TOMO II

APUNTES DE ÁLGEBRA

JOSÉ LUIS ALBORNOZ SALAZAR

I N D I C E

❖ ECUACIONES RACIONALES

Para la solución de este tipo de ecuaciones es necesario que el estudiante maneje adecuadamente los siguientes aspectos :

- *Solución de ecuaciones de primer y 2do. grado*
- *Cálculo del Mínimo Común Múltiplo de polinomios*
- *Multiplicación y división de polinomios*
- *Factorización de polinomios*
- *Productos notables*
- *Valorar expresiones algebraicas (comprobación).*

Resulta esencial y ventajoso comprobar los resultados obtenidos de manera que se pueda descartar cualquier "solución ficticia" que podamos haber creado al realizar las operaciones.

Las posibles soluciones que debemos descartar generalmente están representadas por los valores que anulan algún denominador (la división por cero no existe).

Ejemplo 1 : **Resolver** $$\frac{X^2+6X+5}{X+1}=0$$

Se recomienda factorizar aquellos polinomios de segundo grado (y mayores) ya que nos permite visualizar más fácilmente las posibles soluciones.

Al factorizar el numerador tendremos :

$$\frac{(X+\ 5).(X+1)}{X+1}=0$$

El paso anterior nos permite visualizar fácilmente la simplificación de la ecuación :

$$\frac{(X+5).\cancel{(X+1)}}{\cancel{X+1}}=0 \qquad ; \qquad X+5=0$$

X = - 5

Para comprobar el resultado sustituyo este valor en la ecuación inicial y deberá cumplirse la igualdad :

$$\frac{(-5)^2\ +\ 6(-5)\ +\ 5}{(-5)\ +\ 1}=0 \qquad ; \qquad \frac{25-30\ +\ 5}{-4}=0$$

$$\frac{30-30}{-4}=0 \qquad ; \qquad \frac{0}{-4}=0 \qquad \textbf{CIERTO}$$

Luego podemos afirmar que $\mathbf{X=-5}$ ***SI ES SOLUCIÓN***

Ejemplo 2 : **Resolver** $$\frac{1}{X^2-X}-\frac{1}{X+3}=0$$

Algunos autores y profesores recomiendan calcular el mínimo común múltiplo de los denominadores de los términos que se encuentran en el miembro izquierdo de la ecuación.

Al considerar que este procedimiento genera dificultad a muchos estudiantes nos permitimos recomendar lo siguiente :

En aquellos casos donde la ecuación presente dos términos es "más cómodo" colocar uno en cada miembro.

$$\frac{1}{X^2-X}=\frac{1}{X+3}$$

Esto facilita los cálculos ya que podemos "pasar a multiplicar" cada denominador al otro miembro :

$$\frac{1}{X^2-X} = \frac{1}{X+3}$$

$$(1).(X+3) = (1).(X^2-X)$$

Luego podemos reducir términos semejantes resultando:

$$X+3-X^2+X=0 \qquad ; \qquad -X^2+2X+3=0$$

Al aplicar la fórmula general de segundo grado o resolvente podemos determinar que los valores que anulan la ecuación anterior (raíces) son :

$$X = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2-4(-1)(3)}}{2(-1)}$$

X_1 = – 1 *y* **X_2 = 3**

Comprobando con ***X_1 = – 1*** *, para lo cual sustituyo este valor en la ecuación racional inicial :*

$$\frac{1}{(-1)^2-(-1)} - \frac{1}{(-1)+3} = 0$$

$$\frac{1}{1+1} - \frac{1}{-1+3} = 0 \qquad ; \qquad \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \qquad \textbf{CIERTO}$$

Esto nos indica que ***X = – 1*** ***SI ES SOLUCIÓN***

Comprobando con ***X_2 = 3*** *, para lo cual sustituyo este valor en la ecuación racional inicial :*

$$\frac{1}{(3)^2-(3)} - \frac{1}{(3)+3} = 0$$

$$\frac{1}{9-3} - \frac{1}{6} = 0 \qquad ; \qquad \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0 \qquad \textbf{CIERTO}$$

Esto nos indica que ***X = 3*** ***SI ES SOLUCIÓN***

Se debe indicar que ambos valores (– 1 y 3) resuelven dicha ecuación racional.

Ejemplo 3 : **Resolver** $\mathbf{\frac{1}{X^2-X} - \frac{1}{X-1} = 0}$

En aquellos casos donde la ecuación presente dos términos es "más cómodo" colocar uno en cada miembro.

$$\frac{1}{X^2-X} = \frac{1}{X-1}$$

Esto facilita los cálculos ya que podemos "pasar a multiplicar" cada denominador al otro miembro :

$$(1).(X-1) = (1).(X^2-X)$$

Luego podemos resolver la ecuación de segundo grado resultante:

$$X-1-X^2+X=0 \qquad ; \qquad -X^2+2X-1=0$$

Al aplicar la fórmula general de segundo grado o resolvente podemos determinar que los valores que anulan la ecuación anterior (raíces) son :

$$X=\frac{-(2)\pm\sqrt{(2)^2-4(-1)(-1)}}{2(-1)}$$

$$\mathbf{X_1 = X_2 = 1}$$

Comprobando con ***X = 1*** *, para lo cual sustituyo este valor en la ecuación racional inicial :*

$$\frac{1}{(1)^2-(1)}-\frac{1}{(1)-1}=0$$

$$\frac{1}{1-1}-\frac{1}{1-1}=0 \qquad ; \qquad \frac{1}{0}-\frac{1}{0}=0 \qquad \textbf{FALSO}$$

Como la división por cero no existe se dice que la ecuación racional estudiada ***NO TIENE SOLUCIÓN****.*

Ejemplo 4 : *Resolver* $\dfrac{X^3+3X^2+2X}{X^2+3X+2}=\dfrac{X^2+6X+9}{(X+3)^2}$

Se recomienda factorizar aquellos polinomios de segundo grado y mayores ya que nos permite visualizar más fácilmente las posibles soluciones.

Factorizando el numerador del miembro de la izquierda :

$$X^3+3X^2+2X \quad = \quad X.(X^2+3X+2) \quad = \quad \mathbf{X.(X+2).(X+1)}$$

Factorizando el denominador del miembro de la izquierda :

$$(X^2+3X+2) \quad = \quad \mathbf{(X+2).(X+1)}$$

Factorizando el numerador del miembro de la derecha :

$$(X^2+6X+9) \quad = \quad (X+3).(X+3) \quad = \quad \mathbf{(X+3)^2}$$

Luego la ecuación puede ser expresada de la siguiente manera :

$$\frac{\mathrm{X.(X+2).(X+1)}}{\mathrm{(X+2).(X+1)}}=\frac{\mathrm{(X+3)^2}}{\mathrm{(X+3)^2}}$$

El paso anterior nos permite visualizar fácilmente la simplificación de la ecuación :

$$\frac{\mathrm{X.\cancel{(X+2)}.\cancel{(X+1)}}}{\mathrm{\cancel{(X+2)}.\cancel{(X+1)}}}=\frac{\mathrm{\cancel{(X+3)}^2}}{\mathrm{\cancel{(X+3)}^2}}$$

$$\mathbf{X=1}$$

Para comprobar el resultado sustituyo este valor en la ecuación inicial y deberá cumplirse la igualdad :

$$\frac{1^3+3(1)^2+2(1)}{1^2+3(1)+2}=\frac{1^2+6(1)+9}{(1+3)^2}$$

$$\frac{1+3+2}{1+3+2}=\frac{1+6+9}{4^2}$$

$$\frac{6}{6}=\frac{16}{16} \qquad ; \qquad 1=1 \qquad \textbf{CIERTO}$$

Luego podemos afirmar que $\mathbf{X=1}$ ***SI ES SOLUCIÓN***

Ejemplo 5 : **Resolver** $$\frac{3}{X-4} = \frac{2}{X-3} + \frac{8}{X^2-7X+12}$$

Cuando la ecuación racional presente más de dos términos es necesario calcular el mínimo común múltiplo para poder "eliminar" los denominadores.

Para facilitar éste cálculo sigue siendo recomendable factorizar los polinomios de segundo grado y mayores que presente la ecuación.

Factorizando el polinomio que tiene el segundo miembro de la derecha :

$$X^2 - 7X + 12 \qquad = \qquad (\mathbf{X-4}).(\mathbf{X-3})$$

Luego la ecuación puede ser indicada como :

$$\frac{3}{X-4} = \frac{2}{X-3} + \frac{8}{(X-4).(X-3)}$$

Factorizado dicho polinomio resulta más fácil calcular el mínimo común múltiplo de los tres denominadores, que en este caso será : $(\mathbf{X-4}).(\mathbf{X-3})$

Una vez conocido el mínimo común múltiplo se pueden "eliminar" los denominadores con la utilización del procedimiento conocido por los estudiantes de este nivel que consiste en :

- *Dividir el mínimo común múltiplo entre el denominador de cada término.*
- *El resultado anterior se debe multiplicar por el numerador del término respectivo.*

<u>Trabajando con el primer término tendremos :</u>

Dividir el mínimo común múltiplo entre el denominador de cada término :

$$\frac{(X-4).(X-3)}{X-4} = \qquad \mathbf{X-3}$$

El resultado anterior se debe multiplicar por el numerador del término respectivo.

$$3.(X-3) = \qquad \mathbf{3X-9}$$

<u>Trabajando con el segundo término tendremos :</u>

Dividir el mínimo común múltiplo entre el denominador de cada término :

$$\frac{(X-4).(X-3)}{X-3} = \qquad \mathbf{X-4}$$

El resultado anterior se debe multiplicar por el numerador del término respectivo.

$$2.(X-4) = \qquad \mathbf{2X-8}$$

<u>Trabajando con el tercer término tendremos :</u>

Dividir el mínimo común múltiplo entre el denominador de cada término :

$$\frac{(X-4).(X-3)}{(X-4).(X-3)} = \qquad \mathbf{1}$$

El resultado anterior se debe multiplicar por el numerador del término respectivo.

$$1.(8) = \qquad \mathbf{8}$$

Luego la ecuación quedará expresada de la siguiente manera

$$\frac{\mathbf{3X-9}}{(X-4).(X-3)} = \frac{(\mathbf{2X-8})+\mathbf{8}}{(X-4).(X-3)}$$

Recordando el AXIOMA FUNDAMENTAL DE LAS ECUACIONES que dice que:"Si con cantidades iguales se realizan operaciones iguales (en ambos miembros de la ecuación), los resultados serán iguales". Podemos decir que al multiplicar ambos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo anteriormente calculado se pueden eliminar los denominadores sin alterar la ecuación.

$$\mathbf{3X-9 = (2X-8)+8}$$

$$3X-9 = 2X-8+8$$

$$3X-9 = 2X$$

$$3X-2X = 9$$

$$\mathbf{X = 9}$$

Para comprobar el resultado sustituyo este valor en la ecuación inicial y deberá cumplirse la igualdad :

$$\frac{3}{X-4} = \frac{2}{X-3} + \frac{8}{X^2-7X+12}$$

$$\frac{3}{9-4} = \frac{2}{9-3} + \frac{8}{9^2-7(9)+12}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{2}{6} + \frac{8}{81-63+12}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{2}{6} + \frac{8}{30} \qquad m.c.m = 30$$

$$\frac{18}{30} = \frac{10+8}{30}$$

$$\frac{18}{30} = \frac{18}{30} \qquad \textbf{CIERTO}$$

Luego podemos afirmar que $\mathbf{X = 9}$ ***SI ES SOLUCIÓN***

Ejemplo 6 : **Resolver** $\frac{X^2}{X-2} = \frac{4}{X-2}$

Recordando el AXIOMA FUNDAMENTAL DE LAS ECUACIONES que dice que:"Si con cantidades iguales se realizan operaciones iguales (en ambos miembros de la ecuación), los resultados serán iguales". Podemos decir que al multiplicar ambos miembros de la ecuación por (X – 2) se pueden eliminar los denominadores sin alterar la ecuación.

La ecuación quedará expresada como :

$$X^2 = 4$$

Que posee dos raíces :

$$\mathbf{X_1 = 2} \qquad y \qquad \mathbf{X_2 = -2}$$

Comprobando con ***X_1 = 2*** *, para lo cual sustituyo este valor en la ecuación racional inicial :*

$$\frac{2^2}{2-2} = \frac{4}{2-2}$$

$$\frac{4}{0} = \frac{4}{0} \qquad \textbf{FALSO}$$

Se dice que es falso porque la división por cero no existe.

Esto nos indica que ***X = 2*** ***NO ES SOLUCIÓN***

Comprobando con ***X_1 = – 2*** *, para lo cual sustituyo este valor en la ecuación racional inicial :*

$$\frac{(-2)^2}{-2-2} = \frac{4}{-2-2}$$

$$\frac{4}{-4} = \frac{4}{-4} \quad ; \quad \mathbf{-1 = -1} \qquad \textbf{CIERTO}$$

Esto nos indica que ***X = – 2*** ***SI ES SOLUCIÓN***

Ejemplo 7 : ***Resolver*** $\frac{3}{x^2-1} + \frac{x+2}{x-1} = \frac{x}{x+1}$

(Tomado con fines académicos de la página Web Matemática y Listo)

$$\frac{3}{x^2-1} + \frac{x+2}{x-1} = \frac{x}{x+1}$$

$$\frac{3}{(x+1).(x-1)} + \frac{x+2}{x-1} = \frac{x}{x+1}$$

$$\frac{3 + (x+2).(x+1)}{(x+1).(x-1)} = \frac{x.(x-1)}{(x+1).(x-1)}$$

$$\frac{3 + (x+2).(x+1)}{\cancel{(x+1).(x-1)}} = \frac{x.(x-1)}{\cancel{(x+1).(x-1)}}$$

$3 + (x + 2).(x + 1) = x.(x - 1)$

$3 + x^2 + x + 2x + 2 = x^2 - x$

$\cancel{x^2} + 3x - \cancel{x^2} + x = -2 - 3$

$4x = -5$

$x = -5/4$

Ejemplo 8 : *Resolver* $\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{3}{x^2+6x+9}=1$

(Tomado con fines académicos de la página Web Matemática y Listo)

$$\frac{x+2}{x+3}+\frac{3}{x^2+6x+9}=1$$

$$\frac{x+2}{x+3}+\frac{3}{(x+3)^2}=1$$

$$\frac{(x+2).(x+3)+\ 3}{(x+3)^2}=\frac{1.(x+3)^2}{(x+3)^2}$$

$$\frac{(x+2).(x+3)+\ 3}{\cancel{(x+3)^2}}=\frac{1.(x+3)^2}{\cancel{(x+3)^2}}$$

$$(x+2).(x+3)+3=1.(x+3)^2$$

$$x^2+3x+2x+6+3=x^2+6x+9$$

$$\cancel{x^2}+5x-\cancel{x^2}-6x=9-6-3$$

$$-x=0$$

$$x=0$$

Ejemplo 9 : *Resolver* $\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{5x-2}{x}=5$

(Tomado con fines académicos de la página Web Matemática y Listo)

$$\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{5x-2}{x}=5$$

$$\frac{3x-2+(5x-2).x}{x^2}=\frac{5.x^2}{x^2}$$

$$\frac{3x-2+(5x-2).x}{\cancel{x^2}}=\frac{5.x^2}{\cancel{x^2}}$$

$$3x-2+5x^2-2x=5x^2$$

$$3x+\cancel{5x^2}-2x-\cancel{5x^2}=2$$

$$x=2$$

❖ ECUACIONES IRRACIONALES

Las ecuaciones irracionales, o ecuaciones con radicales, son aquellas que tienen la incógnita bajo el signo radical.

Por ejemplo :

$\sqrt{x-8}=2$ **;** $\sqrt{x+10}-\sqrt{x+19}=-1$ **;** $\sqrt{9x+10}-2\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}$

Para resolver una ecuación irracional se recomienda seguir los siguientes pasos :

1) *Se aísla un radical en uno de los dos miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos, aunque tengan también radicales.*

2) *Se elevan ambos miembros de la ecuación al índice que posea la raíz.*

3) *Se resuelve la ecuación obtenida.*

4) ***Se comprueba si las soluciones obtenidas verifican la ecuación inicial**. Hay que tener en cuenta que al elevar al cuadrado una ecuación se obtiene otra que tiene las mismas soluciones que la dada y, además las de la ecuación que se obtiene cambiando el signo de uno de los miembros de la ecuación (Se dice que al elevar ambos miembros al cuadrado podemos estar añadiendo una solución ficticia).*

5) *Si la ecuación tiene varios radicales, se repiten los dos primeros pasos del proceso hasta eliminarlos todos.*

Ejemplo 1 : Resolver $\sqrt{x-8}=2$

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación :

$$\left(\sqrt{x-8}\right)^2=2^2$$

Al elevar al cuadrado el miembro de la izquierda se elimina la raiz cuadrada, y al elevar al cuadrado el miembro de la derecha se obtiene 4:

$$\left(\cancel{\sqrt{}}x-8\right)^{\cancel{2}}=2^2$$

$$x-8=4$$

Una vez eliminado el radical se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita :

$X = 4 + 8$; $\boldsymbol{X = 12}$

Para comprobar el resultado debo sustituir el valor obtenido (X=12) en la ecuación inicial :

$$\sqrt{X-8}=2$$

$$\sqrt{12-8}=2$$

$$\sqrt{4}=2$$

$$2=2$$

Al verificar que se cumple la igualdad podemos afirmar que la ecuación irracional $\boldsymbol{\sqrt{x-8}=2}$ *se cumple "si y solo si"* $\boldsymbol{X = 12}$.

Ejemplo 2 : Resolver $3+\sqrt{3X+1}=X$

1ero. Se aísla un radical en uno de los dos miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos

$$\sqrt{3X+1}=X-3$$

2do. Se elevan al cuadrado los dos miembros.

$$\left(\sqrt{3X+1}\right)^2=(X-3)^2$$

3ero. Se resuelve la ecuación obtenida.

Al elevar al cuadrado el miembro de la izquierda se elimina la raiz cuadrada, y al elevar al cuadrado el miembro de la derecha debemos recordar el producto notable que dice que el cuadrado de la diferencia de un binomio es igual al cuadrado del primer miembro menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo :

$$3X+1=X^2-(2)(X)(3)+(3)^2 \quad ; \quad 3X+1=X^2-6X+9$$

Una vez "eliminada" la raíz, la ecuación puede ser resuelta como una ecuación de segundo grado.

$$3X+1-X^2+6X-9=0$$

$$-X^2+9X-8=0$$

Al aplicar la fórmula general de segundo grado o resolvente podemos determinar que los valores que anulan la ecuación anterior (raíces) son :

$$X=\frac{-(9)\pm\sqrt{(9)^2-4(-1)(-8)}}{2(-1)}$$

$$X_1=8 \quad y \quad X_2=1$$

4to. Se comprueba si las soluciones obtenidas verifican la ecuación inicial. Hay que tener en cuenta que al elevar al cuadrado una ecuación se obtiene otra que tiene las mismas soluciones que la dada y, además las de la ecuación que se obtiene cambiando el signo de uno de los miembros de la ecuación (Se dice que al elevar ambos miembros al cuadrado podemos estar añadiendo una solución ficticia).

Comprobando con $X_1=8$ *, para lo cual sustituyo este valor en la ecuación irracional inicial :*

$$3+\sqrt{3X+1}=X \quad ; \quad 3+\sqrt{3(8)+1}=8$$

$$3+\sqrt{24+1}=8 \quad ; \quad 3+\sqrt{25}=8 \quad ; \quad 3+5=8$$

$$\mathbf{8=8}$$

Esto nos indica que $X=8$ ***SI ES SOLUCIÓN***

Comprobando con $X_2=1$ *, para lo cual sustituyo este valor en la ecuación irracional inicial :*

$$3+\sqrt{3X+1}=X \quad ; \quad 3+\sqrt{3(1)+1}=1$$

$$3+\sqrt{3+1}=1 \quad ; \quad 3+\sqrt{4}=1 \quad ; \quad 3+2=1$$

$$\mathbf{5\neq 1}$$

Esto nos indica que $X=1$ ***NO ES SOLUCIÓN***

La ecuación irracional estudiada se resuelve con X = 8

Ejemplo 3 : Resolver $2X - 6 - \sqrt{X^2 - 9} = 0$

1ero. *Se aísla un radical en uno de los dos miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos (en este caso es más "cómodo" pasar el radical al miembro de la derecha)*

$$2X - 6 = \sqrt{X^2 - 9}$$

2do. *Se elevan al cuadrado los dos miembros.*

$$(2X - 6)^2 = (\sqrt{X^2 - 9}\,)^2$$

3ero. *Se resuelve la ecuación obtenida.*

Al elevar al cuadrado el miembro de la derecha se elimina la raiz cuadrada, y al elevar al cuadrado el miembro de la izquierda debemos recordar el producto notable que dice que el cuadrado de la diferencia de un binomio es igual al cuadrado del primer miembro menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo :

$$(2X)^2 - (2)(2X)(6) + (6)^2 = X^2 - 9$$

Una vez "eliminada" la raíz, la ecuación puede ser resuelta como una ecuación de segundo grado.

$$4X^2 - 24X + 36 = X^2 - 9 \quad ; \quad 4X^2 - 24X + 36 - X^2 + 9 = 0$$

$$3X^2 - 24X + 45 = 0$$

Al aplicar la fórmula general de segundo grado o resolvente podemos determinar que los valores que anulan la ecuación anterior (raíces) son :

$$X = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(3)(45)}}{2(3)}$$

$$X_1 = 3 \quad y \quad X_2 = 5$$

4to. *Se comprueba si las soluciones obtenidas verifican la ecuación inicial. Hay que tener en cuenta que al elevar al cuadrado una ecuación se obtiene otra que tiene las mismas soluciones que la dada y, además las de la ecuación que se obtiene cambiando el signo de uno de los miembros de la ecuación (Se dice que al elevar ambos miembros al cuadrado podemos estar añadiendo una solución ficticia).*

Comprobando con $X_1 = 3$ *, para lo cual sustituyo este valor en la ecuación irracional inicial :*

$$2X - 6 - \sqrt{X^2 - 9} = 0 \quad ; \quad 2(3) - 6 - \sqrt{(3)^2 - 9} = 0$$

$$6 - 6 - \sqrt{9 - 9} = 0 \quad ; \quad 6 - 6 - \sqrt{0} = 0$$

$$\mathbf{0 = 0}$$

Esto nos indica que ***X = 3*** ***SI ES SOLUCIÓN***

Comprobando con $X_2 = 5$ *, para lo cual sustituyo este valor en la ecuación irracional inicial :*

$$2X - 6 - \sqrt{X^2 - 9} = 0 \quad ; \quad 2(5) - 6 - \sqrt{(5)^2 - 9} = 0$$

$$10 - 6 - \sqrt{25 - 9} = 0 \quad ; \quad 10 - 6 - \sqrt{16} = 0$$

$$10 - 6 - 4 = 0 \quad ; \quad \mathbf{0 = 0}$$

Esto nos indica que ***X = 5*** ***SI ES SOLUCIÓN***

Se debe indicar que ambos valores (3 y 5) resuelven dicha ecuación irracional.

