Ecuación General de Movimiento

Alejandro A. Torassa

(2013) Buenos Aires, Argentina
atorassa@gmail.com

Resumen

En mecánica clásica, este trabajo presenta una ecuación general de movimiento, que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia (rotante o no rotante) (inercial o no inercial) sin necesidad de introducir fuerzas ficticias.

Introducción

La ecuación general de movimiento es una ecuación de transformación entre un sistema de referencia S y un sistema de referencia no cinético Š.

Según este trabajo, un observador S utiliza un sistema de referencia S y un sistema de referencia no cinético Š.

La posición no cinética $\breve{\mathbf{r}}_a$, la velocidad no cinética $\breve{\mathbf{v}}_a$ y la aceleración no cinética $\breve{\mathbf{a}}_a$ de una partícula A de masa m_a respecto a un sistema de referencia no cinético Š, están dadas por:

$$\breve{\mathbf{r}}_a = \int\int (\mathbf{F}_a/m_a)\, dt\, dt$$

$$\breve{\mathbf{v}}_a = \int (\mathbf{F}_a/m_a)\, dt$$

$$\breve{\mathbf{a}}_a = (\mathbf{F}_a/m_a)$$

donde $\mathbf{F}_a$ es la fuerza resultante que actúa sobre la partícula A.

La velocidad angular no cinética $\breve{\omega}_S$ y la aceleración angular no cinética $\breve{\alpha}_S$ de un sistema de referencia S fijo a una partícula S respecto a un sistema de referencia no cinético Š, están dadas por:

$$\breve{\omega}_S = \left|(\mathbf{F}_1/m_s - \mathbf{F}_0/m_s)/(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\right|^{1/2}$$

$$\breve{\alpha}_S = d(\breve{\omega}_S)/dt$$

donde $\mathbf{F}_1$ es la fuerza resultante que actúa sobre el sistema de referencia S en un punto 1, $\mathbf{F}_0$ es la fuerza resultante que actúa sobre el sistema de referencia S en un punto 0, $\mathbf{r}_1$ es la posición del punto 1 respecto al sistema de referencia S (el punto 1 no pertenece al eje de rotación) $\mathbf{r}_0$ es la posición del punto 0 respecto al sistema de referencia S (el punto 0 es el centro de masa de la partícula S y el origen del sistema de referencia S) y m_s es la masa de la partícula S ($\breve{\omega}_S$ es colineal con el eje de rotación)

Ecuación General de Movimiento

La ecuación general de movimiento para dos partículas A y B respecto a un observador S es:

$$m_a m_b(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) - m_a m_b(\breve{\mathbf{r}}_a - \breve{\mathbf{r}}_b) = 0$$

donde m_a y m_b son las masas de las partículas A y B, $\mathbf{r}_a$ y $\mathbf{r}_b$ son las posiciones de las partículas A y B, $\breve{\mathbf{r}}_a$ y $\breve{\mathbf{r}}_b$ son las posiciones no cinéticas de las partículas A y B.

Derivando la ecuación anterior con respecto al tiempo, se obtiene:

$$m_a m_b\left[(\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b) + \breve{\omega}_S \times (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)\right] - m_a m_b(\breve{\mathbf{v}}_a - \breve{\mathbf{v}}_b) = 0$$

Derivando nuevamente con respecto al tiempo, se obtiene:

$$m_a m_b\left[(\mathbf{a}_a - \mathbf{a}_b) + 2\,\breve{\omega}_S \times (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b) + \breve{\omega}_S \times (\breve{\omega}_S \times (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)) + \breve{\alpha}_S \times (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)\right] - m_a m_b(\breve{\mathbf{a}}_a - \breve{\mathbf{a}}_b) = 0$$

Sistema de Referencia

Aplicando la ecuación anterior a dos partículas A y S, se tiene:

$$m_a m_s\left[(\mathbf{a}_a - \mathbf{a}_s) + 2\,\breve{\omega}_S \times (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_s) + \breve{\omega}_S \times (\breve{\omega}_S \times (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s)) + \breve{\alpha}_S \times (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s)\right] - m_a m_s(\breve{\mathbf{a}}_a - \breve{\mathbf{a}}_s) = 0$$

Si dividimos por m_s y el sistema de referencia S fijo a la partícula S $(\mathbf{r}_s = 0, \mathbf{v}_s = 0$ y $\mathbf{a}_s = 0)$ es rotante respecto al sistema de referencia no cinético Š $(\breve{\omega}_S \neq 0)$, entonces se obtiene:

$$m_a\left[\mathbf{a}_a + 2\,\breve{\omega}_S \times \mathbf{v}_a + \breve{\omega}_S \times (\breve{\omega}_S \times \mathbf{r}_a) + \breve{\alpha}_S \times \mathbf{r}_a\right] - m_a(\breve{\mathbf{a}}_a - \breve{\mathbf{a}}_s) = 0$$

