

# RELACIONES FUNDAMENTALES, IDENTIDADES Y ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

## 1) RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

Existen algunas relaciones que se establecen entre las funciones trigonométricas, las mismas que se cumplen para cualquier valor que se de al ángulo. Estas relaciones se llaman relaciones trigonométricas fundamentales.

Las relaciones trigonométricas se clasifican de la siguiente manera:

### RELACIONES FUNDAMENTALES

#### POR COCIENTE

$$\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}$$
$$\cot \theta = \frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta}$$

#### PITAGÓRICAS

$$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \text{sec}^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \text{csc}^2 \theta$$

#### INVERSAS

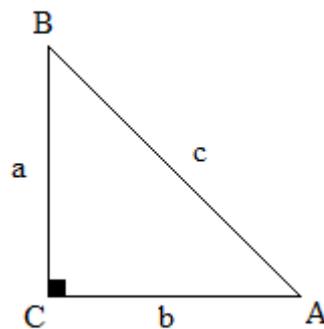
$$\text{sen } \theta = \frac{1}{\text{csc } \theta}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{1}{\text{sec } \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$$

## DEDUCCIONES DE LAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

Considere la siguiente figura siguiente en donde  $\text{sen } \theta = a/b$ ,  $\text{cos } \theta = b/c$  y  $\tan \theta = a/b$



1) Deducción de  $\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}$

**Solución:**

**Afirmaciones**

1.1)  $\tan \theta = \frac{a}{b}$

1.2)  $\frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$

1.3)  $\frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} = \frac{a}{b}$

1.4)  $\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}$

**Razones**

Por definición de tangente

Reemplazando valores de  $\text{sen } \theta$  y  $\text{cos } \theta$

Simplificando c

Reemplazando 1.3 en 1.1

2) Deducción de  $\text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta = 1$

**Solución:**

**Afirmaciones**

2.1)  $a^2 + b^2 = c^2$

2.2)  $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$

2.3)  $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$

2.4)  $\text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta = 1$

**Razones**

Por Teorema de Pitágoras

Dividiendo para  $c^2$

Simplificando

Reemplazando  $\text{sen}^2 = \frac{a^2}{c^2}$  y  $\text{cos}^2 = \frac{b^2}{c^2}$  en 2.3

3) Deducción de  $\text{sen}\theta = \frac{1}{\text{csc}\theta}$

**Solución:**

**Afirmaciones**

3.1)  $\text{sen}\theta = \frac{a}{c}$

3.2)  $\frac{1}{\text{csc}\theta} = \frac{1}{\frac{c}{a}}$

2.4)  $\frac{1}{\text{csc}\theta} = \frac{a}{c}$

2.5)  $\text{sen}\theta = \frac{1}{\text{csc}\theta}$

**Razones**

Definición de  $\text{sen}\theta$

Reemplazando  $\text{csc}\theta = \frac{c}{a}$

Operando

Reemplazando 3.3 en 3.1

**Nota:** Las demás demostraciones de las otras relaciones fundamentales se dejan como tarea para el discente (alumno)

## EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

1) Expresar  $\text{sec}\theta \cdot \tan\theta$  en términos de  $\text{sen}\theta$

**Solución:**

**Afirmaciones**

1.1)  $\text{sec}\theta \cdot \tan\theta = \frac{1}{\text{cos}\theta} \cdot \frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta}$

1.2)  $\text{sec}\theta \cdot \tan\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}^2\theta}$

1.3)  $\text{cos}^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta$

1.4)  $\text{sec}\theta \cdot \tan\theta = \frac{\text{sen}\theta}{1 - \text{sen}^2\theta}$

**Razones**

Sustituyendo  $\text{sec}\theta$  y  $\tan\theta$

Multiplicando

Despejando de  $\text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta = 1$

Reemplazando 1.3 en 1.2

2) Simplificar la expresión  $\sec^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + \csc^2 \theta \cdot \operatorname{sen}^2 \theta$

**Solución:**

Reemplazando  $\sec^2 \theta = 1/\cos^2 \theta$  y  $\csc^2 \theta = 1/\operatorname{sen}^2 \theta$  tenemos

$$2.1) \sec^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + \csc^2 \theta \cdot \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \cos^2 \theta + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \cdot \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$2.2) \sec^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + \csc^2 \theta \cdot \operatorname{sen}^2 \theta = 1 + 1$$

$$2.3) \sec^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + \csc^2 \theta \cdot \operatorname{sen}^2 \theta = 2$$

Simplificando

Sumando

3) Utilizar las relaciones fundamentales para encontrar los valores de las funciones del ángulo  $\theta$ , dado  $\operatorname{sen} \theta = 3/5$