Ejemplo 4 : Resolver $7+\sqrt[3]{5x-2}=9$

1ero. *Se aísla un radical en uno de los dos miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos*

$$\sqrt[3]{5X-2}=9-7 \quad ; \quad \sqrt[3]{5X-2}=2$$

2do. *Se elevan al cubo los dos miembros.*

$$\left(\sqrt[3]{5x-2}\right)^3=2^3$$

3ero. *Se resuelve la ecuación obtenida.*

$$\begin{aligned} 5x-2&=8 \\ 5x&=10 \\ x&=2 \end{aligned}$$

Para comprobar el resultado debo sustituir el valor obtenido (X=2) en la ecuación inicial :

$$7+\sqrt[3]{5X-2}=9 \quad ; \quad 7+\sqrt[3]{5(2)-2}=9$$

$$7+\sqrt[3]{10-2}=9 \quad ; \quad 7+\sqrt[3]{8}=9$$

$$7+2=9 \quad ; \quad \mathbf{9=9}$$

Al verificar que se cumple la igualdad podemos afirmar que la ecuación irracional $\mathbf{7+\sqrt[3]{5X-2}=9}$ *se cumple "si y solo si"* ***X = 2.***

Ejemplo 5 : Resolver $\sqrt{x+10}-\sqrt{x+19}=-1$

1ero. *Se aísla un radical en uno de los dos miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos*

$$\sqrt{x+10}=\sqrt{x+19}-1$$

2do. *Se elevan al cuadrado los dos miembros.*

$$\left(\sqrt{x+10}\right)^2=\left(\sqrt{x+19}-1\right)^2$$

3ero. *Se resuelve la ecuación obtenida.*

Al elevar al cuadrado el miembro de la izquierda se elimina la raiz cuadrada, y al elevar al cuadrado el miembro de la derecha debemos recordar el producto notable que dice que el cuadrado de la diferencia de un binomio es igual al cuadrado del primer miembro menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo :

$$\begin{aligned} x+10&=x+19-2\sqrt{x+19}+1 \\ -10&=-2\sqrt{x+19} \\ 5&=\sqrt{x+19} \end{aligned}$$

Podemos notar que una vez simplificada la ecuación presenta un radical en uno de sus miembros, en dicho caso se puede repetir el segundo y tercer paso :

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación :

$$5^2=\left(\sqrt{x+19}\right)^2$$

Se resuelve la ecuación :

$$25 = X + 19 \qquad ; \qquad 25 - 19 = X$$

$$\mathbf{6 = X}$$

Para comprobar el resultado debo sustituir el valor obtenido (X=6) en la ecuación inicial :

$$\sqrt{X+10} - \sqrt{X+19} = -1$$

$$\sqrt{6+10} - \sqrt{6+19} = -1$$

$$\sqrt{16} - \sqrt{25} = -1$$

$$4 - 5 = -1$$

$$\mathbf{-1 = -1}$$

Al verificar que se cumple la igualdad podemos afirmar que la ecuación irracional $\boldsymbol{\sqrt{X+10} - \sqrt{X+19} = -1}$ *se cumple "si y solo si"* ***X = 6***

Ejemplo 6 : **Resolver** $\sqrt{18x-8} - \sqrt{2x-4} - 2\sqrt{2x+1} = 0$

Si la ecuación tiene varios radicales, se repiten los dos primeros pasos del proceso hasta eliminarlos todos.

$$\left(\sqrt{18x-8}\right)^2 = \left(\sqrt{2x-4} + 2\sqrt{2x+1}\right)^2$$

El radical del miembro izquierdo se elimina directamente, pero el miembro de la derecha se resuelve como un producto notable (cuadrado de la suma de dos cantidades).

El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al ***cuadrado*** *de la primera cantidad* ***más*** *el doble producto de la primera cantidad por la segunda* ***más*** *el cuadrado de la segunda cantidad.*

$$18x - 8 = 2x - 4 + 4\sqrt{4x^2 - 6x - 4} + 4(2x+1)$$

Simplificando la ecuación:

$$18x - 8 = 10x + 4\sqrt{4x^2 - 6x - 4}$$
$$8x - 8 = 4\sqrt{4x^2 - 6x - 4}$$
$$2x - 2 = \sqrt{4x^2 - 6x - 4}$$

Notamos que el miembro de la derecha es un radical de grado dos, luego puedo eliminarlo elevando ambos miembros al cuadrado :

$$(2x-2)^2 = \left(\sqrt{4x^2 - 6x - 4}\right)^2$$

$$4x^2-8x+4=4x^2-6x-4$$
$$-2x=-8$$
$$x=4$$

Para comprobar el resultado debo sustituir el valor obtenido (X=4) en la ecuación inicial :

$$\sqrt{18X-8}-\sqrt{2X-4}-2\sqrt{2X+1}=0$$

$$\sqrt{18(4)-8}-\sqrt{2(4)-4}-2\sqrt{2(4)+1}=0$$

$$\sqrt{72-8}-\sqrt{8-4}-2\sqrt{8+1}=0$$

$$\sqrt{64}-\sqrt{4}-2\sqrt{9}=0$$

$$8-2-2(3)=0$$

$$8-2-6=0$$

$$\mathbf{0=0}$$

La ecuación irracional estudiada se resuelve con X = 4

Ejemplo 7 : **Resolver** $\sqrt{9x+10}-2\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}$

Si la ecuación tiene varios radicales, se repiten los dos primeros pasos del proceso hasta eliminarlos todos.

$$\left(\sqrt{9x+10}-2\sqrt{x+3}\right)^2=\left(\sqrt{x-2}\right)^2$$

$$9x+10-4\sqrt{9x^2+37x+30}+4(x+3)=x-2$$
$$13x+22-x+2=4\sqrt{9x^2+37x+30}$$

$$12x+24=4\sqrt{9x^2+37x+30}$$
$$3x+6=\sqrt{9x^2+37x+30}$$

Notamos que el miembro de la derecha es un radical de grado dos, luego puedo eliminarlo elevando ambos miembros al cuadrado :

$$(3x+6)^2=\left(\sqrt{9x^2+37x+30}\right)^2$$
$$9x^2+36x+36=9x^2+37x+30$$
$$36-30=37x-36x$$
$$6=x$$

Para comprobar el resultado debo sustituir el valor obtenido (X=6) en la ecuación inicial :

$$\sqrt{9X+10}-2\sqrt{X+3}=\sqrt{X-2}$$

$$\sqrt{9(6)+10}-2\sqrt{6+3}=\sqrt{6-2}$$

$$\sqrt{54+10}-2\sqrt{9}=\sqrt{4}$$

$$\sqrt{64}-2(3)=2$$

$$8-6=2$$

$$\mathbf{2=2}$$

La ecuación irracional estudiada se resuelve con X = 6

Ejemplo 8 : *Resolver* $\sqrt[3]{4+\sqrt{X+2}}=2$

En el miembro izquierdo observamos que hay una raíz cuadrada dentro de una raíz cúbica, luego procedemos a elevar al cubo ambos miembros de la ecuación para anular la raíz cúbica :

$$\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{X+2}}\right)^3 = 2^3$$

$$4+\sqrt{X+2}=8$$

Se aísla el radical en uno de los dos miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos

$$\sqrt{X+2}=8-4$$

Se elevan al cuadrado los dos miembros.

$$\left(\sqrt{X+2}\right)^2 = (4)^2$$

Se resuelve la ecuación obtenida.

X + 2 = 16 ; *X = 16 – 2* ; ***X = 14***

Comprobando los resultados :

$$\sqrt[3]{4+\sqrt{14+2}}=2 \quad ; \quad \sqrt[3]{4+\sqrt{16}}=2$$

$$\sqrt[3]{4+4}=2 \quad ; \quad \sqrt[3]{8}=2 \quad ; \quad \mathbf{2=2}$$

La ecuación irracional estudiada se resuelve con X = 14

Ejemplo 9 : *Resolver* $\sqrt{2X-1}+\sqrt{2X+1}=\frac{1}{\sqrt{2X-1}}$

Al notar que el miembro de la derecha presenta una fracción se recomienda indicar toda la ecuación de manera lineal, para ello podemos "pasar" el denominador del miembro de la derecha "multiplicando" todo el miembro de la izquierda :

$$\left(\sqrt{2X-1}\right).\left(\sqrt{2X-1}+\sqrt{2X+1}\right)=1$$

Al aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación obtendremos :

$$\left(\sqrt{\mathbf{2X-1}}\right).\left(\sqrt{\mathbf{2X-1}}\right)+\left(\sqrt{\mathbf{2X-1}}\right).\left(\sqrt{\mathbf{2X+1}}\right)=\mathbf{1} \qquad \textbf{(a)}$$

Si recordamos que :

Primero $\left(\sqrt{2X-1}\right).\left(\sqrt{2X-1}\right) = \left(\sqrt{2X-1}\right)^2 =$ **2X – 1**

Segundo $\left(\sqrt{2X-1}\right).\left(\sqrt{2X+1}\right) = \sqrt{(2X-1).(2X+1)}$

$$= \sqrt{(2X)^2-1^2} = \sqrt{\mathbf{4X^2-1}}$$

La ecuación **(a)** *quedará indicada como :*

$$\mathbf{2X-1+\sqrt{4X^2-1}=1}$$

Luego podemos continuar su solución de manera similar a lo explicado en el ejemplo 3 de esta guía (página 3) :

Se aisla el radical en uno de los dos miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos :

$$\sqrt{4X^2-1}=1-2X+1 \quad ; \quad \sqrt{4X^2-1}=2-2X$$

Se elevan al cuadrado los dos miembros de la ecuación :

$$\left(\sqrt{4X^2-1}\right)^2 \;=\; (2-2X)^2$$

$$4X^2-1=4-8X+4X^2$$

$$4X^2-1-4+8X-4X^2\;=0$$

$$-5+8X=0 \qquad ; \qquad 8X=5 \qquad ; \qquad \boldsymbol{X=\frac{5}{8}}$$

Comprobando el resultado

$$\sqrt{\mathbf{2\,.\,\frac{5}{8}-1}}+\sqrt{\mathbf{2\,.\,\frac{5}{8}+1}}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2\,.\,\frac{5}{8}-1}}}$$

$$\sqrt{\mathbf{\frac{10}{8}-1}}+\sqrt{\mathbf{\frac{10}{8}+1}}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{\frac{10}{8}-1}}}$$

Para facilitar los cálculos sustituimos a 1 por $\frac{8}{8}$

$$\sqrt{\mathbf{\frac{10}{8}-\frac{8}{8}}}+\sqrt{\mathbf{\frac{10}{8}+\frac{8}{8}}}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{\frac{10}{8}-\frac{8}{8}}}}$$

$$\sqrt{\mathbf{\frac{2}{8}}}+\sqrt{\mathbf{\frac{18}{8}}}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{\frac{2}{8}}}}$$

Reduciendo las fracciones (dividiendo numerador y denominador entre dos) :

$$\sqrt{\mathbf{\frac{1}{4}}}+\sqrt{\mathbf{\frac{9}{4}}}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{\frac{1}{4}}}}$$

Aplicando propiedad de la división de radicales :

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}+\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}}$$

Aplicando la "doble c" en el miembro de la derecha :

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}+\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}}$$

Sacando las raíces cuadradas :

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{2}{1}$$

$$\frac{4}{2}=2 \qquad ; \qquad \mathbf{2=2}$$

La ecuación irracional estudiada se resuelve con

$$\mathbf{X=\frac{5}{8}}$$

❖ SISTEMAS DE ECUACIONES CON TRES INCÓGNITAS

Antes de abordar este tema recomendamos "refrescar" los conocimientos en lo relacionado a CÓMO RESOLVER UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES Y DOS INCÓGNITAS POR EL MÉTODO DE REDUCCIÓN (SUMA Y RESTA).

De igual manera consideramos necesario "aclarar" qué es un SISTEMA DE ECUACIONES ESCALONADO y cómo se soluciona, para facilitar la comprensión del Método de Gauss,

SISTEMA DE ECUACIONES ESCALONADO : *Se dice que un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas es escalonado cuando en la primera ecuación presenta las 3 incógnitas, en la segunda ecuación presenta 2 incógnitas y en la tercera ecuación presenta 1 incógnita (este concepto es análogo para sistemas de más de 3 ecuaciones).*

Así, el siguiente sistema de ecuaciones es escalonado :

$$\begin{cases} X - Y + 3Z = -4 \\ \quad\;\; -Y + Z = -3 \\ \qquad\quad -2Z = 2 \end{cases}$$

Algunas veces el sistema de ecuaciones puede estar "desordenado", luego el primer paso consistirá en ordenarlo.

El siguiente sistema no está escalonado :

$$\begin{cases} \quad\;\; -Y + Z = -3 \\ X - Y + 3Z = -4 \\ \qquad\quad -2Z = 2 \end{cases}$$

Pero lo podemos ordenar de manera escalonada como se encuentra en el primer sistema mostrado.

No siempre es necesario que las incógnitas estén en el orden X,Y,Z; algunas veces el sistema se puede ordenar a nuestra conveniencia sin respetar el orden anterior.

Así, el siguiente sistema también es escalonado :

$$\begin{cases} 3Z - 2X + 5Y = -15 \\ \qquad -3X + 3Y = -13 \\ \qquad\qquad 3Y = 9 \end{cases}$$

¿CÓMO SE RESUELVE UN SISTEMA DE ECUACIONES ESCALONADO ?

Resolveremos el siguiente sistema escalonado para fijar los conceptos :

$$\begin{array}{l} (1^a) \\ (2^a) \\ (3^a) \end{array} \begin{cases} X - Y + 3Z = -4 \\ \quad\;\; -Y + Z = -3 \\ \qquad\quad -2Z = 2 \end{cases}$$

Se resuelve la 3ª ecuación ya que presenta una sola incógnita :

$$-2Z = 2 \quad ; \quad Z = \frac{2}{-2} \quad ; \quad \boxed{\boldsymbol{Z = -1}}$$

Conocido el valor de "Z" lo podemos sustituir en la 2ª ecuación y calcular el valor de "Y" :

$$-Y + (-1) = -3 \quad ; \quad -Y - 1 = -3 \quad ; \quad -Y = -3 + 1$$

$$-Y = -2 \quad ; \quad \boxed{\boldsymbol{Y = 2}}$$

Conocidos los valores de "Y" y "Z" los podemos sustituir en la primera ecuación y calcular el valor de "X" :

$$X - 2 + 3(-1) = -4 \quad ; \quad X - 2 - 3 = -4$$

$$X = -4 + 2 + 3 \quad ; \quad \boxed{\boldsymbol{X = 1}}$$

¿CÓMO RESOLVER UN SISTEMA DE ECUACIONES UTILIZANDO EL MÉTODO DE GAUSS?

Para solucionarlo es necesario buscar un sistema de ecuaciones escalonado equivalente y después resolver éste como lo hicimos en la página anterior.

Es decir, dado un sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases} aX & +bY & +cZ & = & d \\ eX & +fY & +gZ & = & h \\ iX & +kY & +mZ & = & n \end{cases}$$

Transformarlo en un sistema escalonado equivalente del tipo :

$$\begin{cases} aX & +bY & +cZ & = & d \\ \mathbf{0X} & +pY & +qZ & = & r \\ \mathbf{0X} & \mathbf{+0Y} & +sZ & = & t \end{cases}$$

Para lograr dicha transformación es necesario resolver varios sistemas de dos ecuaciones como explicaremos en el ejercicio siguiente.

EJERCICIO 1 : *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el Método de Gauss.*

$$\begin{matrix} (1^a) \\ (2^a) \\ (3^a) \end{matrix} \begin{cases} X & -Y & +3Z & = & -4 \\ X & +Y & +Z & = & 2 \\ X & +2Y & -Z & = & 6 \end{cases}$$

Solución :

Se anula la "X" en la 2ª ecuación. Para eso, se construye un sistema con las ecuaciones 1ª y 2ª y se aplica el método de reducción (suma y resta):

$$\begin{matrix} (1^a) \\ (2^a) \end{matrix} \begin{cases} X & -Y & +3Z & = & -4 \\ X & +Y & +Z & = & 2 \end{cases}$$

En este caso en particular notamos que la 2ª ecuación la podemos multiplicar por menos uno (-1) para anular la "X" cuando se sume con la ecuación 1ª.

Al multiplicar todos los términos de la ecuación 2ª por menos uno, la ecuación equivalente será :

$$\begin{matrix} (1^a) \\ (2^a).(-1) \end{matrix} \begin{cases} X & -Y & +3Z & = & -4 \\ -X & -Y & -Z & = & -2 \end{cases}$$

Luego se realiza la suma algebraica de las dos ecuaciones :

$$\begin{matrix} (1^a) \\ (2^a).(-1) \\ \\ \end{matrix} \begin{cases} X & -Y & +3Z & = & -4 \\ -X & -Y & -Z & = & -2 \\ \hline \mathbf{0X} & \mathbf{-2Y} & \mathbf{+2Z} & \mathbf{=} & \mathbf{-6} \end{cases}$$

Esta ecuación resultante la identificaremos como **(2ª)*** *y el sistema inicial quedará conformado así :*

$$\begin{matrix} (1^a) \\ \mathbf{(2^a)^*} \\ (3^a) \end{matrix} \begin{cases} X & -Y & +3Z & = & -4 \\ \mathbf{0X} & \mathbf{-2Y} & \mathbf{+2Z} & \mathbf{=} & \mathbf{-6} \\ X & +2Y & -Z & = & 6 \end{cases}$$

Ahora anularemos la "X" en la 3ª ecuación. Para eso, se construye un sistema con las ecuaciones 1ª y 3ª y se aplica el método de reducción (suma y resta):

$$\begin{matrix} (1^a) \\ (3^a) \end{matrix} \begin{cases} X & -Y & +3Z & = & -4 \\ X & +2Y & -Z & = & 6 \end{cases}$$

En este caso en particular notamos que la 3ª ecuación la podemos multiplicar por menos uno (-1) para anular la "X" cuando se sume con la ecuación 1ª.

Recuerde que se deben multiplicar TODOS los términos de la ecuación.

$$\begin{matrix} (1^a) \\ (3^a).(-1) \end{matrix} \begin{cases} X & -Y & +3Z & = & -4 \\ -X & -2Y & +Z & = & -6 \end{cases}$$

Luego se realiza la suma algebraica de las dos ecuaciones :

$$\begin{array}{r} (1^a) \\ (3^a).(-1) \end{array}\left\{\begin{array}{rrrcr} X & -Y & +3Z & = & -4 \\ -X & -2Y & +Z & = & -6 \\ \hline 0X & -3Y & +4Z & = & -10 \end{array}\right.$$

Esta ecuación resultante la identificaremos como **(3ª)*** *y el sistema inicial quedará conformado así :*

$$\begin{array}{r} (1^a) \\ (2^a)^* \\ (3^a)^* \end{array}\left\{\begin{array}{rrrcr} X & -Y & +3Z & = & -4 \\ 0X & -2Y & +2Z & = & -6 \\ 0X & -3Y & +4Z & = & -10 \end{array}\right.$$

Solo nos faltaría anular la "Y" en la tercera ecuación, para eso se construye un sistema de dos ecuaciones con la **(2ª)*** *y* **(3ª)*** *ecuación.*

$$\begin{array}{r} (2^a)^* \\ (3^a)^* \end{array}\left\{\begin{array}{rrcr} -2Y & +2Z & = & -6 \\ -3Y & +4Z & = & -10 \end{array}\right.$$

Recordando lo aprendido en SISTEMAS DE ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS (MÉTODO DE REDUCCIÓN), multiplicamos la ecuación (2ª) por tres (3) y la ecuación (3ª)* por menos dos (-2).*

$$\begin{array}{r} (2^a)^*.(3) \\ (3^a)^*.(-2) \end{array}\left\{\begin{array}{rrcr} -2Y & +2Z & = & -6 \\ -3Y & +4Z & = & -10 \end{array}\right.$$

Recuerde que se deben multiplicar TODOS los términos de la ecuación.

$$\begin{array}{r} (2^a)^*.(3) \\ (3^a)^*.(-2) \end{array}\left\{\begin{array}{rrcr} -6Y & +6Z & = & -18 \\ 6Y & -8Z & = & 20 \\ \hline 0Y & -2Z & = & 2 \end{array}\right.$$

Esta ecuación resultante la identificaremos como **(3ª)**** *y el sistema inicial quedará conformado así :*

$$\begin{array}{r} \mathbf{(1^a)} \\ \mathbf{(2^a)^*} \\ \mathbf{(3^a)^{**}} \end{array}\left\{\begin{array}{rrrcr} X & -Y & +3Z & = & -4 \\ & -2Y & +2Z & = & -6 \\ & & -2Z & = & 2 \end{array}\right.$$

Ya es un sistema escalonado y su solución es extremadamente fácil y fue explicada al principio de esta guía.

*Se resuelve la (3ª)** ecuación ya que presenta una sola incógnita :*

$$-2Z = 2 \quad ; \quad Z = \frac{2}{-2} \quad ; \quad \boxed{\boldsymbol{Z = -1}}$$

Conocido el valor de "Z" lo podemos sustituir en la (2ª) ecuación y calcular el valor de "Y" :*

$$-2Y + (2)(-1) = -6 \quad ; \quad -2Y - 2 = -6$$

$$-2Y = -6 + 2 \quad ; \quad -2Y = -4$$

$$Y = \frac{-4}{-2} \quad ; \quad \boxed{\boldsymbol{Y = 2}}$$

Conocidos los valores de "Y" y "Z" los podemos sustituir en la primera ecuación y calcular el valor de "X" :

$$X - 2 + 3(-1) = -4 \quad ; \quad X - 2 - 3 = -4$$

$$X = -4 + 2 + 3 \quad ; \quad \boxed{\boldsymbol{X = 1}}$$

Para comprobar los resultados se deben introducir los valores calculados en las ecuaciones del sistema y se debe cumplir la igualdad indicada.

$$\begin{array}{r} (1^a) \\ (2^a) \\ (3^a) \end{array}\left\{\begin{array}{rrrcr} X & -Y & +3Z & = & -4 \\ X & +Y & +Z & = & 2 \\ X & +2Y & -Z & = & 6 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} (1^a) \\ (2^a) \\ (3^a) \end{array}\left\{\begin{array}{rrrcr} 1 & -2 & +3(-1) & = & -4 \\ 1 & +2 & -1 & = & 2 \\ 1 & +2(2) & -(-1) & = & 6 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} (1^a) \\ (2^a) \\ (3^a) \end{array}\left\{\begin{array}{rcr} -4 & = & -4 \\ 2 & = & 2 \\ 6 & = & 6 \end{array}\right.$$

La comprobación fue exitosa.

EJERCICIO 2 : Resolver el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el Método de Gauss.

$$\begin{array}{r} (1^a) \\ (2^a) \\ (3^a) \end{array} \left\{ \begin{array}{rrrcr} X & +2Y & -3Z & = & -16 \\ 3X & +Y & -2Z & = & -10 \\ 2X & -3Y & +Z & = & -4 \end{array} \right.$$

Solución :

Se anula la "X" en la 2ª ecuación. Para eso, se construye un sistema con las ecuaciones 1ª y 2ª y se aplica el método de reducción (suma y resta):

$$\begin{array}{r} (1^a) \\ (2^a) \end{array} \left\{ \begin{array}{rrrcr} X & +2Y & -3Z & = & -16 \\ 3X & +Y & -2Z & = & -10 \end{array} \right.$$

En este caso en particular notamos que la 1ª ecuación la podemos multiplicar por menos uno (-3) para anular la "X" cuando se sume con la ecuación 2ª.

Al multiplicar todos los términos de la ecuación 1ª por menos tres, la ecuación equivalente será :

$$\begin{array}{r} (1^a).(-3) \\ (2^a) \end{array} \left\{ \begin{array}{rrrcr} -3X & -6Y & +9Z & = & 48 \\ 3X & +Y & -2Z & = & -10 \end{array} \right.$$

Luego se realiza la suma algebraica de las dos ecuaciones :

$$\begin{array}{r} (1^a).(-3) \\ (2^a) \\ \\ \end{array} \left\{ \begin{array}{rrrcr} -3X & -6Y & +9Z & = & 48 \\ 3X & +Y & -2Z & = & -10 \\ \hline \mathbf{0X} & \mathbf{-5Y} & \mathbf{+7Z} & \mathbf{=} & \mathbf{38} \end{array} \right.$$

Esta ecuación resultante la identificaremos como **(2ª)*** y el sistema inicial quedará conformado así :

$$\begin{array}{r} (1^a) \\ \mathbf{(2^a)^*} \\ (3^a) \end{array} \left\{ \begin{array}{rrrcr} X & +2Y & -3Z & = & -16 \\ \mathbf{0X} & \mathbf{-5Y} & \mathbf{+7Z} & \mathbf{=} & \mathbf{38} \\ 2X & -3Y & +Z & = & -4 \end{array} \right.$$

Ahora anularemos la "X" en la 3ª ecuación. Para eso, se construye un sistema con las ecuaciones 1ª y 3ª y se aplica el método de reducción (suma y resta):

$$\begin{array}{r} (1^a) \\ (3^a) \end{array} \left\{ \begin{array}{rrrcr} X & +2Y & -3Z & = & -16 \\ 2X & -3Y & +Z & = & -4 \end{array} \right.$$

En este caso en particular notamos que la 1ª ecuación la podemos multiplicar por menos uno (-2) para anular la "X" cuando se sume con la ecuación 3ª.

