Universidad Tecnológica Nacional

Facultad Regional Bahía Blanca

Mecánica Racional

Profesor Titular:

Dr. Ing. Liberto Ercoli

Promoción Final

Análisis dinámico del cuerpo rígido y vibraciones forzadas – amortiguadas de un sistema.

Rodríguez, Jonathan Exequiel

PROBLEMA Nº1: DINAMICA DEL CUERPO RIGIDO

El disco delgado uniforme gira alrededor del eje OG a medida que rueda sin deslizar por el plano π. El extremo O del eje esta soldado a un collarín deslizante que gira alrededor de una varilla vertical fija.

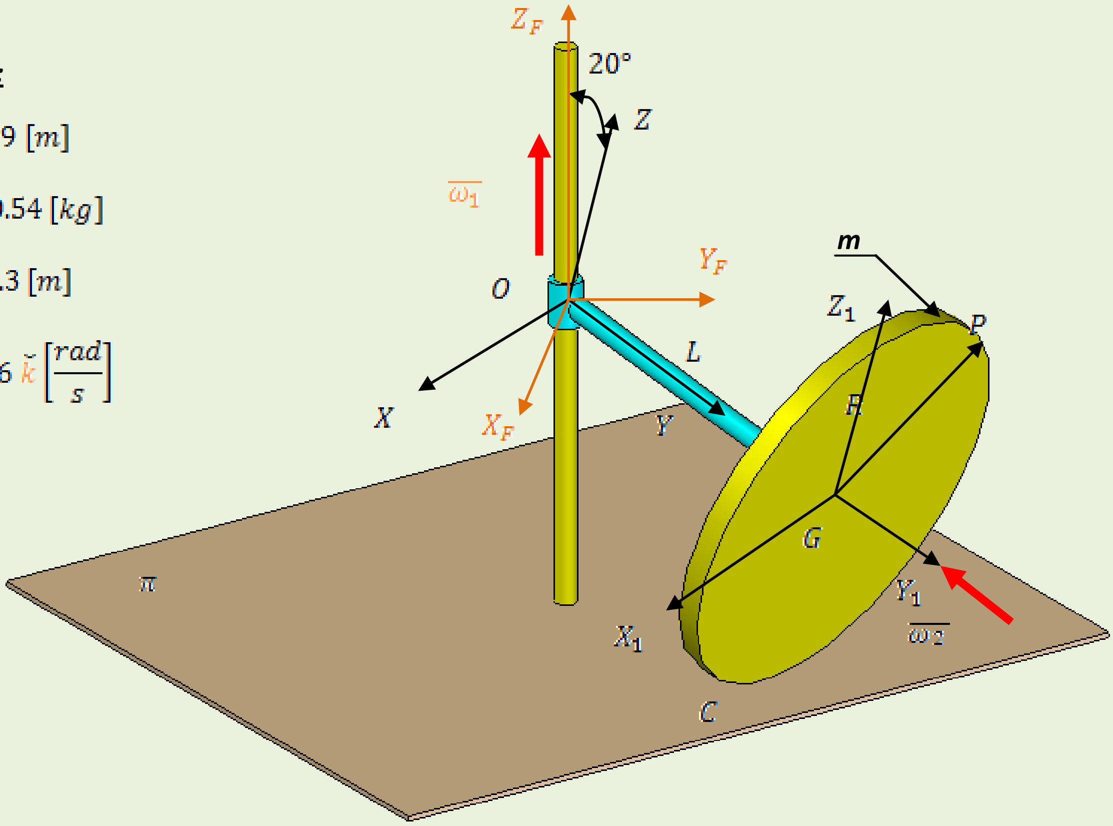
Datos:

$L = 0.9\ [m]$

$m = 0.54\ [kg]$

$R = 0.3\ [m]$

$\overline{\omega_1} = 6\ \breve{k}\left[\frac{rad}{s}\right]$



La terna (X_F, Y_F, Z_F) es fija referida al marco de referencia y la terna (X, Y, Z) es móvil, al cual referiremos todos los valores de cálculo a excepto que indiquemos lo contrario. Esta terna se encuentra rotada $20°$ respecto a la dirección negativa de $\breve{\imath}$ de la terna fija.

HALLAR:

a) Invariantes vectorial y escalar. Tipo de movimiento.
b) Velocidad de un punto P en función del tiempo.
c) Aceleración angular de la rueda.
d) Aceleración de P.
e) Energía cinética.
f) Tensor de inercia en O y graficarlo.
g) Reacciones dinámicas en O y C.

Desarrollo

a) *Invariantes vectorial y escalar. Tipo de movimiento*

El **INVARIANTE VECTORIAL** del sistema se lo define como al vector rotación $\bar{\omega}$ que es la resultante de todas las rotaciones que afectan al sistema y esa resultante será la misma cualquiera sea el centro de reducción adoptado. Con lo cual tenemos que

$$\overline{\overline{\omega} = \sum_{\imath=1}^{n} \overline{\omega_\imath}}$$

Para poder calcular el invariante vectorial necesitamos descomponer $\overline{\omega_1}$ en la terna móvil (X, Y, Z) y determinar la velocidad de rotación con que gira la rueda, que lo llamaremos $\overline{\omega_2}$.

A $\overline{\omega_2}$ lo obtenemos aplicando la forma impropia de la ley de distribución de velocidades (FILDV), en la cual necesitamos conocer la velocidad de un punto, que en nuestro sistema conocemos la del punto C y O, al punto O lo llamaremos CENTRO DE REDUCCION del movimiento. Por lo tanto la velocidad de O es cero debido a que las rotaciones del sistema se intersecan en ese punto.

Con lo cual tenemos: $\bar{v}_C = \bar{v}_O + \bar{\omega} \wedge \bar{r}_{CO}$ (FILDV) [1]

Las velocidades de O y C son nulas. La velocidad de O por lo explicado anteriormente, y la del punto C porque, entre el disco y el plano π no hay deslizamiento.

En tanto que $\bar{r}_{CO}$ representa el vector posición con origen en O y extremo en C. Siempre referido a la terna móvil.

$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$

$\bar{\omega}_1 = -6 \sin 20\ \hat{\jmath} + 6 \cos 20\, \hat{k}$

$\bar{\omega}_2 = -\omega_2 \hat{\jmath}$

$\bar{r}_{CO} = l\ \hat{\jmath} - \mathrm{R}\ \hat{k}$

$\bar{v}_o = \bar{v}_c = \bar{0}$

De la ecuación [1] nos queda:

$\bar{\omega} \wedge \bar{r}_{CO} = \bar{0}$ Reemplazando obtenemos

$$\left[-(6 \sin 20 + \omega_2)\hat{\jmath} + 6 \cos 20\ \hat{k}\right] \wedge \left[l\ \hat{\jmath} - \mathrm{R}\ \hat{k}\right] = \bar{0}$$

$$(6R\sin 20 + \omega_2 R)\hat{\imath} - 6l\cos 20\ \hat{\imath} = \bar{0}$$

Igualando los términos en la dirección $\hat{\imath}$ despejamos la magnitud de la velocidad de rotación de la rueda (ω_2).

$$\omega_2 = \frac{6l\cos 20 - 6R\sin 20}{R}$$

$$\omega_2 = 14.86 \quad \left[\frac{rad}{s}\right]$$

Una vez encontradas las velocidades de rotación que actúan en el sistema (referida a la terna móvil), podemos expresar el INVARIANTE VECTORIAL

$$\boxed{\bar{\omega} = -\left[6\sin 20 + \frac{6l\cos 20 - 6R\sin 20}{R}\right]\hat{\jmath} + 6\cos 20\,\hat{k}}$$

Reemplazando los correspondientes valores en la expresión anterior, tenemos:

$$\boxed{\bar{\omega} = -16.9\,\hat{\jmath} + 5.6\,\hat{k}} \quad \left[\frac{rad}{s}\right]$$

<u>El INVARIANTE ESCALAR</u> (μ) expresa que los vectores velocidades de un sistema material rígido proyectados en un determinado instante sobre la dirección del vector rotación son constantes. La expresión nos queda de la siguiente manera:

$$\mu = \bar{v}_i \,.\, \hat{\omega} \quad \text{(Producto escalar) [2]}$$

Donde $\bar{v}_i$ representa la velocidad de cualquier punto y $\hat{\omega}$ el versor en la dirección de $\bar{\omega}$ que va cambiando a cada instante (gira a la misma velocidad que la terna móvil).

