

INECUACIONES O DESIGUALDADES

<i>Inecuaciones Lineales</i>	Pág. 1
<i>Inecuaciones de 2do grado</i>	Pág. 7
<i>Inecuaciones Racionales</i>	Pág. 15
<i>Inecuaciones Irracionales</i>	Pág. 23
<i>Inecuaciones con Valor Absoluto</i>	Pág. 26
<i>Sistemas de Inecuaciones (Inecuaciones Simultaneas)</i>	Pág. 31

Ing. José Luis Albornoz Salazar

INECUACIONES LINEALES

REGLAS :

1) Si $a < b$, entonces $a+c < b+c$ (también se cumple para $\leq, > y \geq$).

Ejemplo : Si $3 < 5$ y sumamos 2 a ambos términos, obtenemos $5 < 7$.

2) Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a+c < b+d$ (también se cumple para $\leq, > y \geq$).

Ejemplo : Si $3 < 5$ y $4 < 6$, entonces sumando las desigualdades, obtenemos $7 < 11$.

3) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$ (también se cumple para $\leq, > y \geq$).

Ejemplo : Si $3 < 5$ y multiplicamos por 2 obtenemos $6 < 10$.

4) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$ (también se cumple para $\leq, > y \geq$). Cuando se multiplica por un valor negativo se cambian los signos de los términos y el sentido de la desigualdad.

Ejemplo : Si $3 < 5$ al multiplicar por -2 obtenemos $-6 > -10$.

EJERCICIO 1 : Resolver $X + 2 \geq 7$

De la misma forma que hemos trabajado con las ecuaciones lineales podemos hacerlo con las inecuaciones, es decir se recomienda ordenarla de manera tal que las variables queden ubicadas en el primer miembro (lado izquierdo del signo de desigualdad) y los números en el segundo miembro (lado derecho del signo de desigualdad).

Igual que en las ecuaciones, al "pasar" un término de un miembro al otro se debe cambiar el signo de dicho término.

En este ejercicio mantenemos a "X" al lado izquierdo del signo de la desigualdad y pasamos a "+2" al lado derecho pero cambiándole el signo.

$$X + 2 \geq 7$$

Así, la inecuación quedará expresada como:

$$X \geq 7 - 2 \quad ; \quad X \geq 5$$

Lo que significa que "X" puede tomar valores iguales o mayores a 5; esta solución puede ser mostrada de tres formas :

En forma gráfica:



Nota: Se coloca ● en el número 5 indicando que él forma parte de la solución.

En forma de intervalo:

$$X = [5, +\infty)$$

Intervalo cerrado en 5 (incluido el 5) hasta infinito positivo (tanto el infinito positivo como el infinito negativo se indican como intervalo abierto "paréntesis").

En forma de conjunto:

$$X = \{X \in \mathbb{R} / X \geq 5\}$$

X pertenece a los números reales tal que X sea mayor o igual a 5

EJERCICIO 2 : Resolver $3 \leq X - 2$

De la misma forma que hemos trabajado con las ecuaciones lineales podemos hacerlo con las inecuaciones, es decir se recomienda ordenarla de manera tal que las variables queden ubicadas en el primer miembro (lado izquierdo del signo de desigualdad) y los números en el segundo miembro (lado derecho del signo de desigualdad).

Igual que en las ecuaciones, al "pasar" un término de un miembro al otro se debe cambiar el signo de dicho término.

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\text{---}} \\ 3 \leq X - 2 \\ \xleftarrow{\text{---}} \\ -X \leq -2 - 3 \quad ; \quad -X \leq -5 \end{array}$$

En aquellos casos (como este) en que la variable presente signo negativo se debe multiplicar toda la inecuación por "menos uno", teniendo en cuenta que se deben cambiar los signos de todos los términos y también se debe cambiar el sentido de la desigualdad.

$$\begin{array}{l} (-X \leq -5) \cdot (-1) \\ \swarrow \quad \searrow \\ X \geq 5 \end{array}$$

Lo que significa que "X" puede tomar valores iguales o mayores a 5; esta solución es la misma que la del ejercicio 1.

EJERCICIO 3 : Resolver $3X - 4 < X + 2$

Ordenar de manera tal que las variables queden ubicadas en el primer miembro (lado izquierdo de la desigualdad) y los números en el segundo miembro (lado derecho de la desigualdad).

Al "pasar" un término de un miembro al otro se debe cambiar el signo de dicho término.

$$3X - X < 2 + 4 \quad ; \quad 2X < 6$$

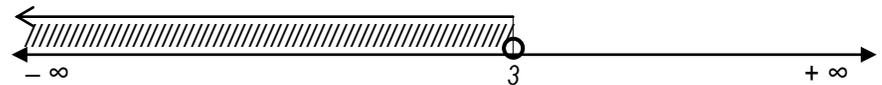
El "2" que está multiplicando a la "X" en el miembro izquierdo de la inecuación pasará al miembro derecho dividiendo al "6" (Esto solo se puede hacer si el coeficiente que acompaña a la variable es positivo).

Si la variable hubiese estado acompañada por un número negativo, primero se multiplica toda la inecuación por "menos uno" (ver ejercicio 2) y después se hace el despeje.

$$2X < 6 \quad ; \quad X < \frac{6}{2} \quad ; \quad X < 3$$

Lo que significa que "X" puede tomar valores menores a 3 (no incluye al 3); esta solución puede ser mostrada de tres formas :

En forma gráfica:



Nota: Se coloca ○ en el número 3 indicando que él NO forma parte de la solución.

En forma de intervalo:

$$X = (-\infty, 3)$$

Intervalo abierto desde menos infinito hasta intervalo abierto en 3 (no incluye al 3).

En forma de conjunto:

$$X = \{X \in \mathbb{R} / X < 3\}$$

X pertenece a los números reales tal que X sea menor a 3

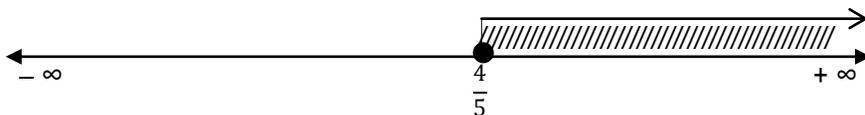
EJERCICIO 4 : Resolver $2X - 1 \geq -3X + 3$

Ordenando las variables al lado izquierdo y los números al lado derecho:

$$2X + 3X \geq 3 + 1 \quad ; \quad 5X \geq 4 \quad ; \quad X \geq \frac{4}{5}$$

Lo que significa que "X" puede tomar valores iguales o mayores a $\frac{4}{5}$
Esta solución puede ser mostrada de tres formas :

En forma gráfica:



Nota: Se coloca ● en $\frac{4}{5}$ indicando que él forma parte de la solución.

En forma de intervalo:

$$X = \left[\frac{4}{5}, +\infty \right)$$

Intervalo cerrado en $\frac{4}{5}$ (incluido el $\frac{4}{5}$) hasta infinito positivo (tanto el infinito positivo como el infinito negativo se indican como intervalo abierto "paréntesis").

En forma de conjunto:

$$X = \{ X \in \mathbb{R} / X \geq \frac{4}{5} \}$$

X pertenece a los números reales tal que X sea mayor o igual a $\frac{4}{5}$

EJERCICIO 5 : Resolver $4X + 1 - 2 \geq 7X - 6 - X$

Ordenando las variables al lado izquierdo y los números al lado derecho:

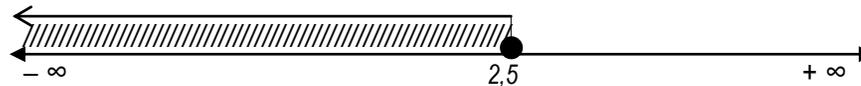
$$4X - 7X + X \geq -6 - 1 + 2 \quad ; \quad -2X \geq -5$$

Como la variable "X" está acompañada por un coeficiente con signo negativo (-2) se debe multiplicar toda la inecuación por "menos uno", teniendo en cuenta que se deben cambiar los signos de todos los términos y también se debe cambiar el sentido de la desigualdad.

$$(-2X \geq -5) \cdot (-1) \quad ; \quad 2X \leq 5 \quad ; \quad X \leq \frac{5}{2} \quad ; \quad X \leq 2,5$$

Lo que significa que "X" puede tomar valores iguales o menores a 2,5.
Esta solución puede ser mostrada de tres formas :

En forma gráfica:



En forma de intervalo:

$$X = (-\infty, 2.5]$$

En forma de conjunto:

$$X = \{ X \in \mathbb{R} / X \leq 2,5 \}$$

EJERCICIO 6 : Resolver $-10X + 2 < 3X + 28$

Ordenando las variables al lado izquierdo y los números al lado derecho:

$$-10X - 3X < 28 - 2 \quad ; \quad -13X < 26$$

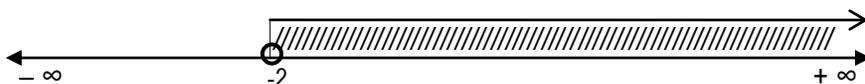
Como la variable "X" está acompañada por un coeficiente con signo negativo (-13) se debe multiplicar toda la inecuación por "menos uno", teniendo en cuenta que se deben cambiar los signos de todos los términos y también se debe cambiar el sentido de la desigualdad.

$$(-13X < 26) \cdot (-1) \quad ; \quad 13X > -26$$

$$X > \frac{-26}{13} \quad ; \quad X > -2$$

Lo que significa que "X" puede tomar valores mayores a "-2" (no incluye al "-2"); esta solución puede ser mostrada de tres formas:

En forma gráfica:



En forma de intervalo:

$$X = (-2, +\infty)$$

En forma de conjunto:

$$X = \{X \in \mathbb{R} / X > -2\}$$

EJERCICIO 7: Resolver $\frac{X-2}{6} + \frac{3X}{2} < -\frac{X}{4}$

Cuando alguno, varios o todos los términos de la inecuación presenten fracciones, se recomienda "eliminar" los denominadores para que la inecuación quede expresada en forma lineal.

La operación para "eliminar" los denominadores se realiza en forma similar que con las ecuaciones.

Primero se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores:
(m.c.m de 6, 2 y 4 = 12)

Luego se multiplica TODA la inecuación por el m.c.m (se debe multiplicar cada término por el m.c.m):

$$\frac{12(X-2)}{6} + \frac{12(3X)}{2} < -\frac{12X}{4}$$

$$\frac{12X-24}{6} + \frac{36X}{2} < -\frac{12X}{4}$$

Posteriormente se divide cada numerador entre su respectivo denominador.

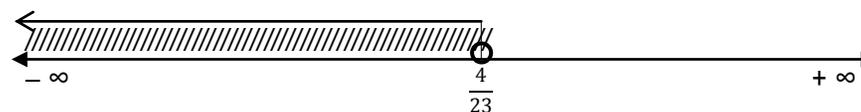
$$2X - 4 + 18X < -3X$$

La inecuación ha quedado expresada en forma lineal y su solución puede ser enfocada de la misma forma como los ejercicios anteriores:

$$2X + 18X + 3X < 4 \quad ; \quad 23X < 4 \quad ; \quad X < \frac{4}{23}$$

Lo que significa que "X" puede tomar valores menores a $\frac{4}{23}$ (no incluye al $\frac{4}{23}$); esta solución puede ser mostrada de tres formas:

En forma gráfica:



En forma de intervalo:

$$X = (-\infty, \frac{4}{23})$$

En forma de conjunto:

$$X = \{X \in \mathbb{R} / X < \frac{4}{23}\}$$

EJERCICIO 8 : Resolver $\frac{2-X}{5} - 3 \geq 4(X-2)$

Primero se realiza la multiplicación indicada en el miembro derecho de la inecuación :

$$\frac{2-X}{5} - 3 \geq 4X - 8$$

Cuando alguno, varios o todos los términos de la inecuación presenten fracciones, se recomienda "eliminar" los denominadores para que la inecuación quede expresada en forma lineal.

La operación para "eliminar" los denominadores se realiza en forma similar que con las ecuaciones.

Primero se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores: (cuando exista un solo denominador se tomará como m.c.m. En este caso m.c.m = 5)

Luego se multiplica TODA la inecuación por el m.c.m (se debe multiplicar cada término por el m.c.m):

$$\frac{5(2-X)}{5} - (5)(3) \geq 5(4X-8)$$
$$\frac{10-5X}{5} - 15 \geq 20X-40$$

Posteriormente se divide cada numerador entre su respectivo denominador.

$$2-X-15 \geq 20X-40$$

La inecuación ha quedado expresada en forma lineal y su solución puede ser enfocada de la misma forma como los ejercicios anteriores:

$$-X-20X \geq -40-2+15 \quad ; \quad -21X \geq -27$$

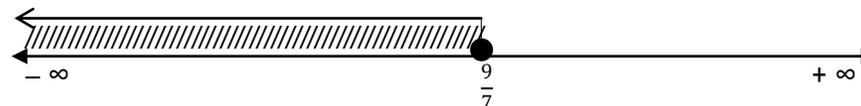
Como la variable "X" está acompañada por un coeficiente con signo negativo (-21) se debe multiplicar toda la inecuación por "menos uno", teniendo en cuenta que se deben cambiar los signos de todos los términos y también se debe cambiar el sentido de la desigualdad.

$$(-21X \geq -27) \cdot (-1) \quad ; \quad 21X \leq 27 \quad ; \quad X \leq \frac{27}{21}$$

Como al reducir por tres $\frac{27}{21} = \frac{9}{7} \quad ; \quad X \leq \frac{9}{7}$

Lo que significa que "X" puede tomar valores menores o iguales a $\frac{9}{7}$, esta solución puede ser mostrada de tres formas :

En forma gráfica:



En forma de intervalo:

$$X = (-\infty, \frac{9}{7}]$$

En forma de conjunto:

$$X = \{X \in \mathbb{R} / X \leq \frac{9}{7}\}$$

EJERCICIO 9 : Resolver $-1 < 2X-5 < 7$

Esta expresión representa realmente dos inecuaciones, la primera : $-1 < 2X-5$ y la segunda : $2X-5 < 7$

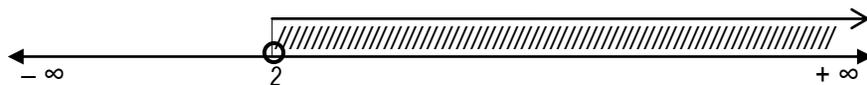
La solución total estará representada por la intersección de las dos soluciones parciales. En ese sentido, se procede a resolver cada inecuación por separado y al final se consigue la intersección de ambas.