Recuerde que se deben multiplicar TODOS los términos de la ecuación.

$$\begin{array}{r} (1^a).(-2) \\ (3^a) \end{array} \left\{ \begin{array}{rrrcr} -2X & -4Y & +6Z & = & 32 \\ 2X & -3Y & +Z & = & -4 \end{array} \right.$$

Luego se realiza la suma algebraica de las dos ecuaciones :

$$\begin{array}{r} (1^a).(-2) \\ (3^a) \\ \\ \end{array} \left\{ \begin{array}{rrrcr} -2X & -4Y & +6Z & = & 32 \\ 2X & -3Y & +Z & = & -4 \\ \hline \mathbf{0X} & \mathbf{-7Y} & \mathbf{+7Z} & \mathbf{=} & \mathbf{28} \end{array} \right.$$

Esta ecuación resultante la identificaremos como **(3ª)*** y el sistema inicial quedará conformado así :

$$\begin{array}{r} (1^a) \\ \mathbf{(2^a)^*} \\ \mathbf{(3^a)^*} \end{array} \left\{ \begin{array}{rrrcr} X & +2Y & -3Z & = & -16 \\ \mathbf{0X} & \mathbf{-5Y} & \mathbf{+7Z} & \mathbf{=} & \mathbf{38} \\ \mathbf{0X} & \mathbf{-7Y} & \mathbf{+7Z} & \mathbf{=} & \mathbf{28} \end{array} \right.$$

Solo nos faltaría anular la "Y" en la tercera ecuación, para eso se construye un sistema de dos ecuaciones con la **(2ª)*** y **(3ª)*** ecuación.

$$\begin{array}{r} (2^a)^* \\ (3^a)^* \end{array} \left\{ \begin{array}{rrcr} \mathbf{-5Y} & \mathbf{+7Z} & \mathbf{=} & \mathbf{38} \\ \mathbf{-7Y} & \mathbf{+7Z} & \mathbf{=} & \mathbf{28} \end{array} \right.$$

Recordando lo aprendido en SISTEMAS DE ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS (MÉTODO DE REDUCCIÓN), multiplicamos la ecuación (2ª)* por siete (7) y la ecuación (3ª)* por menos cinco (-5).

$$\begin{array}{r} (2^a)^*.(7) \\ (3^a)^*.(-5) \end{array} \left\{ \begin{array}{rrcr} -5Y & +7Z & = & 38 \\ -7Y & +7Z & = & 28 \end{array} \right.$$

Recuerde que se deben multiplicar TODOS los términos de la ecuación.

$$\begin{array}{r} (2^a)^*.(7) \\ (3^a)^*.(-5) \\ \\ \end{array} \left\{ \begin{array}{rrcr} -35Y & +49Z & = & 266 \\ +35Y & -35Z & = & -140 \\ \hline 0Y & +14Z & = & 126 \end{array} \right.$$

Esta ecuación resultante la identificaremos como **$(3^a)^{**}$** *y el sistema inicial quedará conformado así :*

$$\begin{array}{l} (1^a) \\ (2^a)^* \\ (3^a)^{**} \end{array} \left\{ \begin{array}{rrrcr} X & +2Y & -3Z & = & -16 \\ & -5Y & +7Z & = & 38 \\ & & 14Z & = & 126 \end{array} \right.$$

Ya es un sistema escalonado y su solución es extremadamente fácil y fue explicada al principio de esta guía.

Se resuelve la $(3^a)^{**}$ ecuación ya que presenta una sola incógnita :

$$14Z = 126 \quad ; \quad Z = \frac{126}{14} \quad ; \quad \boxed{\boldsymbol{Z = 9}}$$

Conocido el valor de "Z" lo podemos sustituir en la $(2^a)^*$ ecuación y calcular el valor de "Y" :

$$-5Y + (7)(9) = 38 \quad ; \quad -5Y + 63 = 38$$

$$-5Y = 38 - 63 \quad ; \quad -5Y = -25$$

$$Y = \frac{-25}{-5} \quad ; \quad \boxed{\boldsymbol{Y = 5}}$$

Conocidos los valores de "Y" y "Z" los podemos sustituir en la primera ecuación y calcular el valor de "X" :

$$X + 2(5) - 3(9) = -16 \quad ; \quad X + 10 - 27 = -16$$

$$X = -16 - 10 + 27 \quad ; \quad \boxed{\boldsymbol{X = 1}}$$

Para comprobar los resultados se deben introducir los valores calculados en las ecuaciones del sistema y se debe cumplir la igualdad indicada.

$$\begin{array}{l} (1^a) \\ (2^a) \\ (3^a) \end{array} \left\{ \begin{array}{rrrcr} X & +2Y & -3Z & = & -16 \\ 3X & +Y & -2Z & = & -10 \\ 2X & -3Y & +Z & = & -4 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} (1^a) \\ (2^a) \\ (3^a) \end{array} \left\{ \begin{array}{rrrcr} 1 & +2(5) & -3(9) & = & -16 \\ 3(1) & +5 & -2(9) & = & -10 \\ 2(1) & -3(5) & +9 & = & -4 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} (1^a) \\ (2^a) \\ (3^a) \end{array} \left\{ \begin{array}{rrrcr} 1 & +10 & -27 & = & -16 \\ 3 & +5 & -18 & = & -10 \\ 2 & -15 & +9 & = & -4 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} (1^a) \\ (2^a) \\ (3^a) \end{array} \left\{ \begin{array}{rcr} -16 & = & -16 \\ -10 & = & -10 \\ -4 & = & -4 \end{array} \right.$$

La comprobación fue exitosa.

EJERCICIO 3 : *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el Método de Gauss.*

$$\begin{cases} 2X \quad\quad + 3Z = 0 \\ X + 3Y - Z = 7 \\ 4X = 4 \end{cases}$$

Solución :

Recordando el concepto de Sistema de Ecuaciones Escalonado y la aclaratoria de que NO SIEMPRE se deben ordenar las variables de la forma X,Y,Z; puedo ordenarlo "a mi conveniencia" de la forma Y,Z,X. Luego, el sistema queda escalonado de la siguiente manera :

$$\begin{matrix} (1^a) \\ (2^a) \\ (3^a) \end{matrix} \begin{cases} 3Y - Z + X = 7 \\ \quad\quad 3Z + 2X = 0 \\ \quad\quad\quad\quad 4X = 4 \end{cases}$$

Ya es un sistema escalonado y su solución es extremadamente fácil y fue explicada al principio de esta guía.

*Se resuelve la (3^a)** ecuación ya que presenta una sola incógnita :*

$$4X = 4 \quad ; \quad X = \frac{4}{4} \quad ; \quad \boxed{X = 1}$$

Conocido el valor de "X" lo podemos sustituir en la (2^a) ecuación y calcular el valor de "Z" :*

$$3Z + (2)(1) = 0 \quad ; \quad 3Z + 2 = 0 \quad ; \quad 3Z = -2$$

$$\boxed{Z = \frac{-2}{3}}$$

Conocidos los valores de "X" y "Z" los podemos sustituir en la primera ecuación y calcular el valor de "Y" :

$$3Y - \left(\frac{-2}{3}\right) + 1 = 7 \quad ; \quad 3Y + \frac{2}{3} + 1 = 7$$

$$3Y = 7 - \frac{2}{3} - 1 \quad ; \quad 3Y = \frac{21 - 3 - 2}{3}$$

$$3Y = \frac{16}{3} \quad ; \quad \boxed{Y = \frac{16}{9}}$$

EJERCICIO 4 : *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el Método de Gauss.*

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Solución: } x = 1, \ y = -2, \ z = 3}$$

Resuelve los siguientes sistemas :

a) $\begin{cases} x + 4y - 8z = -8 \\ 4x + 8y - z = 76 \\ 8x - y - 4z = 110 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2y + 3z = 15 \\ 3x + y = 12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{cases}$

Soluciones : a) x = 16, y = 2, z = 4 b) x = 3, y = 3, z = 3 c) x = 6, y = -2, z = -5/2

❖ INECUACIONES LINEALES

REGLAS :

1) *Si* **a < b**, *entonces* **a+c < b+c** *(también se cumple para ≤, > y ≥).*

Ejemplo : Si **3 < 5** *y sumamos 2 a ambos términos, obtenemos* **5 < 7**.

2) *Si* **a < b** *y* **c < d**, *entonces* **a+c < b+d** *(también se cumple para ≤, > y ≥).*

Ejemplo : Si **3 < 5** *y* **4 < 6**, *entonces sumando las desigualdades, obtenemos* **7 < 11**.

3) *Si* **a < b** *y* **c > 0**, *entonces* **ac < bc** *(también se cumple para ≤, > y ≥).*

Ejemplo : Si **3 < 5** *y multiplicamos por 2 obtenemos* **6 < 10**.

4) *Si* **a < b** *y* **c < 0**, *entonces* **ac > bc** *(también se cumple para ≤, > y ≥). Cuando se multiplica por un valor negativo se cambian los signos de los términos y el sentido de la desigualdad.*

Ejemplo : Si **3 < 5** al multiplicar *por –2 obtenemos* **–6 > –10**.

EJERCICIO 1 : *Resolver* $X + 2 \geq 7$

De la misma forma que hemos trabajado con las ecuaciones lineales podemos hacerlo con las inecuaciones, es decir se recomienda ordenarla de manera tal que las variables queden ubicadas en el primer miembro (lado izquierdo del signo de desigualdad) y los números en el segundo miembro (lado derecho del signo de desigualdad).

Igual que en las ecuaciones, al "pasar" un término de un miembro al otro se debe cambiar el signo de dicho término.

En este ejercicio mantenemos a "X" al lado izquierdo del signo de la desigualdad y pasamos a "+2" al lado derecho pero cambiándole el signo.

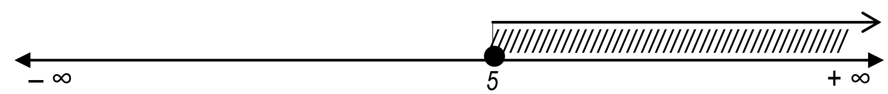
$$X + 2 \geq 7$$

Así, la inecuación quedará expresada como:

$$X \geq 7 - 2 \qquad ; \qquad \boldsymbol{X \geq 5}$$

Lo que significa que "X" puede tomar valores iguales o mayores a 5; esta solución puede ser mostrada de tres formas :

En forma gráfica:



Nota: Se coloca ● en el número 5 indicando que él forma parte de la solución.

En forma de intervalo:

$$\mathbf{X = [\,5\,, +\infty\,)}$$

Intervalo cerrado en 5 (incluido el 5) hasta infinito positivo (tanto el infinito positivo como el infinito negativo se indican como intervalo abierto "paréntesis").

En forma de conjunto:

$$\mathbf{X = \{\, X \in \mathbb{R} \;/\; X \geq 5 \,\}}$$

X pertenece a los números reales tal que X sea mayor o igual a 5

EJERCICIO 2 : Resolver $\mathbf{3 \leq X - 2}$

De la misma forma que hemos trabajado con las ecuaciones lineales podemos hacerlo con las inecuaciones, es decir se recomienda ordenarla de manera tal que las variables queden ubicadas en el primer miembro (lado izquierdo del signo de desigualdad) y los números en el segundo miembro (lado derecho del signo de desigualdad).

Igual que en las ecuaciones, al "pasar" un término de un miembro al otro se debe cambiar el signo de dicho término.

$$3 \leq X - 2$$

$$-X \leq -2 - 3 \quad ; \quad -X \leq -5$$

En aquellos casos (como este) en que la variable presente signo negativo se debe multiplicar toda la inecuación por "menos uno", teniendo en cuenta que se deben cambiar los signos de todos los términos y también se debe cambiar el sentido de la desigualdad.

$$(-X \leq -5).(-1)$$

$$\mathbf{X \geq 5}$$

Lo que significa que "X" puede tomar valores iguales o mayores a 5; esta solución es la misma que la del ejercicio 1.

EJERCICIO 3 : Resolver $\mathbf{3X - 4 < X + 2}$

Ordenar de manera tal que las variables queden ubicadas en el primer miembro (lado izquierdo de la desigualdad) y los números en el segundo miembro (lado derecho de la desigualdad).

Al "pasar" un término de un miembro al otro se debe cambiar el signo de dicho término.

$$3X - X < 2 + 4 \quad ; \quad 2X < 6$$

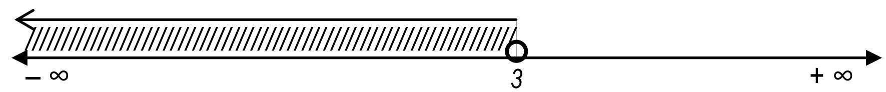
El "2" que está multiplicando a la "X" en el miembro izquierdo de la inecuación pasará al miembro derecho dividiendo al "6" (Esto solo se puede hacer si el coeficiente que acompaña a la variable es positivo).

Si la variable hubiese estado acompañada por un número negativo, primero se multiplica toda la inecuación por "menos uno" (ver ejercicio 2) y después se hace el despeje.

$$2X < 6 \quad ; \quad X < \frac{6}{2} \quad ; \quad \mathbf{X < 3}$$

Lo que significa que "X" puede tomar valores menores a 3 (no incluye al 3); esta solución puede ser mostrada de tres formas :

<u>En forma gráfica:</u>



*Nota: Se coloca **O** en el número 3 indicando que él NO forma parte de la solución.*

<u>En forma de intervalo:</u>

$$\mathbf{X = (-\infty , 3)}$$

Intervalo abierto desde menos infinito hasta intervalo abierto en 3 (no incluye al 3).

<u>En forma de conjunto:</u>

$$\mathbf{X = \{ X \in \mathbb{R} \;/\; X < 3 \}}$$

X pertenece a los números reales tal que X sea menor a 3

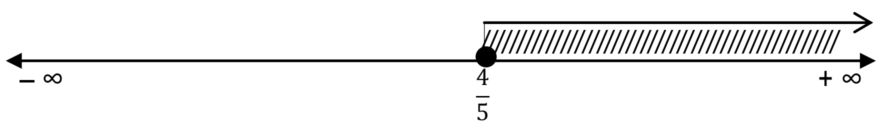
EJERCICIO 4 : *Resolver* $2X - 1 \geq -3X + 3$

Ordenando las variables al lado izquierdo y los números al lado derecho:

$$2X + 3X \geq 3 + 1 \quad ; \quad 5X \geq 4 \quad ; \quad X \geq \frac{4}{5}$$

Lo que significa que "X" puede tomar valores iguales o mayores a $\frac{4}{5}$*, Esta solución puede ser mostrada de tres formas :*

<u>En forma gráfica:</u>



Nota: Se coloca ● en $\frac{4}{5}$ *indicando que él forma parte de la solución.*

<u>En forma de intervalo:</u>

$$X = [\ \tfrac{4}{5}, +\infty\ )$$

Intervalo cerrado en $\frac{4}{5}$ *(incluido el* $\frac{4}{5}$*) hasta infinito positivo (tanto el infinito positivo como el infinito negativo se indican como intervalo abierto "paréntesis").*

<u>En forma de conjunto:</u>

$$X = \{\, X \in \mathbb{R} \ / \ X \geq \tfrac{4}{5} \,\}$$

X pertenece a los números reales tal que X sea mayor o igual a $\frac{4}{5}$

EJERCICIO 5 : *Resolver* $4X + 1 - 2 \geq 7X - 6 - X$

Ordenando las variables al lado izquierdo y los números al lado derecho:

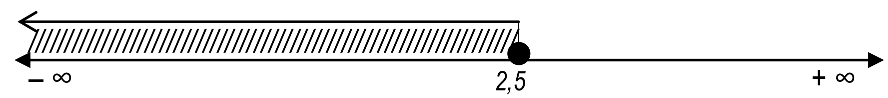
$$4X - 7X + X \geq -6 - 1 + 2 \quad ; \quad -2X \geq -5$$

Como la variable "X" está acompañada por un coeficiente con signo negativo (– 2) se debe multiplicar toda la inecuación por "menos uno", teniendo en cuenta que se deben cambiar los signos de todos los términos y también se debe <u>cambiar el sentido de la desigualdad</u>.

$$(-2X \geq -5).(-1) \quad ; \quad 2X \leq 5 \quad ; \quad X \leq \frac{5}{2} \quad ; \quad X \leq 2{,}5$$

Lo que significa que "X" puede tomar valores iguales o menores a 2,5. Esta solución puede ser mostrada de tres formas :

<u>En forma gráfica:</u>



<u>En forma de intervalo:</u>

$$X = (-\infty, 2.5\ ]$$

<u>En forma de conjunto:</u>

$$X = \{\, X \in \mathbb{R} \ / \ X \leq 2{,}5 \,\}$$

EJERCICIO 6 : *Resolver* $-10X + 2 < 3X + 28$

Ordenando las variables al lado izquierdo y los números al lado derecho:

$$-10X - 3X < 28 - 2 \quad ; \quad -13X < 26$$

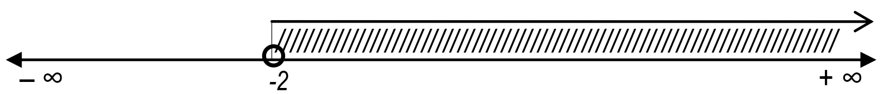
Como la variable "X" está acompañada por un coeficiente con signo negativo (– 13) se debe multiplicar toda la inecuación por "menos uno", teniendo en cuenta que se deben cambiar los signos de todos los términos y también se debe cambiar el sentido de la desigualdad.

$$(-13X < 26).(-1) \quad ; \quad 13X > -26$$

$$X > \frac{-26}{13} \quad ; \quad \boldsymbol{X > -2}$$

Lo que significa que "X" puede tomar valores mayores a " – 2" (no incluye al "– 2"); esta solución puede ser mostrada de tres formas :

En forma gráfica:



En forma de intervalo:

$$\mathbf{X = (-2, +\infty)}$$

En forma de conjunto:

$$\mathbf{X = \{ X \in \mathbb{R} \ / \ X > -2 \}}$$

EJERCICIO 7 :

Resolver $\frac{X-2}{6} + \frac{3X}{2} < -\frac{X}{4}$

Cuando alguno, varios o todos los términos de la inecuación presenten fracciones, se recomienda "eliminar" los denominadores para que la inecuación quede expresada en forma lineal.

La operación para "eliminar" los denominadores se realiza en forma similar que con las ecuaciones.

Primero se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores:
(m.c.m de 6, 2 y 4 = 12)

Luego se multiplica TODA la inecuación por el m.c.m (se debe multiplicar cada término por el m.c.m):

$$\frac{\mathbf{12\,(X-2)}}{\mathbf{6}} + \frac{\mathbf{12(3X)}}{\mathbf{2}} < -\frac{\mathbf{12X}}{\mathbf{4}}$$

$$\frac{\mathbf{12X-24}}{\mathbf{6}} + \frac{\mathbf{36X}}{\mathbf{2}} < -\frac{\mathbf{12X}}{\mathbf{4}}$$

Posteriormente se divide cada numerador entre su respectivo denominador.

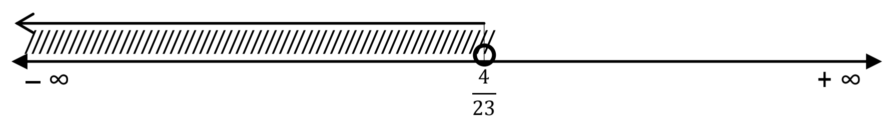
$$2X - 4 + 18X < -3X$$

La inecuación ha quedado expresada en forma lineal y su solución puede ser enfocada de la misma forma como los ejercicios anteriores:

$$2X + 18X + 3X < 4 \quad ; \quad 23X < 4 \quad ; \quad \boldsymbol{X < \frac{4}{23}}$$

Lo que significa que "X" puede tomar valores menores a $\frac{4}{23}$ *(no incluye al* $\frac{4}{23}$*); esta solución puede ser mostrada de tres formas :*

En forma gráfica:



En forma de intervalo:

$$\mathbf{X = (-\infty, \frac{4}{23})}$$

En forma de conjunto:

$$\mathbf{X = \{ X \in \mathbb{R} \ / \ X < \frac{4}{23} \}}$$

EJERCICIO 8 : Resolver $\frac{2-X}{5} - 3 \geq 4(X-2)$

Primero se realiza la multiplicación indicada en el miembro derecho de la inecuación :

$$\frac{2-X}{5} - 3 \geq 4X - 8$$

Cuando alguno, varios o todos los términos de la inecuación presenten fracciones, se recomienda "eliminar" los denominadores para que la inecuación quede expresada en forma lineal.

La operación para "eliminar" los denominadores se realiza en forma similar que con las ecuaciones.

Primero se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores: (cuando exista un solo denominador se tomará como m.c.m. En este caso m.c.m = 5)

Luego se multiplica TODA la inecuación por el m.c.m (se debe multiplicar cada término por el m.c.m):

$$\frac{5(2-X)}{5} - (5)(3) \geq 5(4X-8)$$

$$\frac{10-5X}{5} - 15 \geq 20X - 40$$

Posteriormente se divide cada numerador entre su respectivo denominador.

$$2 - X - 15 \geq 20X - 40$$

La inecuación ha quedado expresada en forma lineal y su solución puede ser enfocada de la misma forma como los ejercicios anteriores:

$$-X - 20X \geq -40 - 2 + 15 \quad ; \quad -21X \geq -27$$

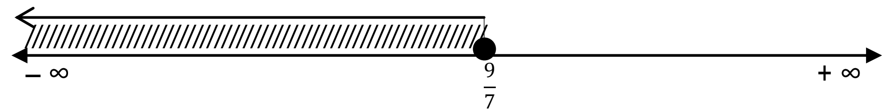
Como la variable "X" está acompañada por un coeficiente con signo negativo (– 21) se debe multiplicar toda la inecuación por "menos uno", teniendo en cuenta que se deben cambiar los signos de todos los términos y también se debe <u>cambiar el sentido de la desigualdad</u>.

$$(-21X \geq -27).(-1) \quad ; \quad 21X \leq 27 \quad ; \quad X \leq \frac{27}{21}$$

Como al reducir por tres $\frac{27}{21} = \frac{9}{7}$; $X \leq \frac{9}{7}$

Lo que significa que "X" puede tomar valores menores o iguales a $\frac{9}{7}$, esta solución puede ser mostrada de tres formas :

<u>En forma gráfica:</u>



<u>En forma de intervalo:</u>

$$X = (-\infty, \frac{9}{7}]$$

<u>En forma de conjunto:</u>

$$X = \{X \in \mathbb{R} \ / \ X \leq \frac{9}{7}\}$$

EJERCICIO 9 : Resolver $-1 < 2X - 5 < 7$

Esta expresión representa realmente dos inecuaciones, la primera : **– 1 < 2X – 5** y la segunda : **2X – 5 < 7**

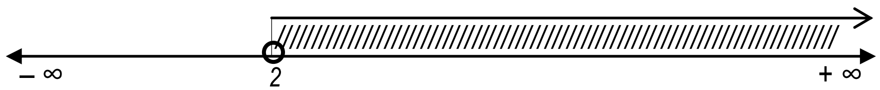
La solución total estará representada por la intersección de las dos soluciones parciales. En ese sentido, se procede a resolver cada inecuación por separado y al final se consigue la intersección de ambas.

<u>Resolviendo **– 1 < 2X – 5**</u>

$$-1 < 2X - 5 \quad ; \quad -2X < -5 + 1 \quad ; \quad -2X < -4$$

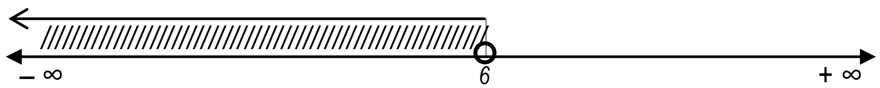
Al multiplicar por menos uno :

$(-2X < -4)\,(-1)$; $2X > 4$; $X > \frac{4}{2}$; $\boldsymbol{X > 2}$

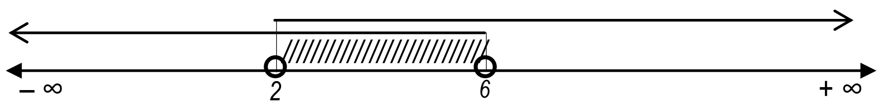


Resolviendo **$2X - 5 < 7$**

$2X - 5 < 7$; $2X < 7 + 5$; $2X < 12$; $X < \frac{12}{2}$; $\boldsymbol{X < 6}$



Al sobreponer ambas gráficas se observa fácilmente la intersección:



La solución es : **$2 < X < 6$**

En forma de intervalo:

$$\mathbf{X = (2\,,6)}$$

En forma de conjunto:

$$\mathbf{X = \{ X \in \mathbb{R} \;/\; 2 < X < 6 \}}$$

EJERCICIO 10 : *Resolver* **$2X + 1 \leq 4X - 3 < X + 7$**

Esta expresión representa realmente dos inecuaciones:

La primera : **$2X + 1 \leq 4X - 3$** *y la segunda :* **$4X - 3 < X + 7$**

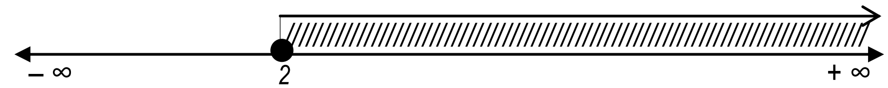
La solución total estará representada por la intersección de las dos soluciones parciales. En ese sentido, se procede a resolver cada inecuación por separado y al final se consigue su intersección.