Para calcular μ, vamos a utilizar la velocidad del punto G (utilizando FILDV).

$$\bar{v}_G = \bar{v}_o + \bar{\omega} \wedge \bar{r}_{GO}$$

$$\bar{r}_{GO} = l\,\hat{\jmath}$$

$$\bar{v}_G = \left\{-\left[6\sin 20 + \frac{6l\cos 20 - 6R\sin 20}{R}\right]\hat{\jmath} + 6\cos 20\,\hat{k}\right\} \wedge l\,\hat{\jmath}$$

$$\boxed{\bar{v}_G = -6l\cos 20\ \hat{\imath}}$$

$$\hat{\omega} = \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|}$$

$$|\bar{\omega}| = \sqrt{\left(6\sin 20 + \frac{6l\cos 20 - 6R\sin 20}{R}\right)^2 + (6\cos 20)^2}$$

$$|\bar{\omega}| = \frac{-\left[6\sin 20 + \frac{6l\cos 20 - 6R\sin 20}{R}\right]}{\sqrt{(6\sin 20 + \frac{6l\cos 20 - 6R\sin 20}{R})^2 + (6\cos 20)^2}}\,\hat{\jmath} + \frac{6\cos 20}{\sqrt{(6\sin 20 + \frac{6l\cos 20 - 6R\sin 20}{R})^2 + (6\cos 20)^2}}\,\hat{k}$$

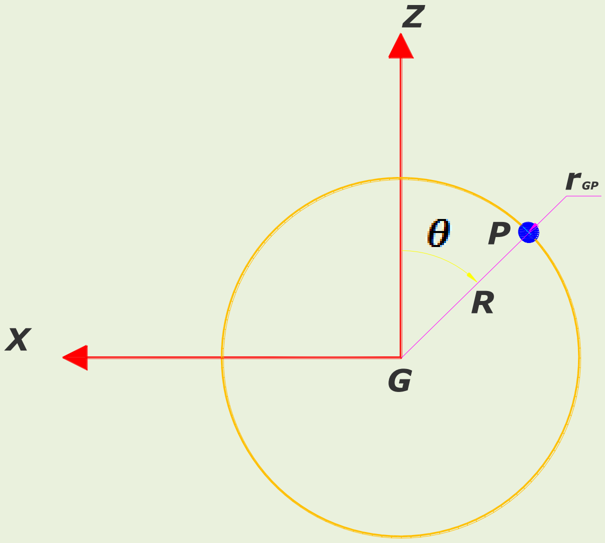
Por lo tanto reemplazando en la ecuación [2], nos queda:

$$\boxed{\mu = 0}$$

TIPO DE MOVIMIENTO: Los invariantes escalar y vectorial suministran importante información, como el tipo de movimiento del sistema. En el caso que $\mu = 0$ tenemos dos posibilidades, que la velocidad del punto G sea nula (Movimiento de rotación y G es un punto del eje de rotación), que en nuestro caso no lo es y la otra es que $\bar{\omega}$ sea perpendicular a $\bar{v}_G$, que es lo que sucede en nuestro caso y por lo tanto el tipo de movimiento es de **ROTACION INSTANTANEA.** Otra forma de darse cuenta es a través de las rotaciones concurrentes, en el que se obtiene una rotación instantánea con polo en el punto O.

b) <u>Velocidad de un punto P en función del tiempo</u>

Para determinar la velocidad del punto P en función del tiempo, tomemos una vista del disco en el plano ZX, y analicemos como varia el vector posición del punto P visto desde G ($\bar{r}_{PG}$). Para esto llamemos θ$f[t]$ al ángulo que hay entre $\bar{r}_{PG}$ y una de las direcciones, en nuestro caso es en la dirección positiva de Z (referido a la terna móvil). A su vez θ va a depender de la velocidad de rotación del disco, es decir ω_2.



Apreciando de la grafica podemos determinar $\bar{r}_{PG}$, por lo tanto tenemos:

$$\bar{r}_{PG} = -R\sin\theta\ \hat{\imath} + R\cos\theta\ \hat{k} \quad ; \quad \theta = \omega_2 . t$$

Aplicando FILDV podemos determinar la velocidad del punto P, referido siempre a la terna móvil.

$$\bar{v}_P = \bar{v}_O + \bar{\omega} \wedge \bar{r}_{PO} \qquad [3]$$

Donde:

$$\bar{r}_{PO} = \bar{r}_{GO} + \bar{r}_{PG}$$

$$\bar{r}_{GO} = l\ \hat{\jmath}$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\bar{r}_{PO} = -R\sin\theta\ \hat{\imath} + l\,\hat{\jmath} + R\cos\theta\ \hat{k}$$

De la ecuación [3] la velocidad del punto P nos queda:

$$\bar{v}_P = \left\{-\left[6\sin 20 + \frac{6l\cos 20 - 6R\sin 20}{R}\right]\hat{\jmath} + 6\cos 20\,\hat{k}\right\} \wedge \{-R\sin\theta\ \hat{\imath} + l\,\hat{\jmath} + R\cos\theta\ \hat{k}\}$$

$$\boxed{\bar{v}_P = -\left[R\cos\theta\left(6\sin 20 + \frac{6l\cos 20 - 6R\sin 20}{R}\right) + 6\cos 20\right]\breve{\imath} - 6R\cos 20\sin\theta\,\breve{\jmath} - R\sin\theta\left[6\sin 20 + \frac{6l\cos 20 - 6R\sin 20}{R}\right]\breve{k}}$$

$$\boxed{\bar{v}_P = -(5.1 + 5.1\cos\theta)\breve{\imath} - 1.7\sin\theta\,\breve{\jmath} - 5.1\sin\theta\,\breve{k}} \ \left[\frac{m}{s}\right]$$

c) ***Aceleración angular de la rueda***

La aceleración angular ($\bar{\gamma}$) representa la variación de la velocidad angular ($\bar{\omega}$) con respecto al tiempo. Por lo tanto tenemos:

$$\bar{\gamma} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$$

Siendo; $\bar{\omega} = (\omega_X \hat{\imath}, -\omega_Y\ \hat{\jmath}, \omega_Z\ \hat{k})$

$$\bar{\gamma} = \frac{d\omega_X}{dt}.\hat{\imath} + \omega_X.\frac{d\hat{\imath}}{dt} - \frac{d\omega_Y}{dt}.\hat{\jmath} - \omega_Y.\frac{d\hat{\jmath}}{dt} + \frac{d\omega_Z}{dt}.\hat{k} + \omega_Z.\frac{d\hat{k}}{dt}$$

Los primeros dos términos son cero, debido que la velocidad angular no tiene componente en la dirección de X, el tercero y quinto también son nulos, porque tanto ω_Y Como ω_Z son constantes y no varía en el tiempo. Ahora lo único que queda determinar de la expresión anterior es como varían los versores ($\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$) con respecto al tiempo.

Utilizando la formula de POISSON que permite expresar las derivadas de los versores en función de un producto vectorial entre la velocidad angular impuesta a la terna móvil y el mismo versor.

Con lo dicho anteriormente la velocidad angular que hace variar a los versores ($\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$) es $\bar{\omega}_1$. Por lo tanto la formula de poisson nos quedan:

$$\frac{d\hat{\jmath}}{dt} = \bar{\omega}_1 \wedge \hat{\jmath}$$

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = \bar{\omega}_1 \wedge \hat{k}$$

Reemplazando estas ultima expresiones en la ecuación

$$\bar{\gamma} = -\omega_Y . \bar{\omega}_1 \wedge \hat{\jmath} \quad + \omega_Z . \bar{\omega}_1 \wedge \hat{k}$$

$$\bar{\omega}_1 \wedge \hat{\jmath} \ = (-6 \sin 20 \ \hat{\jmath} + 6 \cos 20 \hat{k}) \wedge \hat{\jmath}$$

$$\bar{\omega}_1 \wedge \hat{\jmath} \ = -6 \cos 20 \hat{\imath}$$

$$\bar{\omega}_1 \wedge \hat{k} = (-6 \sin 20 \ \hat{\jmath} + 6 \cos 20 \hat{k}) \wedge \hat{k}$$

$$\bar{\omega}_1 \wedge \hat{k} = -6 \sin 20 \ \hat{\imath}$$

$$\bar{\gamma} = -\left[6 \sin 20 + \frac{6 l \cos 20 - \ 6R \sin 20}{R}\right] . (-6 \cos 20) \hat{\imath} + 6 \cos 20 . (-6 \sin 20) \ \hat{\imath}$$

$$\boxed{\bar{\gamma} = \frac{\mathbf{36 \cos 20}}{\mathbf{R}} (\mathbf{l \cos 20 - R \sin 20}) \hat{\imath}}$$

$$\boxed{\bar{\gamma} = \mathbf{83.79 \ i}} \quad \left[\frac{rad}{s^2}\right]$$

Ahora comprobémosla referida a un sistema de referencia paralelas a la terna fija, la cual también estará en movimiento.

La expresión de la aceleración angular nos queda:

$$\bar{\gamma} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$$

Donde; $\bar{\omega} = -\omega_2 \cos 20\, \hat{j} + (\omega_1 + \omega_2 \sin 20)\hat{k}$

Por lo tanto:

$$\bar{\gamma} = -\left[\frac{d(\omega_2 \cos 20)}{dt}\hat{j} + (\omega_2 \cos 20)\frac{d\hat{j}}{dt}\right] + \left[\frac{d(\omega_1 + \omega_2 \sin 20)}{dt}\hat{k} + (\omega_1 + \omega_2 \sin 20)\frac{d\hat{k}}{dt}\right]$$

De esta última expresión tanto ω_1 y ω_2 son contantes y no varían en el tiempo, lo mismo pasa con el versor $\hat{k}$. Lo cual nos queda:

$$\boxed{\bar{\gamma} = -(\omega_2 \cos 20)\frac{d\hat{j}}{dt}}$$

Con la expresión de poisson determinamos la variación del versor $\hat{j}$ respecto del tiempo.

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = \bar{\omega}_1 \wedge \hat{j} = 6\,\hat{k} \wedge \hat{j}$$

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = -6\,\hat{i}$$

Remplazando en la expresión anterior;

$$\bar{\gamma} = 6(\omega_2 \cos 20)\,\hat{i}\ ;$$

Donde $\omega_2 = 14.86 \quad \left[\frac{rad}{s}\right]$

$$\bar{\gamma} = (6 * 14.86 * \cos 20)\,\hat{i} \quad \left[\frac{rad}{s^2}\right]$$

$$\boxed{\bar{\gamma} = 83.78\,\hat{i}} \quad \left[\frac{rad}{s^2}\right]$$

Como se puede apreciar, por las dos formas llegamos al mismo resultado, es decir, que la aceleración angular no depende de la terna que hayamos elegido.

d) Aceleración del punto P

Para determinar la aceleración de un punto P del disco en función del tiempo, utilizaremos la forma impropia de la ley de distribución de aceleraciones (FILDA). Teniendo en cuenta las mismas consideraciones que planteamos para la velocidad.

$$\bar{a}_P = \bar{a}_O + \bar{\gamma} \wedge \bar{r}_{PO} + \bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{r}_{PO}) \qquad [4]$$

Basándonos en el mismo grafico en el cual determinamos la velocidad del punto P, obtenemos el vector posición $\bar{r}_{PO}$. La aceleración del punto O es nula, debido a que las rotaciones concurren en ese punto y a dicho punto se lo llama polo.