Resolviendo $-1 < 2X-5$

$$-1 < 2X-5 \quad ; \quad -2X < -5+1 \quad ; \quad -2X < -4$$

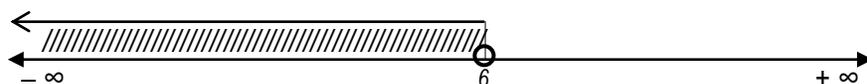
Al multiplicar por menos uno :

$$(-2X < -4) \cdot (-1) ; 2X > 4 ; X > \frac{4}{2} ; X > 2$$

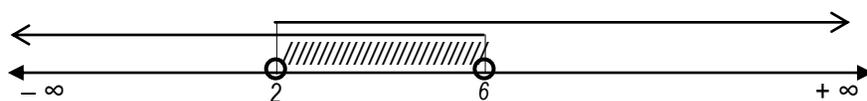


Resolviendo $2X - 5 < 7$

$$2X - 5 < 7 ; 2X < 7 + 5 ; 2X < 12 ; X < \frac{12}{2} ; X < 6$$



Al sobreponer ambas gráficas se observa fácilmente la intersección:



La solución es: $2 < X < 6$

En forma de intervalo:

$$X = (2, 6)$$

En forma de conjunto:

$$X = \{X \in \mathbb{R} / 2 < X < 6\}$$

EJERCICIO 10 : Resolver $2X + 1 \leq 4X - 3 < X + 7$

Esta expresión representa realmente dos inecuaciones:

La primera : $2X + 1 \leq 4X - 3$ y la segunda : $4X - 3 < X + 7$

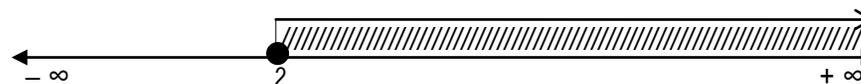
La solución total estará representada por la intersección de las dos soluciones parciales. En ese sentido, se procede a resolver cada inecuación por separado y al final se consigue su intersección.

Resolviendo $2X + 1 \leq 4X - 3$

$$2X - 4X \leq -3 - 1 ; -2X \leq -4$$

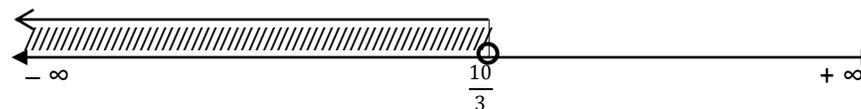
Al multiplicar por menos uno :

$$2X \geq 4 ; X \geq \frac{4}{2} ; X \geq 2$$

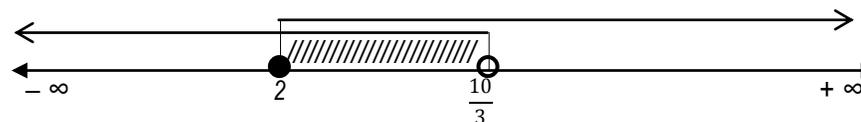


Resolviendo $4X - 3 < X + 7$

$$4X - X < 7 + 3 ; 3X < 10 ; X < \frac{10}{3}$$



Al sobreponer ambas gráficas se observa fácilmente la intersección:



La solución: $2 \leq X \leq \frac{10}{3}$

En forma de intervalo:

$$X = [2, \frac{10}{3})$$

En forma de conjunto:

$$X = \{X \in \mathbb{R} / 2 \leq X < \frac{10}{3}\}$$

INECUACIONES DE 2do. GRADO

Existen varios métodos para resolver este tipo de inecuaciones; casi todos consideran el estudio de las dos raíces del polinomio de segundo grado que contiene la desigualdad.

Cuando la ecuación de segundo grado (parábola) no intercepta al eje "X" (eje horizontal o eje de las abscisas) sus raíces son imaginarias y no pueden indicarse sobre la recta real y esta consideración confunde muchas veces a nuestros estudiantes.

El método que hemos considerado más sencillo consiste en graficar la parábola e indicar que los valores que estén sobre el eje horizontal son los valores positivos y los que estén por debajo son los negativos.

EJERCICIO 1 : Resolver $X^2 \geq 3 + 2X$

Solución :

Lo primero que debemos hacer es "pasar" todos los términos al lado izquierdo de la desigualdad y ordenarlo como un polinomio en forma descendente ($aX^2 + bX + c$):

$$X^2 - 2X - 3 \geq 0$$

Ahora procedemos a graficar el miembro que está al lado izquierdo del signo de la desigualdad, considerándolo como una función.

Para graficar una función de segundo grado se pueden seguir los siguientes pasos :

Primer paso : Se identifican los valores de a , b y c de la función.

$$a = 1 \quad ; \quad b = -2 \quad ; \quad c = -3$$

Segundo paso : Se calcula el eje de simetría con la fórmula : $X = \frac{-b}{2a}$

$$X = \frac{-b}{2a} \quad ; \quad X = \frac{-(-2)}{2(1)} \quad ; \quad X = \frac{2}{2} \quad ; \quad X = 1$$

Esto significa que por $X = 1$ pasará una recta perpendicular al eje X que representa al eje de simetría de la parábola.

Se introduce este valor en la función $f(x) = X^2 - 2X - 3$ para determinar el vértice de la parábola.

$$f(1) = (1)^2 - 2(1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4 \quad ; \quad f(1) = -4$$

Esto nos indica que el vértice de la parábola es el punto. $(1, -4)$

Tercer paso : Se determina si la función intercepta o no al eje X con el uso de la fórmula conocida como discriminante ($b^2 - 4ac$).

Recuerde que la intercepción o corte con el eje X lo indican las raíces de la función.

- Si $b^2 - 4ac > 0$ la función tiene 2 raíces diferentes (corta al eje X en dos puntos).
- Si $b^2 - 4ac = 0$ la función tiene 2 raíces iguales (tiene su vértice en un punto contenido en el eje X).
- Si $b^2 - 4ac < 0$ la función no tiene raíces reales (NO corta al eje X).

$$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16$$

Como $b^2 - 4ac > 0$ la función tiene 2 raíces diferentes (corta al eje X en dos puntos).

Cuarto paso : Se calculan las raíces de la función con el uso de la fórmula general de segundo grado o resolvente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$X_1 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} ; \quad X_1 = 3$$

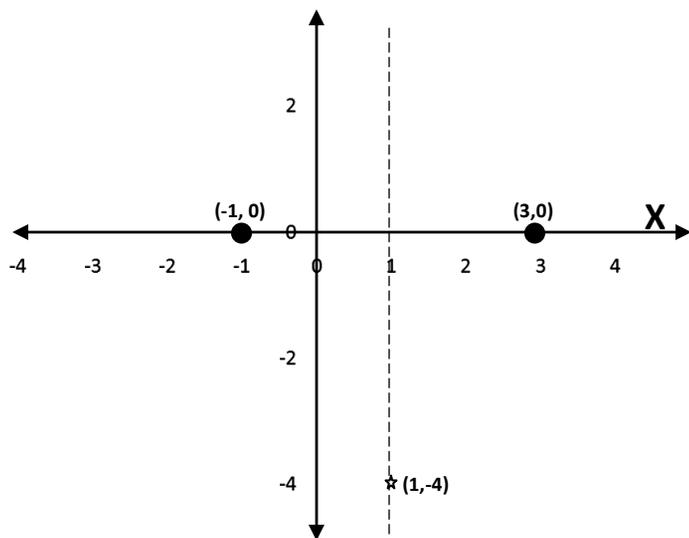
Esto nos indica que la parábola pasa por el punto $(3,0)$

$$X_2 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} ; \quad X_2 = -1$$

Esto nos indica que la parábola pasa por el punto $(-1,0)$

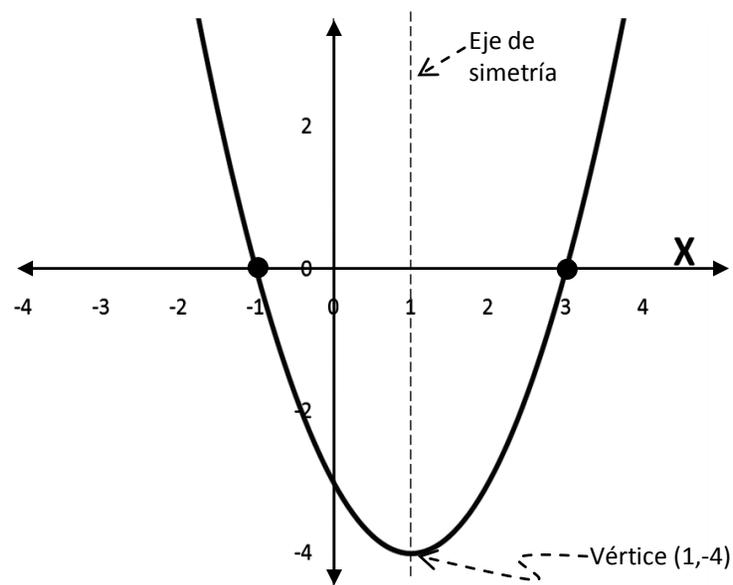
Quinto paso : Se indican los puntos calculados en un sistema de coordenadas rectangulares y posteriormente se grafica la parábola.

Como la inecuación es del tipo \geq los cortes con el eje X formarán parte de la solución y por lo tanto se indican con un círculo "relleno".



El hecho de calcular el eje de simetría y el vértice de la parábola nos facilita el procedimiento para graficarla debido a que nos permite visualizar inmediatamente como será su configuración y sobre todo su concavidad y su punto más alto o más bajo (vértice) según sea el caso.

En este caso en particular si unimos los tres puntos se deduce fácilmente que la parábola quedará graficada así :



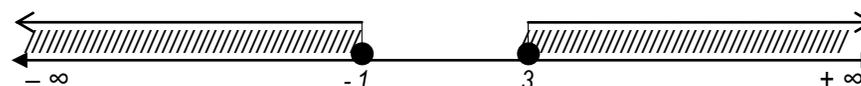
Una vez graficada la parábola resulta extremadamente fácil visualizar cuales son los valores positivos de la función (están por encima del eje X) y los valores negativos (están por debajo del eje X).

Como la desigualdad estudiada quedó ordenada como $X^2 - 2X - 3 \geq 0$ nos interesa determinar los valores mayores e iguales a cero (valores positivos de la función) y es evidente al observar la grafica que serán los intervalos

$$(-\infty, -1] \quad \text{y} \quad [3, +\infty)$$

La solución puede ser mostrada de tres formas :

En forma gráfica:



En forma de intervalo:

$$X = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

En forma de conjunto:

$$X = \{X \in \mathbb{R} / X \leq -1 \wedge X \geq 3\}$$

Todos los "X" menores e iguales a "- 1" y todos los "X" mayores e iguales a "3",

Nota: Si la desigualdad estudiada hubiese quedado ordenada como $X^2 - 2X - 3 \leq 0$ nos hubiese interesado determinar los valores menores e iguales a cero (valores negativos de la función mas el cero) y es evidente al observar la grafica que serán los valores que están por debajo del eje "X".

$$[-1, 3]$$

EJERCICIO 2: Resolver $X^2 \geq -4$

Solución:

Lo primero que debemos hacer es "pasar" todos los términos al lado izquierdo de la desigualdad y ordenarlo como un polinomio en forma descendente ($aX^2 + bX + c$):

$$X^2 + 4 \geq 0$$

Ahora procedemos a graficar el miembro que está al lado izquierdo del signo de la desigualdad, considerándolo como una función.

Para graficar una función de segundo grado se pueden seguir los siguientes pasos:

Primer paso: Se identifican los valores de a, b y c de la función.

INECUACIONES O DESIGUALDADES

$$a = 1 \quad ; \quad b = 0 \quad ; \quad c = 4$$

Segundo paso: Se calcula el eje de simetría con la fórmula: $X = \frac{-b}{2a}$

$$X = \frac{-b}{2a} \quad ; \quad X = \frac{-(0)}{2(1)} \quad ; \quad X = \frac{0}{2} \quad ; \quad X = 0$$

Esto significa que por $X = 0$ pasará una recta perpendicular al eje X que representa al eje de simetría de la parábola (en este caso el eje de simetría será el eje "Y" del sistema de coordenadas).

Se introduce este valor en la función $f(x) = X^2 + 4$ para determinar el vértice de la parábola.

$$f(0) = (0)^2 + 4 = 0 + 4 = 4 \quad ; \quad f(0) = 4$$

Esto nos indica que el vértice de la parábola es el punto. $(0, 4)$

Tercer paso: Se determina si la función intercepta o no al eje X con el uso de la formula conocida como discriminante ($b^2 - 4ac$).

Recuerde que la intercepción o corte con el eje X lo indican las raíces de la función.

- Si $b^2 - 4ac > 0$ la función tiene 2 raíces diferentes (corta al eje X en dos puntos).
- Si $b^2 - 4ac = 0$ la función tiene 2 raíces iguales (tiene su vértice en un punto contenido en el eje X).
- Si $b^2 - 4ac < 0$ la función no tiene raíces reales (NO corta al eje X).

$$b^2 - 4ac = (0)^2 - 4(1)(4) = 0 - 16 = -16$$

Como $b^2 - 4ac < 0$ la función no tiene raíces reales (NO corta al eje X).

Cuarto paso : Como no se pueden calcular las dos raíces de la función se procede a calcular dos puntos de la parábola, uno ubicado al lado izquierdo del eje de simetría y el otro al lado derecho, esto nos facilitará visualizar fácilmente la configuración de la parábola.