Resolviendo **$2X + 1 \leq 4X - 3$**

$2X - 4X \leq -3 - 1$; $-2X \leq -4$

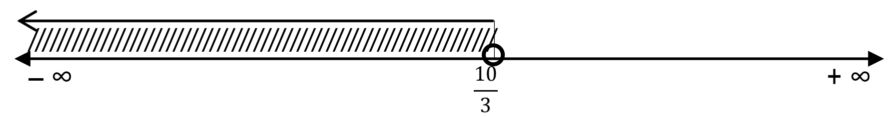
Al multiplicar por menos uno :

$2X \geq 4$; $X \geq \frac{4}{2}$; $\boldsymbol{X \geq 2}$

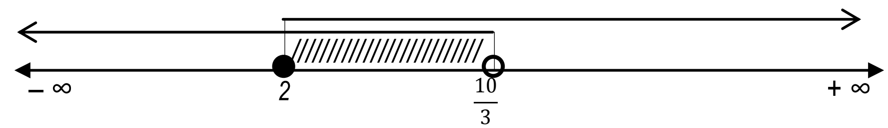


Resolviendo **$4X - 3 < X + 7$**

$4X - X < 7 + 3$; $3X < 10$; $\boldsymbol{X < \frac{10}{3}}$



Al sobreponer ambas gráficas se observa fácilmente la intersección:



La solución: **$2 \leq X \leq \frac{10}{3}$**

En forma de intervalo:

$$\mathbf{X = [\;2\,,\ \tfrac{10}{3}\;)}$$

En forma de conjunto:

$$\mathbf{X = \{ X \in \mathbb{R} \;/\; 2 \leq X < \tfrac{10}{3} \}}$$

❖ INECUACIONES DE 2do. GRADO

Existen varios métodos para resolver este tipo de inecuaciones; casi todos consideran el estudio de las dos raíces del polinomio de segundo grado que contiene la desigualdad.

Cuando la ecuación de segundo grado (parábola) no intercepta al eje "X" (eje horizontal o eje de las abscisas) sus raíces son imaginarias y no pueden indicarse sobre la recta real y esta consideración confunde muchas veces a nuestros estudiantes.

El método que hemos considerado más sencillo consiste en graficar la parábola e indicar que los valores que estén sobre el eje horizontal son los valores positivos y los que estén por debajo son los negativos.

EJERCICIO 1 : *Resolver* $X^2 \geq 3 + 2X$

Solución :

Lo primero que debemos hacer es "pasar" todos los términos al lado izquierdo de la desigualdad y ordenarlo como un polinomio en forma descendente ($aX^2 + bX + c$) :

$$X^2 - 2X - 3 \geq 0$$

Ahora procedemos a graficar el miembro que está al lado izquierdo del signo de la desigualdad, considerándolo como una función.

Para graficar una función de segundo grado se pueden seguir los siguientes pasos :

Primer paso : *Se identifican los valores de* a, b *y* c *de la función.*

$$a = 1 \quad ; \quad b = -2 \quad ; \quad c = -3$$

Segundo paso : *Se calcula el eje de simetría con la fórmula :* $X = \frac{-b}{2a}$

$$X = \frac{-b}{2a} \quad ; \quad X = \frac{-(-2)}{2(1)} \quad ; \quad X = \frac{2}{2} \quad ; \quad X = 1$$

Esto significa que por X = 1 pasará una recta perpendicular al eje X que representa al eje de simetría de la parábola.

Se introduce este valor en la función $f(x) = X^2 - 2X - 3$ *para determinar el vértice de la parábola.*

$$f(1) = (1)^2 - 2(1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4 \quad ; \quad f(1) = -4$$

Esto nos indica que el vértice de la parábola es el punto. **(1, – 4)**

Tercer paso : *Se determina si la función intercepta o no al eje X con el uso de la formula conocida como discriminante* **(** $b^2 - 4ac$ **).**

Recuerde que la intercepción o corte con el eje X lo indican las raíces de la función.

- *Si* $b^2 - 4ac > 0$ *la función tiene 2 raíces diferentes (corta al eje X en dos puntos).*
- *Si* $b^2 - 4ac = 0$ *la función tiene 2 raíces iguales (tiene su vértice en un punto contenido en el eje X).*
- *Si* $b^2 - 4ac < 0$ *la función no tiene raíces reales (NO corta al eje X).*

$$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16$$

Como $b^2 - 4ac > 0$ *la función tiene 2 raíces diferentes (corta al eje X en dos puntos).*

Cuarto paso : *Se calculan las raíces de la función con el uso de la fórmula general de segundo grado o resolvente:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} \quad = \quad \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \quad = \quad \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$X_1 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} \quad ; \quad \boldsymbol{X_1 = 3}$$

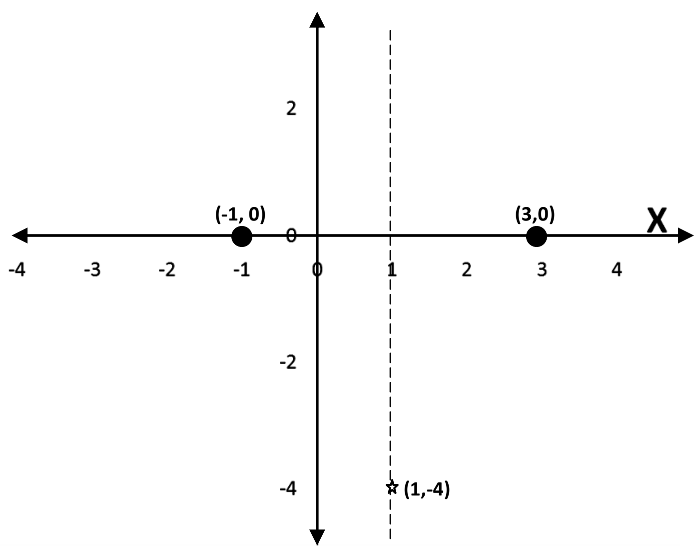
*Esto nos indica que la parábola pasa por el punto .**(3,0)***

$$X_2 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} \quad ; \quad \boldsymbol{X_2 = -1}$$

*Esto nos indica que la parábola pasa por el punto. **(–1,0)***

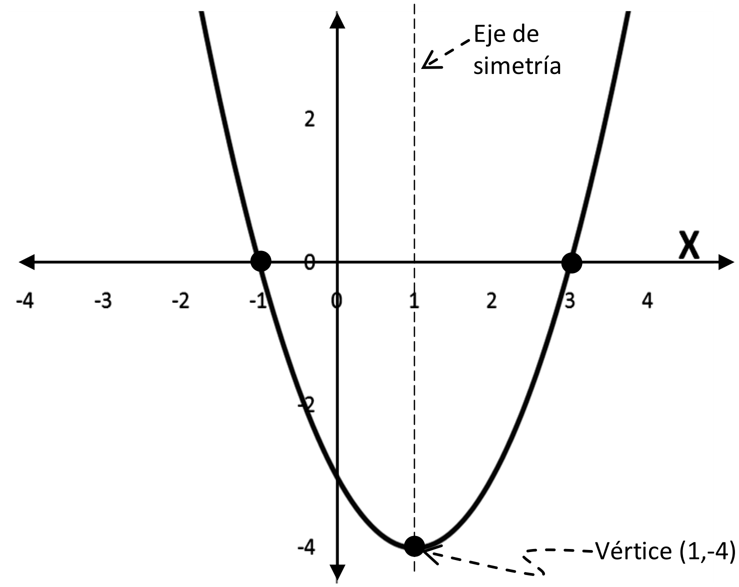
<u>Quinto paso :</u> *Se indican los puntos calculados en un sistema de coordenadas rectangulares y posteriormente se grafica la parábola.*

Como la inecuación es del tipo ≥ los cortes con el eje X formarán parte de la solución y por lo tanto se indican con un círculo "relleno".



El hecho de calcular el eje de simetría y el vértice de la parábola nos facilita el procedimiento para graficarla debido a que nos permite visualizar inmediatamente como será su configuración y sobre todo su concavidad y su punto más alto o más bajo (vértice) según sea el caso.

En este caso en particular si unimos los tres puntos se deduce fácilmente que la parábola quedará graficada así :



Una vez graficada la parábola resulta extremadamente fácil visualizar cuales son los valores positivos de la función (están por encima del eje X) y los valores negativos (están por debajo del eje X).

Como la desigualdad estudiada quedó ordenada como $X^2 - 2X - 3 \geq 0$ nos interesa determinar los valores mayores e iguales a cero (valores positivos de la función) y es evidente al observar la grafica que serán los intervalos

(– ∞ , – 1] *y* **[3 , + ∞)**

La solución puede ser mostrada de tres formas :

<u>En forma gráfica:</u>

En forma de intervalo:

$$X = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

En forma de conjunto:

$$X = \{ X \in \mathbb{R} \;/\; X \leq -1 \wedge X \geq 3 \}$$

*Todos los "X" menores e iguales a "**– 1**" y todos los "X" mayores e iguales a "3",*

***Nota:** Si la desigualdad estudiada hubiese quedado ordenada como **$X^2 - 2X - 3 \leq 0$** nos hubiese interesado determinar los valores menores e iguales a cero (valores negativos de la función mas el cero) y es evidente al observar la grafica que serán los valores que están por debajo del eje "X".*

$$[-1, 3]$$

EJERCICIO 2 : *Resolver* $X^2 \geq -4$

Solución :

Lo primero que debemos hacer es "pasar" todos los términos al lado izquierdo de la desigualdad y ordenarlo como un polinomio en forma descendente ($aX^2 + bX + c$) :

$$X^2 + 4 \geq 0$$

Ahora procedemos a graficar el miembro que está al lado izquierdo del signo de la desigualdad, considerándolo como una función.

Para graficar una función de segundo grado se pueden seguir los siguientes pasos :

***Primer paso :** Se identifican los valores de a, b y c de la función.*

$$a = 1 \quad ; \quad b = 0 \quad ; \quad c = 4$$

***Segundo paso :** Se calcula el eje de simetría con la fórmula :* $X = \frac{-b}{2a}$

$$X = \frac{-b}{2a} \quad ; \quad X = \frac{-(0)}{2(1)} \quad ; \quad X = \frac{0}{2} \quad ; \quad X = 0$$

Esto significa que por X = 0 pasará una recta perpendicular al eje X que representa al eje de simetría de la parábola (en este caso el eje de simetría será el eje "Y" del sistema de coordenadas).

*Se introduce este valor en la función **$f(x) = X^2 + 4$** para determinar el vértice de la parábola.*

$$f(0) = (0)^2 + 4 = 0 + 4 = 4 \quad ; \quad f(0) = 4$$

*Esto nos indica que el vértice de la parábola es el punto. **(0 , 4)***

Tercer paso :** Se determina si la función intercepta o no al eje X con el uso de la formula conocida como discriminante **($b^2 - 4ac$).

Recuerde que la intercepción o corte con el eje X lo indican las raíces de la función.

- *Si **$b^2 - 4ac > 0$** la función tiene 2 raíces diferentes (corta al eje X en dos puntos).*
- *Si **$b^2 - 4ac = 0$** la función tiene 2 raíces iguales (tiene su vértice en un punto contenido en el eje X).*
- *Si **$b^2 - 4ac < 0$** la función no tiene raíces reales (NO corta al eje X).*

$$b^2 - 4ac = (0)^2 - 4(1)(4) = 0 - 16 = -16$$

Como $b^2 - 4ac < 0$ la función no tiene raíces reales (NO corta al eje X).

Cuarto paso : *Como no se pueden calcular las dos raíces de la función se procede a calcular dos puntos de la parábola, uno ubicado al lado izquierdo del eje de simetría y el otro al lado derecho, esto nos facilitará visualizar fácilmente la configuración de la parábola.*

Como el eje de simetría es $X = 0$ puedo calcular los puntos cuando $X = -1$ y cuando $X = 1$, para lo cual sustituyo estos valores en la función $\mathbf{f(x) = X^2 + 4}$

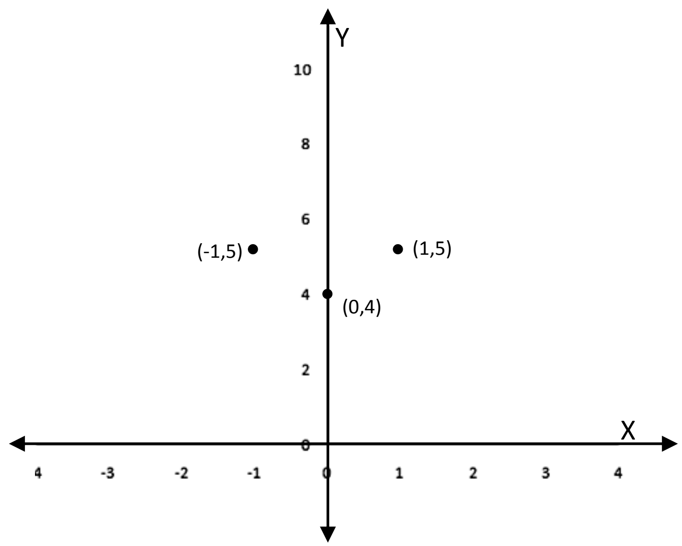
Para $X = -1$; $f(-1) = (-1)^2 + 4 = 1 + 4 = 5$

*Esto nos indica que la parábola pasa por el punto **(–1,5)***

Para $X = 1$; $f(1) = (1)^2 + 4 = 1 + 4 = 5$

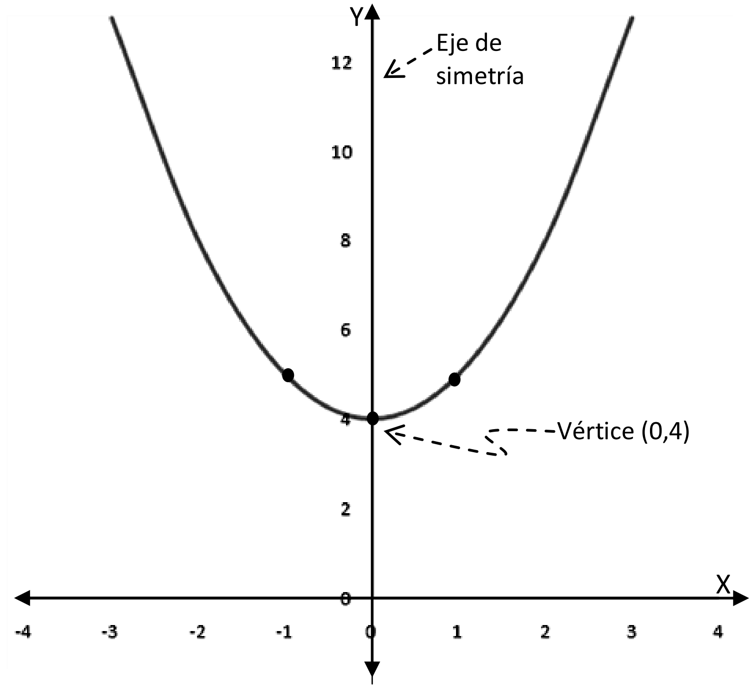
*Esto nos indica que la parábola pasa por el punto **(1,5)***

Quinto paso : *Se indican los puntos calculados en un sistema de coordenadas rectangulares y posteriormente se grafica la parábola.*



El hecho de calcular el eje de simetría y el vértice de la parábola nos facilita el procedimiento para graficarla debido a que nos permite visualizar inmediatamente como será su configuración y sobre todo su concavidad y su punto más alto o más bajo (vértice) según sea el caso.

En este caso en particular si unimos los tres puntos se deduce fácilmente que la parábola quedará graficada así :



Una vez graficada la parábola resulta extremadamente fácil visualizar cuales son los valores positivos de la función (están por encima del eje X) y los valores negativos (están por debajo del eje X).

En este caso la parábola está ubicada completamente por encima del eje X por lo tanto todos los valores que toma son positivos.

Como la desigualdad estudiada quedó ordenada como $X^2 + 4 \geq 0$ nos interesa determinar los valores mayores e iguales a cero (valores positivos de la función) y es evidente al observar la grafica que serán todos los números reales.

<u>Solución en forma de intervalo:</u>

$$\mathbf{X = (-\infty , +\infty)}$$

<u>En forma de conjunto:</u>

$$\mathbf{X = \{ \mathbb{R} \}}$$

Nota: *Si la desigualdad estudiada hubiese quedado ordenada como* $X^2 + 4 \leq 0$ *nos hubiese interesado determinar los valores menores e iguales a cero (valores negativos de la función) y es evidente al observar la grafica que estos no existen.*

Luego, la solución será un conjunto vacío (X no pertenece al conjunto de los números reales).

EJERCICIO 3 : *Resolver* $5X - 4 - X^2 > 0$

Solución :

Ordenando el polinomio en forma descendente $(aX^2 + bX + c)$:

$$-X^2 + 5X - 4 > 0$$

Ahora procedemos a graficar el miembro que está al lado izquierdo del signo de la desigualdad, considerándolo como una función.

Para graficar una función de segundo grado se pueden seguir los siguientes pasos :

Primer paso : *Se identifican los valores de* a, b *y* c *de la función.*

$$a = -1 \quad ; \quad b = 5 \quad ; \quad c = -4$$

Segundo paso : *Se calcula el eje de simetría con la fórmula :* $X = \frac{-b}{2a}$

$$X = \frac{-b}{2a} \quad ; \quad X = \frac{-(5)}{2(-1)} \quad ; \quad X = \frac{-5}{-2} \quad ; \quad X = 2,5$$

Esto significa que por X = 2,5 pasará una recta perpendicular al eje X que representa al eje de simetría de la parábola.

Se introduce este valor en la función $f(x) = -X^2 + 5X - 4$ *para determinar el vértice de la parábola.*

$$f(2,5) = -(2,5)^2 + 5(2,5) - 4 = -6,25 + 12,5 - 4 = -2,25$$

$$f(2,5) = 2,25$$

Esto nos indica que el vértice de la parábola es el punto. ***(2.5 , 2.25)***

Tercer paso : *Se determina si la función intercepta o no al eje X con el uso de la formula conocida como discriminante* $(b^2 - 4ac)$.

$$b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(-1)(-4) = 25 - 16 = 9$$

Como $b^2 - 4ac > 0$ *la función tiene 2 raíces diferentes (corta al eje X en dos puntos).*

Cuarto paso : *Se calculan las raíces de la función con el uso de la fórmula general de segundo grado o resolvente:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Este cálculo se nos facilita por el hecho de que la cantidad sub-radical o radicando es la misma conocida como discriminante y ya fue calculada.

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-5 \pm 3}{-2}$$

$$X_1 = \frac{-5+3}{-2} = \frac{-2}{-2} \quad ; \quad X_1 = 1$$

*Esto nos indica que la parábola pasa por el punto .****(1,0)***

$$X_2 = \frac{-5-3}{-2} = \frac{-8}{-2} \quad ; \quad X_2 = 4$$

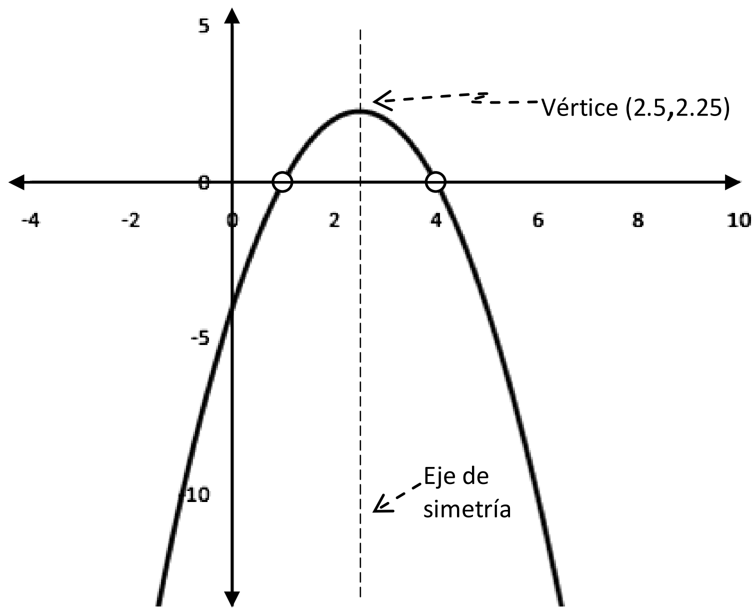
Esto nos indica que la parábola pasa por el punto. ***(4,0)***

Quinto paso : *Se indican los puntos calculados en un sistema de coordenadas rectangulares y posteriormente se grafica la parábola.*

Como la inecuación es del tipo > los cortes con el eje X ***NO*** *formarán parte de la solución y por lo tanto se indican con un círculo "hueco".*

El hecho de calcular el eje de simetría y el vértice de la parábola nos facilita el procedimiento para graficarla debido a que nos permite visualizar inmediatamente como será su configuración y sobre todo su concavidad y su punto más alto o más bajo (vértice) según sea el caso.

En este caso en particular si unimos los tres puntos se deduce fácilmente que la parábola quedará graficada así :



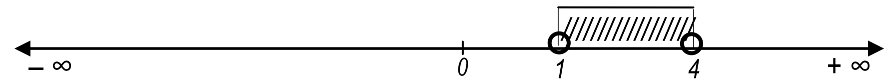
Una vez graficada la parábola resulta extremadamente fácil visualizar cuales son los valores positivos de la función (están por encima del eje X) y los valores negativos (están por debajo del eje X).

Como la desigualdad estudiada quedó ordenada como $-X^2+5X-4>0$ *nos interesa determinar los valores mayores a cero (valores positivos de la función sin incluir al cero) y es evidente al observar la grafica que será el intervalo*

$$(1\,,\,4)$$

La solución puede ser mostrada de tres formas :

<u>En forma gráfica:</u>



<u>En forma de intervalo:</u>

$$X = (1\,,4)$$

<u>En forma de conjunto:</u>

$$X = \{X \in \mathbb{R} \ / \ 1 < X < 4\}$$

<u>Nota:</u> *Si la desigualdad estudiada hubiese quedado ordenada como* $\boldsymbol{-X^2+5X-4<0}$ *nos hubiese interesado determinar los valores menores a cero (valores negativos de la función) y es evidente al observar la grafica que serán los valores que están por debajo del eje "X".*

$$X = (-\infty\,,1)\ \cup\ (4\,,+\infty)$$

EJERCICIO 4 :

Resolver $\mathbf{X^2 \leq -16+8X}$

<u>Solución :</u>

Lo primero que debemos hacer es "pasar" todos los términos al lado izquierdo de la desigualdad y ordenarlo como un polinomio en forma descendente (aX^2+bX+c) *:*

$$X^2-8X+16 \leq 0$$

Ahora procedemos a graficar el miembro que está al lado izquierdo del signo de la desigualdad, considerándolo como una función.

Para graficar una función de segundo grado se pueden seguir los siguientes pasos :

Primer paso : *Se identifican los valores de* a, b *y* c *de la función.*

$$a = 1 \quad ; \quad b = -8 \quad ; \quad c = 16$$

Segundo paso : *Se calcula el eje de simetría con la fórmula :* $X = \frac{-b}{2a}$

$$X = \frac{-b}{2a} \quad ; \quad X = \frac{-(-8)}{2(1)} \quad ; \quad X = \frac{8}{2} \quad ; \quad \mathbf{X = 4}$$

Esto significa que por $X = 4$ pasará una recta perpendicular al eje X que representa al eje de simetría de la parábola.

Se introduce este valor en la función $f(x) = X^2 - 8X + 16$ *para determinar el vértice de la parábola.*

$$f(4) = (4)^2 - 8(4) + 16 = 16 - 32 + 16 = 0 \quad ; \quad \mathbf{f(4) = 0}$$

Esto nos indica que el vértice de la parábola es el punto. ***(4 ,0)***

Tercer paso : *Se determina si la función intercepta o no al eje X con el uso de la formula conocida como discriminante* $(b^2 - 4ac)$.

$$b^2 - 4ac = (8)^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = \mathbf{0}$$

Como $b^2 - 4ac = 0$ *la función tiene 2 raíces iguales (tiene su vértice en un punto contenido en el eje X).*

Otra particularidad que presenta el hecho de que el determinante sea igual a cero es que al calcular el punto donde la parábola corta al eje X es el mismo vértice.

Esta consideración anterior nos obliga a aplicar el cuarto paso como si no existieran raíces reales.