Trabajaremos con las expresiones numéricas, por lo tanto tenemos:

$$\bar{\gamma} = 83.78\ \mathrm{i} \quad \left[\frac{rad}{s^2}\right]$$

$$\bar{r}_{PO} = -0.3 \sin\theta\, \breve{\mathrm{i}} + 0.9\, \hat{\mathrm{j}} + 0.3 \cos\theta\, \hat{\mathrm{k}} \quad [\boldsymbol{m}]$$

$$\bar{\omega} = -16.9\, \hat{\mathrm{j}} + 5.6\, \hat{\mathrm{k}} \quad \left[\frac{rad}{s}\right]$$

Calculemos los términos por separados;

$$\bar{\gamma} \wedge \bar{r}_{PO} = 83.78\ \mathrm{i} \wedge [-0.3 \sin\theta\, \breve{\mathrm{i}} + 0.9\, \hat{\mathrm{j}} + 0.3 \cos\theta\, \hat{\mathrm{k}}]$$

$$\underline{= -25.13 \cos\theta\ \hat{\mathrm{j}} + 75.4\, \hat{\mathrm{k}}}$$

$$\bar{\omega} \wedge \bar{r}_{PO} = \left(-16.9\, \hat{\mathrm{j}} + 5.6\, \hat{\mathrm{k}}\right) \wedge [-0.3 \sin\theta\, \breve{\mathrm{i}} + 0.9\, \hat{\mathrm{j}} + 0.3 \cos\theta\, \hat{\mathrm{k}}]$$

$$= -(5.04 + 5.07 \cos\theta)\, \breve{\imath} - 1.68 \sin\theta\ \breve{\jmath} - 5.07 \sin\theta\ \breve{k} \quad \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$\bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{r}_{PO}) = \left(-16.9\, \hat{\mathrm{j}} + 5.6\, \hat{\mathrm{k}}\right) \wedge \left[-(5.04 + 5.07 \cos\theta)\, \breve{\imath} - 1.68 \sin\theta\ \breve{\jmath} - 5.07 \sin\theta\ \breve{k}\right]$$

$$\underline{= 95.05 \sin\theta\ \breve{\imath} - (28.2 + 28.4 \cos\theta)\, \breve{\jmath} - (85.17 + 85.68 \cos\theta)\, \breve{k}} \quad \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación [4] y operando, determinamos la aceleración del punto P.

$$\boxed{\bar{a}_P = 95.1 \sin\theta\ \breve{\imath} - (28.2 + 53.5 \cos\theta)\, \breve{\jmath} - (9.77 + 85.68 \cos\theta)\, \breve{k}} \quad \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

e) Energía cinética

La energía cinética para un sólido en movimiento rototraslatorio viene dada por la siguiente expresión:

$$e = \frac{1}{2} m v_{01}^2 + \frac{1}{2} I_{\omega\omega 01} \omega^2 + m\bar{v}_{01} . \bar{\omega} \wedge \bar{r}_G \qquad [5]$$

Como se puede observar la energía cinética está compuesta de tres términos, vamos a explicar qué significado tiene cada uno de ellos.

El primer termino llamémoslo $e_1 = \frac{1}{2} m v_{01}^2$, éste recibe el nombre de energía cinética de arrastre o de traslación y es la que tendía el sistema en el supuesto que toda la masa estuviera concentrada en el centro de reducción, siendo generada por la velocidad de éste ultimo.

Al segundo término $e_2 = \frac{1}{2} I_{\omega\omega 01} \omega^2$, se lo denomina energía cinética relativa o de rotación y está originada por el movimiento relativo de cada punto respecto del centro de reducción O_1 .

Tercer y último término $e_3 = m\bar{v}_{01} . \bar{\omega} \wedge \bar{r}_G$, recibe el nombre de fuerzas viva compuesta y su valor depende del centro de reducción. Esta puede anularse si se toma como centro de reducción a un punto fijo, es decir, perteneciente al eje de rotación, en lo que también anularíamos e_1.

Para nuestro caso vamos a elegir como centro de reducción el baricentro del sistema, es decir, al punto G (la masa del brazo OG es despreciable).

Con lo cual de la ecuación [5] anulamos el tercer término (e_3), debido a que $\bar{r}_G$ es nulo (vector posición del punto de reducción al baricentro del sistema, que en nuestro caso coinciden por haber tomado como centro de reducción al baricentro). Por lo tanto la expresión se reduce a:

$$\boxed{e = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_{\omega\omega G} \omega^2}$$

Desarrollaremos los cálculos por separado.

$$e_1 = \frac{1}{2} m v_G^2$$

La velocidad del punto G la hemos hallado en el inciso $[a]$, colocaremos su expresión y valor.

$$\bar{v}_G = \bar{v}_o + \bar{\omega} \wedge \bar{r}_{OG}$$

$$\bar{v}_G = -6l\cos 20\ \hat{\imath}$$

$$v_G^2 = 36l^2(\cos 20)^2$$

La masa del sistema es dato, con lo que e_1 nos queda:

$$e_1 = \frac{1}{2}m36l^2(\cos 20)^2$$

$$\boxed{\boldsymbol{e_1 = 18ml^2(\cos 20)^2}}$$

$\boxed{\boldsymbol{e_1 = 6.95}}$ [Joule] ó [Nm]

Para determinar e_2, calcularemos primero el tensor de inercia del cuerpo respecto del punto G, sobre las direcciones (X_1, Y_1, Z_1), para luego hallar el momento de inercia del cuerpo sobre un eje paralelo a la velocidad angular ($\bar{\omega}$) que pasa por el centro de reducción (G), es decir $I_{\omega\omega G}$.

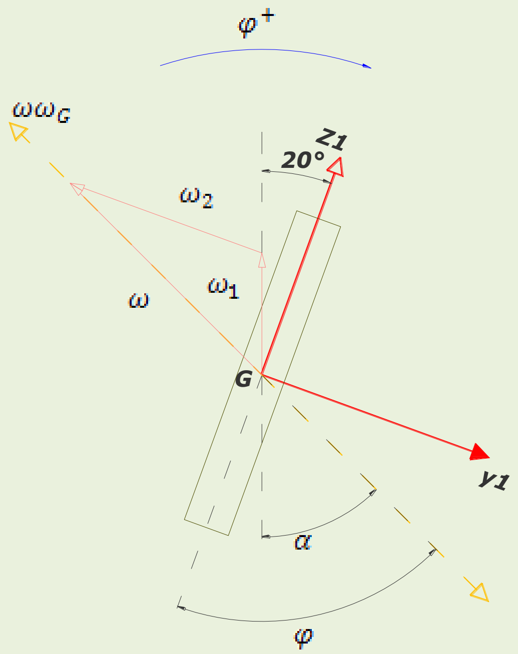
Al tensor de inercia lo obtenemos de tabla;

$$\bar{\bar{I}}_G = \begin{bmatrix} I_{X1X1} & -I_{X1Y1} & -I_{X1Z1} \\ -I_{X1Y1} & I_{Y1Y1} & -I_{Y1Z1} \\ -I_{X1Z1} & -I_{Y1Z1} & I_{Z1Z1} \end{bmatrix}$$

Cada elemento de este tensor tiene un significado, los elementos de la diagonal principal representan los momentos de inercia polar, y están referidos respecto a cada uno de los ejes. Mientras los demás elementos ubicado a los lados de la diagonal principal representan los momentos centrífugos, y están referidos respecto de los planos coordenados.

$$\bar{\bar{I}}_G = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}mR^2 \end{bmatrix}$$

Ahora para calcular $I_{\omega\omega G}$, observemos el siguiente grafico:



Proyectando la inicia de cada eje en la dirección de $I_{\omega\omega G}$;

$$I_{\omega\omega G} = C^2_{\omega x1} I_{x1x1} + C^2_{\omega y1} I_{y1y1} + C^2_{\omega z1} I_{z1z1} \qquad [6]$$

Donde los $C_{\omega x1}$,$C_{\omega y1}$, $C_{\omega z1}$ son los cosenos directores entre el eje $\overline{\omega}$ pasante por el punto G y los correspondientes ejes X_1,Y_1,Z_1. Con lo cual tenemos

$C_{\omega x1} = \cos(\omega\ ,X_1)$

$C_{\omega y1} = \cos(\omega\ ,Y_1)$

$C_{\omega z1} = \cos(\omega\ ,Z_1)$

Observando de la grafica se puede determinar el ángulo entre $\widehat{\omega}$ y el eje Z al que llamaremos φ. A su vez;

$\varphi = \alpha + 20^{o}$

Aplicando el teorema del coseno determinamos α:

$\omega_2^2 = \omega^2 + \omega_1^2 - 2\omega\omega_1 \cos\alpha$

Despejando de esta última expresión α obtenemos:

$$\alpha = arc\cos\left[\frac{\omega^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2}{2\omega\omega_1}\right]$$

Donde:

$\omega = \sqrt{(16.9^2 + 5.6^2)} = 17.8\ [\frac{rad}{s}]$ $\Rightarrow \omega^2 = 317 \left[\frac{rad}{s}\right]^2$

$\omega_1 = 6\ [\frac{rad}{s}]$ $\Rightarrow \omega_1^2 = 36 \left[\frac{rad}{s}\right]^2$

$\omega_2 = \frac{6l\cos 20 - 6R\sin 20}{R} = 14.9\ [\frac{rad}{s}]$ $\Rightarrow \omega_2^2 = 220.8 \left[\frac{rad}{s}\right]^2$

Por lo tanto:

$$\alpha = arc\cos\left[\frac{317 + 36 - 220.8}{2 * 17.8 * 6}\right]$$

$$\underline{\alpha = 51.8^{o}}$$

Con lo cual $\Rightarrow$ $\boxed{\varphi = 71.8^{o}}$

Ahora calculemos los cosenos directores:

$C_{\omega x1} = \cos(90) = 0$

$C_{\omega y1} = \cos(90 + \varphi) = -0.95$

$C_{\omega z1} = \cos(\varphi) = 0.31$

Reemplazando estos valores en la expresión numero [6]

$I_{\omega\omega G} = (-0.95)^2 \frac{1}{2} mR^2 + (0.31)^2 \frac{1}{4} mR^2$

$I_{\omega\omega G} = (-0.95)^2 \frac{1}{2} 0.54(0.3)^2 + (0.31)^2 \frac{1}{4} 0.54(0.3)^2$

$$\boxed{I_{\omega\omega G} = 0.023} \quad [Kgm^2]$$

Por lo tanto la energía cinética relativa o de rotación, nos queda de la siguiente manera.

$$e_2 = \frac{1}{2} I_{\omega\omega G}\, \omega^2$$

$$e_2 = \frac{1}{2} 0.023(17.8)^2$$

$$\boxed{e_2 = 3.64} \quad \text{[Joule]}$$

La energía cinética es:

$e = e_1 + e_2$

$$\boxed{\boldsymbol{e = 6.95 + 3.64 = 10.6}} \qquad \text{[Joule]}$$

f) Tensor de inercia en O y graficarlo

Para encontrar el tensor de inercia en el punto O, necesitamos trasladar el tensor de inercia centroidal del punto G hacia el O sobre unos ejes paralelos a (X_1, Y_1, Z_1) que lo llamaremos (X, Y, Z). Con lo que utilizaremos el teorema de Steiner y sus expresiones son la siguiente:

$$I_{XX} = I_{X1X1} + m(y^2 + z^2)$$

$$I_{YY} = I_{Y1Y1} + m(z^2 + x^2)$$

$$I_{ZZ} = I_{Z1Z1} + m(x^2 + y^2)$$

$$I_{YX} = I_{XY} = I_{X1Y1} - mxy$$

$$I_{ZX} = I_{XZ} = I_{X1Z1} - mxz$$

$$I_{YZ} = I_{ZY} = I_{Z1Y1} - mzy$$

Del primer grafico se puede observar que el vector posición de O a G es:

$$\bar{r}_{GO} = (x = 0, y = l, z = 0)$$

Reemplazando en las expresiones anteriores, tenemos;

$I_{XX} = \frac{1}{4}mR^2 + ml^2 = \frac{1}{4}0.54(0.3\,)^2 + 0.54(0.9\,)^2 = 0.45 \qquad [kgm^2]$

$I_{YY} = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}0.54(0.3\,)^2 = 0.024 \quad [kgm^2]$

$I_{ZZ} = \frac{1}{4}mR^2 + ml^2 = \frac{1}{4}0.54(0.3\,)^2 + 0.54(0.9\,)^2 = 0.45 \qquad [kgm^2]$

$$I_{YX} = I_{XY} = 0$$

$$I_{ZX} = I_{XZ} = 0$$

$$I_{YZ} = I_{ZY} = 0$$

Formemos el tensor

$$\boxed{\bar{\bar{I}}_O = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}mR^2 + ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}mR^2 + ml^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0.024 & 0 \\ 0 & 0 & 0.45 \end{bmatrix}} \; [kgm^2]$$

Grafica del tensor de inercia en el punto O:

Analicemos la siguiente expresión;

$$1 = I_{XX}x_1^2 + I_{YY}x_2^2 + I_{ZZ}x_3^2 - 2(I_{XY}x_1x_2 + I_{XZ}x_1x_3 + I_{ZY}x_3x_2)$$

Esta expresión es la de una superficie cuadrática centrada en O, llamada ELIPSOIDE.

También se denomina a esta superficie elipsoide de inercia relativo al punto O del cuerpo regido dado. La geometría del elipsoide define por completo las propiedades inerciales del cuerpo respecto de O, es decir, representa gráficamente el tensor de inercia en dicho punto. En general a cada punto del cuerpo irá asociado un elipsoide diferente.

El elipsoide en nuestro caso tiene tres ejes de simetría; siempre será posible orientar las direcciones coordenadas de manera que coincida con dichos ejes, obteniéndose la ecuación canónica.

Los momentos de inercia respecto a estos ejes reciben el nombre de momentos principales de inercia y a los ejes se les llama ejes principales de inercia. Para esta orientación de los ejes se anulan los productos de inercia y la ecuación cuadrática se convierte en:

$$\boxed{1 = I_{XX}x_1^2 + I_{YY}x_2^2 + I_{ZZ}x_3^2} \quad [7]$$

La ecuación canónica de un elipsoide es:

$$\boxed{1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} \quad [8]$$

Donde: a, b, c representan los semiejes del mismo. Por comparación de la ecuación [7] e [8] determinamos los semiejes del elipsoide de inercia, que están dado por;

$$a = \frac{1}{\sqrt{I_{XX}}}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{I_{YY}}}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{I_{ZZ}}}$$

Por lo tanto la ecuación del elipsoide de inercia en el punto O nos queda:

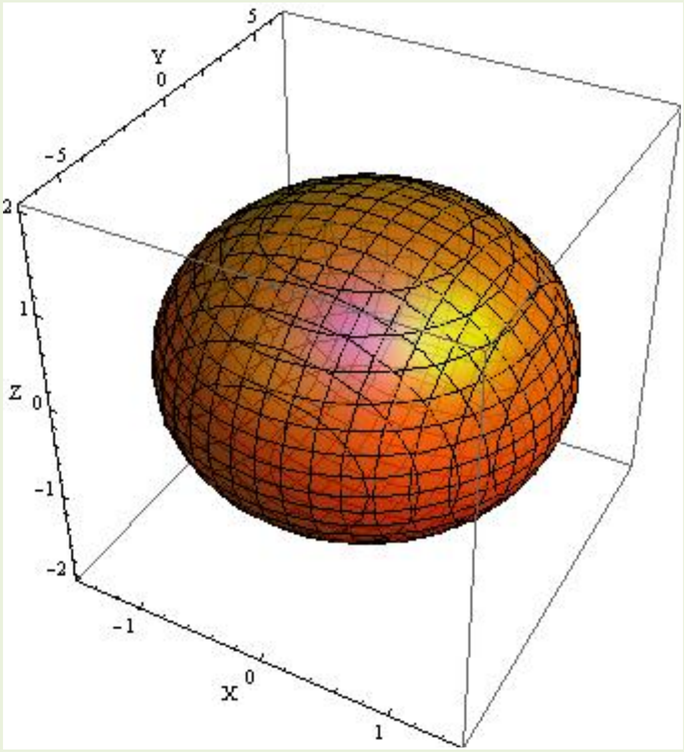
$$1 = \frac{x^2}{1/I_{XX}} + \frac{y^2}{1/I_{YY}} + \frac{z^2}{1/I_{ZZ}}$$

Remplazando los valores obtenemos:

$$\boxed{\mathbf{1 = 0.45x^2 + 0.024y^2 + 0.45z^2}}$$

Para realizar la grafica de esta ecuación, utilizaremos un software como por ejemplo MATHEMATICA 6. Colocando la siguiente sintaxis.

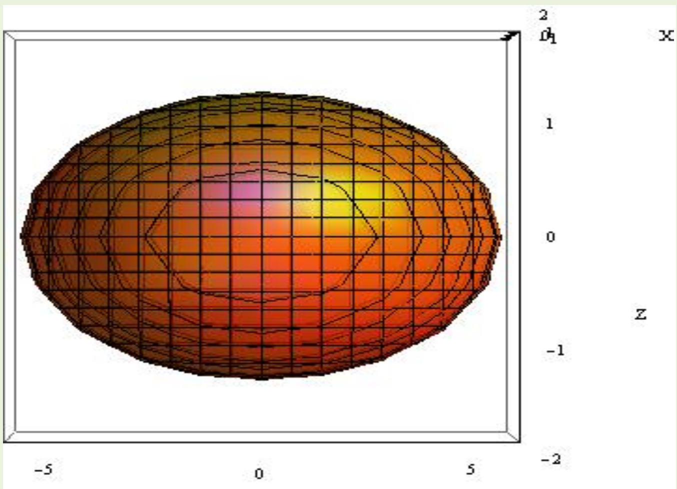
```
e=ContourPlot3D[0.45 x^2+0.024 y^2+0.45 z^2□1,{x,-1.5,1.5},{y,-6.5,6.5},{z,-2,2},
AxesLabel→{ "X","Y","Z"},Axes-> True , ContourStyle → Directive [Orange, Opacity[0.8]
, Specularity[White,30]]]
```