Como el eje de simetría es $X = 0$ puedo calcular los puntos cuando $X = -1$ y cuando $X = 1$, para lo cual sustituyo estos valores en la función $f(x) = X^2 + 4$

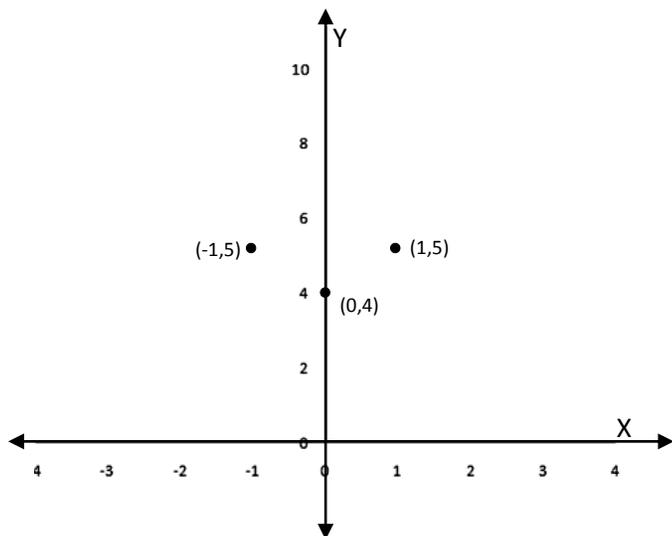
$$\text{Para } X = -1 ; \quad f(-1) = (-1)^2 + 4 = 1 + 4 = 5$$

Esto nos indica que la parábola pasa por el punto $(-1,5)$

$$\text{Para } X = 1 ; \quad f(1) = (1)^2 + 4 = 1 + 4 = 5$$

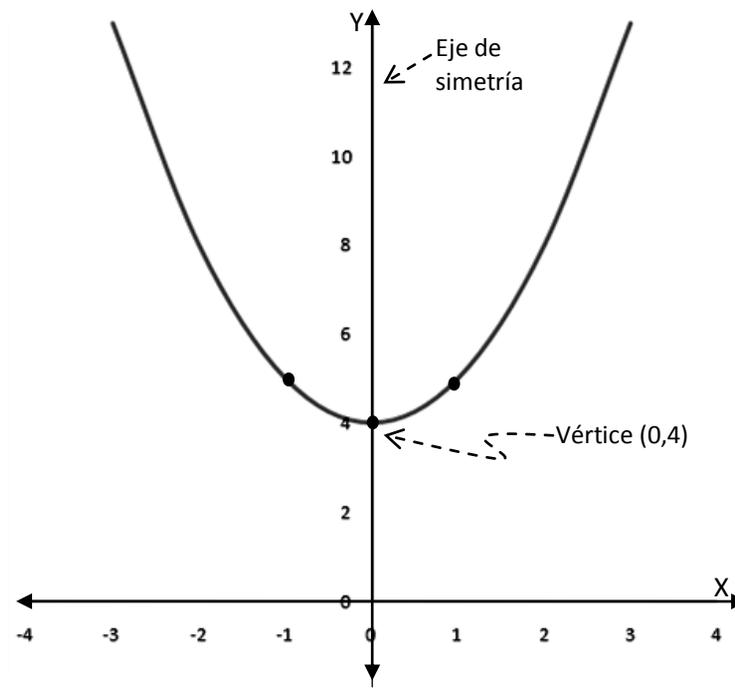
Esto nos indica que la parábola pasa por el punto $(1,5)$

Quinto paso : Se indican los puntos calculados en un sistema de coordenadas rectangulares y posteriormente se grafica la parábola.



El hecho de calcular el eje de simetría y el vértice de la parábola nos facilita el procedimiento para graficarla debido a que nos permite visualizar inmediatamente como será su configuración y sobre todo su concavidad y su punto más alto o más bajo (vértice) según sea el caso.

En este caso en particular si unimos los tres puntos se deduce fácilmente que la parábola quedará graficada así :



Una vez graficada la parábola resulta extremadamente fácil visualizar cuales son los valores positivos de la función (están por encima del eje X) y los valores negativos (están por debajo del eje X).

En este caso la parábola está ubicada completamente por encima del eje X por lo tanto todos los valores que toma son positivos.

Como la desigualdad estudiada quedó ordenada como $X^2 + 4 \geq 0$ nos interesa determinar los valores mayores e iguales a cero (valores positivos de la función) y es evidente al observar la grafica que serán todos los números reales.

Solución en forma de intervalo:

$$X = (-\infty, +\infty)$$

En forma de conjunto:

$$X = \{ \mathbb{R} \}$$

Nota: Si la desigualdad estudiada hubiese quedado ordenada como $X^2 + 4 \leq 0$ nos hubiese interesado determinar los valores menores e iguales a cero (valores negativos de la función) y es evidente al observar la grafica que estos no existen.

Luego, la solución será un conjunto vacío (X no pertenece al conjunto de los números reales).

EJERCICIO 3 : Resolver $5X - 4 - X^2 > 0$

Solución :

Ordenando el polinomio en forma descendente ($aX^2 + bX + c$):

$$-X^2 + 5X - 4 > 0$$

Ahora procedemos a graficar el miembro que está al lado izquierdo del signo de la desigualdad, considerándolo como una función.

Para graficar una función de segundo grado se pueden seguir los siguientes pasos :

Primer paso : Se identifican los valores de a, b y c de la función.

$$a = -1 \quad ; \quad b = 5 \quad ; \quad c = -4$$

Segundo paso : Se calcula el eje de simetría con la fórmula : $X = \frac{-b}{2a}$

$$X = \frac{-b}{2a} \quad ; \quad X = \frac{-(-5)}{2(-1)} \quad ; \quad X = \frac{-5}{-2} \quad ; \quad X = 2,5$$

Esto significa que por $X = 2,5$ pasará una recta perpendicular al eje X que representa al eje de simetría de la parábola.

Se introduce este valor en la función $f(x) = -X^2 + 5X - 4$ para determinar el vértice de la parábola.

$$f(2,5) = -(2,5)^2 + 5(2,5) - 4 = -6,25 + 12,5 - 4 = -2,25$$

$$f(2,5) = 2,25$$

Esto nos indica que el vértice de la parábola es el punto. (2,5 , 2,25)

Tercer paso : Se determina si la función intercepta o no al eje X con el uso de la formula conocida como discriminante ($b^2 - 4ac$).

$$b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(-1)(-4) = 25 - 16 = 9$$

Como $b^2 - 4ac > 0$ la función tiene 2 raíces diferentes (corta al eje X en dos puntos).

Cuarto paso : Se calculan las raíces de la función con el uso de la fórmula general de segundo grado o resolvente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Este cálculo se nos facilita por el hecho de que la cantidad sub-radical o radicando es la misma conocida como discriminante y ya fue calculada.

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-5 \pm 3}{-2}$$

$$X_1 = \frac{-5+3}{-2} = \frac{-2}{-2} \quad ; \quad X_1 = 1$$

Esto nos indica que la parábola pasa por el punto .(1,0)

$$X_2 = \frac{-5-3}{-2} = \frac{-8}{-2} \quad ; \quad X_2 = 4$$

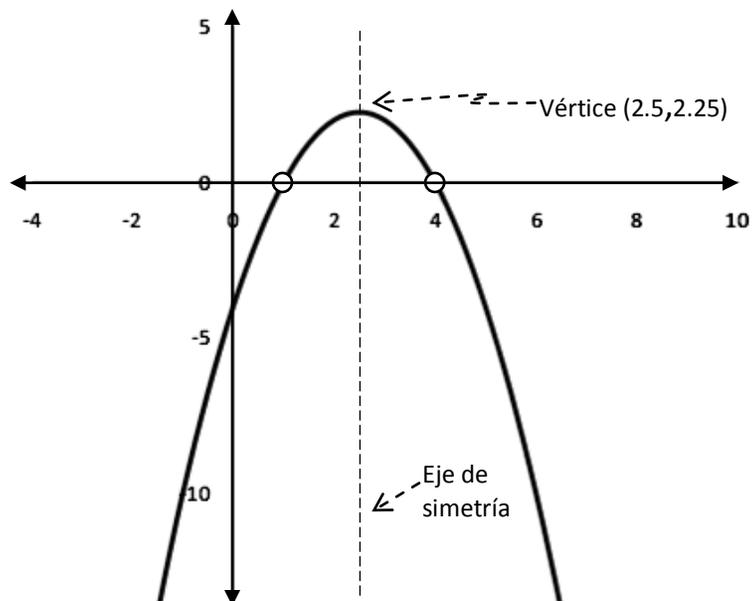
Esto nos indica que la parábola pasa por el punto. (4,0)

Quinto paso : Se indican los puntos calculados en un sistema de coordenadas rectangulares y posteriormente se grafica la parábola.

Como la inecuación es del tipo $>$ los cortes con el eje X **NO** formarán parte de la solución y por lo tanto se indican con un círculo "hueco".

El hecho de calcular el eje de simetría y el vértice de la parábola nos facilita el procedimiento para graficarla debido a que nos permite visualizar inmediatamente como será su configuración y sobre todo su concavidad y su punto más alto o más bajo (vértice) según sea el caso.

En este caso en particular si unimos los tres puntos se deduce fácilmente que la parábola quedará graficada así :



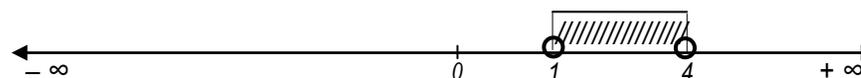
Una vez graficada la parábola resulta extremadamente fácil visualizar cuales son los valores positivos de la función (están por encima del eje X) y los valores negativos (están por debajo del eje X).

Como la desigualdad estudiada quedó ordenada como $-X^2 + 5X - 4 > 0$ nos interesa determinar los valores mayores a cero (valores positivos de la función sin incluir al cero) y es evidente al observar la grafica que será el intervalo

$$(1, 4)$$

La solución puede ser mostrada de tres formas :

En forma gráfica:



En forma de intervalo:

$$X = (1, 4)$$

En forma de conjunto:

$$X = \{X \in \mathbb{R} / 1 < X < 4\}$$

Nota: Si la desigualdad estudiada hubiese quedado ordenada como $-X^2 + 5X - 4 < 0$ nos hubiese interesado determinar los valores menores a cero (valores negativos de la función) y es evidente al observar la grafica que serán los valores que están por debajo del eje "X".

$$X = (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$$

EJERCICIO 4 : Resolver $X^2 \leq -16 + 8X$

Solución :

Lo primero que debemos hacer es "pasar" todos los términos al lado izquierdo de la desigualdad y ordenarlo como un polinomio en forma descendente ($aX^2 + bX + c$) :

$$X^2 - 8X + 16 \leq 0$$

Ahora procedemos a graficar el miembro que está al lado izquierdo del signo de la desigualdad, considerándolo como una función.

Para graficar una función de segundo grado se pueden seguir los siguientes pasos :

Primer paso : Se identifican los valores de a , b y c de la función.

$$a = 1 \quad ; \quad b = -8 \quad ; \quad c = 16$$

Segundo paso : Se calcula el eje de simetría con la fórmula : $X = \frac{-b}{2a}$

$$X = \frac{-b}{2a} \quad ; \quad X = \frac{-(-8)}{2(1)} \quad ; \quad X = \frac{8}{2} \quad ; \quad X = 4$$

Esto significa que por $X = 4$ pasará una recta perpendicular al eje X que representa al eje de simetría de la parábola.

Se introduce este valor en la función $f(x) = x^2 - 8x + 16$ para determinar el vértice de la parábola.

$$f(4) = (4)^2 - 8(4) + 16 = 16 - 32 + 16 = 0 \quad ; \quad f(4) = 0$$

Esto nos indica que el vértice de la parábola es el punto. $(4, 0)$

Tercer paso : Se determina si la función intercepta o no al eje X con el uso de la fórmula conocida como discriminante $(b^2 - 4ac)$.

$$b^2 - 4ac = (8)^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = 0$$

Como $b^2 - 4ac = 0$ la función tiene 2 raíces iguales (tiene su vértice en un punto contenido en el eje X).

Otra particularidad que presenta el hecho de que el determinante sea igual a cero es que al calcular el punto donde la parábola corta al eje X es el mismo vértice.

Esta consideración anterior nos obliga a aplicar el cuarto paso como si no existieran raíces reales.

Cuarto paso : Se procede a calcular dos puntos de la parábola, uno ubicado al lado izquierdo del eje de simetría y el otro al lado derecho, esto nos facilitará visualizar fácilmente la configuración de la parábola.

Como el eje de simetría es $X = 4$ puedo calcular los puntos cuando $X = 3$ y cuando $X = 5$, para lo cual sustituyo estos valores en la función $f(x) = x^2 - 8x + 16$

$$\text{Para } X = 3 \quad ; \quad f(3) = (3)^2 - 8(3) + 16 = 9 - 24 + 16 = 1$$

Esto nos indica que la parábola pasa por el punto $(3, 1)$

$$\text{Para } X = 5 \quad ; \quad f(5) = (5)^2 - 8(5) + 16 = 25 - 40 + 16 = 1$$

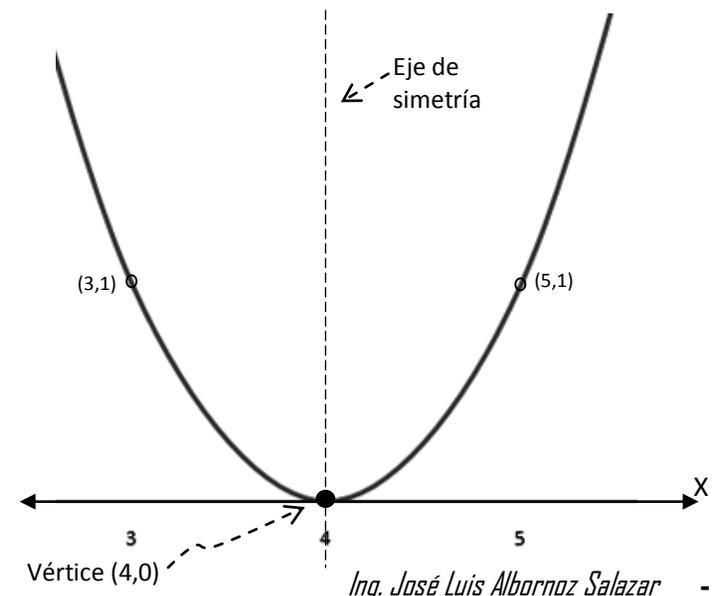
Esto nos indica que la parábola pasa por el punto $(5, 1)$

Quinto paso : Se indican los puntos calculados en un sistema de coordenadas rectangulares y posteriormente se grafica la parábola.

Como la ecuación es del tipo \leq los cortes con el eje X formarán parte de la solución y por lo tanto se indican con un círculo "relleno".

El hecho de calcular el eje de simetría y el vértice de la parábola nos facilita el procedimiento para graficarla debido a que nos permite visualizar inmediatamente como será su configuración y sobre todo su concavidad y su punto más alto o más bajo (vértice) según sea el caso.

En este caso en particular si unimos los tres puntos se deduce fácilmente que la parábola quedará graficada así :



Una vez graficada la parábola resulta extremadamente fácil visualizar cuales son los valores positivos de la función (están por encima del eje X) y los valores negativos (están por debajo del eje X).