Si el sistema de referencia S es no rotante respecto al sistema de referencia no cinético Š $(\breve{\omega}_S = 0)$, entonces se obtiene:

$$m_a \mathbf{a}_a - m_a(\breve{\mathbf{a}}_a - \breve{\mathbf{a}}_s) = 0$$

Si el sistema de referencia S es inercial respecto al sistema de referencia no cinético Š $(\breve{\omega}_S = 0$ y $\breve{\mathbf{a}}_s = 0)$, entonces se obtiene:

$$m_a \mathbf{a}_a - m_a \breve{\mathbf{a}}_a = 0$$

o sea:

$$m_a \mathbf{a}_a - \mathbf{F}_a = 0$$

donde esta ecuación es la segunda ley de Newton.

Ecuación de Movimiento

Desde la ecuación general de movimiento se deduce que la aceleración $\mathbf{a}_a$ de una partícula A de masa m_a respecto a un sistema de referencia S fijo a una partícula S de masa m_s, está dada por:

$$\mathbf{a}_a = \frac{\mathbf{F}_a}{m_a} - 2\,\breve{\omega}_S \times \mathbf{v}_a - \frac{\mathbf{F}_S^a}{m_s}$$

donde $\mathbf{F}_S^a$ es la fuerza resultante que actúa sobre el sistema de referencia S en el punto A $(\mathbf{r}_a)$

Este trabajo considera que el principio de inercia es falso. Por lo tanto, en este trabajo no hay ninguna necesidad de introducir fuerzas ficticias.

Posición Universal

Aplicando la ecuación general de movimiento a una partícula A de masa m_a y al centro de masa del universo de masa m_{cm}, se tiene:

$$m_a m_{cm}(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_{cm}) - m_a m_{cm}(\breve{\mathbf{r}}_a - \breve{\mathbf{r}}_{cm}) = 0$$

Dividiendo por m_{cm} y considerando que $\breve{\mathbf{r}}_{cm}$ es siempre cero, entonces se obtiene:

$$m_a(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_{cm}) - m_a\breve{\mathbf{r}}_a = 0$$

o sea:

$$m_a\mathbf{r}_a^{cm} - \textstyle\int\int \mathbf{F}_a \, dt \, dt = 0$$

donde $\mathbf{r}_a^{cm}$ es la posición de la partícula A respecto al centro de masa del universo.

Principio General

Desde la ecuación general de movimiento se deduce que la posición total $\mathring{\mathbf{R}}_{ij}$ de un sistema de bipartículas de masa M_{ij} $(M_{ij} = \sum_i \sum_{j>i} m_i m_j)$, está dada por:

$$\mathring{\mathbf{R}}_{ij} = \sum_i \sum_{j>i} \frac{m_i m_j}{M_{ij}} \left[(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) - (\breve{\mathbf{r}}_i - \breve{\mathbf{r}}_j)\right] = 0$$

Desde la ecuación general de movimiento se deduce que la posición total $\mathring{\mathbf{R}}_i$ de un sistema de partículas de masa M_i $(M_i = \sum_i m_i)$ respecto a un observador S fijo a una partícula S, está dada por:

$$\mathring{\mathbf{R}}_i = \sum_i \frac{m_i}{M_i} \left[(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s) - (\breve{\mathbf{r}}_i - \breve{\mathbf{r}}_s)\right] = 0$$

Por lo tanto, la posición total $\mathring{\mathbf{R}}_{ij}$ de un sistema de bipartículas y la posición total $\mathring{\mathbf{R}}_i$ de un sistema de partículas están siempre en equilibrio.

Fuerza Cinética

La fuerza cinética $\mathbf{F}\mathrm{C}$ ejercida sobre una partícula A de masa m_a por otra partícula B de masa m_b respecto a un observador S, está dada por:

$$\mathbf{F}\mathrm{C} = \frac{m_a m_b}{m_{cm}} \left[(\mathbf{a}_a - \mathbf{a}_b) + 2\,\breve{\omega}_S \times (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b) + \breve{\omega}_S \times (\breve{\omega}_S \times (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)) + \breve{\alpha}_S \times (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) \right]$$

donde m_{cm} es la masa del centro de masa del universo.

Desde la ecuación anterior se deduce que la fuerza cinética resultante $\mathbf{F}\mathrm{C}_a$ que actúa sobre una partícula A de masa m_a, está dada por:

$$\mathbf{F}\mathrm{C}_a = m_a \left[(\mathbf{a}_a - \mathbf{a}_{cm}) + 2\,\breve{\omega}_S \times (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_{cm}) + \breve{\omega}_S \times (\breve{\omega}_S \times (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_{cm})) + \breve{\alpha}_S \times (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_{cm}) \right]$$

donde $\mathbf{r}_{cm}$, $\mathbf{v}_{cm}$ y $\mathbf{a}_{cm}$ son la posición, la velocidad y la aceleración del centro de masa del universo.