__Veamos tres vista del elipsoide en los siguientes planos:__

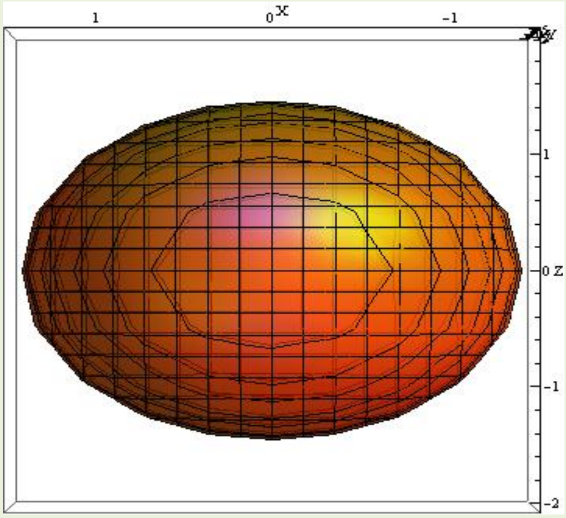
__PLANO YZ:__

Show[e,ViewPoint→{20,0,0}]



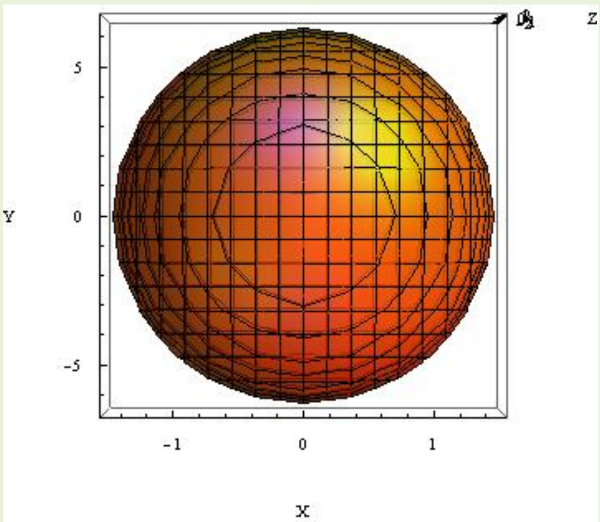
PLANO XZ:

Show[e,ViewPoint→{20,0,0}]



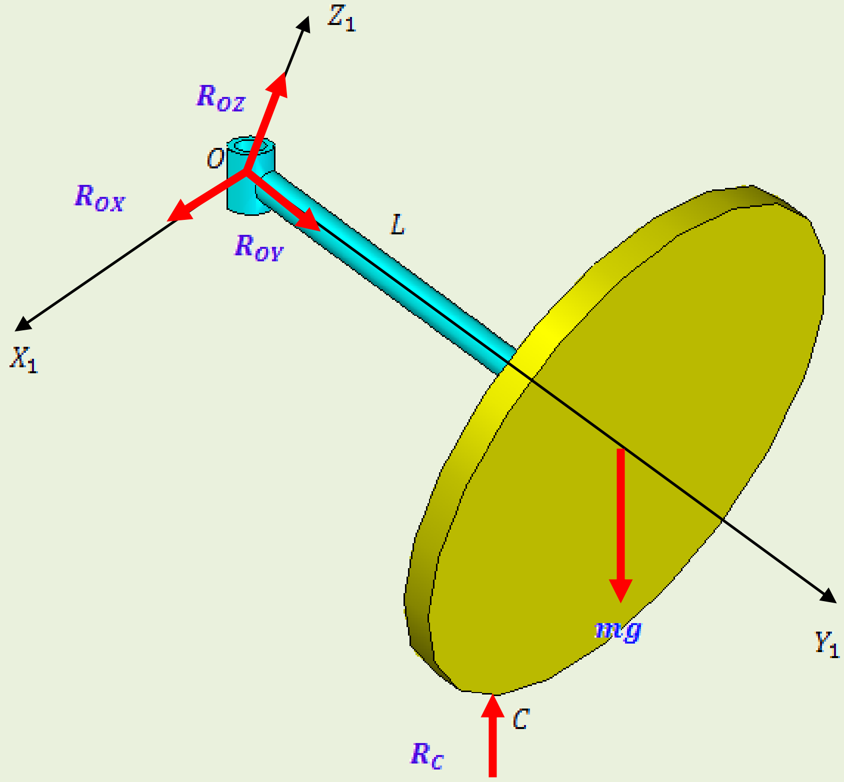
PLANO XY:

Show[e,ViewPoint→{20,0,0}]



g) Reacciones dinámicas en O y C

Para poder hallar las reacciones dinámicas R_{OX},R_{OY},R_{OZ}y R_C; aplicaremos las ecuaciones cardinales de la mecánica. Ellas son:



Ecuación de *NEWTON*

$$\boxed{\bar{F}_E = \bar{F}_A + \bar{F}_R = \left[\frac{d\bar{Q}}{dt}\right]_{rel} + \bar{\Omega} \wedge \bar{Q}}$$

Donde:

$\bar{F}_E$Representan las fuerzas exteriores o las fuerzas totales, es decir estáticas y dinámicas, se la expresa como la suma de las fuerzas activas y reactivas.

$\bar{F}_R$ Representan las fuerzas reactivas, que son las reacciones que debemos encontrar.

$\left[\frac{d\bar{Q}}{dt}\right]_{rel}$Representa la variación de la cantidad de movimiento $(\bar{Q})$ respecto de la terna móvil como si ésta estuviese detenida.

$\bar{\Omega}$ Es la velocidad angular de la terna móvil (impresa a ella). Que en nuestro caso es $\bar{\omega}_1$

Ecuación de *EULER*:

$$\boxed{\overline{M}_{E(O)} = \left[\frac{d\overline{K}}{dt}\right]_{rel} + \overline{\omega} \wedge \overline{K}_{(O)} + \overline{V}_{(O)} \wedge \overline{Q}}$$

Donde:

$\overline{M}_{E(O)}$ Es el momento de todas las fuerzas exteriores respecto del centro de momento O1.

$\left[\frac{d\overline{K}}{dt}\right]_{rel}$ Representa la variación del momento cinético $(\overline{K})$ respecto de la terna móvil como si ésta estuviese detenida.

Como primer paso determinemos todo los términos por separado de las ecuaciones cardinales.

Cantidad de movimiento $(\overline{Q})$:

$$\boxed{\overline{Q} = m\overline{V}_G}$$

Esta expresión nos dice que la cantidad de movimiento total del sistema es la que tendría su baricentro en el supuesto de que toda la masa estuviese concentrada en él.

La velocidad del punto G la determinamos en el inciso (a);

$\bar{v}_G = -6l\cos 20\ \hat{\imath}$

$$\boxed{\bar{v}_G = -5.1\,\hat{\imath}} \quad \left[\frac{m}{s}\right]$$

Por lo tanto $\overline{Q}$ nos queda:

$$\boxed{\overline{Q} = m\,(-6l\cos 20)\,\hat{\imath}}$$

$\overline{Q} = 0.54(-5.1)\,\hat{\imath}$

$$\boxed{\overline{Q} = -2.75\,\hat{\imath}} \quad \left[\frac{kgm}{s}\right]$$

Por otro lado;

$$\boxed{\left[\frac{d\overline{Q}}{dt}\right]_{rel} = \overline{0}}$$

Debido a que no varía respecto a la terna móvil.

Calculemos el término $\bar{\Omega} \wedge \bar{Q}$, donde $\bar{\Omega}$ representa la velocidad angular $\bar{\omega}_1$:

$$\bar{\omega}_1 \wedge \bar{Q} = (-6 \sin 20\ \hat{\jmath} + 6 \cos 20\, \hat{k}) \wedge m\,(-6l \cos 20)\ \hat{\imath}$$

$$\boxed{\bar{\omega}_1 \wedge \bar{Q} = -(36\mathrm{ml} \sin 20 \cos 20)\breve{\mathrm{k}} - (36\mathrm{ml}(\cos 20)^2)\breve{\jmath}}$$

$$\boxed{\bar{\omega}_1 \wedge \bar{Q} = -5.6\ \breve{\mathrm{k}} - 15.4\ \breve{\jmath}}$$

Por lo tanto de la primera ecuación cardinal (NEWTON) tenemos:

$$\boxed{\bar{F}_E = \left[\frac{d\bar{Q}}{dt}\right]_{rel} + \bar{\omega}_1 \wedge \bar{Q}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\bar{F}_E = -15.4\ \breve{\jmath} - 5.6\ \breve{k}}} \quad \left[\frac{kgm}{s^2}\right]\ [N]$$

Calcularemos ahora el momento cinético en el punto O.

$$\boxed{\bar{k}_{(O)} = \bar{r}_G \wedge m\bar{V}_{(O)} + \bar{\bar{I}}_O \bar{\omega}}$$

Donde $\bar{r}_G$ es la posición del baricentro respecto al centro de momento O y $\bar{V}_{(O)}$es la velocidad de ese punto, que en nuestro sistema es un punto fijo por lo tanto su velocidad es nula.

El primer sumando del término de la derecha de la última expresión, expresa que una parte del momento cinético respecto del punto O sería el que tendría toda la masa como si ésta estuviese concentrada en el punto G y con la velocidad de O. Recibe el nombre de momento cinético ¨de arrastre u orbital¨.