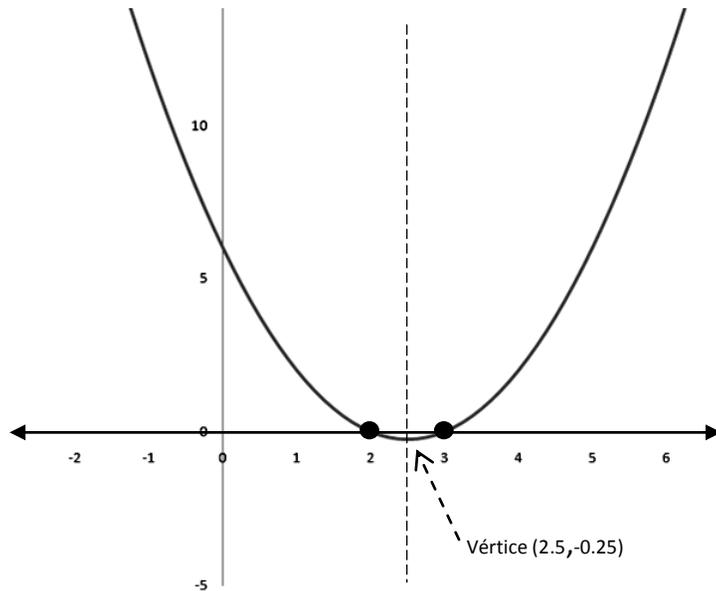
En este caso la parábola está ubicada por encima del eje X pero su vértice está contenido en el eje X (4,0).

Como la desigualdad estudiada quedó ordenada como $X^2 - 8X + 16 \leq 0$ nos interesa determinar los valores menores e iguales a cero y es evidente al observar la grafica que existe solo un punto que cumple con esta condición (el vértice). Luego, la solución será :

$$X = 4$$

Nota: Si la desigualdad estudiada hubiese quedado ordenada como $X^2 - 8X + 16 \geq 0$ nos hubiese interesado determinar los valores mayores e iguales a cero y es evidente al observar la grafica que estos serán todos los números reales.

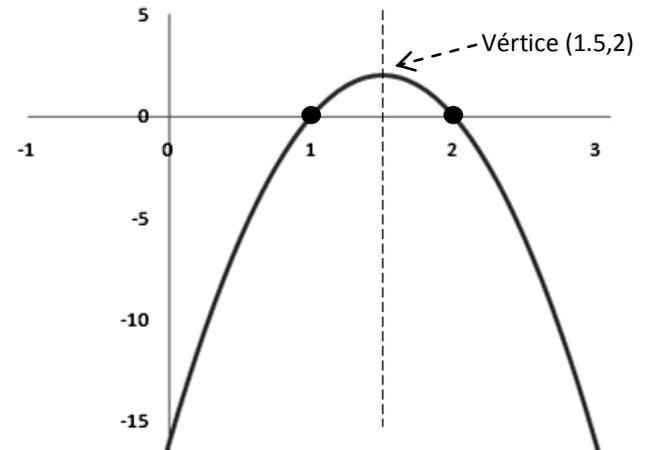
EJERCICIO 5 : Resolver $X^2 - 5X + 6 \leq 0$



Solución en forma de intervalo:

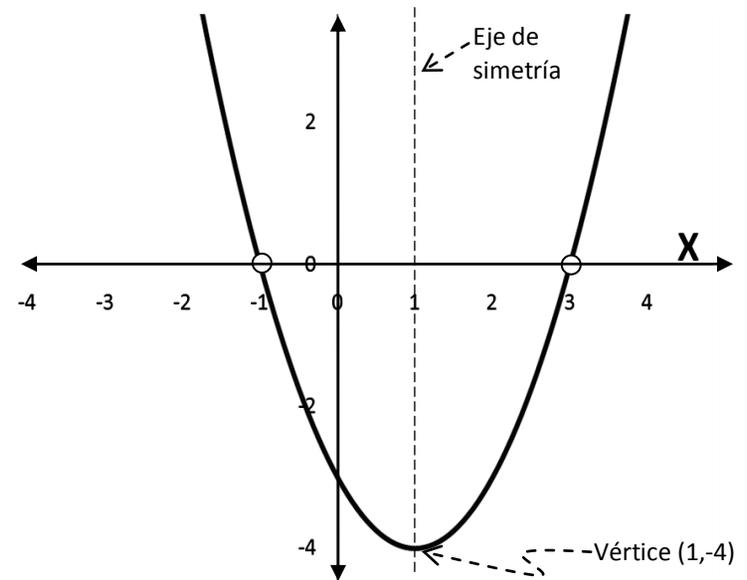
$$X = [2 , 3]$$

EJERCICIO 6 : Resolver $-8X^2 + 24X - 16 \geq 0$



Solución en forma de intervalo: $X = [1 , 2]$

EJERCICIO 7 : Resolver $X^2 - 2X - 3 < 0$



Solución en forma de intervalo: $X = (-1 , 3)$

INECUACIONES RACIONALES

Existen varios métodos para resolver este tipo de inecuaciones, en estos ejercicios vamos a utilizar uno que consideramos más sencillo y sobre todo tiene la particularidad de que paralelamente a su resolución permite comprobar si los intervalos cumplen o no con la desigualdad planteada.

Pasos del método recomendado:

- 1) Se calculan los valores críticos o de interés de la variable y se señalan sobre la recta real. Estos valores de "X" serán aquellos que anulan al numerador y al denominador de la inecuación.
- 2) Una vez indicados estos valores, la recta real quedará dividida en intervalos.
- 3) Se escoge un valor en cada uno de los intervalos y se sustituye en la inecuación inicial. Si se cumple para el punto escogido se cumplirá para todos los puntos que se encuentren en dicho intervalo y viceversa.
- 4) Para indicar si los extremos de cada intervalo son abiertos o cerrados se debe tomar en cuenta lo siguiente:
 - El valor donde el denominador se anula **NO** formará parte de la solución porque la división por cero es indeterminada (siempre se indicará como intervalo abierto).
 - En el valor donde se anule el numerador se tomará en cuenta el signo de la desigualdad (intervalo cerrado si es " \leq " o " \geq ". Intervalo abierto si es " $<$ " o " $>$ ").

EJERCICIO 1 : Resolver $\frac{3X-1}{4+2X} \leq 1$

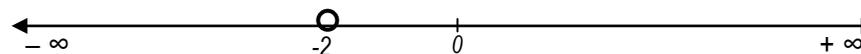
Solución :

INECUACIONES O DESIGUALDADES

Estudiando el denominador :

$$4 + 2X = 0 \quad ; \quad 2X = -4 \quad ; \quad X = \frac{-4}{2} \quad ; \quad X = -2$$

Esto nos indica que "X" no puede tomar el valor de "-2" ya que anularía al denominador y la división por cero es indeterminada. Luego en la recta real debo colocar un círculo "hueco" (○) en "-2" para indicar que NO forma parte de la solución (intervalo abierto)



Estudiando el numerador :

Muchos autores y profesores recomiendan "pasar" primero todos los términos al lado izquierdo del signo de la desigualdad. Como esto trae algunas dificultades a los alumnos menos aventajados, recomendamos resolver la inecuación como una ecuación y resultará más cómodo :

$$\frac{3X-1}{4+2X} = 1 \quad ; \quad 3X-1 = 1(4+2X) \quad ; \quad 3X-1 = 4+2X$$
$$3X-2X = 4+1 \quad ; \quad X = 5$$

Como la desigualdad es del tipo " \leq " el "5" formará parte de la solución, en la recta real colocamos un círculo "relleno" para indicar que es el extremo de un intervalo cerrado (●).



La recta real queda dividida en 3 intervalos :

$$(-\infty, -2) \quad ; \quad (-2, 5] \quad ; \quad [5, +\infty)$$

Para saber cuál o cuáles de estos intervalos cumplen con la desigualdad, escojo un valor dentro de cada intervalo, lo sustituyo en la inecuación inicial y observo si cumple o no con ella.

Si un punto de un intervalo cumple con la inecuación, cumplirán todos los puntos de ese intervalo y viceversa.

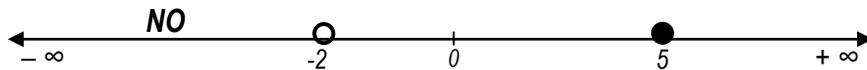
Se puede escoger cualquiera de los puntos de cada intervalo.

Estudiando el intervalo $(-\infty, -2)$: escojo el valor “-3” (está ubicado a la izquierda de “-2”) y lo sustituyo en la inecuación inicial

$$\frac{3X-1}{4+2X} \leq 1 \quad ; \quad \frac{3(-3)-1}{4+2(-3)} \leq 1 \quad ; \quad \frac{-9-1}{4-6} \leq 1$$

$$\frac{-10}{-2} \leq 1 \quad ; \quad 5 \leq 1$$

Como “5” **NO** es menor ni igual a “1” significa que “-3” **no cumple** con la inecuación y por lo tanto **ninguno** de los valores que están en el intervalo $(-\infty, -2)$ **cumple**.

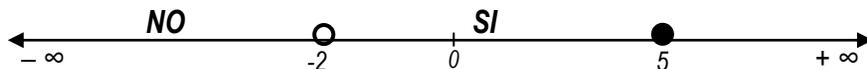


Estudiando el intervalo $(-2, 5]$: escojo el valor “0” (está ubicado entre “-2” y “5”) y lo sustituyo en la inecuación inicial

$$\frac{3X-1}{4+2X} \leq 1 \quad ; \quad \frac{3(0)-1}{4+2(0)} \leq 1 \quad ; \quad \frac{0-1}{4+0} \leq 1$$

$$\frac{-1}{4} \leq 1 \quad ; \quad -0,25 \leq 1$$

Como “-0,25” **SI** es menor a “1” significa que “0” **si cumple** con la inecuación y por lo tanto **todos los valores** que están en el intervalo estudiado $(-2, 5]$ **cumplen**.



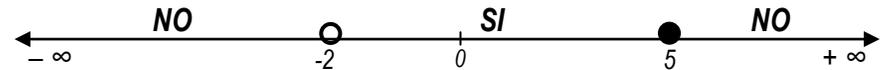
Estudiando el intervalo $[5, +\infty)$: escojo el valor “6” (está ubicado a la derecha de “5”) y lo sustituyo en la inecuación inicial

$$\frac{3X-1}{4+2X} \leq 1 \quad ; \quad \frac{3(6)-1}{4+2(6)} \leq 1 \quad ; \quad \frac{18-1}{4+12} \leq 1$$

INECUACIONES O DESIGUALDADES

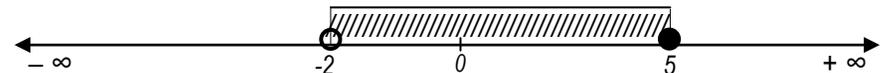
$$\frac{17}{16} \leq 1 \quad ; \quad 1,06 \leq 1$$

Como “1,06” **NO** es menor ni igual a “1” significa que “6” **no cumple** con la inecuación y por lo tanto **ninguno** de los valores que están en el intervalo $[5, +\infty)$ **cumple**.



La solución puede ser mostrada de tres formas :

En forma gráfica:



En forma de intervalo:

$$X = (-2, 5]$$

En forma de conjunto:

$$X = \{X \in \mathbb{R} / -2 < X \leq 5\}$$

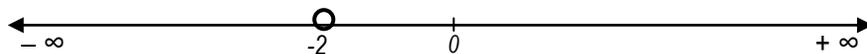
EJERCICIO 2: Resolver $\frac{X-2}{X+2} \leq 0$

Solución:

Estudiando el denominador:

$$X+2 = 0 \quad ; \quad X = -2$$

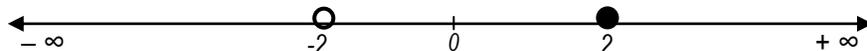
Esto nos indica que "X" no puede tomar el valor de "- 2" ya que anularía al denominador y la división por cero es indeterminada. Luego en la recta real debo colocar un círculo "hueco" (○) en "- 2" para indicar que NO forma parte de la solución (intervalo abierto)



Estudiando el numerador :

$$X - 2 = 0 \quad ; \quad X = 2$$

Como la desigualdad es del tipo "≤" el "2" formará parte de la solución, en la recta real colocamos un círculo "relleno" para indicar que es el extremo de un intervalo cerrado (●).



La recta real queda dividida en 3 intervalos :

$$(-\infty, -2) \quad ; \quad (-2, 2] \quad ; \quad [2, +\infty)$$

Para saber cuál o cuáles de estos intervalos cumplen con la desigualdad, escojo un valor dentro de cada intervalo, lo sustituyo en la inecuación inicial y observo si cumple o no con ella.

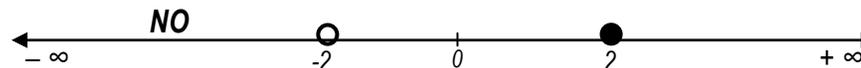
Si un punto de un intervalo cumple con la inecuación, cumplirán todos los puntos de ese intervalo y viceversa.

Se puede escoger cualquiera de los puntos de cada intervalo.

Estudiando el intervalo $(-\infty, -2)$: escojo el valor "- 3" (está ubicado a la izquierda de "- 2") y lo sustituyo en la inecuación inicial

$$\frac{X-2}{X+2} \leq 0 \quad ; \quad \frac{-3-2}{-3+2} \leq 0 \quad ; \quad \frac{-5}{-1} \leq 0 \quad ; \quad 5 \leq 0$$

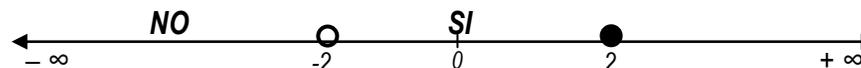
Como "5" **NO** es menor ni igual a "0" significa que "- 3" **no cumple** con la inecuación y por lo tanto **ninguno** de los valores que están en el intervalo $(-\infty, -2)$ **cumple**.



Estudiando el intervalo $(-2, 2]$: escojo el valor "0" (está ubicado entre "- 2" y "2") y lo sustituyo en la inecuación inicial

$$\frac{X-2}{X+2} \leq 0 \quad ; \quad \frac{0-2}{0+2} \leq 0 \quad ; \quad \frac{-2}{2} \leq 0 \quad ; \quad -1 \leq 0$$

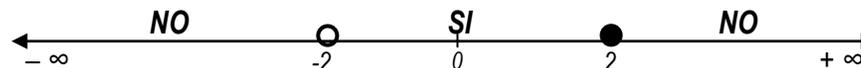
Como "- 1" **SI** es menor a "0" significa que "0" **si cumple** con la inecuación y por lo tanto **todos los valores** que están en el intervalo estudiado $(-2, 2]$ **cumplen**.