Cuarto paso : *Se procede a calcular dos puntos de la parábola, uno ubicado al lado izquierdo del eje de simetría y el otro al lado derecho, esto nos facilitará visualizar fácilmente la configuración de la parábola.*

Como el eje de simetría es $X = 4$ puedo calcular los puntos cuando $X = 3$ y cuando $X = 5$, para lo cual sustituyo estos valores en la función $f(x) = X^2 - 8X + 16$

Para $X = 3$; $f(3) = (3)^2 - 8(3) + 16 = 9 - 24 + 16 = 1$

Esto nos indica que la parábola pasa por el punto ***(3,1)***

Para $X = 5$; $f(5) = (5)^2 - 8(5) + 16 = 25 - 40 + 16 = 1$

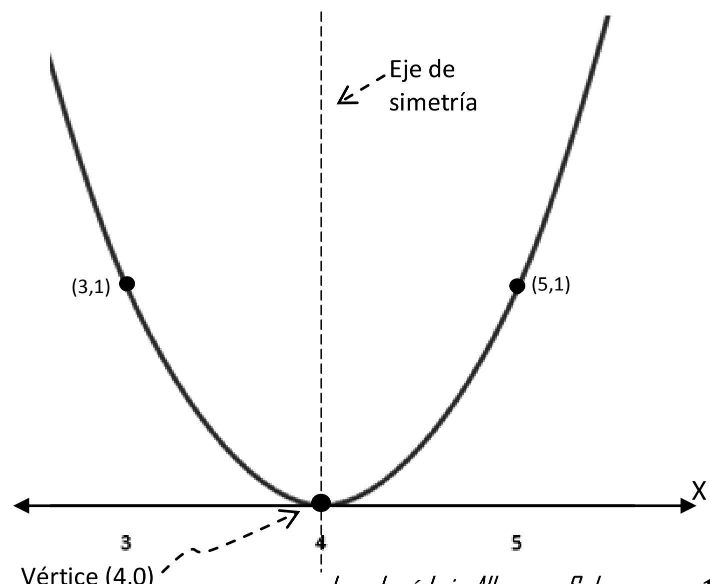
Esto nos indica que la parábola pasa por el punto ***(5,1)***

Quinto paso : *Se indican los puntos calculados en un sistema de coordenadas rectangulares y posteriormente se grafica la parábola.*

Como la inecuación es del tipo ≤ los cortes con el eje X formarán parte de la solución y por lo tanto se indican con un círculo "relleno".

El hecho de calcular el eje de simetría y el vértice de la parábola nos facilita el procedimiento para graficarla debido a que nos permite visualizar inmediatamente como será su configuración y sobre todo su concavidad y su punto más alto o más bajo (vértice) según sea el caso.

En este caso en particular si unimos los tres puntos se deduce fácilmente que la parábola quedará graficada así :



Una vez graficada la parábola resulta extremadamente fácil visualizar cuales son los valores positivos de la función (están por encima del eje X) y los valores negativos (están por debajo del eje X).

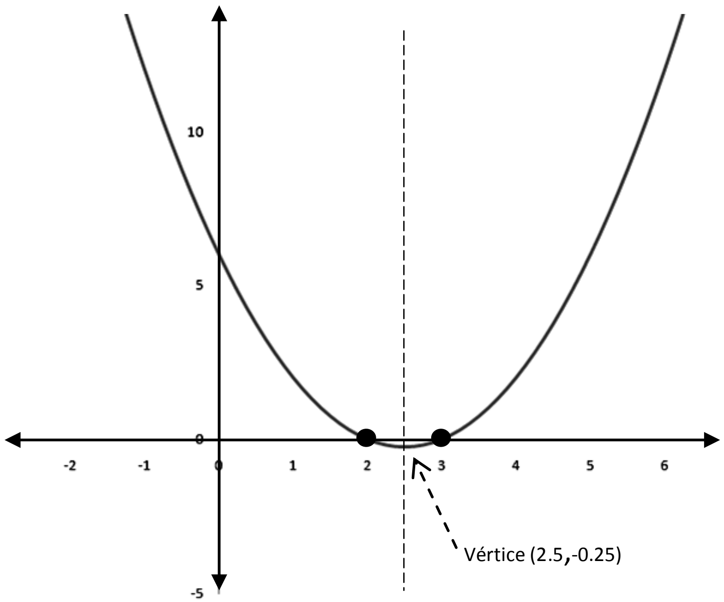
En este caso la parábola está ubicada por encima del eje X pero su vértice está contenido en el eje X (4,0).

Como la desigualdad estudiada quedó ordenada como $X^2 - 8X + 16 \leq 0$ *nos interesa determinar los valores menores e iguales a cero y es evidente al observar la grafica que existe solo un punto que cumple con esta condición (el vértice). Luego, la solución será :*

$$X = 4$$

Nota: *Si la desigualdad estudiada hubiese quedado ordenada como* $X^2 - 8X + 16 \geq 0$ *nos hubiese interesado determinar los valores mayores e iguales a cero y es evidente al observar la grafica que estos serán todos los números reales.*

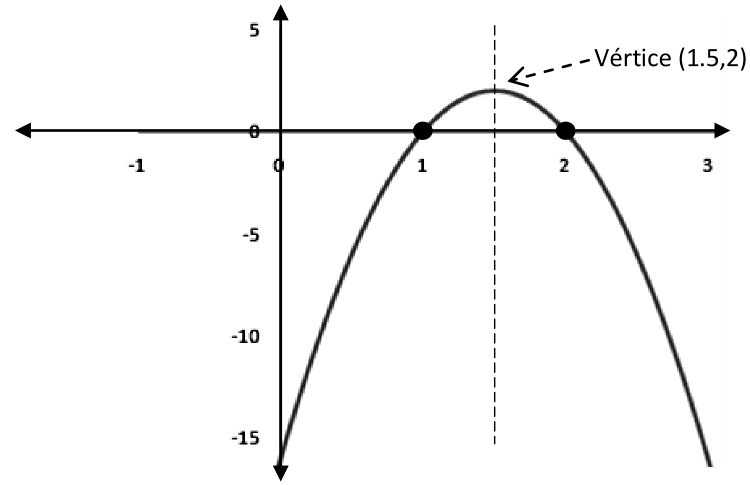
EJERCICIO 5 : *Resolver* $X^2 - 5X + 6 \leq 0$



Solución en forma de intervalo:

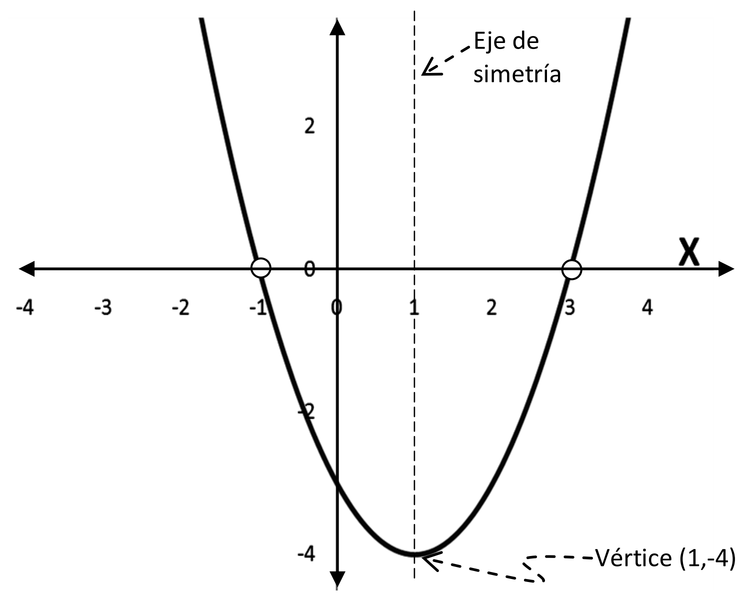
$$X = [\,2\,,3\,]$$

EJERCICIO 6 : *Resolver* $-8X^2 + 24X - 16 \geq 0$



Solución en forma de intervalo: $X = [\,1\,,2\,]$

EJERCICIO 7 : *Resolver* $X^2 - 2X - 3 < 0$



Solución en forma de intervalo: $X = (\,-1\,,3\,)$

❖ INECUACIONES RACIONALES

Existen varios métodos para resolver este tipo de inecuaciones, en estos ejercicios vamos a utilizar uno que consideramos más sencillo y sobre todo tiene la particularidad de que paralelamente a su resolución permite comprobar si los intervalos cumplen o no con la desigualdad planteada.

Pasos del método recomendado:

1) *Se calculan los valores críticos o de interés de la variable y se señalan sobre la recta real. Estos valores de "X" serán aquellos que anulan al numerador y al denominador de la inecuación.*

2) *Una vez indicados estos valores, la recta real quedará dividida en intervalos.*

3) *Se escoge un valor en cada uno de los intervalos y se sustituye en la inecuación inicial. Si se cumple para el punto escogido se cumplirá para todos los puntos que se encuentren en dicho intervalo y viceversa.*

4) *Para indicar si los extremos de cada intervalo son abiertos o cerrados se debe tomar en cuenta lo siguiente:*

   - *El valor donde el denominador se anula **NO** formará parte de la solución porque la división por cero es indeterminada (siempre se indicará como intervalo abierto).*

   - *En el valor donde se anule el numerador se tomará en cuenta el signo de la desigualdad (intervalo cerrado si es "≤" o "≥". Intervalo abierto si es "<" o ">").*

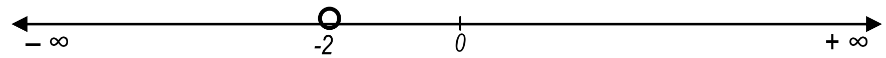
EJERCICIO 1 : *Resolver* $\frac{3X-1}{4+2X} \leq 1$

Solución :

Estudiando el denominador :

$4 + 2X = 0$; $2X = -4$; $X = \frac{-4}{2}$; $\mathbf{X = -2}$

*Esto nos indica que "X" no puede tomar el valor de "– 2" ya que anularía al denominador y la división por cero es indeterminada. Luego en la recta real debo colocar un circulo "hueco" (**O**) en "– 2" para indicar que NO forma parte de la solución (intervalo abierto)*



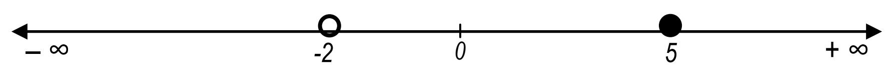
Estudiando el numerador :

Muchos autores y profesores recomiendan "pasar" primero todos los términos al lado izquierdo del signo de la desigualdad. Como esto trae algunas dificultades a los alumnos menos aventajados, recomendamos resolver la inecuación como una ecuación y resultará más cómodo :

$\frac{3X-1}{4+2X} = 1$; $3X - 1 = 1\,(4 + 2X)$; $3X - 1 = 4 + 2X$

$3X - 2X = 4 + 1$; $\mathbf{X = 5}$

Como la desigualdad es del tipo "≤" el "5" formará parte de la solución, en la recta real colocamos un circulo "relleno" para indicar que es el extremo de un intervalo cerrado (●).



La recta real queda dividida en 3 intervalos :

$(-\infty\, , -2)$; $(-2\, , 5\,]$; $[\,5\, , +\infty)$

Para saber cuál o cuáles de estos intervalos cumplen con la desigualdad, escojo un valor dentro de cada intervalo, lo sustituyo en la inecuación inicial y observo si cumple o no con ella.

Si un punto de un intervalo cumple con la inecuación, cumplirán todos los puntos de ese intervalo y viceversa.

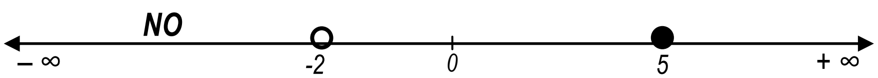
Se puede escoger cualquiera de los puntos de cada intervalo.

<u>Estudiando el intervalo (– ∞ , – 2) :</u> *escojo el valor "– 3" (está ubicado a la izquierda de "– 2 ") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

$$\frac{3X-1}{4+2X} \le 1 \quad ; \quad \frac{3(-3)-1}{4+2(-3)} \le 1 \quad ; \quad \frac{-9-1}{4-6} \le 1$$

$$\frac{-10}{-2} \le 1 \quad ; \quad \boldsymbol{5 \le 1}$$

Como "5" ***NO*** *es menor ni igual a "1" significa que "– 3"* **no cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **ninguno** *de los valores que están en el intervalo (– ∞ , – 2)* **cumple.**

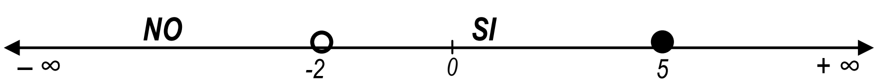


<u>Estudiando el intervalo (– 2 , 5] :</u> *escojo el valor "0" (está ubicado entre "– 2" y " 5") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

$$\frac{3X-1}{4+2X} \le 1 \quad ; \quad \frac{3(0)-1}{4+2(0)} \le 1 \quad ; \quad \frac{0-1}{4+0} \le 1$$

$$\frac{-1}{4} \le 1 \quad ; \quad \boldsymbol{-\,0{,}25 \le 1}$$

Como "– 0,25 " ***SI*** *es menor a "1" significa que "0"* **si cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **todos los valores** *que están en el intervalo estudiado (– 2 , 5]* **cumplen.**

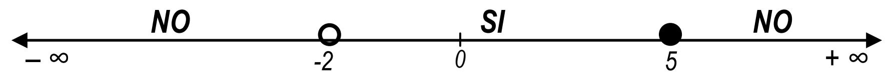


<u>Estudiando el intervalo [5 , + ∞) :</u> *escojo el valor "6" (está ubicado a la derecha de "5") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

$$\frac{3X-1}{4+2X} \le 1 \quad ; \quad \frac{3(6)-1}{4+2(6)} \le 1 \quad ; \quad \frac{18-1}{4+12} \le 1$$

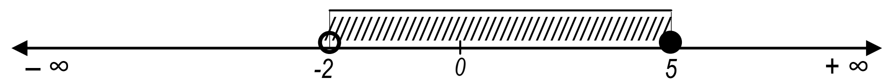
$$\frac{17}{16} \le 1 \quad ; \quad \boldsymbol{1{,}06 \le 1}$$

Como "1,06" ***NO*** *es menor ni igual a "1" significa que "6"* **no cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **ninguno** *de los valores que están en el intervalo [5 , + ∞)* **cumple.**



La solución puede ser mostrada de tres formas :

<u>En forma gráfica:</u>



<u>En forma de intervalo:</u>

X = (– 2 , 5]

<u>En forma de conjunto:</u>

X = { X Є ℝ ∕ – 2 < X ≤ 5 }

EJERCICIO 2 :

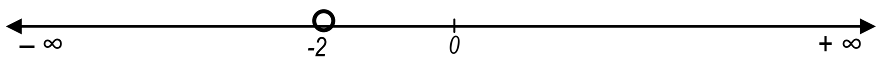
Resolver $\boldsymbol{\frac{X-2}{X+2} \le 0}$

<u>Solución :</u>

<u>Estudiando el denominador :</u>

X + 2 = 0 ; ***X = – 2***

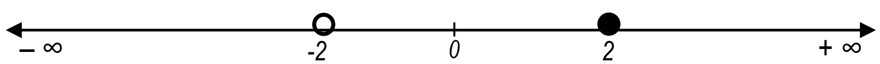
Esto nos indica que "X" no puede tomar el valor de "– 2" ya que anularía al denominador y la división por cero es indeterminada. Luego en la recta real debo colocar un circulo "hueco" (○) en "– 2" para indicar que NO forma parte de la solución (intervalo abierto)



Estudiando el numerador :

$$X - 2 = 0 \qquad ; \qquad \boldsymbol{X = 2}$$

Como la desigualdad es del tipo "≤" el "2" formará parte de la solución, en la recta real colocamos un circulo "relleno" para indicar que es el extremo de un intervalo cerrado (●).



La recta real queda dividida en 3 intervalos :

$$(-\infty , -2) \qquad ; \qquad (-2 , 2] \qquad ; \qquad [2 , +\infty)$$

Para saber cuál o cuáles de estos intervalos cumplen con la desigualdad, escojo un valor dentro de cada intervalo, lo sustituyo en la inecuación inicial y observo si cumple o no con ella.

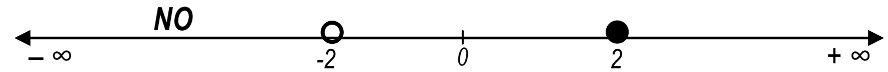
Si un punto de un intervalo cumple con la inecuación, cumplirán todos los puntos de ese intervalo y viceversa.

Se puede escoger cualquiera de los puntos de cada intervalo.

Estudiando el intervalo (– ∞ , – 2) : *escojo el valor "– 3" (está ubicado a la izquierda de "– 2 ") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

$$\frac{X-2}{X+2} \leq 0 \quad ; \quad \frac{-3-2}{-3+2} \leq 0 \quad ; \quad \frac{-5}{-1} \leq 0 \quad ; \quad \boldsymbol{5 \leq 0}$$

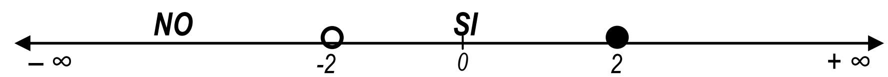
*Como "5" **NO** es menor ni igual a "0" significa que "– 3"* **no cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **ninguno** *de los valores que están en el intervalo (– ∞ , – 2)* **cumple.**



Estudiando el intervalo (– 2 , 2] : *escojo el valor "0" (está ubicado entre "– 2" y " 2") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

$$\frac{X-2}{X+2} \leq 0 \quad ; \quad \frac{0-2}{0+2} \leq 0 \quad ; \quad \frac{-2}{2} \leq 0 \quad ; \quad \boldsymbol{-1 \leq 0}$$

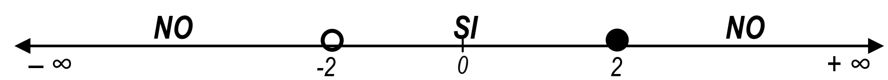
Como "– 1 " ***SI*** *es menor a "0" significa que "0"* **si cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **todos los valores** *que están en el intervalo estudiado (– 2 , 2]* **cumplen.**



Estudiando el intervalo [2 , + ∞) : *escojo el valor "3" (está ubicado a la derecha de "2") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

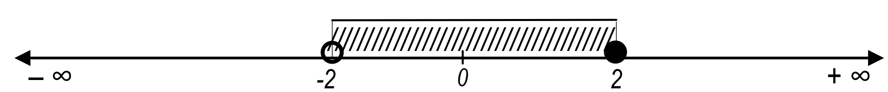
$$\frac{X-2}{X+2} \leq 0 \quad ; \quad \frac{3-2}{3+2} \leq 0 \quad ; \quad \frac{1}{5} \leq 0 \quad ; \quad \boldsymbol{0{,}20 \leq 0}$$

Como "0,20" ***NO*** *es menor ni igual a "0" significa que "3"* **no cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **ninguno** *de los valores que están en el intervalo [2 , + ∞)* **cumple.**



La solución puede ser mostrada de tres formas :

<u>En forma gráfica:</u>



En forma de intervalo:

$$X = (-2, 2]$$

En forma de conjunto:

$$X = \{ X \in \mathbb{R} \ / \ -2 < X \leq 2 \}$$

EJERCICIO 3 :

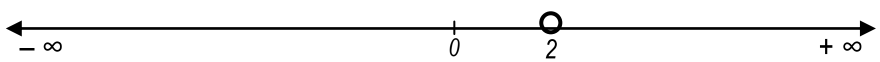
Resolver $\frac{X+4}{X-2} > 3$

Solución :

Estudiando el denominador :

$$X - 2 = 0 \quad ; \quad \mathbf{X = 2}$$

Esto nos indica que "X" no puede tomar el valor de "2" ya que anularía al denominador y la división por cero es indeterminada. Luego en la recta real debo colocar un circulo "hueco" (O) en "2" para indicar que NO forma parte de la solución (intervalo abierto)



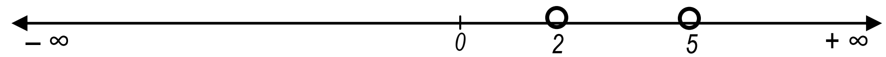
Estudiando el numerador :

Muchos autores y profesores recomiendan "pasar" primero todos los términos al lado izquierdo del signo de la desigualdad. Como esto trae algunas dificultades a los alumnos menos aventajados, recomendamos resolver la inecuación como una ecuación y resultará más cómodo :

$$\frac{X+4}{X-2} = 3 \quad ; \quad X + 4 = 3\,(X - 2) \quad ; \quad X + 4 = 3X - 6$$

$$X - 3X = -6 - 4 \quad ; \quad -2X = -10 \quad ; \quad \mathbf{X = 5}$$

Como la desigualdad es del tipo ">" el "5" NO formará parte de la solución, en la recta real colocamos un circulo "hueco" para indicar que es el extremo de un intervalo abierto (O).



La recta real queda dividida en 3 intervalos :

$$(-\infty, 2) \quad ; \quad (2, 5) \quad ; \quad (5, +\infty)$$

Para saber cuál o cuáles de estos intervalos cumplen con la desigualdad, escojo un valor dentro de cada intervalo, lo sustituyo en la inecuación inicial y observo si cumple o no con ella.

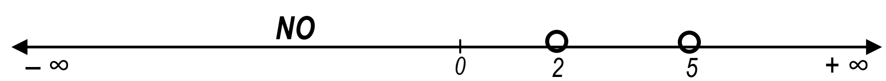
Si un punto de un intervalo cumple con la inecuación, cumplirán todos los puntos de ese intervalo y viceversa.

Se puede escoger cualquiera de los puntos de cada intervalo.

Estudiando el intervalo (– ∞ , 2) : *escojo el valor "0" (está ubicado a la izquierda de "2 ") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

$$\frac{X+4}{X-2} > 3 \quad ; \quad \frac{0+4}{0-2} > 3 \quad ; \quad \mathbf{-2 > 3}$$

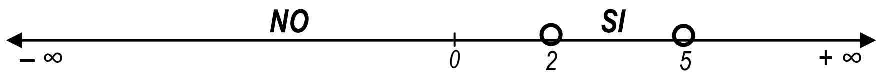
Como "– 2" ***NO*** *es mayor que "3" significa que "0"* **no cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **ninguno** *de los valores que están en el intervalo (– ∞ , 2)* **cumple.**



Estudiando el intervalo (2 , 5) : *escojo el valor "3" (está ubicado entre "2" y " 5") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

$$\frac{X+4}{X-2} > 3 \quad ; \quad \frac{3+4}{3-2} > 3 \quad ; \quad \frac{7}{1} > 3 \quad ; \quad \mathbf{7 > 3}$$

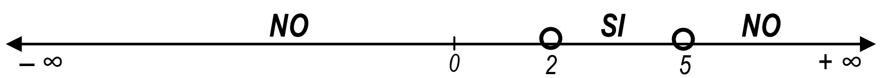
*Como "7" **SI** es mayor que "3" significa que "3" **si cumple** con la inecuación y por lo tanto **todos los valores** que están en el intervalo estudiado (2 , 5) **cumplen.***



<u>Estudiando el intervalo (5 , + ∞) :</u> *escojo el valor "6" (está ubicado a la derecha de "5") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

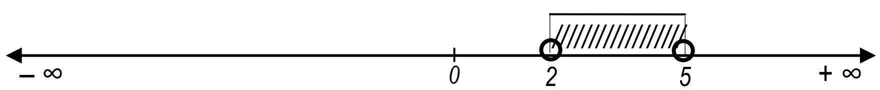
$\frac{X+4}{X-2} > 3$; $\frac{6+4}{6-2} > 3$; $\frac{10}{4} > 3$; ***2,5 > 3***

*Como "2,5" **NO** es mayor que "3" significa que "6" **no cumple** con la inecuación y por lo tanto **ninguno** de los valores que están en el intervalo (5 , + ∞) **cumple.***



La solución puede ser mostrada de tres formas :

<u>En forma gráfica:</u>



<u>En forma de intervalo:</u>

X = (2 , 5)

<u>En forma de conjunto:</u>

X = { X Є ℝ / 2 < X < 5 }

EJERCICIO 4 :

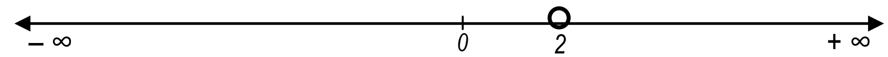
Resolver $\frac{X+4}{X-2} < 3$

<u>Solución :</u>

<u>Estudiando el denominador :</u>

X – 2 = 0 ; ***X = 2***

*Esto nos indica que "X" no puede tomar el valor de "2" ya que anularía al denominador y la división por cero es indeterminada. Luego en la recta real debo colocar un circulo "hueco" (**O**) en "2" para indicar que NO forma parte de la solución (intervalo abierto)*



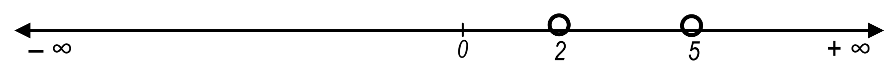
<u>Estudiando el numerador :</u>

Muchos autores y profesores recomiendan "pasar" primero todos los términos al lado izquierdo del signo de la desigualdad. Como esto trae algunas dificultades a los alumnos menos aventajados, recomendamos resolver la inecuación como una ecuación y resultará más cómodo :

$\frac{X+4}{X-2} = 3$; *X + 4 = 3 (X – 2)* ; *X + 4 = 3X – 6*

X – 3X = – 6 –4 ; *– 2X = – 10* ; ***X = 5***

*Como la desigualdad es del tipo "<" el "5" NO formará parte de la solución, en la recta real colocamos un circulo "hueco" para indicar que es el extremo de un intervalo abierto (**O**).*



La recta real queda dividida en 3 intervalos :

(– ∞ , 2) ; (2 , 5) ; (5 , + ∞)

Para saber cuál o cuáles de estos intervalos cumplen con la desigualdad, escojo un valor dentro de cada intervalo, lo sustituyo en la inecuación inicial y observo si cumple o no con ella.