**Solución:**

**Afirmaciones**

$$3.1) \cos \theta = \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}$$

$$3.2) \cos \theta = \pm \sqrt{1 - (3/5)^2}$$

$$3.3) \cos \theta = \pm 4/5$$

**Razones**

Despejando de  $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

Reemplazando valores

Operando

**Nota:** Recuerde los signos de las funciones trigonométricas:

| Cuadrante        | I            | II  | III                         | IV                          |
|------------------|--------------|---|-----------------------------|-----------------------------|
| Función positiva | Todas        | $\operatorname{sen} \theta - \csc \theta$ | $\tan \theta - \cot \theta$ | $\cos \theta - \sec \theta$ |
|                  | <b>todas</b> | <b>sin</b>                                | <b>ta</b>                   | <b>cos</b>                  |

Entonces el resultado de la función  $\cos \theta$  queda:

| Cuadrante     | I   | II   | III  | IV  |
|---------------|-----|------|------|-----|
| $\cos \theta$ | 4/5 | -4/5 | -4/5 | 4/5 |

$$3.4) \tan \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$$

Relación por cociente

$$\frac{3}{4}$$

Reemplazando valores y operando

$$3.5) \tan \theta = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

| Cuadrante     | I   | II   | III | IV   |
|---------------|-----|------|-----|------|
| $\tan \theta$ | 3/4 | -3/4 | 3/4 | -3/4 |

Aplicando los signos

De las funciones trigonométricas

$$3.6) \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

Relación inversa

$$3.7) \cot \theta = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

Reemplazando valores y operando

| Cuadrante     | I   | II   | III | IV   |
|---------------|-----|------|-----|------|
| $\cot \theta$ | 4/3 | -4/3 | 4/3 | -4/3 |

Aplicando los signos de las Funciones trigonométricas

$$3.8) \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

Relación inversa

$$3.9) \sec \theta = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$$

Reemplazando valores y operando

| Cuadrante     | I   | II   | III  | IV   |
|---------------|-----|------|------|------|
| $\sec \theta$ | 5/4 | -5/4 | -5/4 | -5/4 |

Aplicando los signos de las Funciones trigonométricas

$$3.10) \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

Relación inversa

$$3.11) \csc \theta = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

Reemplazando valores y operando

| Cuadrante     | I   | II  | III  | IV   |
|---------------|-----|-----|------|------|
| $\csc \theta$ | 5/3 | 5/3 | -5/3 | -5/3 |

Aplicando los signos de las Funciones trigonométricas

## 2) IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Son igualdades entre funciones trigonométricas y que la condición de igualdad se cumple o se verifica para cualquier valor que se atribuya a dicho ángulo.

Para demostrar una identidad  $x = y$ , se puede emplear cualquiera de los siguientes procedimientos.

- 1) Transformar  $x$  en  $y$
- 2) Transformar  $y$  en  $x$

En la demostración de una identidad es necesario saber que:

- Se debe tener completa familiaridad con las relaciones trigonométricas fundamentales.
- Se puede escoger el lado más complicado de la identidad para ser transformado en términos de otras funciones cualquiera. En particular se transforma en términos de seno y coseno.
- Se puede emplear cualquier artificio algebraico.

## EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Demostrar las siguientes identidades trigonométricas:

$$1) \sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$$

**Solución:**

**Afirmaciones**

$$1) \sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$$

$$1.1) \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 = \tan^2 \theta$$

$$1.2) \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta$$

$$1.3) \frac{\text{sen}^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta$$

$$1.4) \tan^2 \theta = \tan^2 \theta$$

**Razones**

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \Rightarrow \sec^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

Operando

$$\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\tan \theta = \frac{\text{sen} \theta}{\cos \theta} \Rightarrow \tan^2 \theta = \frac{\text{sen}^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$2) \sec^2 \theta + \tan^2 \theta = \frac{1 - \text{sen}^4 \theta}{\cos^4 \theta}$$

**Solución:**

**Afirmaciones**

$$2) \sec^2 \theta + \tan^2 \theta = \frac{1 - \text{sen}^4 \theta}{\cos^4 \theta}$$

$$2.1) \sec^2 \theta + \tan^2 \theta = \frac{(1 + \text{sen}^2 \theta)(1 - \text{sen}^2 \theta)}{\cos^4 \theta}$$

$$2.2) \sec^2 \theta + \tan^2 \theta = \frac{(1 + \text{sen}^2 \theta)(\cos^2 \theta)}{\cos^4 \theta}$$

$$2.3) \sec^2 \theta + \tan^2 \theta = \frac{1 + \text{sen}^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$2.4) \sec^2 \theta + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{\text{sen}^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$2.5) \sec^2 \theta + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta + \tan^2 \theta$$

