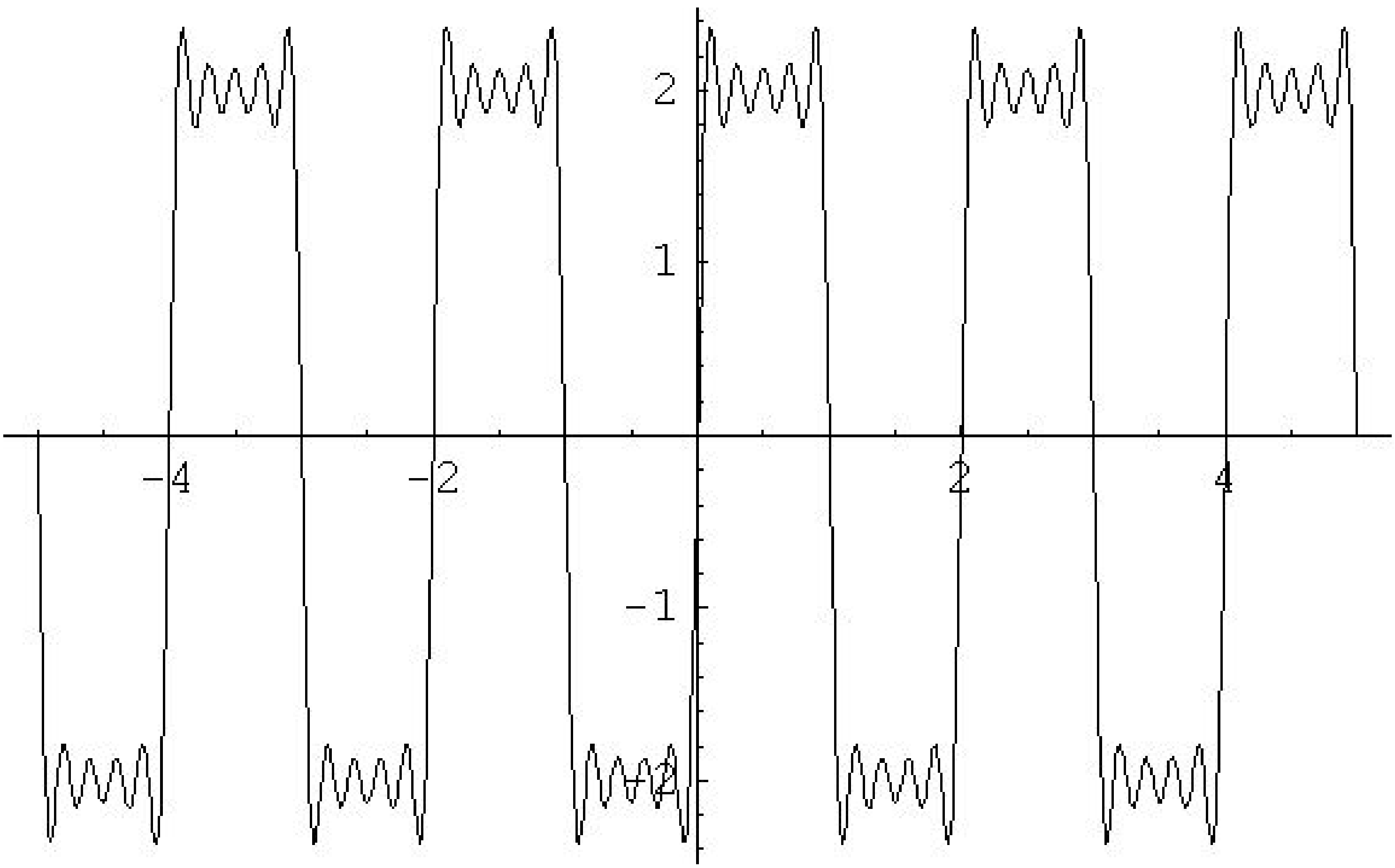


FIGURA 6.2: Grafica funcion cuadrada con a=2 y L=1

Ejemplo: Expandir la siguiente funcion en serie de fourier

$$f(x) = \begin{cases} x \;\; rango \; -L < x < 0 \\ -x \; rango \; 0 < x < L \end{cases}$$

Todo se resume a encontra el valor de los coeficiente a_n e b_n

la funcion $f(x) = \begin{cases} x \ \ rango \ -L < x < 0 \\ -x \ rango \ 0 < x < L \end{cases}$ es una funcion par

por lo tanto $b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L x\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{2L}{n^2\pi^2}(-1+(-1)^n)$$

$$a_o = \frac{2}{L}\int_0^L x = L$$

por lo tanto la serie de fourier sustituyendo el valor de los coeficientes en (7.1)

$$f(x) = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1+(-1)^n)}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