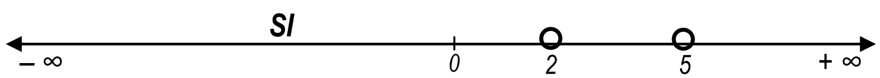
Si un punto de un intervalo cumple con la inecuación, cumplirán todos los puntos de ese intervalo y viceversa.

Se puede escoger cualquiera de los puntos de cada intervalo.

<u>Estudiando el intervalo (– ∞ , 2) :</u> *escojo el valor "0" (está ubicado a la izquierda de "2 ") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

$$\frac{X+4}{X-2} < 3 \quad ; \quad \frac{0+4}{0-2} < 3 \quad ; \quad \mathbf{-2 < 3}$$

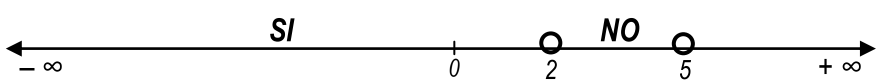
Como "– 2" ***SI*** *es menor que "3" significa que "0"* **si cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **todos los valores** *que están en el intervalo estudiado (– ∞ , 2)* **cumplen.**



<u>Estudiando el intervalo (2 , 5) :</u> *escojo el valor "3" (está ubicado entre "2" y " 5") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

$$\frac{X+4}{X-2} < 3 \quad ; \quad \frac{3+4}{3-2} < 3 \quad ; \quad \frac{7}{1} < 3 \quad ; \quad \mathbf{7 < 3}$$

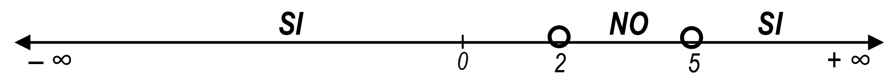
Como "7" ***NO*** *es menor que "3" significa que "3"* **no cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **ninguno** *de los valores que están en el intervalo (– 2 , 5)* **cumple.**



<u>Estudiando el intervalo (5 , + ∞) :</u> *escojo el valor "6" (está ubicado a la derecha de "5") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

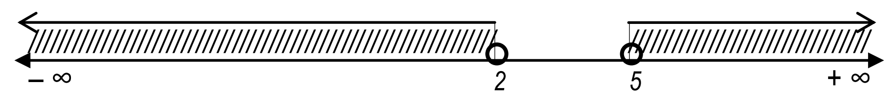
$$\frac{X+4}{X-2} < 3 \quad ; \quad \frac{6+4}{6-2} < 3 \quad ; \quad \frac{10}{4} < 3 \quad ; \quad \mathbf{2{,}5 < 3}$$

Como "2,5" ***SI*** *es menor que "3" significa que "6"* **si cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **todos los valores** *que están en el intervalo estudiado (5 , + ∞)* **cumplen.**



La solución puede ser mostrada de tres formas :

<u>En forma gráfica:</u>



<u>En forma de intervalo:</u>

X = (– ∞ , 2) U (5 , + ∞)

<u>En forma de conjunto:</u>

X = { X Є ℝ / X < 2 ∧ X > 5 }

Todos los "X" menores a "2" y todos los "X" mayores a "5",

EJERCICIO 5 : *Resolver* $\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{X+1}} \geq \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{X-2}}$

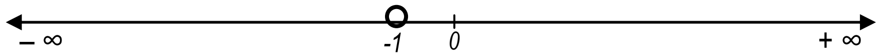
<u>Solución :</u>

Como la inecuación presenta dos denominadores los estudiamos por separado.

Estudiando el denominador del primer miembro :

$$X + 1 = 0 \qquad ; \qquad \boldsymbol{X = -1}$$

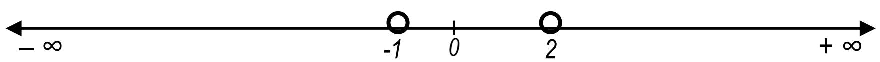
*Esto nos indica que "X" no puede tomar el valor de "– 1" ya que anularía al denominador y la división por cero es indeterminada. Luego en la recta real debo colocar un circulo "hueco" (**○**) en "– 1" para indicar que NO forma parte de la solución (intervalo abierto)*



Estudiando el denominador del segundo miembro :

$$X - 2 = 0 \qquad ; \qquad \boldsymbol{X = 2}$$

*Esto nos indica que "X" no puede tomar el valor de "2" ya que anularía al denominador y la división por cero es indeterminada. Luego en la recta real debo colocar un circulo "hueco" (**○**) en "2" para indicar que NO forma parte de la solución (intervalo abierto)*



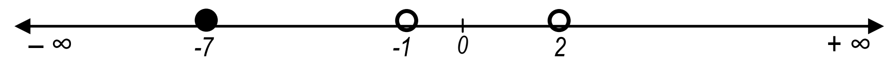
Estudiando el numerador :

Muchos autores y profesores recomiendan "pasar" primero todos los términos al lado izquierdo del signo de la desigualdad. Como esto trae algunas dificultades a los alumnos menos aventajados, recomendamos resolver la inecuación como una ecuación y resultará más cómodo :

$$\frac{2}{X+1} = \frac{3}{X-2} \quad ; \quad 2(X - 2) = 3(X + 1) \quad ; \quad 2X - 4 = 3X + 3$$

$$2X - 3X = +3 + 4 \qquad ; \qquad -X = +7 \qquad ; \qquad \boldsymbol{X = -7}$$

Como la desigualdad es del tipo "≥" el "-7" SI formará parte de la solución, en la recta real colocamos un circulo "relleno" para indicar que es el extremo de un intervalo cerrado (●).



La recta real queda dividida en 4 intervalos :

$$\boldsymbol{(-\infty\,,\,-7\,]} \quad ; \quad \boldsymbol{[\,-7\,,\,-1\,)} \quad ; \quad \boldsymbol{(\,-1\,,\,2\,)} \quad ; \quad \boldsymbol{(\,2\,,\,+\infty\,)}$$

Para saber cuál o cuáles de estos intervalos cumplen con la desigualdad, escojo un valor dentro de cada intervalo, lo sustituyo en la inecuación inicial y observo si cumple o no con ella.

Si un punto de un intervalo cumple con la inecuación, cumplirán todos los puntos de ese intervalo y viceversa.

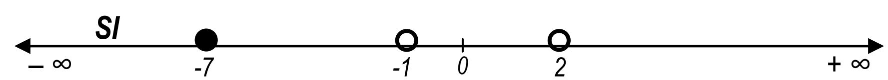
Se puede escoger cualquiera de los puntos de cada intervalo.

Estudiando el intervalo (– ∞ , – 7] : *escojo el valor "-8" (está ubicado a la izquierda de "-7 ") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

$$\frac{2}{X+1} \geq \frac{3}{X-2} \qquad ; \qquad \frac{2}{-8+1} \geq \frac{3}{-8-2}$$

$$\frac{2}{-7} \geq \frac{3}{-10} \qquad ; \qquad \boldsymbol{-0{,}29 \geq -0{,}3}$$

*Como "**– 0,29**" **SI** es mayor que "**– 0,3**" significa que "-8"* **si cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **todos los valores** *que están en el intervalo estudiado (– ∞ , – 7]* **cumplen.**

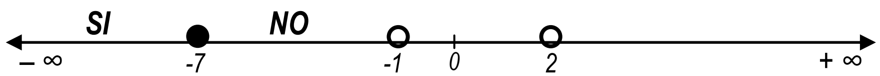


Estudiando el intervalo [–7 , – 1) : *escojo el valor "-2" (está ubicado entre "-7" y " -1") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

$$\frac{2}{X+1} \geq \frac{3}{X-2} \qquad ; \qquad \frac{2}{-2+1} \geq \frac{3}{-2-2}$$

$$\frac{2}{-1} \geq \frac{3}{-4} \qquad ; \qquad \mathbf{-2 \geq -0{,}75}$$

*Como "**– 2**" **NO** es mayor ni igual que "**– 0,75**" significa que "-2"* **no cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **ninguno** *de los valores que están en el intervalo [–7 , – 1)* **cumple.**

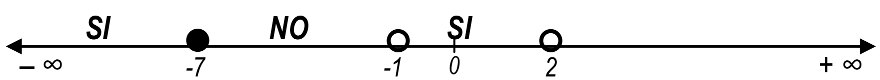


<u>Estudiando el intervalo (– 1 , 2) :</u> *escojo el valor "0" (está ubicado entre "-1" y " 2") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

$$\frac{2}{X+\ 1} \geq \frac{3}{X-2} \qquad ; \qquad \frac{2}{0+\ 1} \geq \frac{3}{0-2}$$

$$\frac{2}{1} \geq \frac{3}{-2} \qquad ; \qquad \mathbf{2 \geq -1{,}5}$$

*Como "**2**"* ***SI*** *es mayor que "**– 1,5**" significa que "0"* **si cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **todos los valores** *que están en el intervalo estudiado (**– 1** , 2)* **cumplen.**

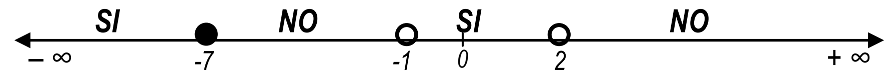


<u>Estudiando el intervalo (2 , + ∞) :</u> *escojo el valor "3" (está ubicado a la derecha de "2") y lo sustituyo en la inecuación inicial*

$$\frac{2}{X+\ 1} \geq \frac{3}{X-2} \qquad ; \qquad \frac{2}{3+\ 1} \geq \frac{3}{3-2}$$

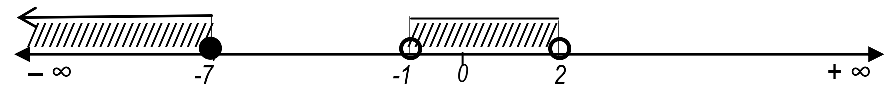
$$\frac{2}{4} \geq \frac{3}{1} \qquad ; \qquad \mathbf{0{,}5 \geq 3}$$

*Como "**0,5**" **NO** es mayor ni igual que "**3**" significa que "3"* **no cumple** *con la inecuación y por lo tanto* **ninguno** *de los valores que están en el intervalo (2 , + ∞)* **cumple.**



La solución puede ser mostrada de tres formas :

<u>En forma gráfica:</u>



<u>En forma de intervalo:</u>

$$\mathbf{X = (-\infty\ ,\ -7\,]\ \cup\ (\ -1\ ,\ 2\ )}$$

<u>En forma de conjunto:</u>

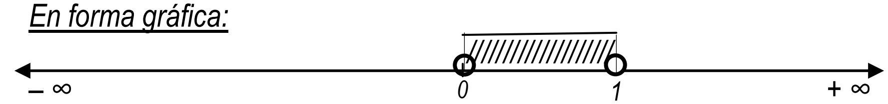
$$\mathbf{X = \{\ X \in \mathbb{R}\ /\ X \leq -7\ \wedge\ -1 < X < 2\ \}}$$

Todos los "X" menores o iguales a "–7" y todos los "X" mayores a "–1" y menores a "2".

EJERCICIO 6 :

Resolver $\displaystyle \frac{1+X}{1-X} > 1$

<u>En forma gráfica:</u>



<u>En forma de intervalo:</u>

$$\mathbf{X = (\ 0\ ,\ 1\ )}$$

<u>En forma de conjunto:</u>

$$\mathbf{X = \{\ X \in \mathbb{R}\ /\ 0 < X < 1\ \}}$$

❖ INECUACIONES IRRACIONALES

Para la solución de este tipo de inecuaciones se recomienda "refrescar" los conocimiento sobre solución de ECUACIONES IRRACIONALES debido a que sus procedimientos son muy similares. En el caso de las inecuaciones el paso "extra" consistirá en el análisis del signo que se le debe hacer a la cantidad sub-radical o radicando

Recordando algunos aspectos importantes sobre los SIGNOS DE LAS RAICES :

1) Las **raíces impares** *de una cantidad tienen el mismo signo que la cantidad sub-radical o radicando.*

Así,

- $\sqrt[3]{27a^3}$ = 3a porque $(3a)^3 = 27a^3$
- $\sqrt[3]{-27a^3}$ = –3a porque $(-3a)^3 = -27a^3$
- $\sqrt[5]{X^{10}}$ = X^2 porque $(X^2)^5 = X^{10}$
- $\sqrt[5]{-X^{10}}$ = $-X^2$ porque $(-X^2)^5 = -X^{10}$

2) Las **raíces pares** *de una cantidad positiva tienen doble signo.*

Así,

- $\sqrt{25X^2}$ = 5X ó –5X porque $(5X)^2 = 25X^2$ y $(-5X)^2 = 25X^2$

  Esto se indica de este modo : $\sqrt{25X^2} = \pm 5X$
- $\sqrt[4]{16a^4}$ = 2a y –2a porque $(2a)^4 = 16a^4$ y $(-2a)^4 = 16a^4$

  Esto se indica : $\sqrt[4]{16a^4} = \pm 2a$

3) Las **raíces pares** *de una cantidad negativa no se pueden extraer. Estas raíces se llaman* **cantidades imaginarias**.

Así,

$\sqrt{-4}$ no se puede extraer. La raíz de – 4 no es 2 porque "$2^2 = 4$" y no – 4, y tampoco es – 2 porque $(-2)^2 = 4$ y no – 4.

"$\sqrt{-4}$ " *es una* **cantidad imaginaria**.

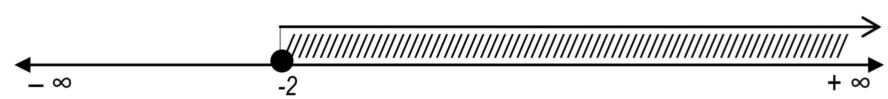
Del propio modo, $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt[4]{-16X^2}$ son ***cantidades imaginarias.***

EJERCICIO 1 : *Resolver* $\sqrt{X+2} \geq 3$

Se analiza la cantidad sub-radical o radicando. Como la raíz es par, ésta cantidad no puede ser negativa, es decir **X + 2** *tiene que ser mayor o igual a cero.*

$$X + 2 \geq 0 \quad ; \quad \boldsymbol{X \geq -2}$$

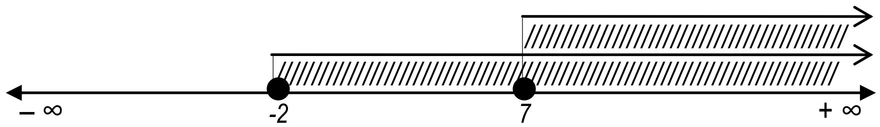
Señalamos en la recta real los valores que puede tomar la raíz cuadrada estudiada :



Posteriormente analizo la inecuación de manera similar a una ecuación irracional, es decir, se elevan ambos miembros al cuadrado con la finalidad de cancelar la raíz cuadrada del miembro de la izquierda :

$$(\sqrt{X+2})^2 \geq (3)^2 \quad ; \quad X + 2 \geq 9 \quad ; \quad X \geq 9 - 2 \quad ; \quad \boldsymbol{X \geq 7}$$

Colocando esta solución sobre la recta real se observa la **INTERSECCION** *de las dos soluciones y ésta representará la solución total :*



Sea muy cuidadoso. La solución estará indicada por aquellos valores de X que cumplen con todas las condiciones, es decir, los valores que están en las dos áreas sombreadas a la vez.

Solución en forma de intervalo:

X = [7 , + ∞)

Intervalo cerrado en 7 (incluido el 7) hasta infinito positivo (tanto el infinito positivo como el infinito negativo se indican como intervalo abierto "paréntesis").

En forma de conjunto:

X = { X Є ℝ / X ≥ 7 }

Acostúmbrese a comprobar los resultados para tener la certeza que hizo bien el ejercicio. En este caso puede escoger un valor al lado izquierdo de 7 (NO debe cumplir) y otro al lado derecho de 7 (debe cumplir) e introdúzcalo en la inecuación inicial.

Probando con 2 (lado izquierdo de 7) :

$$\sqrt{X+2} \geq 3 \quad ; \quad \sqrt{2+2} \geq 3 \quad ; \quad \sqrt{4} \geq 3 \quad ; \quad 2 \geq 3$$

Como lo anterior es falso significa que los valores que están a la izquierdo de 7 NO cumplen con la inecuación estudiada.

Probando con 14 (lado derecho de 7) :

$$\sqrt{X+2} \geq 3 \quad ; \quad \sqrt{14+2} \geq 3 \quad ; \quad \sqrt{16} \geq 3 \quad ; \quad 4 \geq 3$$

Como lo anterior es cierto significa que los valores que están a la derecha de 7 SI cumplen con la inecuación estudiada.

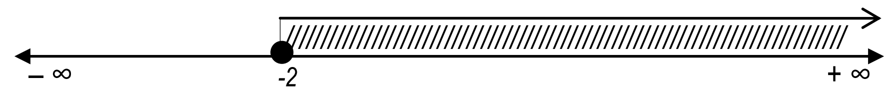
EJERCICIO 2 :

Resolver $\sqrt{X+2} \leq 3$

Se analiza la cantidad sub-radical o radicando. Como la raíz es par, ésta cantidad no puede ser negativa, es decir **X + 2** *tiene que ser mayor o igual a cero.*

$$X + 2 \geq 0 \quad ; \quad \boldsymbol{X \geq -2}$$

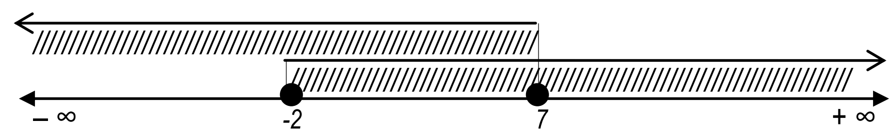
Señalamos en la recta real los valores que puede tomar la raíz cuadrada estudiada :



Posteriormente analizo la inecuación de manera similar a una ecuación irracional, es decir, se elevan ambos miembros al cuadrado con la finalidad de cancelar la raíz cuadrada del miembro de la izquierda :

$$(\sqrt{X+2})^2 \leq (3)^2 \quad ; \quad X + 2 \leq 9 \quad ; \quad X \leq 9 - 2 \quad ; \quad \boldsymbol{X \leq 7}$$

Colocando esta solución sobre la recta real se observa la **INTERSECCION** *de las dos soluciones y ésta representará la solución total :*



Sea muy cuidadoso. La solución estará indicada por aquellos valores de X que cumplen con todas las condiciones, es decir, los valores que están en las dos áreas sombreadas a la vez.

Solución en forma de intervalo:

X = [– 2 , 7]

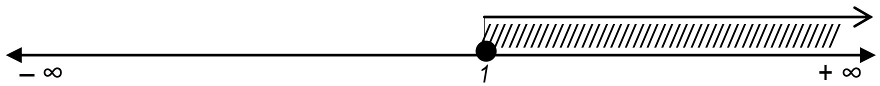
EJERCICIO 3 :

Resolver $\sqrt{5X-5} - \sqrt{X} > 0$

Como este ejercicio presenta dos raíces se analizan las dos cantidades sub-radicales o radicandos por separado, ambos deben ser mayores o iguales a cero ya que el índice de la raíz es par.

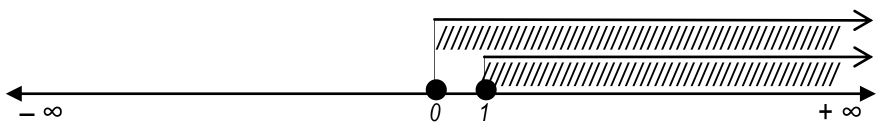
Estudiando la primera raíz :

$5X - 5 \geq 0$; $5X \geq 5$; $X \geq \frac{5}{5}$; $\boldsymbol{X \geq 1}$



Estudiando la segunda raíz :

$\boldsymbol{X \geq 0}$



Por último analizo la inecuación de manera similar a una ecuación irracional. En este caso se debe colocar una raíz en cada miembro de la desigualdad y después se elevan ambos miembros al cuadrado con la finalidad de cancelar las dos raíces cuadradas.

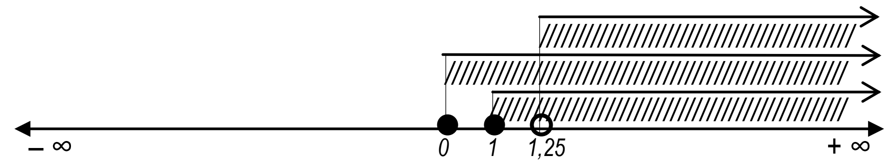
$\sqrt{5X-5} - \sqrt{X} > 0$; $\sqrt{5X-5} > \sqrt{X}$

$(\sqrt{5X-5})^2 > (\sqrt{X})^2$; $5X - 5 > X$; $5X - X > 5$

$4X > 5$; $X > \frac{5}{4}$; $\boldsymbol{X > 1{,}25}$

Como el signo de la desigualdad es >, el intervalo en 1.25 debe ser abierto.

Colocando esta solución sobre la recta real se observa la **INTERSECCION** *de las tres soluciones y ésta representará la solución total :*



Sea muy cuidadoso. La solución estará indicada por aquellos valores de X que cumplen con todas las condiciones, es decir, los valores que están en las tres áreas sombreadas a la vez.

Solución en forma de intervalo: **X = (1.25 , + ∞)**

EJERCICIO 4 :

Resolver $\sqrt[3]{3X-8} \geq \sqrt[3]{-X+4}$

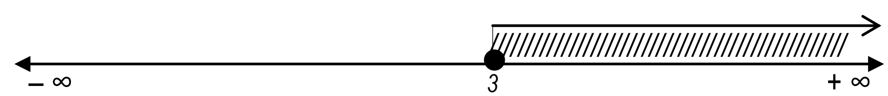
Recuerde que las **raíces impares** *de una cantidad tienen el mismo signo que la cantidad sub-radical o radicando.*

A diferencia que en los ejercicios anteriores NO debo analizar las cantidades sub-radicales o radicandos ya que estas pueden tomar cualquier valor (negativos o positivos)

Analizo la inecuación de manera similar a una ecuación irracional. En este caso se elevan ambos miembros al cubo con la finalidad de cancelar las dos raíces cúbicas.