Estudiando el intervalo $[2, +\infty)$: escojo el valor "3" (está ubicado a la derecha de "2") y lo sustituyo en la inecuación inicial

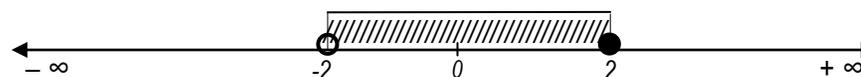
$$\frac{X-2}{X+2} \leq 0 \quad ; \quad \frac{3-2}{3+2} \leq 0 \quad ; \quad \frac{1}{5} \leq 0 \quad ; \quad 0,20 \leq 0$$

Como "0,20" **NO** es menor ni igual a "0" significa que "3" **no cumple** con la inecuación y por lo tanto **ninguno** de los valores que están en el intervalo $[2, +\infty)$ **cumple**.



La solución puede ser mostrada de tres formas :

En forma gráfica:



En forma de intervalo:

$$X = (-2, 2]$$

En forma de conjunto:

$$X = \{X \in \mathbb{R} / -2 < X \leq 2\}$$

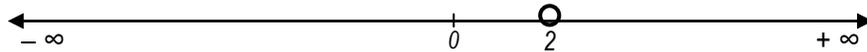
EJERCICIO 3: Resolver $\frac{X+4}{X-2} > 3$

Solución:

Estudiando el denominador:

$$X - 2 = 0 \quad ; \quad X = 2$$

Esto nos indica que "X" no puede tomar el valor de "2" ya que anularía al denominador y la división por cero es indeterminada. Luego en la recta real debo colocar un círculo "hueco" (○) en "2" para indicar que NO forma parte de la solución (intervalo abierto)

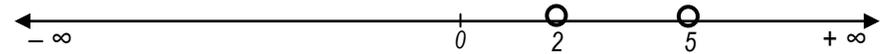


Estudiando el numerador:

Muchos autores y profesores recomiendan "pasar" primero todos los términos al lado izquierdo del signo de la desigualdad. Como esto trae algunas dificultades a los alumnos menos aventajados, recomendamos resolver la inecuación como una ecuación y resultará más cómodo:

$$\begin{aligned} \frac{X+4}{X-2} = 3 & \quad ; \quad X+4 = 3(X-2) & \quad ; \quad X+4 = 3X-6 \\ X-3X = -6-4 & \quad ; \quad -2X = -10 & \quad ; \quad X = 5 \end{aligned}$$

Como la desigualdad es del tipo ">" el "5" NO formará parte de la solución, en la recta real colocamos un círculo "hueco" para indicar que es el extremo de un intervalo abierto (○).



La recta real queda dividida en 3 intervalos:

$$(-\infty, 2) \quad ; \quad (2, 5) \quad ; \quad (5, +\infty)$$

Para saber cuál o cuáles de estos intervalos cumplen con la desigualdad, escojo un valor dentro de cada intervalo, lo sustituyo en la inecuación inicial y observo si cumple o no con ella.

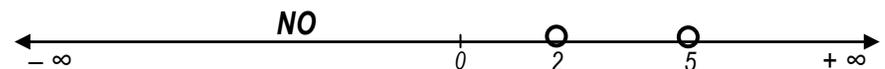
Si un punto de un intervalo cumple con la inecuación, cumplirán todos los puntos de ese intervalo y viceversa.

Se puede escoger cualquiera de los puntos de cada intervalo.

Estudiando el intervalo $(-\infty, 2)$: escojo el valor "0" (está ubicado a la izquierda de "2") y lo sustituyo en la inecuación inicial

$$\frac{X+4}{X-2} > 3 \quad ; \quad \frac{0+4}{0-2} > 3 \quad ; \quad -2 > 3$$

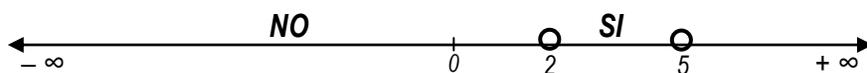
Como "-2" **NO** es mayor que "3" significa que "0" **no cumple** con la inecuación y por lo tanto **ninguno** de los valores que están en el intervalo $(-\infty, 2)$ **cumple**.



Estudiando el intervalo $(2, 5)$: escojo el valor "3" (está ubicado entre "2" y "5") y lo sustituyo en la inecuación inicial

$$\frac{X+4}{X-2} > 3 \quad ; \quad \frac{3+4}{3-2} > 3 \quad ; \quad \frac{7}{1} > 3 \quad ; \quad 7 > 3$$

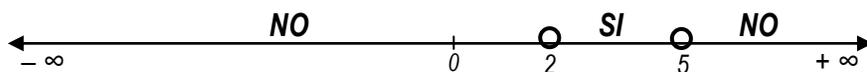
Como "7" **SI** es mayor que "3" significa que "3" **si cumple** con la inecuación y por lo tanto **todos los valores** que están en el intervalo estudiado (2, 5) **cumplen**.



Estudiando el intervalo (5, + ∞): escojo el valor "6" (está ubicado a la derecha de "5") y lo sustituyo en la inecuación inicial

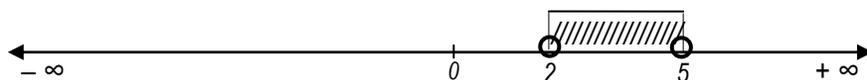
$$\frac{X+4}{X-2} > 3 ; \quad \frac{6+4}{6-2} > 3 ; \quad \frac{10}{4} > 3 ; \quad 2,5 > 3$$

Como "2,5" **NO** es mayor que "3" significa que "6" **no cumple** con la inecuación y por lo tanto **ninguno** de los valores que están en el intervalo (5, + ∞) **cumple**.



La solución puede ser mostrada de tres formas :

En forma gráfica:



En forma de intervalo:

$$X = (2, 5)$$

En forma de conjunto:

$$X = \{ X \in \mathbb{R} / 2 < X < 5 \}$$

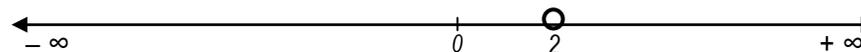
EJERCICIO 4 : Resolver $\frac{X+4}{X-2} < 3$

Solución :

Estudiando el denominador :

$$X - 2 = 0 ; \quad X = 2$$

Esto nos indica que "X" no puede tomar el valor de "2" ya que anularía al denominador y la división por cero es indeterminada. Luego en la recta real debo colocar un círculo "hueco" (○) en "2" para indicar que NO forma parte de la solución (intervalo abierto)



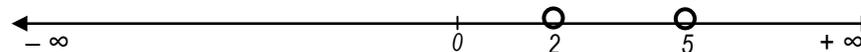
Estudiando el numerador :

Muchos autores y profesores recomiendan "pasar" primero todos los términos al lado izquierdo del signo de la desigualdad. Como esto trae algunas dificultades a los alumnos menos aventajados, recomendamos resolver la inecuación como una ecuación y resultará más cómodo :

$$\frac{X+4}{X-2} = 3 ; \quad X+4 = 3(X-2) ; \quad X+4 = 3X-6$$

$$X - 3X = -6 - 4 ; \quad -2X = -10 ; \quad X = 5$$

Como la desigualdad es del tipo "<" el "5" NO formará parte de la solución, en la recta real colocamos un círculo "hueco" para indicar que es el extremo de un intervalo abierto (○).



La recta real queda dividida en 3 intervalos :

$$(-\infty, 2) ; \quad (2, 5) ; \quad (5, +\infty)$$

Para saber cuál o cuáles de estos intervalos cumplen con la desigualdad, escojo un valor dentro de cada intervalo, lo sustituyo en la inecuación inicial y observo si cumple o no con ella.

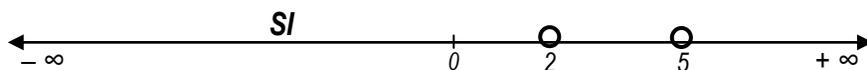
Si un punto de un intervalo cumple con la inecuación, cumplirán todos los puntos de ese intervalo y viceversa.

Se puede escoger cualquiera de los puntos de cada intervalo.

Estudiando el intervalo $(-\infty, 2)$: escojo el valor "0" (está ubicado a la izquierda de "2") y lo sustituyo en la inecuación inicial

$$\frac{X+4}{X-2} < 3 ; \quad \frac{0+4}{0-2} < 3 ; \quad -2 < 3$$

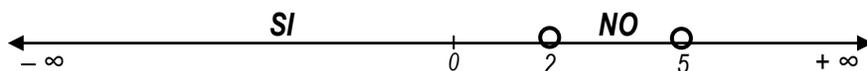
Como "-2" **SI** es menor que "3" significa que "0" **si cumple** con la inecuación y por lo tanto **todos los valores** que están en el intervalo estudiado $(-\infty, 2)$ **cumplen**.



Estudiando el intervalo $(2, 5)$: escojo el valor "3" (está ubicado entre "2" y "5") y lo sustituyo en la inecuación inicial

$$\frac{X+4}{X-2} < 3 ; \quad \frac{3+4}{3-2} < 3 ; \quad \frac{7}{1} < 3 ; \quad 7 < 3$$

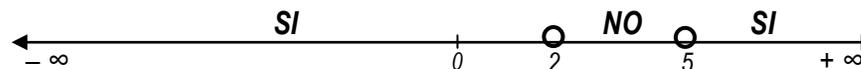
Como "7" **NO** es menor que "3" significa que "3" **no cumple** con la inecuación y por lo tanto **ninguno** de los valores que están en el intervalo $(-2, 5)$ **cumple**.



Estudiando el intervalo $(5, +\infty)$: escojo el valor "6" (está ubicado a la derecha de "5") y lo sustituyo en la inecuación inicial

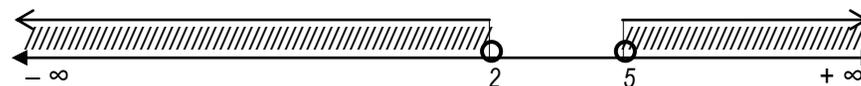
$$\frac{X+4}{X-2} < 3 ; \quad \frac{6+4}{6-2} < 3 ; \quad \frac{10}{4} < 3 ; \quad 2,5 < 3$$

Como "2,5" **SI** es menor que "3" significa que "6" **si cumple** con la inecuación y por lo tanto **todos los valores** que están en el intervalo estudiado $(5, +\infty)$ **cumplen**.



La solución puede ser mostrada de tres formas :

En forma gráfica:



En forma de intervalo:

$$X = (-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$$

En forma de conjunto:

$$X = \{X \in \mathbb{R} / X < 2 \wedge X > 5\}$$

Todos los "X" menores a "2" y todos los "X" mayores a "5",

EJERCICIO 5 : Resolver $\frac{2}{X+1} \geq \frac{3}{X-2}$

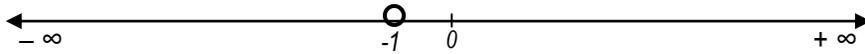
Solución :

Como la inecuación presenta dos denominadores los estudiamos por separado.

Estudiando el denominador del primer miembro :

$$X + 1 = 0 \quad ; \quad X = -1$$

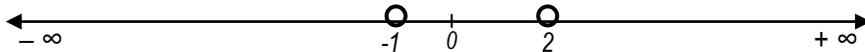
Esto nos indica que "X" no puede tomar el valor de "-1" ya que anularía al denominador y la división por cero es indeterminada. Luego en la recta real debo colocar un círculo "hueco" (○) en "-1" para indicar que NO forma parte de la solución (intervalo abierto)



Estudiando el denominador del segundo miembro :

$$X - 2 = 0 \quad ; \quad X = 2$$

Esto nos indica que "X" no puede tomar el valor de "2" ya que anularía al denominador y la división por cero es indeterminada. Luego en la recta real debo colocar un círculo "hueco" (○) en "2" para indicar que NO forma parte de la solución (intervalo abierto)



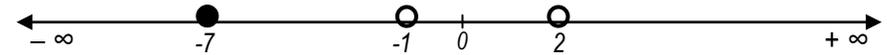
Estudiando el numerador :

Muchos autores y profesores recomiendan "pasar" primero todos los términos al lado izquierdo del signo de la desigualdad. Como esto trae algunas dificultades a los alumnos menos aventajados, recomendamos resolver la inecuación como una ecuación y resultará más cómodo :

$$\frac{2}{X+1} = \frac{3}{X-2} \quad ; \quad 2(X-2) = 3(X+1) \quad ; \quad 2X - 4 = 3X + 3$$

$$2X - 3X = +3 + 4 \quad ; \quad -X = +7 \quad ; \quad X = -7$$

Como la desigualdad es del tipo " \geq " el "-7" SI formará parte de la solución, en la recta real colocamos un círculo "relleno" para indicar que es el extremo de un intervalo cerrado (●).



La recta real queda dividida en 4 intervalos :

$$(-\infty, -7] \quad ; \quad [-7, -1) \quad ; \quad (-1, 2) \quad ; \quad (2, +\infty)$$

Para saber cuál o cuáles de estos intervalos cumplen con la desigualdad, escojo un valor dentro de cada intervalo, lo sustituyo en la inecuación inicial y observo si cumple o no con ella.

Si un punto de un intervalo cumple con la inecuación, cumplirán todos los puntos de ese intervalo y viceversa.

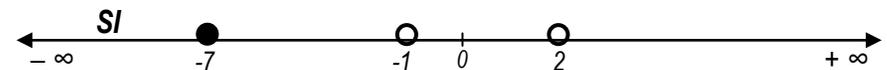
Se puede escoger cualquiera de los puntos de cada intervalo.

Estudiando el intervalo $(-\infty, -7]$: escojo el valor "-8" (está ubicado a la izquierda de "-7") y lo sustituyo en la inecuación inicial

$$\frac{2}{X+1} \geq \frac{3}{X-2} \quad ; \quad \frac{2}{-8+1} \geq \frac{3}{-8-2}$$

$$\frac{2}{-7} \geq \frac{3}{-10} \quad ; \quad -0,29 \geq -0,3$$

Como "**-0,29**" SI es mayor que "**-0,3**" significa que "-8" si cumple con la inecuación y por lo tanto **todos los valores** que están en el intervalo estudiado $(-\infty, -7]$ **cumplen**.

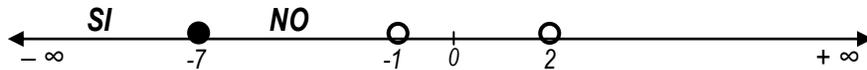


Estudiando el intervalo $[-7, -1)$: escojo el valor "-2" (está ubicado entre "-7" y "-1") y lo sustituyo en la inecuación inicial

$$\frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x-2} \quad ; \quad \frac{2}{-2+1} \geq \frac{3}{-2-2}$$

$$\frac{2}{-1} \geq \frac{3}{-4} \quad ; \quad -2 \geq -0,75$$

Como “-2” **NO** es mayor ni igual que “-0,75” significa que “-2” **no cumple** con la inecuación y por lo tanto **ninguno** de los valores que están en el intervalo $[-7, -1)$ **cumple**.