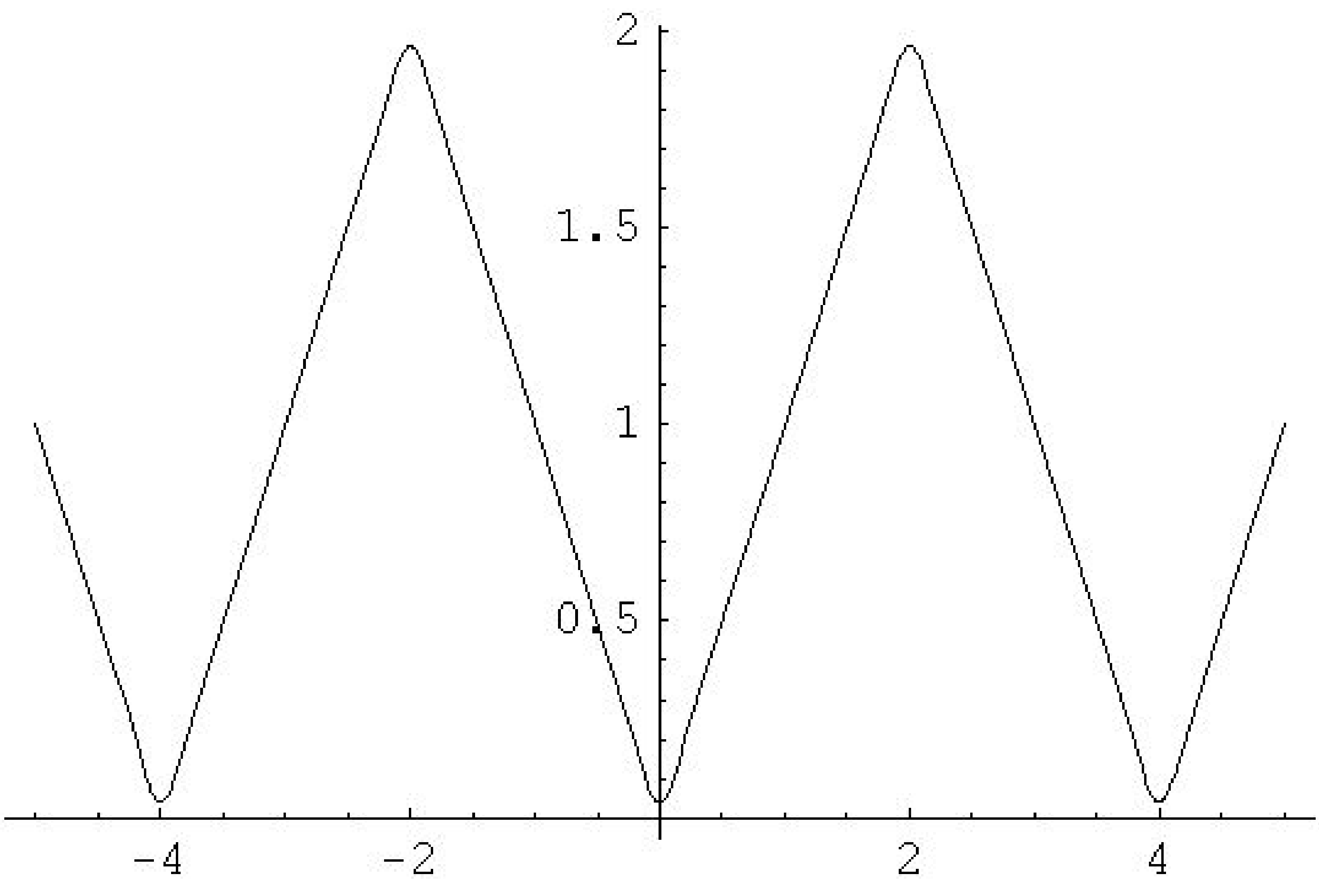


FIGURA 6.3: Grafica funcion triangular con L=2

CAPITULO 7
FUNCIONES ESPECIALES

7.1 Polinomios Asociados de Legendre

Anteriormente observamos que la ecuacion de Helmtholtz en su dependencia angular Θ, es la ecuacion de legendre Associada, este caso es mas general y con el valor de $m = 0$ la expresion se reduce a la ecuacion de legendre.

Claro que a simple vista no parece ser la ecuacion de Legendre pero es por que no esta simplificada, la ecuacion de legendre tiene la sustitucion $x = cos(\theta)$

$$\sin(\theta)\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)}\Theta + Q\Theta = 0$$

La ecuacion superior se puede escribir como sigue:

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{d\Theta}{d\theta} + \Theta\left(Q - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)}\right) = 0$$

$$\textit{haciendo el cambio } x = \cos(\theta)$$

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d\Theta}{dx} = -\sin(\theta)\frac{d\Theta}{dx}$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\left(-\sin(\theta)\frac{d\Theta}{dx}\right) = -\cos(\theta)\frac{d\Theta}{dx} + \sin^2(\theta)\frac{d^2\Theta}{dx^2}$$

Sustituyendo en la primera ecuacion las derivadas respecto la nueva variable x y repitiendo que $x = \cos(x)$ entonces $\sin^2(\theta) = 1 - x^2$

$$\sin^2(\theta)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2\cos(\theta)\frac{d\Theta}{dx} + \Theta\left(Q - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)}\right) = 0$$

$$(1 - x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \Theta\left(Q - \frac{m^2}{1 - x^2}\right) = 0$$

Ahora si obeservamos que esta ecuacion se asemeja mas a la ecuacion de legendre si $m = 0$ y reconocemos que $Q = l(l+1)$

La solucion a esta ecuacion son los polinomios asociados de legendre, y con el factor $m = 0$ estos polinomios se simplifican a los polinomios de legendre encontrados en la seccion anterior.

$$y(x) = P_l^m(x) + Q_l^m(x)$$

Las funciones asociadas de legendre de primera y segunda especie, para valores de m no negativos se encuentran relacionadas con las funciones de legendre de la siguiente forma:

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_l}{dx^m} \rightarrow \frac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$$
$$Q_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m Q_l}{dx^m}$$

De igual forma las polinomios asociados cumplen con la siguiente relacion:

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x) \tag{7.1}$$

7.2 Funciones Esfericas de Bessel

Anteriormente observamos que al resolver la ecuacion de HelmHoltz en coordenadas esfericas encontramos que la parte radial R, es la ecuacion diferencial esferica de Bessel, la razon recibir este nombre es por que esta ecuacion es muy pareciedа a la ecuacion de Bessel original y se puede reducir a esta ecuacion por medio de cambios de variables.

$$r^2\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + k^2R - \frac{QR}{r^2} = 0 \rightarrow r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} + (k^2r^2 - Q)R = 0$$

Ahora se procede hacer el cambio de variable haciendo que $R(r) = r^{-1/2}S(r)$ en donde $Q = l(l+1)$

$$r^2\frac{d^2S}{dr^2} + r\frac{dS}{dr} + \left(k^2r^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2\right)S = 0$$

Finalmente haciendo otro cambio de varaible siendo $x = kr$ e $y(x) = S(kr)$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2\right)y = 0$$

E inmeditamente indentificamos que la solucion a esta ecuacion diferencial son las funciones de Bessel de primera y segunda especia de orden $l + 1/2$

$$y(x) = AJ_{l+1/2}(x) + BY_{l+1/2}(x) \rightarrow R(r) = r^{-1/2}[AJ_{l+1/2}(kr) + BY_{l+1/2}(kr)]$$

Las funciones $J_{l+1/2}(x)$ e $Y_{l+1/2}(x)$ crean unas nuevas funciones llamadas esfericos de Bessel:

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+1/2}(x)$$
$$y_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}Y_{l+1/2}(x) = (-1)^{l+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{-l-1/2}(x)$$

Las funciones esfericas de Bessel se pueden obtener a partir de las siguientes formulas:

$$j_n(x) = (-x)^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\sin x}{x}$$
$$y_n(x) = -(-x)^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\cos x}{x}$$

Y la solucion a la ecuacion diferencial encontrada puede ponerse en funcion de estas funciones

$$R(r) = r^{-1/2}[AJ_{l+1/2}(kr) + BY_{l+1/2}(kr)] \rightarrow \sqrt{\frac{2k}{\pi}}(Aj_l(kr) + Bn_l(kr))$$

A continuacion mostramos el desarrollo de las primeras funciones esfericas de Bessel de orden n

Para n = 0,1 y 2 tenemos:

$$j_0(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$
$$j_1(x) = \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{\cos(x)}{x}$$
$$j_2(x) = \left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\frac{\sin(x)}{x} - \frac{3\cos(x)}{x^2}$$
$$y_0(x) = -j_{-1}(x) = -\frac{\cos x}{x}$$
$$y_1(x) = j_{-2}(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$$
$$y_2(x) = -j_{-3}(x) = \left(-\frac{3}{x^2} + 1\right)\frac{\cos x}{x} - \frac{3\sin x}{x^2}$$

Las funciones esfericas de Hankel se definen de forma analoga a las no esfï¿½ricas:

$$h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + iy_n(x)$$
$$h_n^{(2)}(x) = j_n(x) - iy_n(x)$$

7.3 Esfericos Harmonicos

Los esfericos harmonicos son la solucion a la parte angular Θ e Φ de la ecuacion de Helmholtz:

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2 = 0 \rightarrow \Phi(\phi) = C\cos(m\phi) + D\sin(m\phi)$$
$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \left(Q - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta = 0 \rightarrow \Theta(\theta) = P_l^m(\cos(\theta)) + Q_l^m(\sin(\theta))$$

La solucion debe estar limitada para $0 \le \phi \le 2\pi$, y $0 \le \theta \le \pi$ por tanto se remuven las funciones asociadas de legendre de segunda especie Q_l^m por no ser analitica en los puntos

$0, \pi$

$$Y(\theta,\phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi) = P_l^m(\cos(\theta))(C\cos(m\phi) + D\sin(m\phi))$$

Donde los valor de m e l son enteros con $-l \leq m \leq l$ y por tanto para cubrir los valores negativos se usa la identidad (7.1)

$$Y_l^m(\theta,\phi) = (-1)^m \left[\frac{2l+1(l-m)!}{4\pi(l+m)!}\right] P_l^m(\cos(\theta))\exp(im\phi)$$

Y la siguiente identidad es muy util:

$$Y_l^{-m}(\theta,\phi) = (-1)^m [Y_l^m(\theta,\phi)]^*$$

7.3.1 Serie de Laplace

Usando la propiedad de Ortogonalidad que tienen los harmonicos es posible representar una funcion $f(\theta,\phi)$ usando esfericos harmonicos

$$f(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} A_l^m Y_l^m(\theta,\phi) \ donde \ A_l^m = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\phi)Y_l^m(\theta,\phi)^* \sin(\theta) d\theta d\phi$$

7.4 Polinomios Chebyshev

La ecuacion de Chebysev es la siguiente:

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$$

La solucion a esta ecuacion diferencial puede encontrarse usando un cambio de variable $x = \cos(t) \rightarrow t = -\arccos(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{1-x^2}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\frac{dy}{dt}$$

Sustituyendo las derivadas encontramos que:

$$(1-x^2)\left(\frac{1}{1-x^2}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\frac{dy}{dt}\right) - x\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{dt}\right) + n^2 y = 0 \rightarrow \ldots$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2 y = 0 \rightarrow y(t) = A\cos(nt) + B\sin(nt)$$

recordando el cambio de variable, la solucion $y(t)$ puede ponerse en funcion de la variable x

$$y(x) = A\cos(n\arccos(x)) + B\sin(n\arccos(x)) \rightarrow b_1 T_n(x) + b_2\sqrt{1-x^2}U_{n-1}(x)$$