El segundo sumando es el debido a las velocidades relativas a O y se denomina momento cinético relativo o propio.

$$\boxed{\bar{\bar{I}}_O \bar{\omega} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}mR^2 + ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}mR^2 + ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_Y \\ \omega_Z \end{bmatrix}}$$

Realizando la operación matricial nos queda:

$$\boxed{\bar{\bar{I}}_O \bar{\omega} = -\frac{1}{2} m R^2 \omega_Y \breve{\jmath} + (\frac{1}{4} m R^2 + m l^2) \omega_Z \breve{k}}$$

Siendo

$$\omega_Y = 16.9 \quad \left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$\omega_Z = 5.6 \quad \left[\frac{rad}{s}\right]$$

Con lo cual de la expresión anterior nos queda:

$$\boxed{\bar{\bar{I}}_O \bar{\omega} = -0.4\, \breve{\jmath} + 2.5\, \breve{k}} \quad \left[\frac{kgm^2}{s}\right]$$

Por lo tanto;

$$\boxed{\bar{k}_{(O)} = -0.4\, \breve{\jmath} + 2.5\, \breve{k}} \quad \left[\frac{kgm^2}{s}\right]$$

$$\bar{\omega}_1 \wedge \bar{K}_{(O)} = \left(-2\, \breve{\jmath} + 5.6\, \breve{k}\right) \wedge \left(-0.4\, \breve{\jmath} + 2.5\, \breve{k}\right)$$

$$\boxed{\bar{\omega}_1 \wedge \bar{K}_{(O)} = -2.76\, \breve{\imath}} \quad \left[\frac{kgm^2}{s^2}\right]$$

El termino $\left[\frac{d\bar{K}}{dt}\right]_{rel} = \bar{0}$; el momento cinético no varía con respecto a la terna móvil.

Por lo tanto de la segunda ecuación cardinal (EULER) nos queda:

$$\bar{M}_{E_{(O)}} = \bar{\omega}_1 \wedge \bar{K}_{(O)}$$

$$\boxed{\mathbf{\bar{M}}_{E_{(O)}} = \mathbf{-2.76\, \breve{\imath}}} \quad \left[\frac{kgm^2}{s^2}\right] \quad [\boldsymbol{Nm}]$$

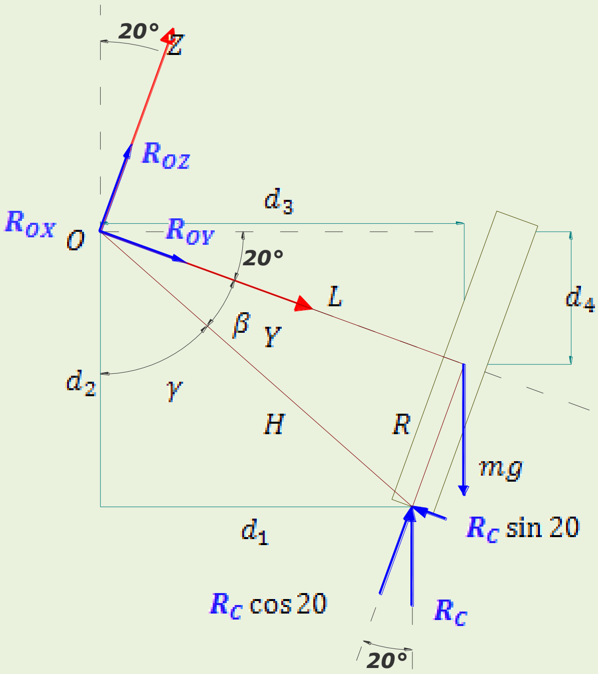
Observando del grafico anterior y con ayuda del diagrama de abajo, aplicando la expresión de newton logramos obtener un sistema de ecuaciones. Reemplazando en ella y separando en sus respectivas componentes surge (Para el cálculo de las reacciones dinámicas no se considera el peso del sistema).

$\breve{\imath}$) $\boxed{R_{OX} = 0}$

$\breve{\jmath}$) $R_{OY} - R_C \sin 20 = -15.4$ [9]

$\breve{k}$) $R_{OZ} + R_C \cos 20 = -5.6$ [10]

Aplicando la ecuación de euler y procediendo como en el caso anterior, teniendo las mismas consideraciones, pero antes de determinar el momento sobre el eje OX, analicemos el siguiente diagrama, que es una vista simplificada sobre el plano ZY:



El momento sobre el eje OX y teniendo en cuenta la ecuación de euler es:

$$R_C \cos 20 * L - R_C \sin 20 * R = -2.76 \quad [11]$$

$$R_C (L \cos 20 - R \sin 20) = -2.76$$

$$R_C = \frac{-2.76}{(L \cos 20 - R \sin 20)} \quad [12]$$

$$R_C = \frac{-2.76}{(0.9 \cos 20 - 0.3 \sin 20)} \quad [N]$$

$\boxed{\boldsymbol{R_C = -3.71[N]}}$

De la ecuación de sumatorias de fuerzas en la direcciones $\hat{\jmath}$ y $\breve{k}$, ecuaciones $[9]$ y $[10]$ despejamos las otras reacciones R_{OZ} y R_{OY};

$$R_{OY} = R_C \sin 20 - 15.4 \qquad [N]$$

$$R_{OY} = -3.71 \sin 20 - 15.4 \qquad [N]$$

$$\boxed{\boldsymbol{R_{OY} = -16.66 \qquad [N]}}$$

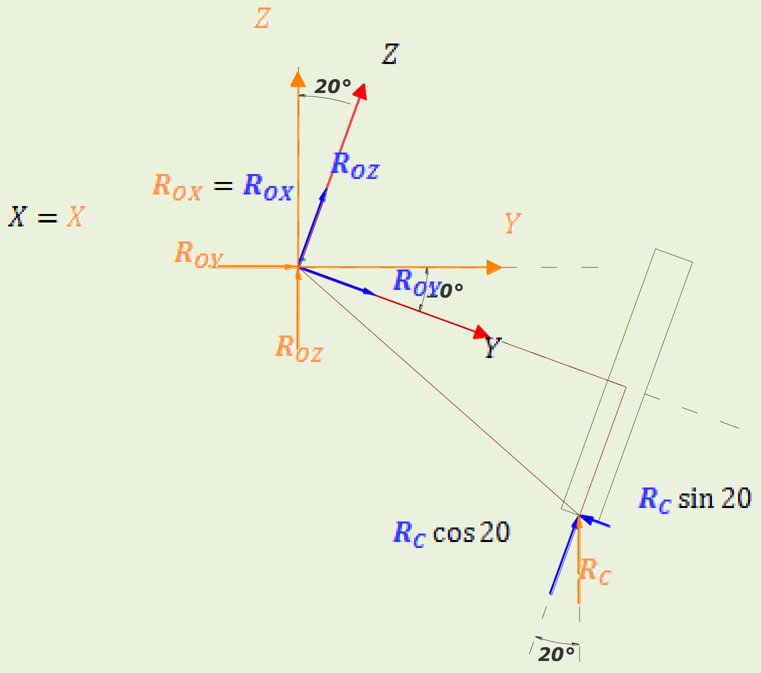
$$R_{OZ} = -R_C \cos 20 - 5.6 \quad [N]$$

$$R_{OZ} = 3.71 \cos 20 - 5.6 \quad [N]$$

$$\boxed{\boldsymbol{R_{OZ} = -2.11 \quad [N]}}$$

Ahora descompongamos estas reacciones en unos ejes paralelos al sistema de referencia (X_F, Y_F, Z_F) , que llamaremos (X, Y, Z) que estará en movimiento con el sistema.

Para ello analicemos el siguiente grafico;



Las reacciones R_{OX}, R_{OY}, R_{OZ}, corresponden al sistema de referencia (X, Y, Z), lo que queremos determinar son las reacciones producidas en el sistema de referencia (X, Y, Z), o sea R_{OX}, R_{OY}, R_{OZ} **y** R_C.

Proyectando cada componente en sus respectivos ejes nos queda;

$$\boxed{R_{OX} = R_{OX} = \mathbf{0}\ [N]}$$

$$\boxed{R_C = R_C = \mathbf{-3.71}\ [N]}$$

$$R_{OY} = R_{OY} \cos 20$$

$$R_{OY} = -\mathbf{16.66}\ \sin 20$$

$$\boxed{R_{OY} = \mathbf{-5.69}\quad [N]}$$

$$R_{OZ} = R_{OZ} \cos 20$$

$$R_{OZ} = -\mathbf{2.11} \cos 20$$

$$\boxed{R_{OZ} = \mathbf{-1.98}\quad [N]}$$

Bibliografía:

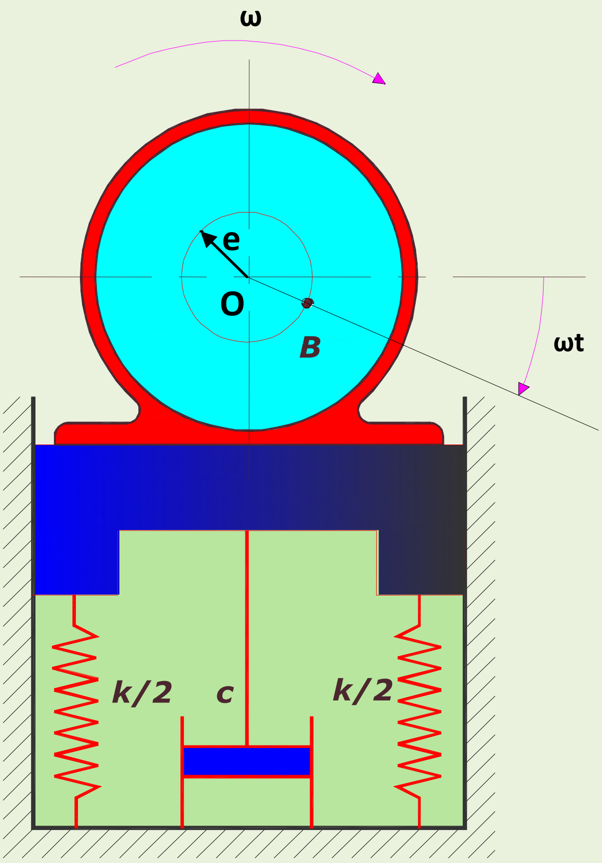
- Monografía de la cátedra, Mecánica Racional, Prof. Ing. Liberto Ercoli, 2005.
- Dinámica 3ra Edición, Mecánica para ingenieros; Meriam J.L/ L.G. Kraige
- Mecánica Vectorial; Beer-Johnston.