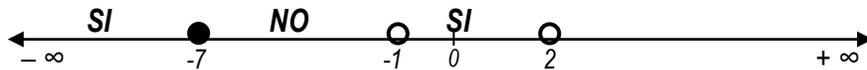


Estudiando el intervalo $(-1, 2)$: escojo el valor “0” (está ubicado entre “-1” y “2”) y lo sustituyo en la inecuación inicial

$$\frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x-2} \quad ; \quad \frac{2}{0+1} \geq \frac{3}{0-2}$$

$$\frac{2}{1} \geq \frac{3}{-2} \quad ; \quad 2 \geq -1,5$$

Como “2” **SI** es mayor que “-1,5” significa que “0” **si cumple** con la inecuación y por lo tanto **todos los valores** que están en el intervalo estudiado $(-1, 2)$ **cumplen**.

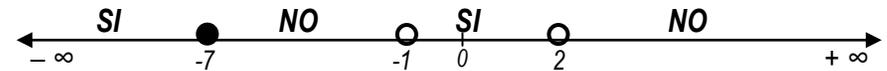


Estudiando el intervalo $(2, +\infty)$: escojo el valor “3” (está ubicado a la derecha de “2”) y lo sustituyo en la inecuación inicial

$$\frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x-2} \quad ; \quad \frac{2}{3+1} \geq \frac{3}{3-2}$$

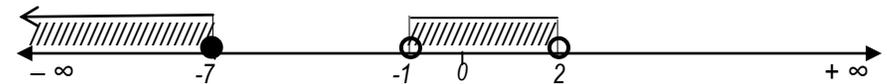
$$\frac{2}{4} \geq \frac{3}{1} \quad ; \quad 0,5 \geq 3$$

Como “0,5” **NO** es mayor ni igual que “3” significa que “3” **no cumple** con la inecuación y por lo tanto **ninguno** de los valores que están en el intervalo $(2, +\infty)$ **cumple**.



La solución puede ser mostrada de tres formas :

En forma gráfica:



En forma de intervalo:

$$X = (-\infty, -7] \cup (-1, 2)$$

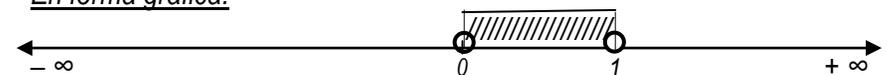
En forma de conjunto:

$$X = \{X \in \mathbb{R} / X \leq -7 \wedge -1 < X < 2\}$$

Todos los “X” menores o iguales a “-7” y todos los “X” mayores a “-1” y menores a “2”.

EJERCICIO 6: Resolver $\frac{1+x}{1-x} > 1$

En forma gráfica:



En forma de intervalo:

$$X = (0, 1)$$

En forma de conjunto:

$$X = \{X \in \mathbb{R} / 0 < X < 1\}$$

INECUACIONES IRRACIONALES

Para la solución de este tipo de inecuaciones se recomienda “refrescar” los conocimientos sobre solución de ECUACIONES IRRACIONALES debido a que sus procedimientos son muy similares. En el caso de las inecuaciones el paso “extra” consistirá en el análisis del signo que se le debe hacer a la cantidad sub-radical o radicando

Recordando algunos aspectos importantes sobre los SIGNOS DE LAS RAICES :

1) Las **raíces impares** de una cantidad tienen el mismo signo que la cantidad sub-radical o radicando.

Así,

- $\sqrt[3]{27a^3} = 3a$ porque $(3a)^3 = 27a^3$
- $\sqrt[3]{-27a^3} = -3a$ porque $(-3a)^3 = -27a^3$
- $\sqrt[5]{X^{10}} = X^2$ porque $(X^2)^5 = X^{10}$
- $\sqrt[5]{-X^{10}} = -X^2$ porque $(-X^2)^5 = -X^{10}$

2) Las **raíces pares** de una cantidad positiva tienen doble signo.

Así,

- $\sqrt{25X^2} = 5X$ ó $-5X$ porque $(5X)^2 = 25X^2$ y $(-5X)^2 = 25X^2$
Esto se indica de este modo : $\sqrt{25X^2} = \pm 5X$
- $\sqrt[4]{16a^4} = 2a$ y $-2a$ porque $(2a)^4 = 16a^4$ y $(-2a)^4 = 16a^4$
Esto se indica : $\sqrt[4]{16a^4} = \pm 2a$

3) Las **raíces pares** de una cantidad negativa no se pueden extraer. Estas raíces se llaman **cantidades imaginarias**.

Así,

$\sqrt{-4}$ no se puede extraer. La raíz de -4 no es 2 porque “ $2^2 = 4$ ” y no -4 , y tampoco es -2 porque $(-2)^2 = 4$ y no -4 .

“ $\sqrt{-4}$ ” es una **cantidad imaginaria**.

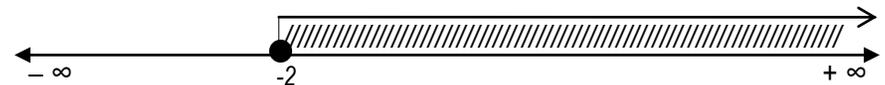
Del propio modo, $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt[4]{-16X^2}$ son **cantidades imaginarias**.

EJERCICIO 1 : Resolver $\sqrt{X+2} \geq 3$

Se analiza la cantidad sub-radical o radicando. Como la raíz es par, ésta cantidad no puede ser negativa, es decir $X+2$ tiene que ser mayor o igual a cero.

$$X+2 \geq 0 \quad ; \quad X \geq -2$$

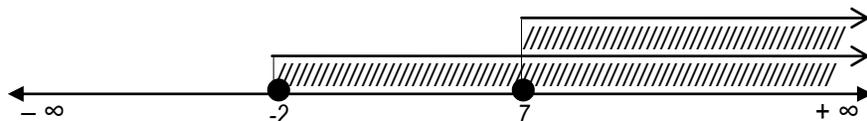
Señalamos en la recta real los valores que puede tomar la raíz cuadrada estudiada :



Posteriormente analizo la inecuación de manera similar a una ecuación irracional, es decir, se elevan ambos miembros al cuadrado con la finalidad de cancelar la raíz cuadrada del miembro de la izquierda :

$$(\sqrt{X+2})^2 \geq (3)^2 \quad ; \quad X+2 \geq 9 \quad ; \quad X \geq 9-2 \quad ; \quad X \geq 7$$

Colocando esta solución sobre la recta real se observa la **INTERSECCION** de las dos soluciones y ésta representará la solución total :



Sea muy cuidadoso. La solución estará indicada por aquellos valores de X que cumplen con todas las condiciones, es decir, los valores que están en las dos áreas sombreadas a la vez.

Solución en forma de intervalo:

$$X = [7, +\infty)$$

Intervalo cerrado en 7 (incluido el 7) hasta infinito positivo (tanto el infinito positivo como el infinito negativo se indican como intervalo abierto "paréntesis").

En forma de conjunto:

$$X = \{X \in \mathbb{R} / X \geq 7\}$$

Acostúmbrase a comprobar los resultados para tener la certeza que hizo bien el ejercicio. En este caso puede escoger un valor al lado izquierdo de 7 (NO debe cumplir) y otro al lado derecho de 7 (debe cumplir) e introdúzcalo en la inecuación inicial.

Probando con 2 (lado izquierdo de 7) :

$$\sqrt{X+2} \geq 3 \quad ; \quad \sqrt{2+2} \geq 3 \quad ; \quad \sqrt{4} \geq 3 \quad ; \quad 2 \geq 3$$

Como lo anterior es falso significa que los valores que están a la izquierdo de 7 NO cumplen con la inecuación estudiada.

Probando con 14 (lado derecho de 7) :

$$\sqrt{X+2} \geq 3 \quad ; \quad \sqrt{14+2} \geq 3 \quad ; \quad \sqrt{16} \geq 3 \quad ; \quad 4 \geq 3$$

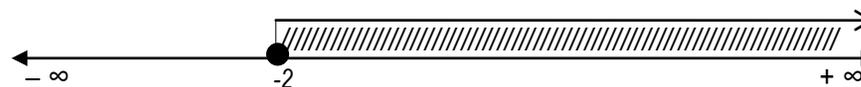
Como lo anterior es cierto significa que los valores que están a la derecha de 7 SI cumplen con la inecuación estudiada.

EJERCICIO 2 : Resolver $\sqrt{X+2} \leq 3$

Se analiza la cantidad sub-radical o radicando. Como la raíz es par, ésta cantidad no puede ser negativa, es decir $X+2$ tiene que ser mayor o igual a cero.

$$X+2 \geq 0 \quad ; \quad X \geq -2$$

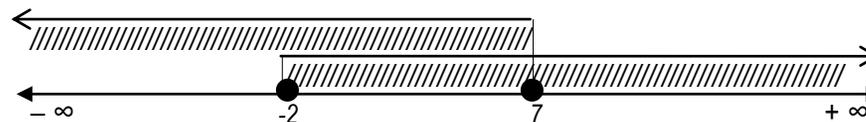
Señalamos en la recta real los valores que puede tomar la raíz cuadrada estudiada :



Posteriormente analizo la inecuación de manera similar a una ecuación irracional, es decir, se elevan ambos miembros al cuadrado con la finalidad de cancelar la raíz cuadrada del miembro de la izquierda :

$$(\sqrt{X+2})^2 \leq (3)^2 \quad ; \quad X+2 \leq 9 \quad ; \quad X \leq 9-2 \quad ; \quad X \leq 7$$

Colocando esta solución sobre la recta real se observa la **INTERSECCION** de las dos soluciones y ésta representará la solución total :



Sea muy cuidadoso. La solución estará indicada por aquellos valores de X que cumplen con todas las condiciones, es decir, los valores que están en las dos áreas sombreadas a la vez.

Solución en forma de intervalo:

$$X = [-2, 7]$$

EJERCICIO 3 : Resolver $\sqrt{5X-5} - \sqrt{X} > 0$

Como este ejercicio presenta dos raíces se analizan las dos cantidades sub-radicales o radicandos por separado, ambos deben ser mayores o iguales a cero ya que el índice de la raíz es par.

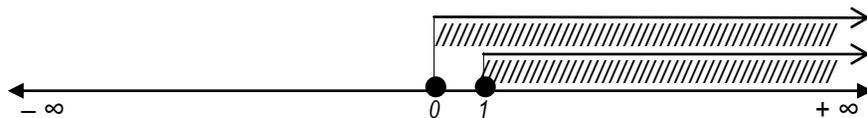
Estudiando la primera raíz :

$$5X-5 \geq 0 ; 5X \geq 5 ; X \geq \frac{5}{5} ; X \geq 1$$



Estudiando la segunda raíz :

$$X \geq 0$$

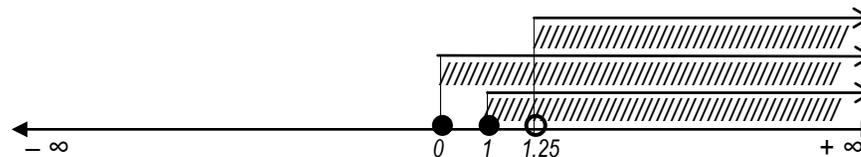


Por último analizo la inecuación de manera similar a una ecuación irracional. En este caso se debe colocar una raíz en cada miembro de la desigualdad y después se elevan ambos miembros al cuadrado con la finalidad de cancelar las dos raíces cuadradas.

$$\begin{aligned} \sqrt{5X-5} - \sqrt{X} > 0 ; \sqrt{5X-5} > \sqrt{X} \\ (\sqrt{5X-5})^2 > (\sqrt{X})^2 ; 5X-5 > X ; 5X-X > 5 \\ 4X > 5 ; X > \frac{5}{4} ; X > 1,25 \end{aligned}$$

Como el signo de la desigualdad es $>$, el intervalo en 1.25 debe ser abierto.

Colocando esta solución sobre la recta real se observa la **INTERSECCION** de las tres soluciones y ésta representará la solución total :



Sea muy cuidadoso. La solución estará indicada por aquellos valores de X que cumplen con todas las condiciones, es decir, los valores que están en las tres áreas sombreadas a la vez.

Solución en forma de intervalo: $X = (1.25 , + \infty)$

EJERCICIO 4 : Resolver $\sqrt[3]{3X-8} \geq \sqrt[3]{-X+4}$

Recuerde que las **raíces impares** de una cantidad tienen el mismo signo que la cantidad sub-radical o radicando.

A diferencia que en los ejercicios anteriores NO debo analizar las cantidades sub-radicales o radicandos ya que estas pueden tomar cualquier valor (negativos o positivos)

Analizo la inecuación de manera similar a una ecuación irracional. En este caso se elevan ambos miembros al cubo con la finalidad de cancelar las dos raíces cúbicas.