Los terminos $T_n(x)$ e $U_{n-1}(x)$ son los polinomios de Chebyshev de primera y segunda especie, es obvio que estos polinomios se defininen por

$$T_n(x) = \cos(n\,\text{arccos}(x)) = \cos(nt) \;\; por\, el\, cambio\, de\; t = -\,\text{arccos}(x)$$
$$U_{n-1}(x) = \sin(n\,\text{arccos}(x)) = \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}$$

Las expresiones superiores pueden expanderse usando la formula para la suma de angulos para el coseno y seno

$$T_0(x) = \cos(0) = 1$$
$$T_1(x) = \cos(t) \to x$$
$$T_2(x) = \cos(t)\cos(t) - \sin(t)\sin(t) = 2(\cos(t))^2 - 1 \to 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 4(\cos(t))^3 - 3\cos(t) \to 4x^3 - 3x$$
$$T_n(x) = \cos(nt)$$
$$\sin n\theta = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^k\theta \sin^{n-k}\theta \sin\left(\frac{1}{2}(n-k)\pi\right)$$
$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^k\theta \sin^{n-k}\theta \cos\left(\frac{1}{2}(n-k)\pi\right)$$

Ahora se mencionaran propiedades importantes de los polinomios de Chebysev:
1. Ortogonalidad : Los polinomios de chebyseb de primera y segunda especie son ortogonales en el intervalor $-1 \leq x \leq 1$

$$f(x) = \sum_{n=0} C_n T_n(x) \;\; donde \;\; C_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \;\; C_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

7.5 Polinomios de Laguerre

A continuacion se estudiara otra ecuacion diferencial importante y es la ecuacion diferencial de laguerre:

$$xy'' + (v + 1 - x)y' + \lambda y = 0$$

Para valores de λ positivos y enteros la ecuacion no tiene puntos singulares y se procede a usar el metodo serie de potencias:

$$x\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(n)a_n x^{n-2} + (v+1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(n)a_n x^{n-1} + \lambda\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = 0$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(n)a_n x^n + v\sum_{n=1}^{\infty}(n)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n)a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}(n)a_n x^n + \lambda\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = 0$$

Haciendo que $n-1 = p$ entonces $n = p+1$ y se obtiene:

$$\sum_{p=1}^{\infty}(p)(p+1)a_{p+1}x^p+v\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)a_{p+1}x^p+\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)a_{p+1}x^p-\sum_{p=1}^{\infty}(p)a_px^p+\lambda\sum_{p=0}^{\infty}a_px^p=0$$

expandiendo las series para que la sumatoria empiece en $p=1$ se obtiene que:

$$va_1+a_1+\lambda a_0=0$$
$$\sum_{p=1}^{\infty}\{a_{p+1}[(p+1)(p+v+1)]+a_p[\lambda-p]\}x^p=0 \rightarrow a_{p+1}[(p+1)(p+v+1)]+a_p[\lambda-p]=0$$

Y las relaciones de recurrencia son :

$$a_1=\frac{-\lambda a_0}{(v+1)}$$
$$a_{p+1}=\frac{\lambda-p}{(p+1)(p+v+1)}a_p$$

cuando λ es un numero entero no negativo y el valor de $v=0$, para este caso en especial la relacion recurencia se reduce a los polinomios de laguerre $L_\lambda(x)$:

$$y(x)=L_\lambda(x)$$

Ahora se mencionaran propiedades de los polinomios de laguerre:

1.Usando la relacion de Rodriguez los polinomios de laguerre pueden encontrarse usando la siguiente relacion:

$$L_n(x)=\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^ne^x\right)$$

2.Los polinomios de laguerre satisfacen la siguiente relacion de recurrencia:

$$(n+1)L_{n+1}(x)=(2n+1-x)L_n(x)-nL_{n-1}(x)$$

3. Ortogonalidad, los polinomios de laguerre son ortogonales en el intervalo $[0,\infty)$ con la funcion de peso $w(x)=x^ke^{-x}$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nL_n^v(x)\ donde\ C_n=\frac{n!}{(n+v)!}\int_0^{\infty}x^ve^{-x}f(x)L_m^v(x)dx$$

4. La siguiente integral es de gran importancia en el tratamiento del atomo de hidrogeno

$$\int_0^{\infty}e^{-x}x^{\alpha+1}\left[L_n^{(\alpha)}\right]^2dx=\frac{(n+\alpha)!}{n!}(2n+\alpha+1)$$

7.6 Funcion Gamma

la funcion gamma es una funcion que extiende el concepto de factorial a los numeros complejos y se define a continuacion:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1}\, e^{-x}\, dx$$

Si la parte real del numero complejo z es positivo, entonces la integral converge absolutamente.