Softwares utilizados:

- Microsoft Word 2007
- Mathematica 6
- Microsoft Paint
- Solid Edge Academic V14
- AutoCad 2008

PROBLEMA Nº2: VIBRACIONES FORZADAS AMORTIGUADAS

El motor de la figura está montado sobre dos resortes, cada uno de constante $\frac{k}{2} = 10507 \left[\frac{N}{m}\right]$. El amortiguador posee un coeficiente $C = 140 \left[\frac{kg}{s}\right]$. El motor, incluyendo la base de montaje y la masa desbalanceada B, pesa $171.7 \quad [N]$. La masa B pesa $4.45 \quad [N]$ y se localiza a $e = 0.0762 \quad [m]$ del centro del eje O.



En régimen, el motor rota a $\omega = 300 \quad [rpm]$.hallar:

a) utilizando el diagrama de fuerzas actuantes durante el movimiento, encontrar la amplitud y fase del mismo.
b) Determinar la fuerza máxima y mínima ejercida sobre la base por los resortes e amortiguador; y la fuerza combinada de ambos.
c) Hallar la velocidad de resonancia y la amplitud del movimiento en esta condición.

DESARROLLO

Determinemos la fuerza de excitación (F_E) periódica que hace que el motor vibre. Esta es la fuerza centrifuga debida a la masa desbalanceada del motor. Dicha fuerza tiene una magnitud constante de:

$$F_o = m_B a_n$$

Donde:

m_B; Es la masa desbalanceada

a_n; Es la aceleración normal en donde la podemos expresar como:

$a_n = r\omega^2$

Por lo tanto tenemos:

$$\boxed{F_o = m_B r\omega^2}$$

Pasemos la frecuencia circular del motor a $\left[\frac{rad}{s}\right]$

$$\omega = 300\ \frac{rev}{min}\ \frac{2\pi}{rev}\ \frac{1min}{60s}$$

$$\underline{\omega = 10\pi\ \left[\frac{rad}{s}\right]}$$

$$m_B = \frac{P_B}{g} = \frac{4.45\ \ N}{9.8\frac{m}{s^2}}$$

$\underline{m_B = 0.45\ \ [kg]}$

$\underline{r = e = 0.0762\ \ [m]}$

$$F_o = 0.45 *\ 0.0762 *\ (10\pi)^2\quad [N]$$

$$\underline{F_o = 33.85\ \ [N]}$$

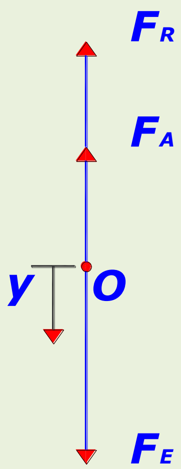
La oscilación en la dirección vertical puede expresarse en la forma periódica como:

$$\boxed{F_E = F_o\cos(\omega t)}$$

$$\boxed{F_E = 33.85\cos(10\pi t)\ \ [N]}$$

Realizamos el diagrama de cuerpo libe (DCL) del sistema para poder determinar la ecuación diferencial del movimiento que satisface al mismo.

El sistema de referencia se coloca cuando el cuerpo está en equilibrio estático.



Donde:

F_R; Es la fuerza resultante de ambos resortes y es proporcional al desplazamiento vertical.

$$F_R = 2\left(\frac{k}{2}\right)y$$

$$\boxed{F_R = ky}$$

F_A; Es la fuerza del amortiguador y es proporcional a la velocidad.

$$\boxed{F_A = C\dot{y}}$$

Donde $\dot{y}$ representa la derivada primera de la posición respecto del tiempo, es decir, la velocidad.

En movimiento aplicamos la segunda ley de newton, es decir $\sum F = m\ddot{y}$. Para poder determinar la ecuación diferencial del sistema.

$$F_E - F_A - F_R = m\ddot{y}$$

Dividimos m.a.m. por m

$$\frac{F_E}{m} - \frac{F_A}{m} - \frac{F_R}{m} = \ddot{y}$$

Reemplazamos por sus respectivos valores:

$$\frac{F_o \cos(\omega t)}{m} - \frac{C}{m}\dot{y} - \frac{k}{m}y = \ddot{y}$$

Reacomodando la ecuación diferencial nos queda:

$$\boxed{\ddot{y} + \frac{C}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{F_o \cos(\omega t)}{m}} \qquad [9]$$

Plantearemos la solución de la ecuación diferencial solamente para el estado estacionario o permanente, que es el que persiste durante el movimiento.

Proponemos como solución a:

$$y = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \qquad [10]$$

Derivamos dos veces la función anterior y la expresión obtenida la reemplazamos en la ecuación [9].

$$\dot{y} = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)$$

$$\ddot{y} = -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t)$$

$$-A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t) + \frac{C}{m}[-A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)] + \frac{k}{m}[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)] = \frac{F_o \cos(\omega t)}{m}$$

Agrupamos los términos de los cosenos y senos

$$\cos(\omega t)\left[-A\omega^2 + B\omega\frac{C}{m} + A\frac{k}{m}\right] + \sin(\omega t)\left[-B\omega^2 - A\omega\frac{C}{m} + B\frac{k}{m}\right] = \frac{F_o \cos(\omega t)}{m}$$

Para poder determinar las constantes A y B, igualemos los coeficientes de los senos y cosenos.

$$\begin{cases} -A\omega^2 + B\omega\frac{C}{m} + A\frac{k}{m} = \frac{F_o}{m} \\ -B\omega^2 - A\omega\frac{C}{m} + B\frac{k}{m} = 0 \end{cases}$$

Armamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, problema resoluble. Ahora podemos determinar las constantes A y B, utilizando un programa de cálculo como el MATHEMATICA. Con lo cual las constantes nos quedan:

$$\boxed{A = \frac{F_o(k - m\omega^2)}{(C\omega)^2 + (k - m\omega^2)^2}} \qquad [11]$$

$$A = \frac{33.85(2 * 10507 - 17.52 * (10\pi)^2)}{(140 * 10\pi)^2 + (2 * 10507 - 17.52(10\pi)^2)^2} \quad [\frac{Ns^2}{kg}]$$

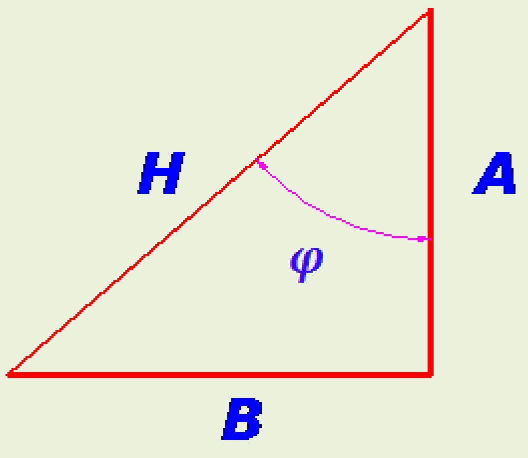
$$\boxed{A = 0.00379 \quad [m]}$$

$$\boxed{B = \frac{F_o C\omega}{(C\omega)^2 + (k - m\omega^2)^2}} \qquad [12]$$

$$B = \frac{33.85 * 140 * 10\pi}{(140 * 10\pi)^2 + (2 * 10507 - 17.52(10\pi)^2)^2} \quad [\frac{Ns^2}{kg}]$$

$$\boxed{B = 0.00448 \quad [m]}$$

Vamos a darle otra expresión a la ecuación [10], teniendo en cuenta las ecuaciones [11] y [12].



Observando del grafico tenemos que:

$$B = H \sin\varphi$$

$$A = H \cos\varphi$$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación [10] y operando;

$$y = H\cos\varphi\cos(\omega t) + H\sin\varphi\sin(\omega t)$$

$$y = H[\cos\varphi\cos(\omega t) + \sin\varphi\sin(\omega t)]$$

Al término entre corchetes lo sustituimos por una identidad

$$\boxed{y = H\cos(\omega t - \varphi)} \qquad [13]$$

Donde H y φ lo determinando del grafico anterior;

$$H = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$H = \sqrt{0.00379^2 + 0.00448^2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{H = 0.0058 \quad [m]}} \qquad [14]$$

$$\varphi = arc\tan\left(\frac{B}{A}\right)$$

$$\varphi = arc\tan\left(\frac{0.00448}{0.00379}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi = 49° = 0.868 \ rad}} \qquad [15]$$

Sustituyendo estos valores en la expresión [14] determinamos la ecuación de movimiento del sistema.

$$\boxed{\boldsymbol{y = 0.00527\cos(\omega t - 0.868)}}$$

En donde:

H ; Representa la amplitud de oscilación del sistema para el estado permanente o estable.

φ; Es el ángulo de fase, es decir, el ángulo existente entre el movimiento (respuesta) y la fuerza exterior (entrada).

Antes de realizar el diagrama de fuerzas actuantes, expresemos las fuerzas que actúan

FUERZA ELASTICA O DEL RESORTE (F_R):

$\boxed{F_R = -ky}$

Como: $y = H\cos(\omega t - \varphi)$

La amplitud de F_R es $\boldsymbol{kH}$ en la dirección de y negativa.