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{3X-8})^3 &\geq (\sqrt[3]{-X+4})^3 ; 3X-8 \geq -X+4 \\ 3X+X &\geq 4+8 ; 4X \geq 12 ; X \geq \frac{12}{4} ; X \geq 3 \end{aligned}$$



Solución en forma de intervalo: $X = [3 , + \infty)$

INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Propiedades :

Para cualquier número real "X" y cualquier número positivo "a":

- 1) $|X| < a \Leftrightarrow -a < X < a$ (también se cumple para \leq). Se puede decir que la desigualdad queda dividida en dos partes : En la primera se "elimina" el módulo de valor absoluto y se mantiene lo demás igual ($X < a$), y en la segunda se "elimina" el módulo de valor absoluto, se cambia el sentido de la desigualdad y el signo del miembro de la derecha ($X > -a$), la solución viene dada por la **INTERSECCIÓN** de las dos soluciones parciales.
- 2) $|X| > a \Leftrightarrow X > a \cup X < -a$ (también se cumple para \geq). Se puede decir que la desigualdad queda dividida en dos partes : En la primera se "elimina" el módulo de valor absoluto y se mantiene lo demás igual ($X > a$), y en la segunda se "elimina" el módulo de valor absoluto, se cambia el sentido de la desigualdad y el signo del miembro de la derecha ($X < -a$), la solución viene dada por la **UNIÓN** de las dos soluciones parciales.
- 3) $|X| < |a| \Leftrightarrow X^2 < a^2$ (también se cumple para $>$, \geq y \leq). La solución se encuentra aplicando los métodos de resolución de una inecuación cuadrática o de segundo grado.
- 4) $|X| < -a$ Representa al conjunto vacío (también se cumple para \leq)

EJERCICIO 1 : Resolver $|4X - 1| \leq 3$

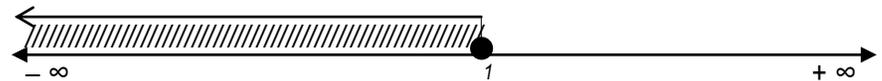
Para resolver esta inecuación con valor absoluto se divide la misma en dos partes (Propiedad 1) :

La primera parte será la misma inecuación sin el módulo de valor absoluto ($4X - 1 \leq 3$) y en la segunda se cambiará el sentido del signo de la desigualdad y el signo del segundo miembro ($4X - 1 \geq -3$)

La solución total será la **INTERSECCIÓN** de las dos soluciones parciales (Propiedad 1) :

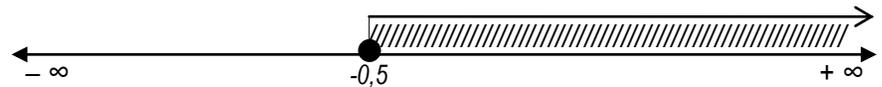
Resolviendo la primera parte: $4X - 1 \leq 3$

$$4X \leq 3 + 1 ; 4X \leq 4 ; X \leq \frac{4}{4} ; X \leq 1$$



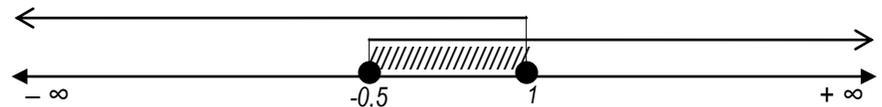
Resolviendo la segunda parte: $4X - 1 \geq -3$

$$4X \geq -3 + 1 ; 4X \geq -2 ; X \geq \frac{-2}{4} ; X \geq -0,5$$



Solución Total

En forma gráfica:



En forma de intervalo:

$$X = [-0,5, 1]$$

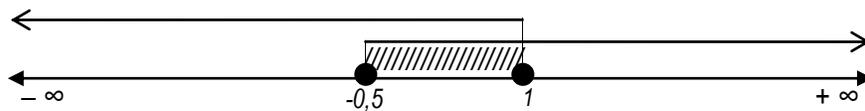
En forma de conjunto:

$$X = \{ X \in \mathbb{R} \ / \ -0.5 \leq X \leq 1 \}$$

¿Como comprobar estos resultados?

Se escoge un valor cualquiera en cada uno de los intervalos y se introduce en la inecuación inicial y se comprueba si cumple o no de acuerdo a la solución obtenida.

En este ejercicio la solución fue :



Escojo el valor $X = -1$ que está al lado izquierdo de “-0,5” (NO debe cumplir con la desigualdad) y lo introduzco en la inecuación :

$$|4X - 1| \leq 3 \ ; \ |4(-1) - 1| \leq 3 \ ; \ |-4 - 1| \leq 3$$

$$|-5| \leq 3 \ : \ 5 \leq 3 \ \text{(esto es falso, se demuestra que NO cumple)}$$

Escojo el valor $X = 0$ que está entre “-0,5” y “1” (debe cumplir con la desigualdad) y lo introduzco en la inecuación :

$$|4X - 1| \leq 3 \ ; \ |4(0) - 1| \leq 3 \ ; \ |0 - 1| \leq 3$$

$$|-1| \leq 3 \ : \ 1 \leq 3 \ \text{(esto es cierto, se demuestra que SI cumple)}$$

Escojo el valor $X = 2$ que está al lado derecho de “1” (NO debe cumplir con la desigualdad) y lo introduzco en la inecuación :

$$|4X - 1| \leq 3 \ ; \ |4(2) - 1| \leq 3 \ ; \ |8 - 1| \leq 3$$

$$|7| \leq 3 \ : \ 7 \leq 3 \ \text{(esto es falso, se demuestra que NO cumple)}$$

EJERCICIO 2 : Resolver $|2X + 3| > 5$

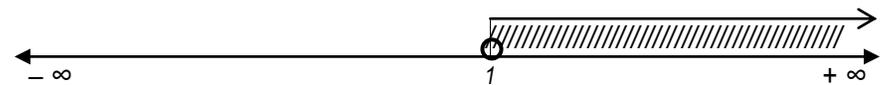
Para resolver esta inecuación con valor absoluto se divide la misma en dos partes (Propiedad 2) :

La primera parte será la misma inecuación sin el módulo de valor absoluto ($2X + 3 > 5$) y en la segunda se cambiará el sentido del signo de la desigualdad y el signo del segundo miembro ($2X + 3 < -5$).

La solución total será la **UNIÓN** de las dos soluciones parciales, es decir la solución de la primera parte más la solución de la segunda parte (Propiedad 2) ∴

Resolviendo la primera parte: $2X + 3 > 5$

$$2X > 5 - 3 \ ; \ 2X > 2 \ ; \ X > \frac{2}{2} \ ; \ X > 1$$



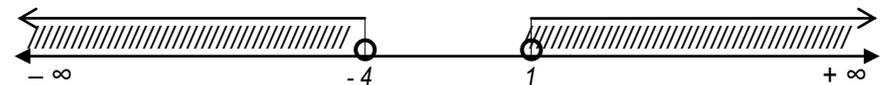
Resolviendo la segunda parte: $2X + 3 < -5$

$$2X < -5 - 3 \ ; \ 2X < -8 \ ; \ X < \frac{-8}{2} \ ; \ X < -4$$



Solución Total

En forma gráfica:



En forma de intervalo:

$$X = (-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$$

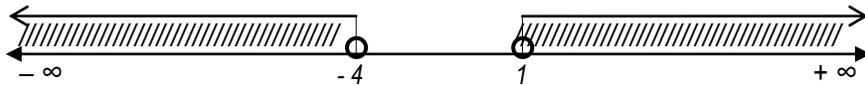
En forma de conjunto:

$$X = \{ X \in \mathbb{R} / X < -4 \wedge X > 1 \}$$

¿Como comprobar estos resultados?

Se escoge un valor cualquiera en cada uno de los intervalos y se introduce en la inecuación inicial y se comprueba si cumple o no de acuerdo a la solución obtenida.

En este ejercicio la solución fue :



Escojo el valor $X = -5$ que está a la izquierda de “-4” (Si debe cumplir con la desigualdad) y lo introduzco en la inecuación :

$$|2X + 3| > 5 ; |2(-5) + 3| > 5 ; |-10 + 3| > 5$$

$$|-7| > 5 : 7 > 5 \text{ (esto es cierto, se demuestra que Si cumple)}$$

Escojo el valor $X = 0$ que está entre “-4” y “1” (NO debe cumplir con la desigualdad) y lo introduzco en la inecuación :

$$|2X + 3| > 5 ; |2(0) + 3| > 5 ; |0 + 3| > 5$$

$$|3| > 5 : 3 > 5 \text{ (esto es falso, se demuestra que NO cumple)}$$

Escojo el valor $X = 2$ que está a la derecha “1” (Si debe cumplir con la desigualdad) y lo introduzco en la inecuación :

$$|2X + 3| > 5 ; |2(2) + 3| > 5 ; |4 + 3| > 5$$

$$|7| > 5 : 7 > 5 \text{ (esto es cierto, se demuestra que Si cumple)}$$

EJERCICIO 3 : Resolver $|2X + 3| < 5$

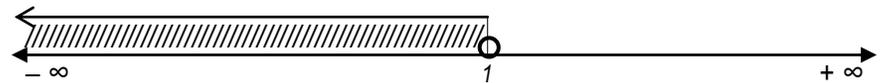
Para resolver esta inecuación con valor absoluto se divide la misma en dos partes (Propiedad 1) :

La primera parte será la misma inecuación sin el módulo de valor absoluto ($2X + 3 < 5$) y en la segunda se cambiará el sentido del signo de la desigualdad y el signo del segundo miembro ($2X + 3 > -5$).

La solución total será la **INTERSECCIÓN** de las dos soluciones parciales (Propiedad 1) :

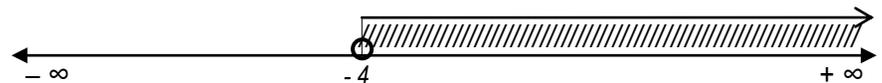
Resolviendo la primera parte: $2X + 3 < 5$

$$2X < 5 - 3 ; 2X < 2 ; X < \frac{2}{2} ; X < 1$$



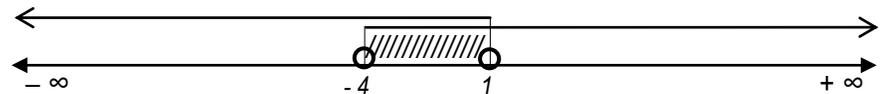
Resolviendo la segunda parte: $2X + 3 > -5$

$$2X > -5 - 3 ; 2X > -8 ; X > \frac{-8}{2} ; X > -4$$



Solución Total

En forma gráfica:



En forma de intervalo:

$$X = (-4, 1)$$

En forma de conjunto:

$$X = \{ X \in \mathbb{R} / -4 < X < 1 \}$$

EJERCICIO 4 : Resolver $|X - 3| > -1$

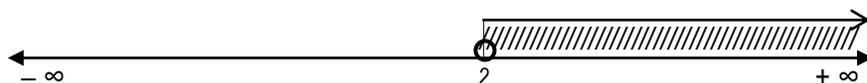
Para resolver esta inecuación con valor absoluto se divide la misma en dos partes (Propiedad 2) :

La primera parte será la misma inecuación sin el módulo de valor absoluto ($X - 3 > -1$) y en la segunda se cambiará el sentido del signo de la desigualdad y el signo del segundo miembro ($X - 3 < 1$).

La solución total será la **UNIÓN** de las dos soluciones parciales, es decir la solución de la primera parte más la solución de la segunda parte (Propiedad 2) .:

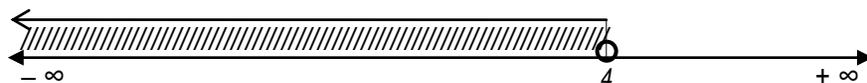
Resolviendo la primera parte: $X - 3 > -1$

$$X > -1 + 3 \quad ; \quad X > 2$$



Resolviendo la segunda parte: $X - 3 < 1$

$$X < 1 + 3 \quad ; \quad X < 4$$



Solución Total

El error más común que se comete en este tipo de ejercicios es creer que la solución estará representada por la intersección de las dos soluciones parciales, es decir, el intervalo (2, 4).

Para evitar cometer este error se recomienda repasar las propiedades que se encuentran en la página 26 de esta guía, sobre todo lo apuntado en la PROPIEDAD 2 (la solución viene dada por la **UNIÓN** de las dos soluciones parciales).

En base a las aclaraciones anteriores se desprende que la solución serán **TODOS LOS NÚMEROS REALES**.

Note que si superponen las dos soluciones parciales quedarán incluidos todos los valores de la recta real. Inclusive los valores que están excluidos en cada una de las soluciones parciales (\circ), están incluidas en la otra.

En forma de intervalo:

$$X = (-\infty, +\infty)$$

En forma de conjunto:

$$X = \{ \mathbb{R} \}$$

Compruebe los resultados atendiendo a lo explicado al final de los ejercicios 1 y 2.

EJERCICIO 5 : Resolver $|X - 3| < -1$

Al recordar la **PROPIEDAD 4**, inmediatamente se deduce que la solución está representada por un conjunto vacío.

El valor absoluto de cualquier número NUNCA podrá ser menor que un número negativo. Pruebe con cualquier valor que se le ocurra y comprobará que no se cumple la desigualdad.

EJERCICIO 6 : Resolver $|2X + 5| \geq |X + 4|$

Para resolver esta inecuación con valor absoluto debo tener presente la PROPIEDAD 3..

$|X| < |a| \Leftrightarrow X^2 < a^2$ (también vale para $>$, \geq y \leq). La solución se encuentra aplicando los métodos de resolución de una inecuación cuadrática o de segundo grado.

Luego la inecuación quedará indicada como $(2X + 5)^2 \geq (X + 4)^2$

Resolviendo los productos notables de cada miembro de la inecuación:

$$(2X + 5)^2 = (2X)^2 + 2 \cdot (2X) \cdot (5) + (5)^2 = 4X^2 + 20X + 25$$

$$(X + 4)^2 = (X)^2 + 2 \cdot (X) \cdot (4) + (4)^2 = X^2 + 8X + 16$$

$$4X^2 + 20X + 25 \geq X^2 + 8X + 16$$

Al pasar todos los términos al lado izquierdo de la inecuación:

$$4X^2 + 20X + 25 - X^2 - 8X - 16 \geq 0$$

$$3X^2 + 12X + 9 \geq 0$$

La solución de este tipo de inecuaciones está detalladamente explicada en la guía "INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO".

Solución: $X = (-\infty, -3] \cup [-1, +\infty)$

EJERCICIO 7: Resolver $|1 - \frac{X}{3}| < 1$

Solución en forma de intervalo:

$$X = (0, 6)$$

EJERCICIO 8: Resolver $|3 - 2X| < 0$

Solución: Conjunto vacío.

EJERCICIO 9: Resolver $|\frac{2X-1}{X+3}| \leq 1$

Solución en forma de intervalo:

$$X = [-2/3, 4]$$

EJERCICIO 10: Resolver $|3 - 2X| < |X + 4|$

Solución en forma de intervalo:

$$X = (-1/3, 7)$$

EJERCICIO 11: Resolver $|\frac{X+1}{X-2}| > 2$

Solución en forma de intervalo:

$$X = (1, 2) \cup (2, 5)$$

EJERCICIO 12: Resolver $|\frac{3X+5}{X}| \geq 2$

Solución en forma de intervalo:

$$X = (-\infty, 5] \cup [-1, 0) \cup (0, +\infty)$$

SISTEMAS DE INECUACIONES

(INECUACIONES SIMULTANEAS)

Resolver un "sistema de inecuaciones" es la operación que nos permite determinar, encontrar o conseguir los valores de la variable que satisfacen simultáneamente las dos o más inecuaciones que conforman dicho sistema.

Se debe entonces, resolver cada una de las inecuaciones por separado y posteriormente determinar la INTERSECCIÓN de las soluciones parciales.

Al igual que con las ecuaciones, un sistema de inecuaciones se indica utilizando el símbolo conocido como llave.