**Razones**

Diferencia de cuadrados:  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \text{sen}^2 \theta$$

Simplificando

Propiedad distributiva

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \text{ y } \tan \theta = \frac{\text{sen} \theta}{\cos \theta}$$

$$3) \frac{\tan^2 \theta + 1}{\cot^2 \theta + 1} = \tan^2 \theta$$

**Solución:**

**Afirmaciones**

$$3) \frac{\tan^2 \theta + 1}{\cot^2 \theta + 1} = \tan^2 \theta$$

$$3.1) \frac{\sec^2 \theta}{\csc^2 \theta} = \frac{\text{sen}^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

**Razones**

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta ; 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta ;$$

$$\tan \theta = \frac{\text{sen} \theta}{\cos \theta}$$

$$3.2) \frac{\frac{1}{\cos^2 \theta}}{\frac{1}{\sin^2 \theta}} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$3.3) \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} \Rightarrow \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \Rightarrow \sec^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta} \Rightarrow \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \Rightarrow \csc^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

Operando

### 3) ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una ecuación trigonométrica es una igualdad que contiene expresiones trigonométricas que es válida únicamente para ciertos valores de los ángulos. En una ecuación trigonométrica la incógnita el ángulo y, por tanto, resolver una ecuación de este tipo es hallar el valor o los valores (si existen) del ángulo que cumpla la igualdad.

Ejemplo:  $2 - \sin x = 2 \cos^2 x$

Para resolver una ecuación trigonométrica se recomienda los siguientes pasos:

- 1.- Emplear las identidades trigonométricas para expresar todas las funciones que intervienen en la ecuación en una sola función, ya sea solo en función de  $\sin x$ ,  $\cos x$  o  $\tan x$  en la mayoría de los casos, dependiendo de la ecuación.
- 2.- Factorizar siempre que sea posible.
- 3.- Recordar que si  $a \cdot b = 0$ , entonces se debe resolver para  $a=0$  y  $b=0$
- 4.- Resolver la parte trigonométrica, que consiste en hallar los valores del ángulo que satisfacen la ecuación.
- 5.- Realizar la respectiva comprobación.

#### Ejemplo ilustrativo:

Resolver la ecuación  $2 - \sin x = 2 \cos^2 x$  para todos los valores comprendidos entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$ .

#### Solución:

##### Afirmaciones

$$2 - \sin x = 2 \cos^2 x$$

$$2 - \sin x = 2(1 - \sin^2 x)$$

$$2 - \sin x = 2 - 2\sin^2 x$$

$$2 - \sin x - 2 + 2\sin^2 x = 0$$

$$2\sin^2 x - \sin x + 2 - 2 = 0$$

$$2\sin^2 x - \sin x = 0$$

##### Razones

Ecuación dada

Transformando en función de  $\sin x$   
 $(\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x)$

Eliminando paréntesis

Transposición de términos

El orden de los sumandos no altera la suma total  
 (Propiedad conmutativa)

Reducción de términos semejantes

$$\text{sen}x(2\text{sen}x - 1) = 0$$

$$\text{sen}x = 0 \quad ; \quad 2\text{sen}x - 1 = 0$$

$$\text{sen}x = 0 \Rightarrow x = \text{sen}^{-1}0 \Rightarrow x = 0^\circ, 180^\circ$$

$$2\text{sen}x - 1 = 0 \Rightarrow x = \text{sen}^{-1}\frac{1}{2} \Rightarrow x = 30^\circ, 150^\circ$$

Factor común

Si  $a \cdot b = 0$ , entonces se debe resolver para  $a=0$  y  $b=0$  (Igualando a cero cada uno de los factores)

Respuestas para  $\text{sen}x = 0$

Respuestas para  $2\text{sen}x - 1 = 0$

**Comprobación:** Se reemplaza cualquier valor encontrado en la ecuación dada, por ejemplo  $30^\circ$

### Afirmaciones

$$2 - \text{sen}x = 2\cos^2 x$$

$$2 - \text{sen}30^\circ = 2\cos^2 30^\circ$$

$$2 - \frac{1}{2} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$2 - \frac{1}{2} = 2\frac{3}{4}$$

$$\frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

### Razones

Ecuación dada

Reemplazando  $30^\circ$  en la ecuación

Reemplazando los valores de  $30^\circ$

Elevando al cuadrado

Operando

Supresión de términos semejantes

Graticando en Graph  $2 - \text{sen}x = 2\cos^2 x$  se obtiene las respuestas