$(\sqrt[3]{3X-8})^3 \geq (\sqrt[3]{-X+4})^3$; $3X - 8 \geq -X + 4$

$3X + X \geq 4 + 8$; $4X \geq 12$; $X \geq \frac{12}{4}$; $\boldsymbol{X \geq 3}$



Solución en forma de intervalo: **X = [3 , + ∞)**

❖ INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Propiedades :

*Para cualquier número real "**X**" y cualquier número positivo "**a**" :*

1) **│ X │ < a** ⇔ **– a < X < a** *(también se cumple para ≤). Se puede decir que la desigualdad queda dividida en dos partes : En la primera se "elimina" el módulo de valor absoluto y se mantiene lo demás igual **(X < a)**, y en la segunda se "elimina" el módulo de valor absoluto, se cambia el sentido de la desigualdad y el signo del miembro de la derecha **(X > -a)**, la solución viene dada por la **INTERSECCIÓN** de las dos soluciones parciales.*

2) **│ X │ > a** ⇔ **X > a U X < - a** *(también se cumple para ≥). Se puede decir que la desigualdad queda dividida en dos partes : En la primera se "elimina" el módulo de valor absoluto y se mantiene lo demás igual **(X > a)**, y en la segunda se "elimina" el módulo de valor absoluto, se cambia el sentido de la desigualdad y el signo del miembro de la derecha **(X < - a)**, la solución viene dada por la **UNIÓN** de las dos soluciones parciales.*

3) **│X │ < │a │** ⇔ $X^2 < a^2$ *(también se cumple para >, ≥ y ≤). La solución se encuentra aplicando los métodos de resolución de una inecuación cuadrática o de segundo grado.*

4) **│ X │ < – a** *Representa al conjunto vacío (también se cumple para ≤)*

EJERCICIO 1 : *Resolver* **│4X – 1 │ ≤ 3**

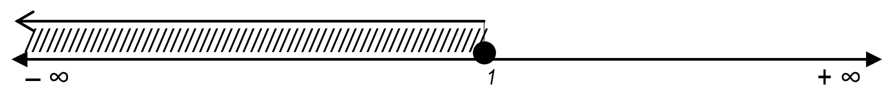
Para resolver esta inecuación con valor absoluto se divide la misma en dos partes (Propiedad 1) :

La primera parte será la misma inecuación sin el módulo de valor absoluto (4X – 1 ≤ 3) y en la segunda se cambiará el sentido del signo de la desigualdad y el signo del segundo miembro (4X – 1 ≥ – 3)

*La solución total será la **INTERSECCIÓN** de las dos soluciones parciales (Propiedad 1) :*

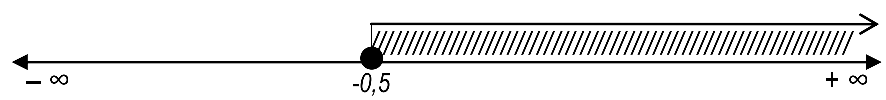
Resolviendo la primera parte: ***4X – 1 ≤ 3***

$4X \leq 3 + 1$; $4X \leq 4$; $X \leq \frac{4}{4}$; $\boldsymbol{X \leq 1}$



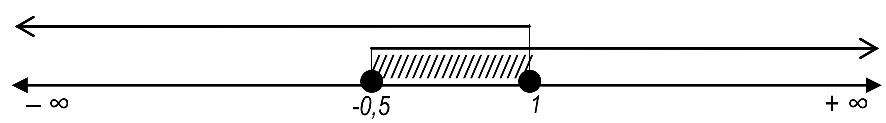
Resolviendo la segunda parte: ***4X – 1 ≥ – 3***

$4X \geq -3 + 1$; $4X \geq -2$; $X \geq \frac{-2}{4}$; $\boldsymbol{X \geq -0{,}5}$



Solución Total

En forma gráfica:



En forma de intervalo:

X = [– 0.5 , 1]

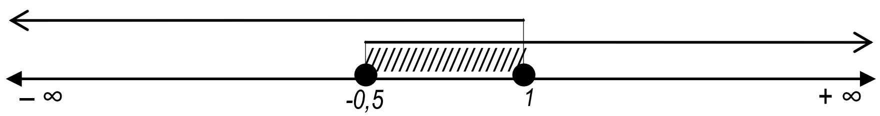
En forma de conjunto:

$$X = \{ X \in \mathbb{R} \ / \ -0.5 \leq X \leq 1 \}$$

¿Como comprobar estos resultados?

Se escoge un valor cualquiera en cada uno de los intervalos y se introduce en la inecuación inicial y se comprueba si cumple o no de acuerdo a la solución obtenida.

En este ejercicio la solución fue :



*Escojo el valor **X = –1** que está al lado izquierdo de "-0,5" (NO debe cumplir con la desigualdad) y lo introduzco en la inecuación :*

$$|4X-1| \leq 3 \quad ; \quad |4(-1)-1| \leq 3 \quad ; \quad |-4-1| \leq 3$$

$|-5| \leq 3$: $\mathbf{5 \leq 3}$ *(esto es falso, se demuestra que NO cumple)*

*Escojo el valor **X = 0** que está entre "-0,5" y "1" (debe cumplir con la desigualdad) y lo introduzco en la inecuación :*

$$|4X-1| \leq 3 \quad ; \quad |4(0)-1| \leq 3 \quad ; \quad |0-1| \leq 3$$

$|-1| \leq 3$: $\mathbf{1 \leq 3}$ *(esto es cierto, se demuestra que SI cumple)*

*Escojo el valor **X = 2** que está al lado derecho de "1" (NO debe cumplir con la desigualdad) y lo introduzco en la inecuación :*

$$|4X-1| \leq 3 \quad ; \quad |4(2)-1| \leq 3 \quad ; \quad |8-1| \leq 3$$

$|7| \leq 3$: $\mathbf{7 \leq 3}$ *(esto es falso, se demuestra que NO cumple)*

EJERCICIO 2 : *Resolver* $|2X+3| > 5$

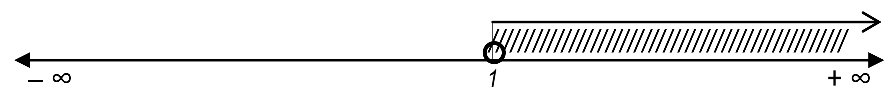
Para resolver esta inecuación con valor absoluto se divide la misma en dos partes (Propiedad 2) :

La primera parte será la misma inecuación sin el módulo de valor absoluto (2X + 3 > 5) y en la segunda se cambiará el sentido del signo de la desigualdad y el signo del segundo miembro (2X + 3 < –5).

La solución total será la **UNIÓN** *de las dos soluciones parciales, es decir la solución de la primera parte más la solución de la segunda parte (Propiedad 2) :.*

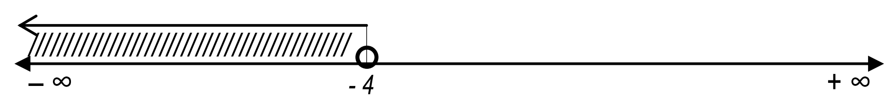
Resolviendo la primera parte: $\mathbf{2X + 3 > 5}$

$$2X > 5-3 \quad ; \quad 2X > 2 \quad ; \quad X > \frac{2}{2} \quad ; \quad \mathbf{X > 1}$$



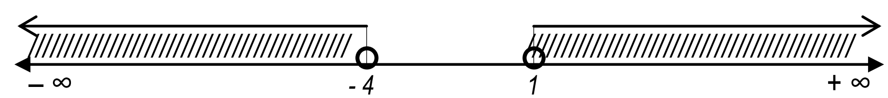
Resolviendo la segunda parte: $\mathbf{2X + 3 < -5}$

$$2X < -5-3 \quad ; \quad 2X < -8 \quad ; \quad X < \frac{-8}{2} \quad ; \quad \mathbf{X < -4}$$



Solución Total

En forma gráfica:



En forma de intervalo:

$$X = (-\infty, -4) \ U \ (1, +\infty)$$

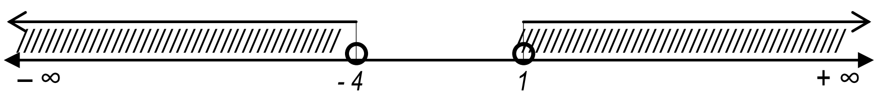
En forma de conjunto:

$$X = \{ X \in \mathbb{R} \;/\; X < -4 \;\wedge\; X > 1 \}$$

¿Como comprobar estos resultados?

Se escoge un valor cualquiera en cada uno de los intervalos y se introduce en la inecuación inicial y se comprueba si cumple o no de acuerdo a la solución obtenida.

En este ejercicio la solución fue :



Escojo el valor ***X = – 5*** *que está a la izquierda de "-4" (SI debe cumplir con la desigualdad) y lo introduzco en la inecuación :*

$|2X+3| > 5 \quad ; \quad |2(-5)+3| > 5 \quad ; \quad |-10+3| > 5$

$|-7| > 5 \quad : \quad \mathbf{7 > 5}$ *(esto es cierto, se demuestra que SI cumple)*

Escojo el valor ***X = 0*** *que está entre "- 4" y "1" (NO debe cumplir con la desigualdad) y lo introduzco en la inecuación :*

$|2X+3| > 5 \quad ; \quad |2(0)+3| > 5 \quad ; \quad |0+3| > 5$

$|3| > 5 \quad : \quad \mathbf{3 > 5}$ *(esto es falso, se demuestra que NO cumple)*

Escojo el valor ***X = 2*** *que está a la derecha "1" (SI debe cumplir con la desigualdad) y lo introduzco en la inecuación :*

$|2X+3| > 5 \quad ; \quad |2(2)+3| > 5 \quad ; \quad |4+3| > 5$

$|7| > 5 \quad : \quad \mathbf{7 > 5}$ *(esto es cierto, se demuestra que SI cumple)*

EJERCICIO 3 : *Resolver* $|2X + 3| < 5$

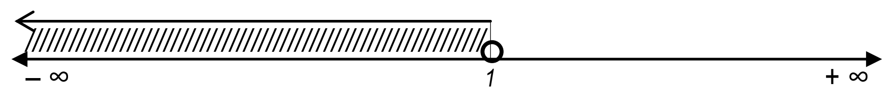
Para resolver esta inecuación con valor absoluto se divide la misma en dos partes (Propiedad 1) :

La primera parte será la misma inecuación sin el módulo de valor absoluto (2X + 3 < 5) y en la segunda se cambiará el sentido del signo de la desigualdad y el signo del segundo miembro (2X + 3 > –5).

La solución total será la **INTERSECCIÓN** *de las dos soluciones parciales (Propiedad 1) :*

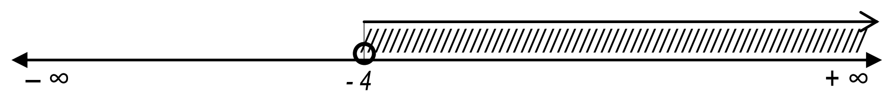
Resolviendo la primera parte: ***2X + 3 < 5***

$2X < 5 - 3 \quad ; \quad 2X < 2 \quad ; \quad X < \frac{2}{2} \quad ; \quad \mathbf{X < 1}$



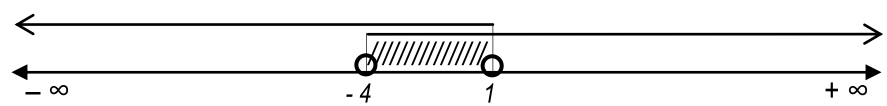
Resolviendo la segunda parte: ***2X + 3 > –5***

$2X > -5 - 3 \quad ; \quad 2X > -8 \quad ; \quad X > \frac{-8}{2} \quad ; \quad \mathbf{X > -4}$



Solución Total

En forma gráfica:



En forma de intervalo:

$$X = (-4 \,,\, 1)$$

En forma de conjunto:

$$X = \{ X \in \mathbb{R} \;/\; -4 < X < 1 \}$$

EJERCICIO 4 : Resolver $|X-3| > -1$

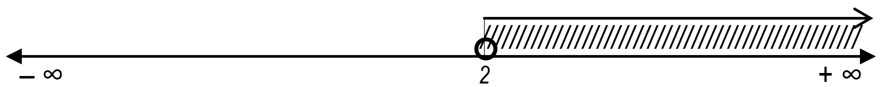
Para resolver esta inecuación con valor absoluto se divide la misma en dos partes (Propiedad 2) :

La primera parte será la misma inecuación sin el módulo de valor absoluto ($X-3 > -1$) y en la segunda se cambiará el sentido del signo de la desigualdad y el signo del segundo miembro ($X-3 < 1$).

La solución total será la **UNIÓN** *de las dos soluciones parciales, es decir la solución de la primera parte más la solución de la segunda parte (Propiedad 2) :.*

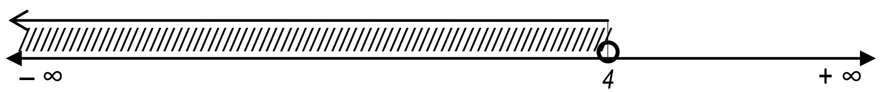
Resolviendo la primera parte: $\boldsymbol{X-3 > -1}$

$$X > -1+3 \quad ; \quad \mathbf{X > 2}$$



Resolviendo la segunda parte: $\boldsymbol{X-3 < 1}$

$$X < 1+3 \quad ; \quad \mathbf{X < 4}$$



Solución Total

El error más común que se comete en este tipo de ejercicios es creer que la solución estará representada por la intersección de las dos soluciones parciales, es decir, el intervalo (2 , 4).

Para evitar cometer este error se recomienda repasar las propiedades que se encuentran en la página 26 de esta guía, sobre todo lo apuntado en la PROPIEDAD 2 (la solución viene dada por la ***UNIÓN*** *de las dos soluciones parciales).*

En base a las aclaraciones anteriores se desprende que la solución serán TODOS LOS NÚMEROS REALES.

Note que si superponen las dos soluciones parciales quedarán incluidos todos los valores de la recta real. Inclusive los valores que están excluidos en cada una de las soluciones parciales (○), están incluidas en la otra.

En forma de intervalo:

$$\mathbf{X = (-\infty , +\infty)}$$

En forma de conjunto:

$$\mathbf{X = \{ \mathbb{R} \}}$$

Compruebe los resultados atendiendo a lo explicado al final de los ejercicios 1 y 2.

EJERCICIO 5 : Resolver $|X-3| < -1$

Al recordar la ***PROPIEDAD 4****, inmediatamente se deduce que la solución está representada por un conjunto vacío.*

El valor absoluto de cualquier número NUNCA podrá ser menor que un número negativo*. Pruebe con cualquier valor que se le ocurra y comprobará que no se cumple la desigualdad.*

EJERCICIO 6 : Resolver $|2X+5| \geq |X+4|$

Para resolver esta inecuación con valor absoluto debo tener presente la PROPIEDAD 3..

$|X| < |a| \quad \Leftrightarrow \quad X^2 < a^2$ *(también vale para >, ≥ y ≤). La solución se encuentra aplicando los métodos de resolución de una inecuación cuadrática o de segundo grado.*

Luego la inecuación quedará indicada como $(2X + 5)^2 \geq (X + 4)^2$

Resolviendo los productos notables de cada miembro de la inecuación:

$$(2X + 5)^2 = (2X)^2 + 2.(2X).(5) + (5)^2 = 4X^2 + 20X + 25$$

$$(X + 4)^2 = (X)^2 + 2.(X).(4) + (4)^2 = X^2 + 8X + 16$$

$$4X^2 + 20X + 25 \geq X^2 + 8X + 16$$

Al pasar todos los términos al lado izquierdo de la inecuación :

$$4X^2 + 20X + 25 - X^2 - 8X - 16 \geq 0$$

$$3X^2 + 12X + 9 \geq 0$$

La solución de este tipo de inecuaciones está detalladamente explicada en estos apuntes en "INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO".

Solución : $X = (-\infty , -3] \cup [-1 , +\infty)$

EJERCICIO 7 :

Resolver $\left| 1 - \frac{X}{3} \right| < 1$

Solución en forma de intervalo :

$$X = (0 , 6)$$

EJERCICIO 8 :

Resolver $\left| 3 - 2X \right| < 0$

Solución : *Conjunto vacío.*

EJERCICIO 9 :

Resolver $\left| \frac{2X-1}{X+3} \right| \leq 1$

Solución en forma de intervalo :

$$X = [-2/3 , 4]$$

EJERCICIO 10 :

Resolver $\left| 3 - 2X \right| < \left| X + 4 \right|$

Solución en forma de intervalo :

$$X = (-1/3 , 7)$$

EJERCICIO 11 :

Resolver $\left| \frac{X+1}{X-2} \right| > 2$

Solución en forma de intervalo :

$$X = (1 , 2) \cup (2 , 5)$$

EJERCICIO 12 :

Resolver $\left| \frac{3X+5}{X} \right| \geq 2$

Solución en forma de intervalo :

$$X = (-\infty , 5] \cup [-1 , 0) \cup (0 , +\infty)$$

❖ SISTEMAS DE INECUACIONES
(INECUACIONES SIMULTANEAS)

Resolver un "sistema de inecuaciones" es la operación que nos permite determinar, encontrar o conseguir los valores de la variable que satisfacen simultáneamente las dos o más inecuaciones que conforman dicho sistema.

Se debe entonces, resolver cada una de las inecuaciones por separado y posteriormente determinar la INTERSECCIÓN de las soluciones parciales.

Al igual que con las ecuaciones, un sistema de inecuaciones se indica utilizando el símbolo conocido como llave.

Así, para calcular cuáles valores cumplen a la vez con las desigualdades $X > a$ y $X < b$ se representa de la siguiente manera :

$$\begin{cases} X > a \\ X < b \end{cases}$$

EJERCICIO 1 : *Resolver*

$$\begin{cases} X + 2 \geq 7 \\ X - 3 < 6 \end{cases}$$

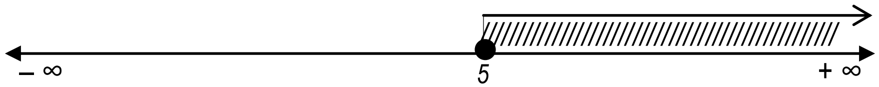
Solución :

Se resuelven por separado las dos inecuaciones.

Resolviendo la primera inecuación :

$$X + 2 \geq 7 \quad ; \quad X \geq 7 - 2 \quad ; \quad \mathbf{X \geq 5}$$

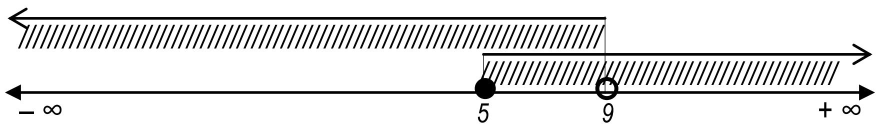
La forma más fácil de visualizar las soluciones es la gráfica :



Resolviendo la segunda inecuación :

$$X - 3 < 6 \quad ; \quad X < 6 + 3 \quad ; \quad \mathbf{X < 9}$$

Se indica la solución sobre la misma gráfica de la solución anterior.



Sea muy cuidadoso. La solución total vendrá dada por la INTERSECCIÓN de las dos soluciones parciales; es decir, los valores que estén contenidos en las dos áreas sombreadas a la vez.

Solución en forma de intervalo:

$$\mathbf{X = [\,5\,,\,9\,)}$$

EJERCICIO 2 : *Resolver*

$$\begin{cases} X + 2 \geq 7 \\ X - 3 > 6 \end{cases}$$

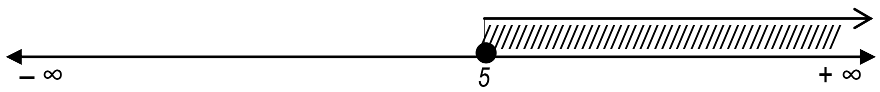
Solución :

Se resuelven por separado las dos inecuaciones.

Resolviendo la primera inecuación :

$$X + 2 \geq 7 \quad ; \quad X \geq 7 - 2 \quad ; \quad \mathbf{X \geq 5}$$

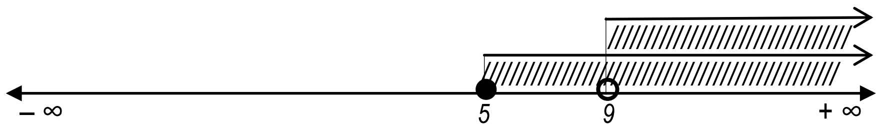
La forma más fácil de visualizar las soluciones es la gráfica :



Resolviendo la segunda inecuación :

$$X - 3 > 6 \quad ; \quad X > 6 + 3 \quad ; \quad \mathbf{X > 9}$$

Se indica la solución sobre la misma gráfica de la solución anterior.



Sea muy cuidadoso. La solución total vendrá dada por la INTERSECCIÓN de las dos soluciones parciales; es decir, los valores que estén contenidos en las dos áreas sombreadas a la vez.

Solución en forma de intervalo:

$$\mathbf{X = (9 , + \infty)}$$

EJERCICIO 3 :

Resolver

$$\begin{cases} X + 2 < 7 \\ X - 3 > 6 \end{cases}$$

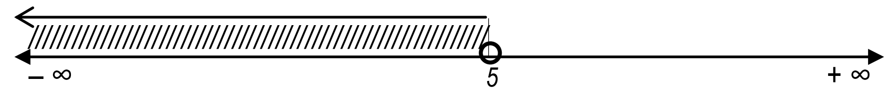
Solución :

Se resuelven por separado las dos inecuaciones.

Resolviendo la primera inecuación :

$$X + 2 < 7 \quad ; \quad X < 7 - 2 \quad ; \quad \mathbf{X < 5}$$

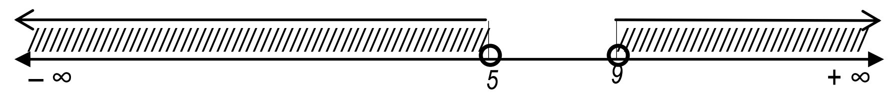
La forma más fácil de visualizar las soluciones es la gráfica :



Resolviendo la segunda inecuación :

$$X - 3 > 6 \quad ; \quad X > 6 + 3 \quad ; \quad \mathbf{X > 9}$$

Se indica la solución sobre la misma gráfica de la solución anterior.



Sea muy cuidadoso. La solución total vendrá dada por la INTERSECCIÓN de las dos soluciones parciales; es decir, los valores que estén contenidos en las dos áreas sombreadas a la vez.

En este caso no existe intersección de los dos conjuntos de las soluciones parciales. Luego, no existen valores de X que satisfagan simultáneamente a las dos inecuaciones. La solución es un conjunto vacío.

$$\mathbf{X = \emptyset}$$

EJERCICIO 4 :

Resolver

$$\begin{cases} 3X - 4 < X + 2 \\ -10X + 2 < 3X + 28 \end{cases}$$

Solución :

Se resuelven por separado las dos inecuaciones.

Resolviendo la primera inecuación :

$$\mathbf{3X - 4 < X + 2}$$

Ordenar de manera tal que las variables queden ubicadas en el primer miembro (lado izquierdo de la desigualdad) y los números en el segundo miembro (lado derecho de la desigualdad).

Al "pasar" un término de un miembro al otro se debe cambiar el signo de dicho término.

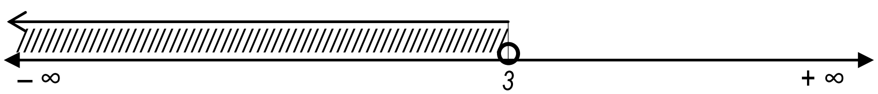
$$3X - X < 2 + 4 \quad ; \quad 2X < 6$$

El "2" que está multiplicando a la "X" en el miembro izquierdo de la inecuación pasará al miembro derecho dividiendo al "6" (Esto solo se puede hacer si el coeficiente que acompaña a la variable es positivo).

Si la variable hubiese estado acompañada por un número negativo, primero se multiplica toda la inecuación por "menos uno" y después se hace el despeje.

$$2X < 6 \quad ; \quad X < \frac{6}{2} \quad ; \quad \mathbf{X < 3}$$

Lo que significa que "X" puede tomar valores menores a 3 (no incluye al 3).



<u>Resolviendo la segunda inecuación :</u>

$$\mathbf{-10X + 2 < 3X + 28}$$

Ordenando las variables al lado izquierdo y los números al lado derecho:

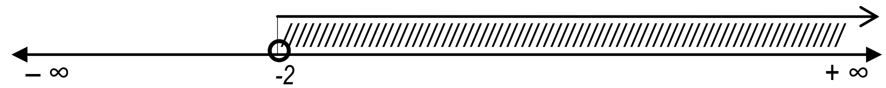
$$-10X - 3X < 28 - 2 \quad ; \quad -13X < 26$$

Como la variable "X" está acompañada por un coeficiente con signo negativo (– 13) se debe multiplicar toda la inecuación por "menos uno", teniendo en cuenta que se deben cambiar los signos de todos los términos y también se debe <u>cambiar el sentido de la desigualdad</u>.

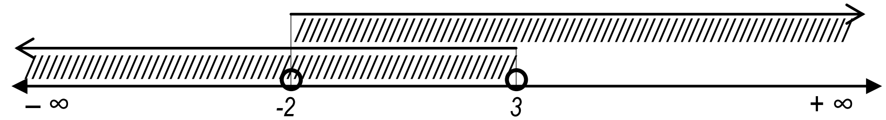
$$(-13X < 26).(-1) \quad ; \quad 13X > -26$$

$$X > \frac{-26}{13} \quad ; \quad \mathbf{X > -2}$$

Lo que significa que "X" puede tomar valores mayores a " – 2" (no incluye al "– 2").



Superponiendo las dos soluciones gráficas :



Sea muy cuidadoso. La solución total vendrá dada por la INTERSECCIÓN de las dos soluciones parciales; es decir, los valores que estén contenidos en las dos áreas sombreadas a la vez.