La fuerza cinética resultante $\mathbf{F}\mathrm{C}_{ab}$ y la fuerza no cinética resultante $\mathbf{F}\mathrm{N}_{ab}$, ambas actuando sobre una bipartícula AB de masa $m_a m_b$, están dadas por:

$$\mathbf{F}\mathrm{C}_{ab} = m_a m_b (\mathbf{F}\mathrm{C}_a / m_a - \mathbf{F}\mathrm{C}_b / m_b)$$

$$\mathbf{F}\mathrm{N}_{ab} = m_a m_b (\mathbf{F}\mathrm{N}_a / m_a - \mathbf{F}\mathrm{N}_b / m_b)$$

$$\longrightarrow$$

$$\mathbf{F}\mathrm{C}_{ab} = m_a m_b \left[(\mathbf{a}_a - \mathbf{a}_b) + 2\,\breve{\omega}_S \times (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b) + \breve{\omega}_S \times (\breve{\omega}_S \times (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)) + \breve{\alpha}_S \times (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) \right]$$

$$\mathbf{F}\mathrm{N}_{ab} = m_a m_b (\breve{\mathbf{a}}_a - \breve{\mathbf{a}}_b)$$

$$\longrightarrow$$

$$\mathbf{F}\mathrm{C}_{ab} - \mathbf{F}\mathrm{N}_{ab} = 0$$

$$\longrightarrow$$

$$\mathring{\mathbf{F}}_{ab} = 0$$

Por lo tanto:

La aceleración cinética $\left[d^2(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)/dt^2 \right]_{\check{\mathrm{S}}}$ de una bipartícula AB está relacionada con la fuerza cinética.

La aceleración no cinética $\left[d^2(\check{\mathbf{r}}_a - \check{\mathbf{r}}_b)/dt^2 \right]_{\check{\mathrm{S}}}$ de una bipartícula AB está relacionada con las fuerzas no cinéticas (fuerza gravitatoria, fuerza electromagnética, etc.)

La fuerza total $\mathring{\mathbf{F}}_{ab}$ que actúa sobre una bipartícula AB está siempre en equilibrio.

Apéndice

Desde el principio general se obtienen las siguientes ecuaciones:

12 ecuaciones para una bipartícula AB respecto a un observador S:

$$\frac{1}{x}\left[(\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_b)^y\times\left[\frac{d^z(\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_b)}{dt^z}\right]_{\check{\mathrm{S}}}\right]^x-\frac{1}{x}\left[(\breve{\mathbf{r}}_a-\breve{\mathbf{r}}_b)^y\times\left[\frac{d^z(\breve{\mathbf{r}}_a-\breve{\mathbf{r}}_b)}{dt^z}\right]_{\check{\mathrm{S}}}\right]^x=0$$

12 ecuaciones para una partícula A respecto a un observador S fijo a una partícula S:

$$\frac{1}{x}\left[(\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_s)^y\times\left[\frac{d^z(\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_s)}{dt^z}\right]_{\check{\mathrm{S}}}\right]^x-\frac{1}{x}\left[(\breve{\mathbf{r}}_a-\breve{\mathbf{r}}_s)^y\times\left[\frac{d^z(\breve{\mathbf{r}}_a-\breve{\mathbf{r}}_s)}{dt^z}\right]_{\check{\mathrm{S}}}\right]^x=0$$

Donde:

x toma el valor 1 ó 2 (1 ecuación vectorial y 2 ecuación escalar)

y toma el valor 0 ó 1 (0 ecuación lineal y 1 ecuación angular)

z toma el valor 0 ó 1 ó 2 (0 ecuación posición, 1 ecuación velocidad y 2 ecuación aceleración)

Observaciones:

$\mathbf{r}_s=0$, $\mathbf{v}_s=0$ y $\mathbf{a}_s=0$ respecto al sistema de referencia S.

Si y toma el valor 0 entonces el símbolo $\times$ debe ser eliminado de la ecuación.

$\left[d^z(\ldots)/dt^z\right]_{\check{\mathrm{S}}}$ indica z-ésima derivada temporal respecto al sistema de referencia no cinético $\check{\mathrm{S}}$.

Por otra parte, estas 24 ecuaciones serían válidas incluso si la tercera ley de Newton fuera falsa.

Bibliografía

A. Einstein, Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General.

E. Mach, La Ciencia de la Mecánica.

R. Resnick y D. Halliday, Física.

J. Kane y M. Sternheim, Física.

H. Goldstein, Mecánica Clásica.

L. Landau y E. Lifshitz, Mecánica.