Así, para calcular cuáles valores cumplen a la vez con las desigualdades $X > a$ y $X < b$ se representa de la siguiente manera :

$$\left\{ \begin{array}{l} X > a \\ X < b \end{array} \right.$$

EJERCICIO 1 : Resolver

$$\left\{ \begin{array}{l} X + 2 \geq 7 \\ X - 3 < 6 \end{array} \right.$$

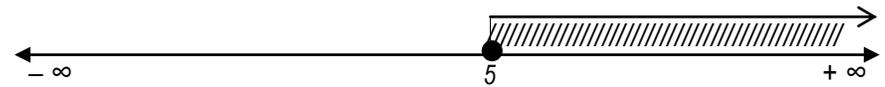
Solución :

Se resuelven por separado las dos inecuaciones.

Resolviendo la primera inecuación :

$$X + 2 \geq 7 \quad ; \quad X \geq 7 - 2 \quad ; \quad X \geq 5$$

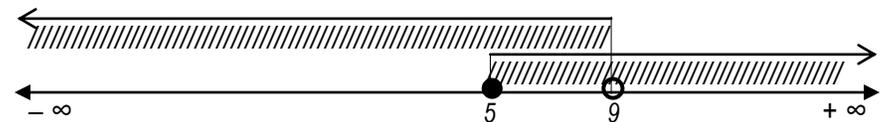
La forma más fácil de visualizar las soluciones es la gráfica :



Resolviendo la segunda inecuación :

$$X - 3 < 6 \quad ; \quad X < 6 + 3 \quad ; \quad X < 9$$

Se indica la solución sobre la misma gráfica de la solución anterior.



Sea muy cuidadoso. La solución total vendrá dada por la INTERSECCIÓN de las dos soluciones parciales; es decir, los valores que estén contenidos en las dos áreas sombreadas a la vez.

Solución en forma de intervalo:

$$X = [5 , 9)$$

EJERCICIO 2 : Resolver

$$\left\{ \begin{array}{l} X + 2 \geq 7 \\ X - 3 > 6 \end{array} \right.$$

Solución :

Se resuelven por separado las dos inecuaciones.

Resolviendo la primera inecuación :

$$X + 2 \geq 7 \quad ; \quad X \geq 7 - 2 \quad ; \quad X \geq 5$$

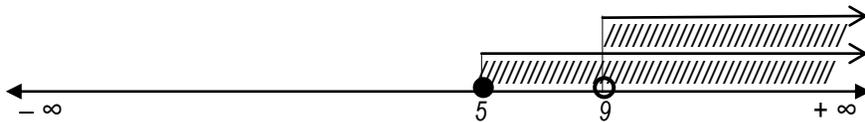
La forma más fácil de visualizar las soluciones es la gráfica :



Resolviendo la segunda inecuación :

$$X - 3 > 6 \quad ; \quad X > 6 + 3 \quad ; \quad X > 9$$

Se indica la solución sobre la misma gráfica de la solución anterior.



Sea muy cuidadoso. La solución total vendrá dada por la **INTERSECCIÓN** de las dos soluciones parciales; es decir, los valores que estén contenidos en las dos áreas sombreadas a la vez.

Solución en forma de intervalo:

$$X = (9 , + \infty)$$

EJERCICIO 3 : Resolver

$$\begin{cases} X + 2 < 7 \\ X - 3 > 6 \end{cases}$$

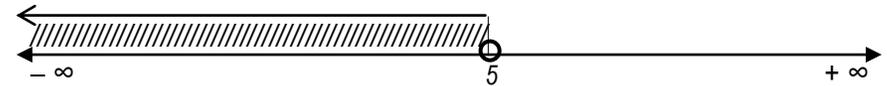
Solución :

Se resuelven por separado las dos inecuaciones.

Resolviendo la primera inecuación :

$$X + 2 < 7 \quad ; \quad X < 7 - 2 \quad ; \quad X < 5$$

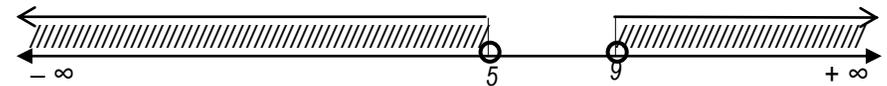
La forma más fácil de visualizar las soluciones es la gráfica :



Resolviendo la segunda inecuación :

$$X - 3 > 6 \quad ; \quad X > 6 + 3 \quad ; \quad X > 9$$

Se indica la solución sobre la misma gráfica de la solución anterior.



Sea muy cuidadoso. La solución total vendrá dada por la **INTERSECCIÓN** de las dos soluciones parciales; es decir, los valores que estén contenidos en las dos áreas sombreadas a la vez.

En este caso no existe intersección de los dos conjuntos de las soluciones parciales. Luego, no existen valores de X que satisfagan simultáneamente a las dos inecuaciones. La solución es un conjunto vacío.

$$X = \emptyset$$

EJERCICIO 4 : Resolver

$$\begin{cases} 3X - 4 < X + 2 \\ -10X + 2 < 3X + 28 \end{cases}$$

Solución :

Se resuelven por separado las dos inecuaciones.

Resolviendo la primera inecuación :

$$3X - 4 < X + 2$$

Ordenar de manera tal que las variables queden ubicadas en el primer miembro (lado izquierdo de la desigualdad) y los números en el segundo miembro (lado derecho de la desigualdad).

Al "pasar" un término de un miembro al otro se debe cambiar el signo de dicho término.

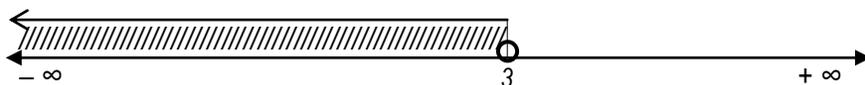
$$3X - X < 2 + 4 \quad ; \quad 2X < 6$$

El "2" que está multiplicando a la "X" en el miembro izquierdo de la inecuación pasará al miembro derecho dividiendo al "6" (Esto solo se puede hacer si el coeficiente que acompaña a la variable es positivo).

Si la variable hubiese estado acompañada por un número negativo, primero se multiplica toda la inecuación por "menos uno" y después se hace el despeje.

$$2X < 6 \quad ; \quad X < \frac{6}{2} \quad ; \quad X < 3$$

Lo que significa que "X" puede tomar valores menores a 3 (no incluye a 3).



Resolviendo la segunda inecuación :

$$-10X + 2 < 3X + 28$$

Ordenando las variables al lado izquierdo y los números al lado derecho:

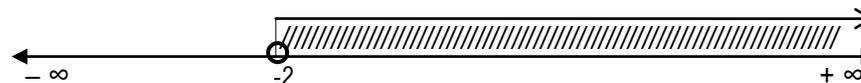
$$-10X - 3X < 28 - 2 \quad ; \quad -13X < 26$$

Como la variable "X" está acompañada por un coeficiente con signo negativo (-13) se debe multiplicar toda la inecuación por "menos uno", teniendo en cuenta que se deben cambiar los signos de todos los términos y también se debe cambiar el sentido de la desigualdad.

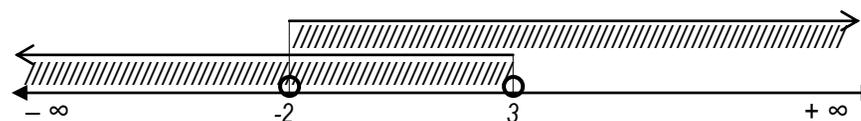
$$(-13X < 26) \cdot (-1) \quad ; \quad 13X > -26$$

$$X > \frac{-26}{13} \quad ; \quad X > -2$$

Lo que significa que "X" puede tomar valores mayores a "-2" (no incluye al "-2").



Superponiendo las dos soluciones gráficas :



Sea muy cuidadoso. La solución total vendrá dada por la INTERSECCIÓN de las dos soluciones parciales; es decir, los valores que estén contenidos en las dos áreas sombreadas a la vez.

Solución en forma de intervalo:

$$X = (-2, 3)$$

EJERCICIO 5 : Resolver

$$\begin{cases} 2X + 1 \leq 4X - 3 \\ 4X - 3 < X + 7 \end{cases}$$

Solución :

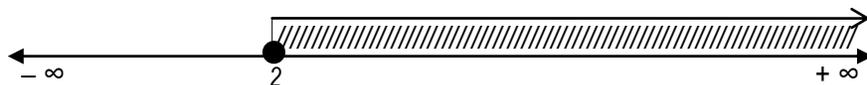
Se resuelven por separado las dos inecuaciones.

Resolviendo $2X + 1 \leq 4X - 3$

$$2X - 4X \leq -3 - 1 \quad ; \quad -2X \leq -4$$

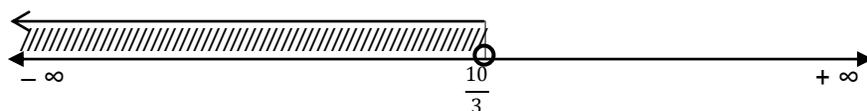
Al multiplicar por menos uno :

$$2X \geq 4 \quad ; \quad X \geq \frac{4}{2} \quad ; \quad X \geq 2$$

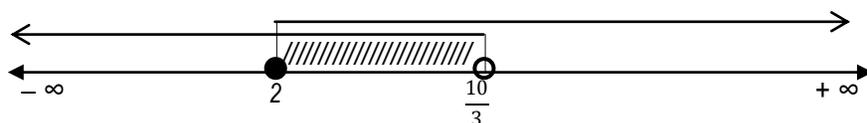


Resolviendo $4X - 3 < X + 7$

$$4X - X < 7 + 3 \quad ; \quad 3X < 10 \quad ; \quad X < \frac{10}{3}$$



Al sobreponer ambas gráficas se observa fácilmente la intersección:



La solución: $2 \leq X \leq \frac{10}{3}$

En forma de intervalo:

$$X = [2 , \frac{10}{3})$$

En forma de conjunto:

$$X = \{ X \in \mathbb{R} / 2 \leq X < \frac{10}{3} \}$$

EJERCICIO 6 : Resolver
$$\begin{cases} \frac{X-2}{6} + \frac{3X}{2} < -\frac{X}{4} \\ \frac{2-X}{5} - 3 \geq 4(X-2) \end{cases}$$

Solución :

Se resuelven por separado las dos inecuaciones.

Resolviendo la primera inecuación :

$$\frac{X-2}{6} + \frac{3X}{2} < -\frac{X}{4}$$

Cuando alguno, varios o todos los términos de la inecuación presenten fracciones, se recomienda "eliminar" los denominadores para que la inecuación quede expresada en forma lineal.

La operación para "eliminar" los denominadores se realiza en forma similar que con las ecuaciones.

Primero se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$(m.c.m \text{ de } 6, 2 \text{ y } 4 = 12)$$

Luego se multiplica TODA la inecuación por el m.c.m (se debe multiplicar cada término por el m.c.m):

$$\frac{12(X-2)}{6} + \frac{12(3X)}{2} < -\frac{12X}{4}$$

$$\frac{12X-24}{6} + \frac{36X}{2} < -\frac{12X}{4}$$

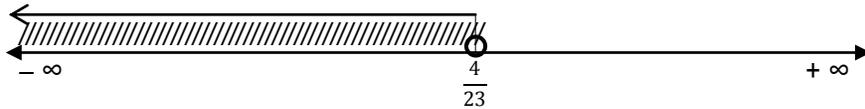
Posteriormente se divide cada numerador entre su respectivo denominador.

$$2X - 4 + 18X < -3X$$

La inecuación ha quedado expresada en forma lineal y su solución puede ser enfocada de la misma forma como los ejercicios anteriores:

$$2X + 18X + 3X < 4 \quad ; \quad 23X < 4 \quad ; \quad X < \frac{4}{23}$$

Lo que significa que "X" puede tomar valores menores a $\frac{4}{23}$ (no incluye al $\frac{4}{23}$)



Resolviendo la segunda inecuación :

$$\frac{2-X}{5} - 3 \geq 4(X-2)$$

Primero se realiza la multiplicación indicada en el miembro derecho de la inecuación :

$$\frac{2-X}{5} - 3 \geq 4X - 8$$

Cuando alguno, varios o todos los términos de la inecuación presenten fracciones, se recomienda "eliminar" los denominadores para que la inecuación quede expresada en forma lineal.

La operación para "eliminar" los denominadores se realiza en forma similar que con las ecuaciones.

Primero se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores: (cuando exista un solo denominador se tomará como m.c.m. En este caso m.c.m = 5)

Luego se multiplica TODA la inecuación por el m.c.m (se debe multiplicar cada término por el m.c.m):

$$\frac{5(2-X)}{5} - (5)(3) \geq 5(4X-8)$$

$$\frac{10-5X}{5} - 15 \geq 20X - 40$$

Posteriormente se divide cada numerador entre su respectivo denominador.

$$2 - X - 15 \geq 20X - 40$$

La inecuación ha quedado expresada en forma lineal y su solución puede ser enfocada de la misma forma como los ejercicios anteriores:

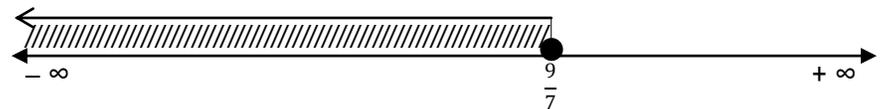
$$-X - 20X \geq -40 - 2 + 15 \quad ; \quad -21X \geq -27$$

Como la variable "X" está acompañada por un coeficiente con signo negativo (-21) se debe multiplicar toda la inecuación por "menos uno", teniendo en cuenta que se deben cambiar los signos de todos los términos y también se debe cambiar el sentido de la desigualdad.

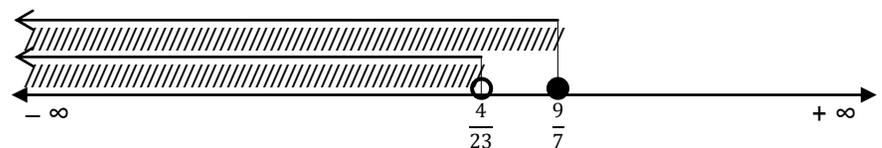
$$(-21X \geq -27) \cdot (-1) \quad ; \quad 21X \leq 27 \quad ; \quad X \leq \frac{27}{21}$$

Como al reducir por tres $\frac{27}{21} = \frac{9}{7}$; $X \leq \frac{9}{7}$

Lo que significa que "X" puede tomar valores menores o iguales a $\frac{9}{7}$



Al sobreponer ambas gráficas se observa fácilmente la intersección:



Sea muy cuidadoso. La solución total vendrá dada por la INTERSECCIÓN de las dos soluciones parciales; es decir, los valores que estén contenidos en las dos áreas sombreadas a la vez.

Solución en forma de intervalo:

$$X = \left(-\infty, \frac{4}{23} \right)$$