Una relacion muy importante es la siguiente:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

La relacion anterior es validad para cualquier numero $n > 0$, y se obtiene usando integracion por partes:

$$\Gamma(n+1) = \int\limits_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = [-x^n e^{-x}]_0^{\infty} + n \int\limits_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \rightarrow \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

Observando que $\Gamma(1) = 1$, y usando induccion se obtiene la relacion antes mencionada $\Gamma(n+1) = n!$

$$para\ n = 0$$

$$\Gamma(n+1) = \Gamma(1) = \int\limits_0^{\infty} e^{-t} dt = \lim_{b\to\infty} \int\limits_0^{b} e^{-t} dt = -\lim_{b\to\infty} e^{-t}\Big|_0^b = -\lim_{b\to\infty}(e^{-b} - 1) = 1 = 0! = n!$$

$$Ahora\, se\, asume\, es\, ciero\, para\, n\, en\, general$$

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$$

$$\Gamma(n+3) = (n+2)(n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)(n+2)n! = (n+2)!$$

$$\Gamma(n+p) = (n+p-1)(n+p-2)\ldots\Gamma(n+1) = (n+p-1)!$$

el valor mas conocido, para un numero no entero, de la funcion gamma, es cuando n=1/2 que es igual a :

$$\Gamma(n) = \int\limits_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx\ \ haciendo\, que\ x = y^2$$

$$\Gamma(n) = 2\int\limits_0^{\infty} y^{2n-1} e^{-y^2} dy\ haciendo\, que\, n = 1/2$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int\limits_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

Usando la propiedad de recursividad de la funcion gamma :

$$\Gamma(n+p) = (n+p-1)(n+p-2)\ldots n\Gamma(n)$$

y utilizando la definicion del valor de $\Gamma(1/2)$ econtramos:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \left(\frac{1}{2}+1-1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$
$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$$

Ahora se mencionana otras propiedades importantes de la funcion gamma :

1.La funcion gamma no se encuentra definida para valores de n que sean enteros negativos

2. La aproximacion de stirling que sirve para calcular el factorial de un numero n muy grande es:

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{n\ln(x)-x} dx \ \textit{haciendo que}\ x = n+y$$
$$\ln(x) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{y}{n}\right) = \ln(n) + \frac{y}{n} - \frac{y^2}{2n^2} + \frac{y^3}{3n^3} - \ldots$$

sustituyendo la nueva expresion de logaritmo en la funcion orginal, y considerando que n es un numero suficientemente grande es decir tiende a infinito

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_{-n}^\infty \exp[n(\ln(n) + \frac{y}{n} - \frac{y^2}{2n^2} + \frac{y^3}{3n^3} - \ldots) - n - y]dy$$
$$n! \approx e^{n\ln(n)-n} \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2/(2n)} dy = e^{n\ln(n)-n}\sqrt{2\pi n} = \sqrt{2\pi n}(n^n e^{-n})$$

3. La enesima derivada de ax^b (donde n es un numero natural) se puede ver de la siguiente manera:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(ax^b\right) = (b-n+1)\cdots(b-2)(b-1)bax^{b-n} = \frac{b!}{(b-n)!}ax^{b-n}$$

como $n! = \Gamma(n+1)$ entonces $\frac{d^n}{dx^n}\left(ax^b\right) = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b-n+1)}ax^{b-n}$ donde n puede ser cualquier numero

BIBLIOGRAFIA

[1] Granville, *Calculo diferencial e integral*, editorial LIMUSA

[2] Dennis D. Berkey, Paul Blanchard, *Calculos*, Saunders College Publishing

[3] William E. Boyce, *Elementary Differential Equations*, Wiley John and Sons

[4] George B. Arfken, Hans J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press

[5] Richard Bronson, *Schaum’s Outline of Differential Equations*, McGraw-Hill

[6] Ireneo Peral Alonso, *Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Addison Wesley, Universidad Autónoma de Madrid, 1995

APENDICE A

Solucion ecuaciones diferenciales usando Mathematicam. Series de Fourier y la Transformada de Laplace

En este apendice se incluye el uso del software Mathemathica para la solucion a problemas introductorios en ecuaciones diferenciales.

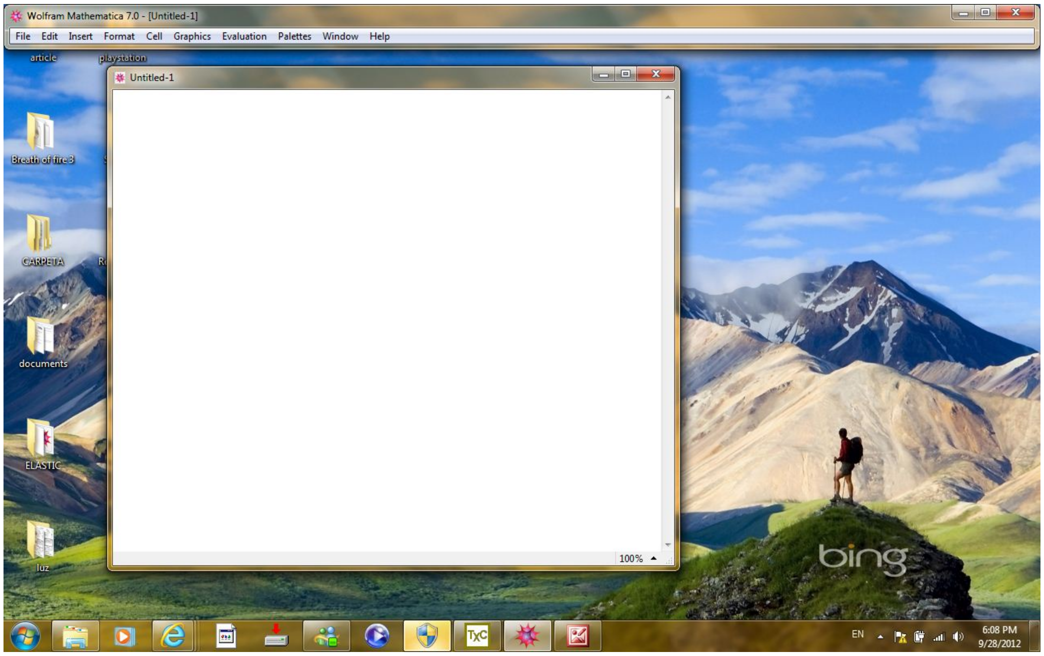


FIGURA A.1: Patalla visual del software Mathemathica corriendo en el sistema operativo Windows 7