FUERZA DE AMORTIGUAMIENTO (F_A):

$\boxed{F_A = -C\dot{y}}$

Para encontrar su amplitud derivemos la expresión [13] con respecto al tiempo;

$$\boxed{\dot{y} = -H\omega\sin(\omega t - \varphi)} \quad [14]$$

Démosle otra forma a la expresión anterior;

$\dot{y} = H\omega\cos\left(\omega t - \varphi + \pi/2\right)$

Por lo tanto la amplitud de F_A es $\boldsymbol{CH\omega}$, que se encuentra adelantada a F_R en $\pi/2$

FUERZA DE INERCIA (F_I):

$\boxed{F_I = m\ddot{y}}$

Derivemos la ecuación [14] con respecto al tiempo;

$\ddot{y} = -H\omega^2\cos(\omega t - \varphi)$

$\boxed{\ddot{y} = H\omega^2\cos(\omega t - \varphi + \pi)}$

La amplitud de F_I es $\boldsymbol{mH\omega^2}$ adelantada a F_R en π.

FUERZA EXTERIOR (F_E):

$F_E = F_o\cos(\omega t)$

De amplitud $\boldsymbol{F_o}$ adelantada a "y" en φ.

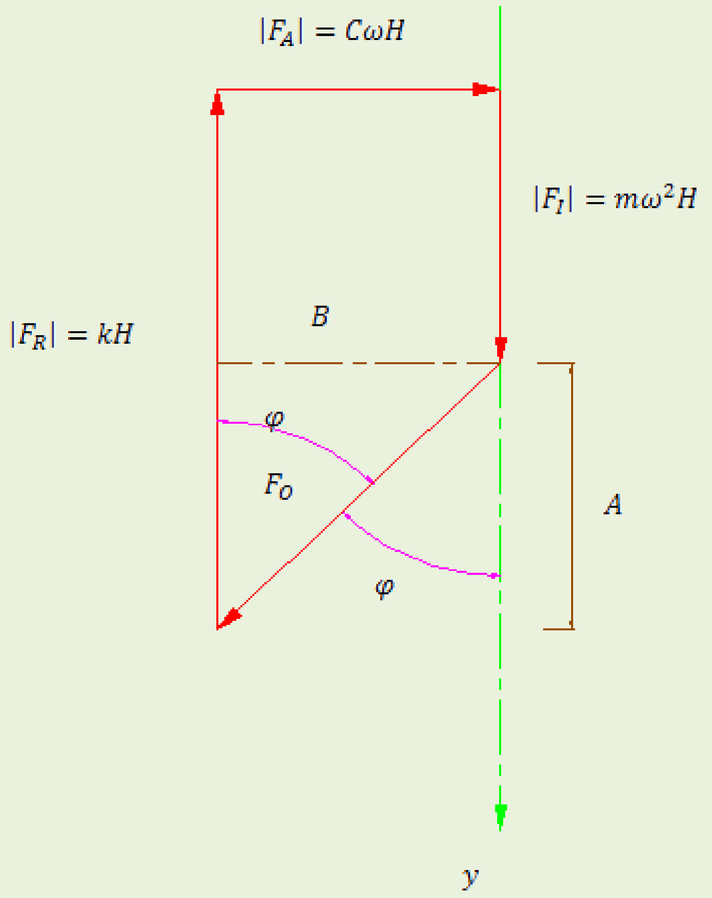
Para poder realizar el diagrama de fuerzas actuantes, analicemos como es la frecuencia forzada (ω) con respecto a la frecuencia natural del sistema (ω_n).

$$\omega = 10\pi \ \left[{}^{1}/_{s}\right] \cong 31.41 \ \left[{}^{1}/_{s}\right]$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2 * {}^{k}/_{2}}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2 * 10507}{17.52}} \ \Rightarrow \boxed{\omega_n \cong 34.63 \ \left[{}^{1}/_{s}\right]}$$

En este caso como $\omega < \omega_n$ el ángulo de fase se encuentra $0 < \varphi < 90°$.

Expresemos estas fuerzas en un polígono funicular:



Analizando el diagrama de fuerzas actuantes tenemos;

$\underline{|F_A| = B = C\omega H}$

$A = |F_R| - |F_I| = kH - m\omega^2 H$

$\underline{A = H(k - m\omega^2)}$

Podemos expresar que: $\tan\varphi = \frac{B}{A} = \frac{C\omega H}{H(k-m\omega^2)} = \frac{C\omega}{(k-m\omega^2)}$

Por lo tanto $\varphi = \arctan\left(\frac{C\omega}{k-m\omega^2}\right)$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{140 * 10\pi}{2 * 10507 - 17.5(10\pi)^2}\right)$$

$$\boxed{\varphi = 49°}$$

Con esto podemos comprobar el ángulo de fase que determinamos con la expresión [15] a través de la ecuación diferencial. Lo mismo vamos hacer para la amplitud.

Para determinar la amplitud del movimiento planteamos

$B = F_O \sin\varphi$

$C\omega H = F_O \sin\varphi$

$H = \frac{F_O \sin\varphi}{C\omega}$

$H = \frac{33.85 \sin 49}{140 * 10\pi}$

$$\boxed{H = 0.0058 \quad [m]}$$

b) Fuerzas máximas y mínimas ejercidas por los resortes y amortiguador sobre la base y combinación de ellas.

Resortes:

$$F_{maxR} = W + kH$$

$$F_{minR} = W - kH$$

Donde:

W: Peso total del sistema $W = 171.7 \;\; [N]$

kH: representa la amplitud del resorte; va ser positiva cuando la fuerza sea máxima y negativa cuando sea mínima.

$F_{maxR} = 171.7 + 2 * 10507 * 0.0058\ [N] \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{F_{maxR} = 293.58\ [N]}}$

$F_{minR} = 171.7 - 2 * 10507 * 0.0058\ [N] \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{F_{minR} = 49.81\ [N]}}$

Amortiguador:

$$F_{maxA} = W + C\omega H$$

$$F_{minA} = W - C\omega H$$

Donde:

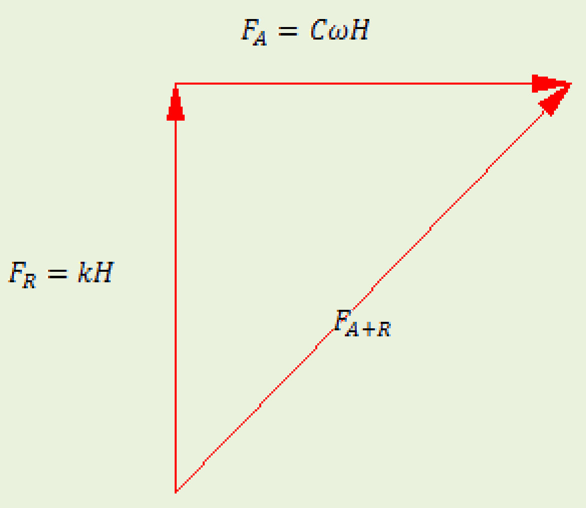
$C\omega H$: representa la velocidad de deformación del resorte; positivo cuando se encuentre comprimido en la dirección de "y"positiva y negativo cuando se encuentre traccionado.

$F_{maxA} = 171.7 + 140 * 10\pi * 0.0058\ [N] \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{F_{maxA} = 197.2\ [N]}}$

$F_{minA} = 171.7 - 140 * 10\pi * 0.0058\ [N] \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{F_{minA} = 146.2\ [N]}}$

Fuerza combinada:

Analicemos el siguiente diagrama;



La fuerza combinada es:

$$F_{A+R} = \sqrt{((kH)^2 + (C\omega H)^2)} = \sqrt{((2 * 10507 * 0.0058)^2 + (140 * 10\omega * 0.0058)^2)}$$

$$\boxed{F_{A+R} = 124.52 \quad [N]}$$

$$F_{A+R_{max}} = W + F_{A+R} = 171.7 + 124.52 \ [N] \ \Rightarrow \boxed{F_{A+R_{max}} \cong 296.22 \ [N]}$$

$$F_{A+R_{min}} = W - F_{A+R} = 171.7 - 124.52 \ [N] \ \Rightarrow \boxed{F_{A+R_{min}} \cong 47.18 \ [N]}$$

c) Velocidad de resonancia del sistema y amplitud de movimiento en esta condición.

La velocidad de resonancia se produce cuando la frecuencia forzada tiende a igualar a la natural del sistema, es decir (se omiten los cálculos ya que fueron hallados anteriormente).

$$\omega \rightarrow \omega_n \quad \therefore \boxed{\omega_{Res} \cong 34.63 \ [1/s]}$$

Para hallar la amplitud en esta condición lo analizaremos con el polígono funicular pero para este caso $\varphi = 90°$.

Por lo tanto nos queda;

$$F_O = C\omega_{Res} H$$

$$H = \frac{F_O}{C\omega_{Res}} = \frac{33.85}{140 * 34.63} \ [m]$$

$$\boxed{H = 0.00698 \ [m]}$$

Bibliografía:

- Monografía de la cátedra, Mecánica Racional, Prof. Ing. Liberto Ercoli, 2005.
- Dinámica 3ra Edición, Mecánica para ingenieros; Meriam J.L/ L.G. Kraige
- Mecánica Vectorial; Beer-Johnston.

Softwares utilizados:

- Microsoft Word 2007
- Mathematica 6
- Microsoft Paint
- Solid Edge Academic V14
- AutoCad 2008