Mathematica tiene una interfas GUI visual que permite al usuario entrar diferentes comandos. La lista de las varios comandos se puede encontrar en el Manual de usuario. Los archivos para guardar la informacion de calculos numericos se denominan por el nombre de : notebooks, y por lo general usando la extension .nb . Se asume en este Apendice que el usuario esta familiarisado con el use de Mathematica y conoce las bases de su uso para realisar diferente calculos numericos

Explicaremos brevemente las propiedades de la serie de fourier y la serie de fourier bessel y como calcular numericamente la expansion de la serie . Tambien mencionaremos como Mathematica puede calcular la transformada de laplace de una funcion y como obtener solucion a ecuaciones diferenciales de segundo orden usando Mathematica.

Ortogonalidad Funciones de Bessel

Texto creado por Oscar Guerrero Miramontes

Las funciones de Bessel de primera especie exiben la propiedad de ortogonalidad en el intervalo 0<x<1

In[15]:=

```
<< NumericalMath`BesselZeros`
<< Graphics`Animation`
```

A continuacion se muestra como encontrar los coeficientes que definen la serie en funcion de las funciones de Bessel de orden "v" para la funcion Φ1[x_] = 1 en el rango 0<x<0.5 e Φ2[x_] = -1 en el rango 0.5<x<1

In[17]:=

```
v = 0;
p = 50;
Φ1[x_] = 1;
Φ2[x_] = -1;
zeros = BesselJZeros[0, p];
α[n_] := zeros[[n]]
```

Φ[x_]es la funcion que se quiere expander en serie de Fourier Bessel mientras que α son los zeros de la funcion de Bessel de primera especie con v=0

In[23]:=

```
m =
  Table[{c_(n-1), n - 1, (2 / (BesselJ[v + 1, α[n]])^2) *
     (NIntegrate[x * Φ1[x] * BesselJ[v, α[n] * x], {x, 0, 0.5}] +
       NIntegrate[x * Φ2[x] * BesselJ[v, α[n] * x], {x, 0.5, 1}])},
   {n, 1, p}];
m // Together // TableForm
```

Out[24]//TableForm=

c_0	0	-0.0624626
c_1	1	2.38774
c_2	2	-1.41732
c_3	3	-0.199027
c_4	4	-0.251101
c_5	5	1.34635
c_6	6	-0.86609
c_7	7	-0.146943
c_8	8	-0.200762
c_9	9	1.03826
c_{10}	10	-0.678308
c_{11}	11	-0.121698
c_{12}	12	-0.171164
c_{13}	13	0.875845
c_{14}	14	-0.575945

c_{15}	15	−0.10614
c_{16}	16	−0.15154
c_{17}	17	0.771623
c_{18}	18	−0.509236
c_{19}	19	−0.0953363
c_{20}	20	−0.137368
c_{21}	21	0.697501
c_{22}	22	−0.461367
c_{23}	23	−0.0872742
c_{24}	24	−0.126531
c_{25}	25	0.641316
c_{26}	26	−0.424869
c_{27}	27	−0.0809619
c_{28}	28	−0.117903
c_{29}	29	0.596835
c_{30}	30	−0.395854
c_{31}	31	−0.0758464
c_{32}	32	−0.110825
c_{33}	33	0.560486
c_{34}	34	−0.372072
c_{35}	35	−0.0715919
c_{36}	36	−0.104883
c_{37}	37	0.530061
c_{38}	38	−0.352117
c_{39}	39	−0.0679812
c_{40}	40	−0.0998029
c_{41}	41	0.504107
c_{42}	42	−0.335063
c_{43}	43	−0.0648668
c_{44}	44	−0.0953952
c_{45}	45	0.481626
c_{46}	46	−0.320268
c_{47}	47	−0.0621445
c_{48}	48	−0.0915237
c_{49}	49	0.461908

A continuacion se muestran los primeros 50 coeficientes de la serie, se usa NIntegrate para calcular numericamente el valor de la integral

Finalmente teniendo los coeficiente se procede a expander la funcion

In[25]:=
$$F[x\_] = \sum_{j=1}^{p} m[[j, 3]] * \text{BesselJ}[v, \alpha[j] * x]$$

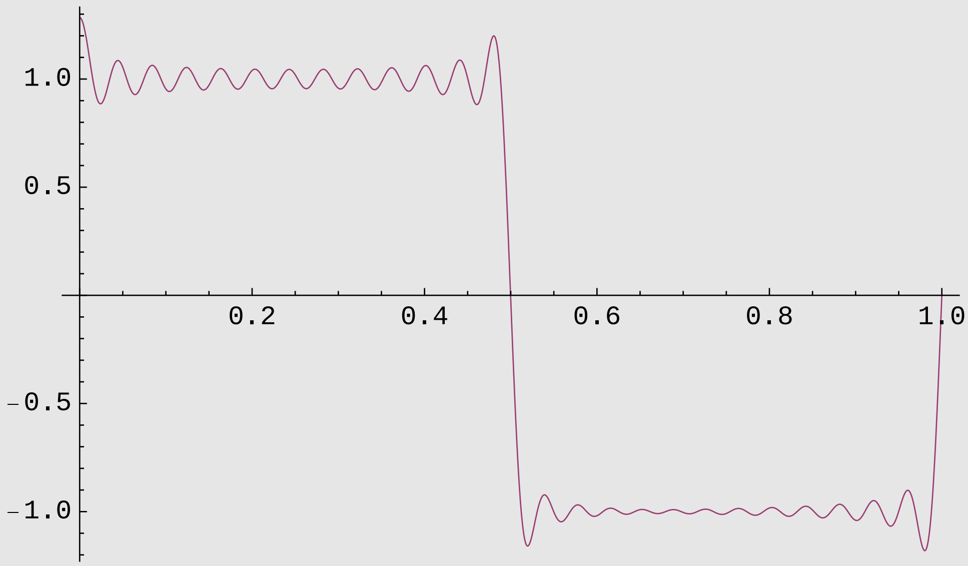
Out[25]=
```
-0.0624626 BesselJ[0, 2.40483 x] + 2.38774 BesselJ[0, 5.52008 x] -
 1.41732 BesselJ[0, 8.65373 x] - 0.199027 BesselJ[0, 11.7915 x] -
 0.251101 BesselJ[0, 14.9309 x] + 1.34635 BesselJ[0, 18.0711 x] -
 0.86609 BesselJ[0, 21.2116 x] - 0.146943 BesselJ[0, 24.3525 x] -
 0.200762 BesselJ[0, 27.4935 x] + 1.03826 BesselJ[0, 30.6346 x] -
 0.678308 BesselJ[0, 33.7758 x] - 0.121698 BesselJ[0, 36.9171 x] -
 0.171164 BesselJ[0, 40.0584 x] + 0.875845 BesselJ[0, 43.1998 x] -
 0.575945 BesselJ[0, 46.3412 x] - 0.10614 BesselJ[0, 49.4826 x] -
 0.15154 BesselJ[0, 52.6241 x] + 0.771623 BesselJ[0, 55.7655 x] -
 0.509236 BesselJ[0, 58.907 x] - 0.0953363 BesselJ[0, 62.0485 x] -
 0.137368 BesselJ[0, 65.19 x] + 0.697501 BesselJ[0, 68.3315 x] -
 0.461367 BesselJ[0, 71.473 x] - 0.0872742 BesselJ[0, 74.6145 x] -
 0.126531 BesselJ[0, 77.756 x] + 0.641316 BesselJ[0, 80.8976 x] -
 0.424869 BesselJ[0, 84.0391 x] - 0.0809619 BesselJ[0, 87.1806 x] -
 0.117903 BesselJ[0, 90.3222 x] + 0.596835 BesselJ[0, 93.4637 x] -
 0.395854 BesselJ[0, 96.6053 x] - 0.0758464 BesselJ[0, 99.7468 x] -
 0.110825 BesselJ[0, 102.888 x] + 0.560486 BesselJ[0, 106.03 x] -
 0.372072 BesselJ[0, 109.171 x] - 0.0715919 BesselJ[0, 112.313 x] -
 0.104883 BesselJ[0, 115.455 x] + 0.530061 BesselJ[0, 118.596 x] -
 0.352117 BesselJ[0, 121.738 x] - 0.0679812 BesselJ[0, 124.879 x] -
 0.0998029 BesselJ[0, 128.021 x] + 0.504107 BesselJ[0, 131.162 x] -
 0.335063 BesselJ[0, 134.304 x] - 0.0648668 BesselJ[0, 137.446 x] -
 0.0953952 BesselJ[0, 140.587 x] + 0.481626 BesselJ[0, 143.729 x] -
 0.320268 BesselJ[0, 146.87 x] - 0.0621445 BesselJ[0, 150.012 x] -
 0.0915237 BesselJ[0, 153.153 x] + 0.461908 BesselJ[0, 156.295 x]
```

Graficamos la funcion orginal y la aproximacion usando Fourier Bessel, obervamos que al aumentar los terminos la serie converge a la funcion

In[26]:=

```
Plot[{Φ[x], F[x]}, {x, 0, 1}]
```

Out[26]=



A continuacion se muestra una animacion, donde se observa como la serie fourier Bessel converge

Series de Fourier

Una funcion continua puede representarse mediante una serie de senos y cosenos esto es de gran importancia y tiene muchas aplicaciones

Para empezar las funciones Cos[nx] e Sin[mx] son ortogonales entre si en el intervalor {-π,π}

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Cos}[n*x]*\mathrm{Sin}[m*x]\, dx = 0$$

La ortogonalida significa que no hay forma de generar una funcion Cos[x] usando la funcion Sin[x] o viceversa en otra palabras son independientes uno respecto la otroa

Otra relacion es la siguiente, cuando m=n el valor de la integral es igual a π en otro caso es cero

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Cos}[n*x]*\mathrm{Cos}[m*x]\, dx = \delta_{nm}\,\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Sin}[n*x]*\mathrm{Sin}[m*x]\, dx = \delta_{nm}\,\pi$$

Y por tanto una funcion F[x] se expande de la siguiente forma

$$F[x] = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,\mathrm{Cos}[nx] + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\mathrm{Sin}[nx]$$

Usemos un simple ejemplo como usar esta serie

In[1]:=

```
k = 10;
L = 1;
Φ[x_] = x;
m = Table[{a_n, n, Integrate[(1 / L) * Φ[x] * Cos[(n * π * x) / L], {x, -L, L}]},
   {n, 1, k}];
p = Table[{b_n, n, Integrate[(1 / L) * Φ[x] * Sin[(n * π * x) / L], {x, -L, L}]},
   {n, 1, k}];
m // Together // TableForm
p // Together // TableForm
```

Out[6]//TableForm=

a_1	1	0
a_2	2	0
a_3	3	0
a_4	4	0
a_5	5	0
a_6	6	0
a_7	7	0
a_8	8	0
a_9	9	0
a_{10}	10	0

Out[7]//TableForm=

b_1	1	$\frac{2}{\pi}$
b_2	2	$-\frac{1}{\pi}$
b_3	3	$\frac{2}{3\pi}$
b_4	4	$-\frac{1}{2\pi}$
b_5	5	$\frac{2}{5\pi}$
b_6	6	$-\frac{1}{3\pi}$
b_7	7	$\frac{2}{7\pi}$
b_8	8	$-\frac{1}{4\pi}$
b_9	9	$\frac{2}{9\pi}$
b_{10}	10	$-\frac{1}{5\pi}$

Expandimos usando los coeficientes encontrados anteriormente:

In[8]:=

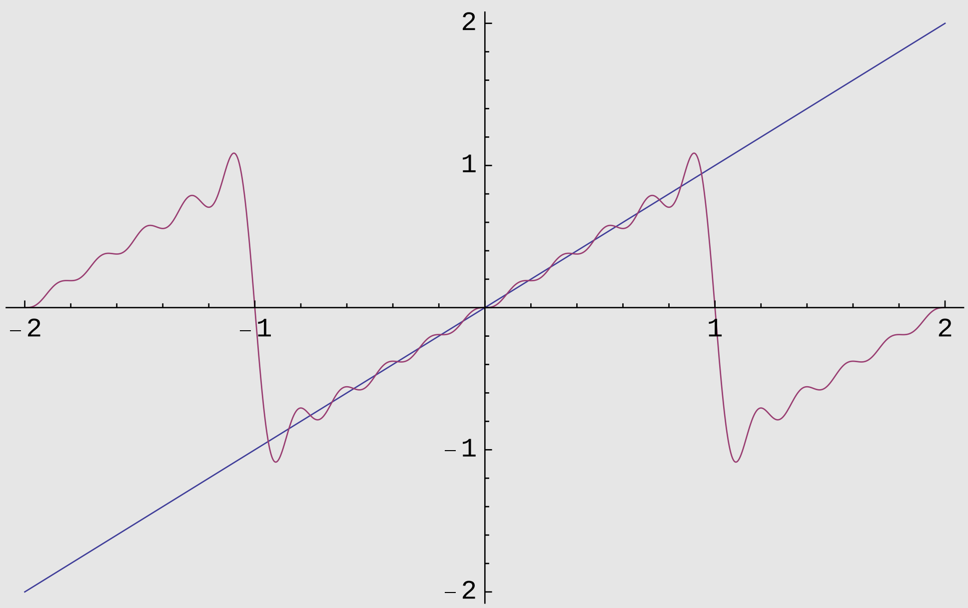
```
F[x_] = 1/(2*L) Integrate[Φ[x], {x, -L, L}] + Sum[m[[j, 3]]*Cos[(j*π*x)/L], {j, 1, k}] +
  Sum[p[[j, 3]]*Sin[(j*π*x)/L], {j, 1, k}];
```

$$F[x\_] = \frac{1}{2*L}\,\text{Integrate}[\Phi[x], \{x, -L, L\}] + \sum_{j=1}^{k} m[[j, 3]]*\text{Cos}[(j*\pi*x)/L] + \sum_{j=1}^{k} p[[j, 3]]*\text{Sin}[(j*\pi*x)/L];$$

In[9]:=

```
Plot[{Φ[x], F[x]}, {x, -2*L, 2*L}]
```

Out[9]=



Transformada de Laplace

Texto creado por Oscar Guerrero Miramontes

La Transformada de Laplace es usada la mayor parte del tiempo en resolver circuitos electricos.   por que la usamos y sufuncion ? . La Transformada de laplace nos permite extendernos del dominio del tiempo "t" al domonio complejo ”s”. Otra manera definimos a la serie de fourier en su forma compleja es:

$$\mathbf{X}\,(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \qquad (1)$$

la ecuacion (1) se puede expander en la transformada de laplace, multiplicando la senal en el tiempo por un termino exponencial:

$$\mathbf{X}\,(\omega,\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t)\, e^{-\sigma t}\right] e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t)\, e^{-(\sigma+i\omega)\,t}\right] dt \qquad (2)$$

para localisar valores en el plano complejo se puede representar por letra s = σ + iw y la ecuacion (2) se puede escribir en una forma mas compacta:

$$\mathbf{X}\,(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t)\, e^{-st}\right] dt \qquad (3)$$

tambien existe la transformada inversa de laplace :

$$L^{-1}[\,X(s)\,] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[X(s)\, e^{st}\right] ds \qquad (4)$$

la ecuacion (4) es la forma formal de la transformada de laplace pero no la usaremos.ya que existe unas tablas que facilitan ese trabajo.y lo mejor es que MATHEMATICA puede sacar la transformada de laplace.a continuacion se menciona un ejemplo:

Calcular la transformada de Laplace de la funcion f(t)=t$e^{-2\,t}$:

In[29]:=
```
LaplaceTransform[t * Exp[-2 * t], t, s]
```

Out[29]=

$$\frac{1}{(2+s)^2}$$

Y tambien podemos calcula la transformada Inverse de Laplace :

In[30]:=
```
InverseLaplaceTransform[1 / (2 + s) ^2, s, t]
```

Out[30]=

$$e^{-2\,t}\, t$$