<u>Solución en forma de intervalo:</u>

$$\mathbf{X = (-2\,,\,3)}$$

EJERCICIO 5 :

Resolver

$$\begin{cases} \mathbf{2X + 1 \leq 4X - 3} \\ \mathbf{4X - 3 < X + 7} \end{cases}$$

<u>Solución :</u>

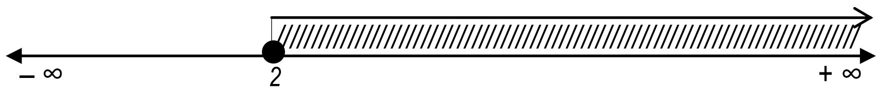
Se resuelven por separado las dos inecuaciones.

*<u>Resolviendo **2X + 1 ≤ 4X – 3**</u>*

$$2X - 4X \leq -3 - 1 \quad ; \quad -2X \leq -4$$

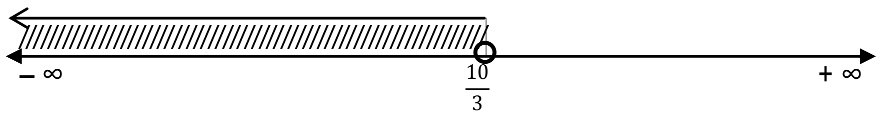
Al multiplicar por menos uno :

$$2X \geq 4 \quad ; \quad X \geq \frac{4}{2} \quad ; \quad \boldsymbol{X \geq 2}$$

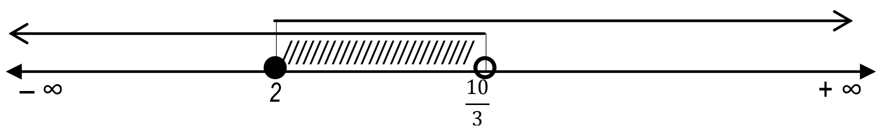


<u>*Resolviendo **4X – 3 < X + 7***</u>

$$4X - X < 7 + 3 \quad ; \quad 3X < 10 \quad ; \quad \boldsymbol{X < \frac{10}{3}}$$



Al sobreponer ambas gráficas se observa fácilmente la intersección:



La solución: $\boldsymbol{2 \leq X \leq \frac{10}{3}}$

<u>*En forma de intervalo:*</u>

$$\mathbf{X = [\ 2\ ,\ \frac{10}{3}\ )}$$

<u>*En forma de conjunto:*</u>

$$\mathbf{X = \{ X \in \mathbb{R} \ /\ 2 \leq X < \frac{10}{3} \}}$$

EJERCICIO 6 : *Resolver*

$$\begin{cases} \dfrac{X-2}{6} + \dfrac{3X}{2} < -\dfrac{X}{4} \\[2ex] \dfrac{2-X}{5} - 3 \geq 4\,(X-2) \end{cases}$$

<u>***Solución :***</u>

Se resuelven por separado las dos inecuaciones.

<u>***Resolviendo la primera inecuación :***</u>

$$\frac{X-2}{6} + \frac{3X}{2} < -\frac{X}{4}$$

Cuando alguno, varios o todos los términos de la inecuación presenten fracciones, se recomienda "eliminar" los denominadores para que la inecuación quede expresada en forma lineal.

La operación para "eliminar" los denominadores se realiza en forma similar que con las ecuaciones.

Primero se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores: (m.c.m de 6, 2 y 4 = 12)

Luego se multiplica TODA la inecuación por el m.c.m (se debe multiplicar cada término por el m.c.m):

$$\frac{12\,(X-2)}{6} + \frac{12(3X)}{2} < -\frac{12X}{4}$$

$$\frac{12X-24}{6} + \frac{36X}{2} < -\frac{12X}{4}$$

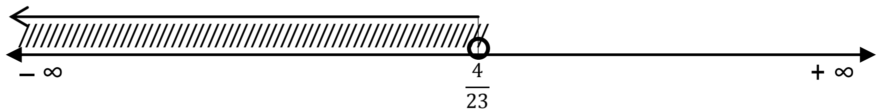
Posteriormente se divide cada numerador entre su respectivo denominador.

$$2X - 4 + 18X < -3X$$

La inecuación ha quedado expresada en forma lineal y su solución puede ser enfocada de la misma forma como los ejercicios anteriores:

$$2X + 18X + 3X < 4 \quad ; \quad 23X < 4 \quad ; \quad \boldsymbol{X < \frac{4}{23}}$$

Lo que significa que "X" puede tomar valores menores a $\frac{4}{23}$ (no incluye al $\frac{4}{23}$)



<u>Resolviendo la segunda inecuación :</u>

$$\frac{2-X}{5} - 3 \geq 4\,(X-2)$$

Primero se realiza la multiplicación indicada en el miembro derecho de la inecuación :

$$\frac{2-X}{5} - 3 \geq 4X - 8$$

Cuando alguno, varios o todos los términos de la inecuación presenten fracciones, se recomienda "eliminar" los denominadores para que la inecuación quede expresada en forma lineal.

La operación para "eliminar" los denominadores se realiza en forma similar que con las ecuaciones.

Primero se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores: (cuando exista un solo denominador se tomará como m.c.m. En este caso m.c.m = 5)

Luego se multiplica TODA la inecuación por el m.c.m (se debe multiplicar cada término por el m.c.m):

$$\frac{5(2-X)}{5} - (5)(3) \geq 5(4X - 8)$$

$$\frac{10-5X}{5} - 15 \geq 20X - 40$$

Posteriormente se divide cada numerador entre su respectivo denominador.

$$2 - X - 15 \geq 20X - 40$$

La inecuación ha quedado expresada en forma lineal y su solución puede ser enfocada de la misma forma como los ejercicios anteriores:

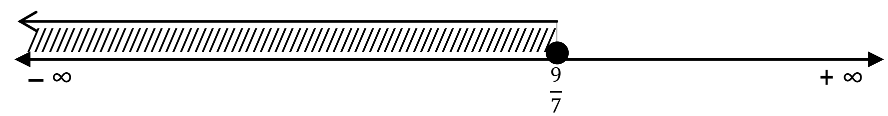
$$-X - 20X \geq -40 - 2 + 15 \quad ; \quad -21X \geq -27$$

Como la variable "X" está acompañada por un coeficiente con signo negativo (– 21) se debe multiplicar toda la inecuación por "menos uno", teniendo en cuenta que se deben cambiar los signos de todos los términos y también se debe <u>cambiar el sentido de la desigualdad</u>.

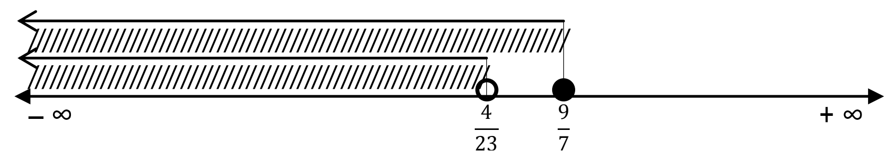
$$(-21X \geq -27).(-1) \quad ; \quad 21X \leq 27 \quad ; \quad \boldsymbol{X \leq \frac{27}{21}}$$

Como al reducir por tres $\frac{27}{21} = \frac{9}{7} \quad ; \quad \boldsymbol{X \leq \frac{9}{7}}$

Lo que significa que "X" puede tomar valores menores o iguales a $\frac{9}{7}$



Al sobreponer ambas gráficas se observa fácilmente la intersección:



Sea muy cuidadoso. La solución total vendrá dada por la INTERSECCIÓN de las dos soluciones parciales; es decir, los valores que estén contenidos en las dos áreas sombreadas a la vez.

<u>Solución en forma de intervalo:</u>

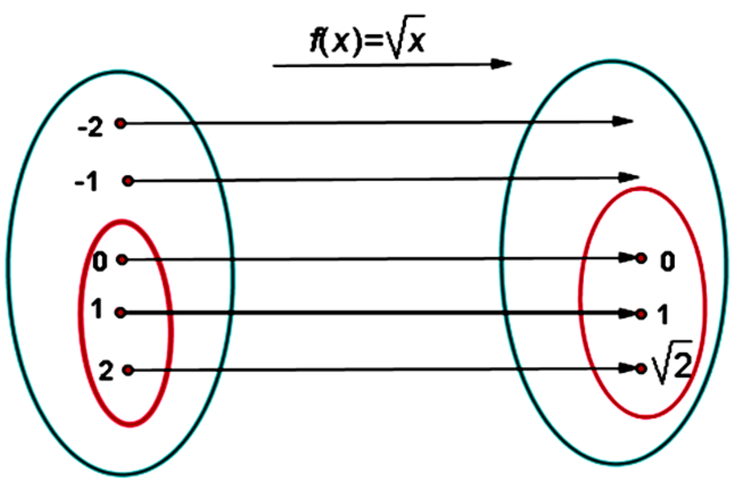
$$\mathbf{X = \left(-\infty\,,\ \frac{4}{23}\right)}$$

❖ DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN

Función: *Una función entre dos conjuntos numéricos es una correspondencia tal que a cada número del conjunto de partida le corresponde una sola imagen del conjunto de llegada.*

Así, en la figura siguiente podemos observar gráficamente el comportamiento de la función raíz cuadrada de un número.

Del lado izquierdo observamos el conjunto de partida (representado por los valores que le asignemos a la variable independiente "X"), del lado derecho observamos el conjunto de llegada (representado por los valores que toma la variable dependiente "Y" una vez que se extrae la raíz cuadrada del valor que se le asignó a "X") y sobre la flecha está indicada la relación matemática (función) que transforma los valores del conjunto de partida en los valores del conjunto de llegada (imagen).



Dominio de una función : *Es el conjunto formado por los elementos que tienen imagen. Los valores que le damos a "X" (variable independiente) forman el conjunto de partida. Gráficamente lo miramos en el eje horizontal (abscisas), leyendo como escribimos de izquierda a derecha.*

El dominio de una función está formado por aquellos valores de "X" (números reales) para los que se puede calcular la imagen f(x).

En la gráfica anterior notamos que si le asignamos los valores "-2" y "-1" a la "X" estos no tienen imagen, por lo tanto no pertenecen al dominio de la función estudiada. Esto es lógico ya que los números negativos no tienen raíces reales sino raíces imaginarias.

Rango de una función: *Es el conjunto formado por las imágenes. Son los valores que toma la función "Y" (variable dependiente), por eso se denomina "f(x)", su valor depende del valor que le demos a "X". Gráficamente lo miramos en el eje vertical (ordenadas), leyendo de abajo a arriba.*

El Rango de una función es el conjunto formado por las imagenes f(x) de los valores de "X" que pertenecen al Dominio de dicha función.

La manera más efectiva para determinar el Rango consiste en graficar la función y ver los valores que toma "Y" de abajo hacia arriba.

CÁLCULO DEL DOMINIO Y RANGO DE FUNCIONES

Vamos a calcular de forma numérica y gráfica el dominio y rango de varias funciones para fijar los conceptos anteriores.

FUNCIONES POLINÓMICAS:

Aquellas funciones cuya expresión algebraica es un polinomio, es decir, las funciones polinómicas, tienen como dominio todo el conjunto de los números reales: ***R****, puesto que a partir de una expresión polinómica, se puede sustituir el valor de "X" por cualquier número real que hayamos elegido y se puede calcular sin ningún problema el número real imagen "Y".*

Son funciones polinómicas : La recta (función lineal o afín), la parábola (función de segundo grado) y los polinomios de grado superior.

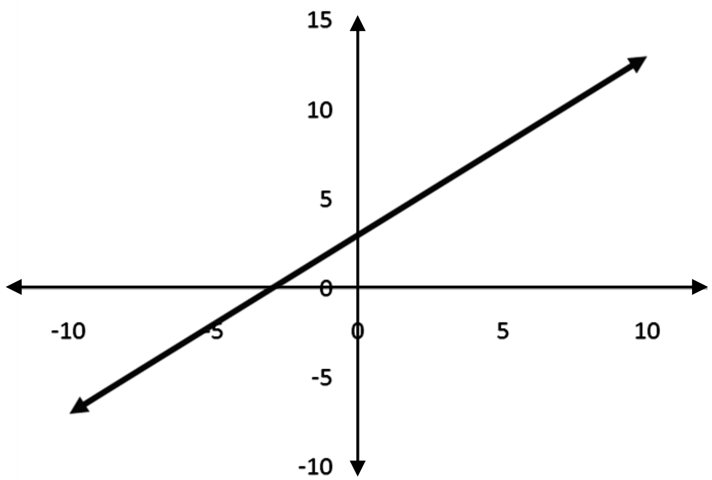
$$\boxed{\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \text{ también se puede expresar } \Rightarrow \text{Dom } f(x) = (-\infty, \infty)}$$

EJERCICIO 1 : *Determinar Dominio y Rango de*

$$f(x) = X + 3$$

Como es una función lineal el dominio será todo el conjunto de los números reales.

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$



El Rango será todo el conjunto de los números reales. Seguimos el eje "Y" de abajo hacia arriba y podemos leer valores siempre.

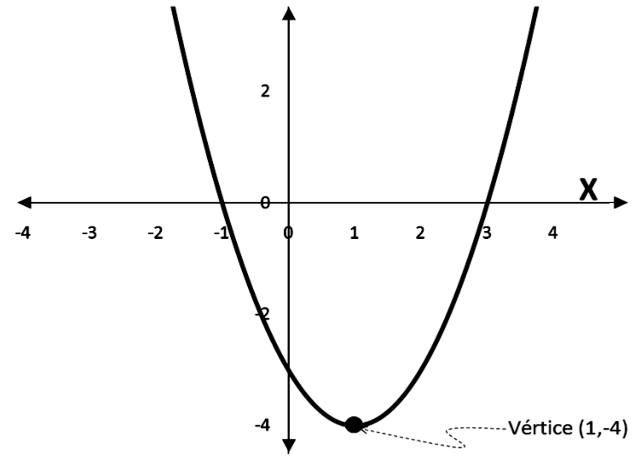
Rango = (– ∞ , + ∞)

EJERCICIO 2 : *Determinar Dominio y Rango de*

$$f(x) = X^2 - 2X - 3$$

Como es una función polinómica de segundo grado el dominio será todo el conjunto de los números reales.

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$



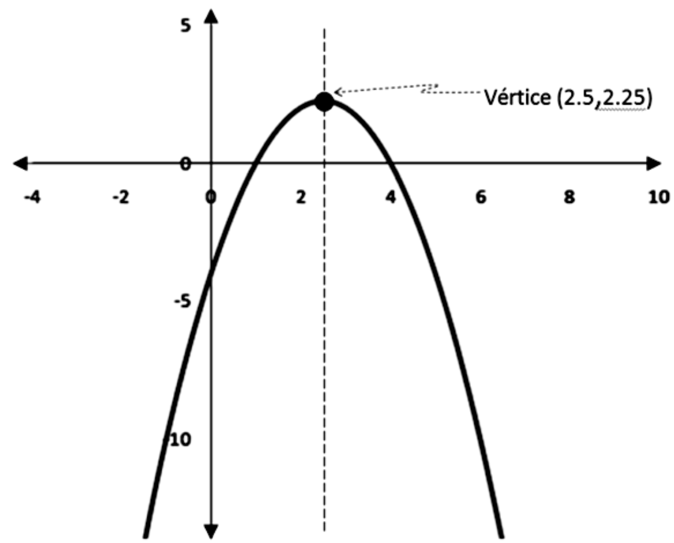
El eje "Y" empieza a tomar valores (de abajo hacia arriba) a partir de -4.

Rango = [– 4 , + ∞)

EJERCICIO 3 : *Determinar Dominio y Rango de*

$$f(x) = -X^2 + 5X - 4$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$



El eje "Y" empieza a tomar valores (de abajo hacia arriba) desde menos infinito y llega hasta el vértice de la parábola (hasta Y = 2,25).

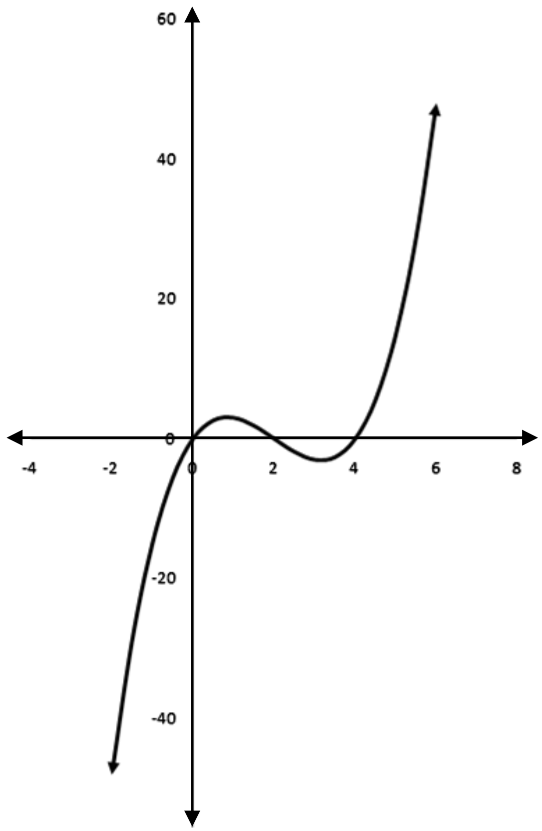
Rango = (– ∞ , 2.25]

EJERCICIO 4 : *Determinar Dominio y Rango de*

$$f(x) = X^3 - 6X^2 + 8X$$

Como es una función polinómica de tercer grado el dominio será todo el conjunto de los números reales.

Dom $f(x)$ = R



El Rango será todo el conjunto de los números reales. Seguimos el eje "Y" de abajo hacia arriba y podemos leer valores siempre.

Rango = (– ∞ , + ∞)

FUNCIONES RACIONALES :

Para calcular el dominio de este tipo de funciones el primer paso es igualar el denominador a cero y resolver esa ecuación, una vez resuelta esa ecuación el dominio estará formado por todos los reales excepto las soluciones de la ecuación.

Dom f(x) = ℝ - {los valores de x que me anulan el denominador (si los hay)}

EJERCICIO 5 : *Determinar Dominio y Rango de*

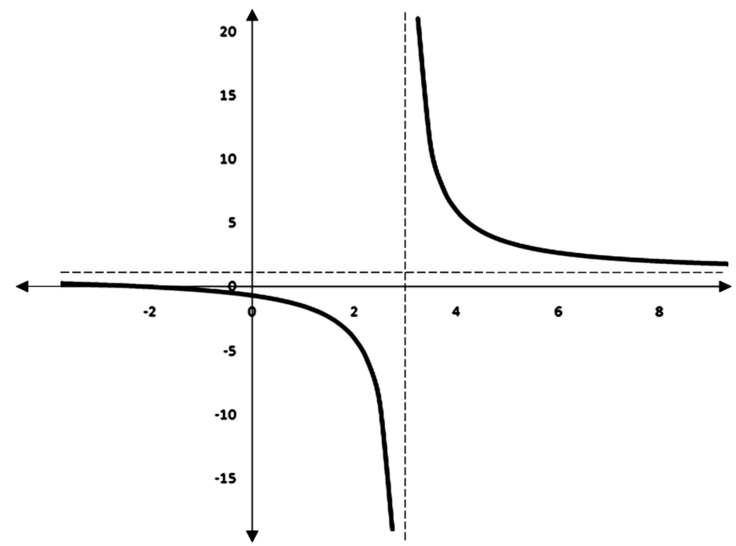
$$f(x) = \frac{X+2}{X-3}$$

Igualando el denominador a cero :

*X – 3 = 0 ; **X = 3***

El dominio estará formado por todos los reales excepto el número 3.

Dom $f(x)$ = R – {3} ; (– ∞ , 3) U (3 , + ∞)



Esta gráfica presenta una asíntota horizontal en "Y = 1", Luego la función estará definida en todos los valores de Y menos en "Y = 1".

Rango = R – {1} ; (– ∞ , 1) U (1 , + ∞)

EJERCICIO 6 : *Determinar Dominio y Rango de*

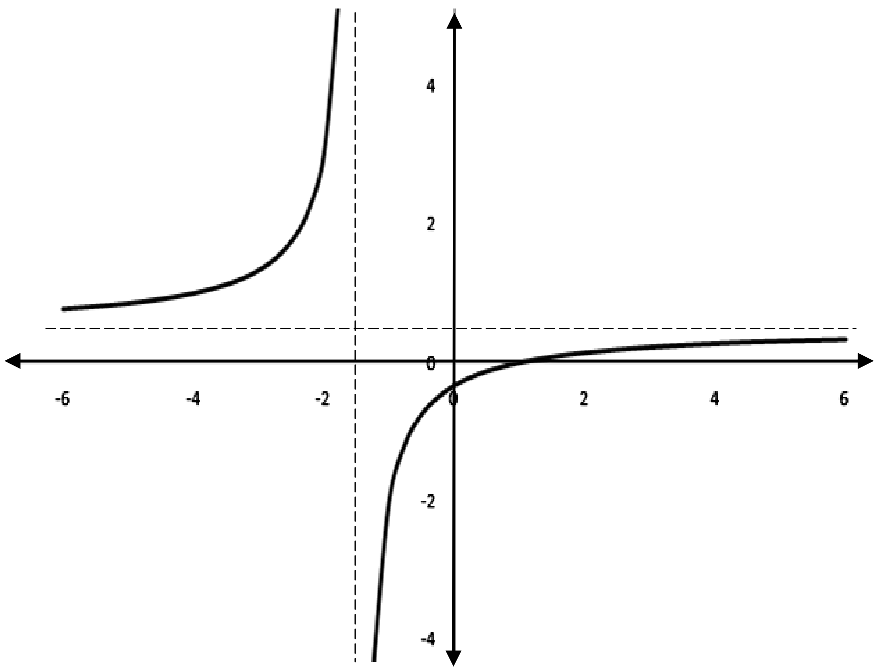
$$f(x) = \frac{X-1}{2X+3}$$

Igualando el denominador a cero :

$$2X + 3 = 0 \quad ; \quad 2X = -3 \quad ; \quad Y = \frac{-3}{2} = -1{,}5$$

El dominio estará formado por todos los reales excepto el número -1,5.

Dom f(x) = R – {-1.5} ; (– ∞ , -1.5) U (-1.5 , + ∞)



Esta gráfica presenta una asíntota horizontal en $Y = \frac{1}{2}$. Luego la función estará definida en todos los valores de Y menos en $Y = \frac{1}{2}$.

Rango = R – { $\frac{1}{2}$ } ; (– ∞ , $\frac{1}{2}$) U ($\frac{1}{2}$, + ∞)

EJERCICIO 7 : *Determinar Dominio y Rango de*

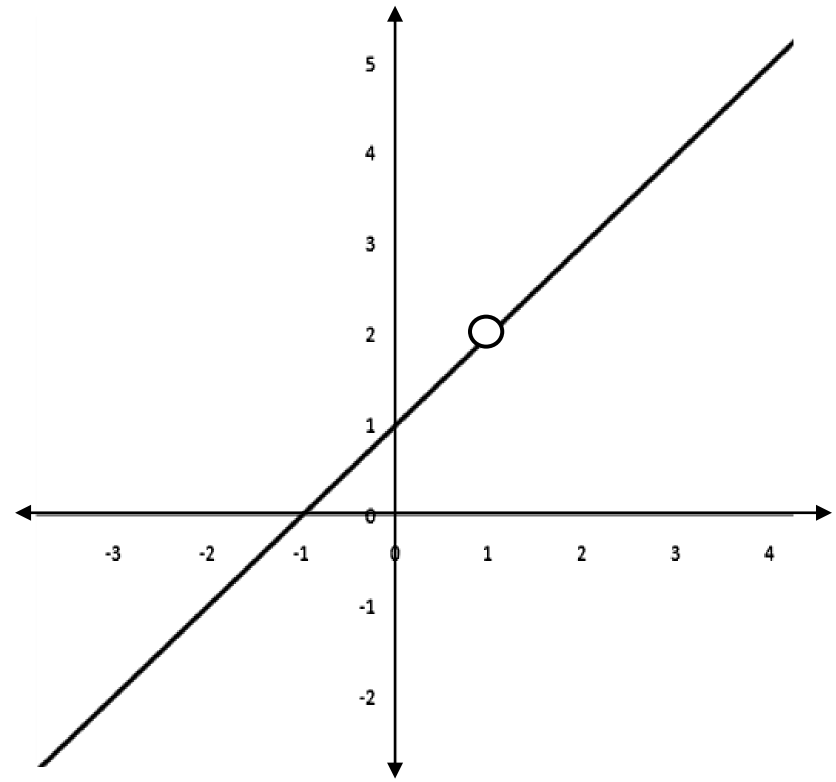
$$f(x) = \frac{X^2 - 1}{X - 1}$$

Igualando el denominador a cero :

X – 1 = 0 ; ***X = 1***

El dominio estará formado por todos los reales excepto el número 1.

Dom f(x) = R – {1} ; (– ∞ , 1) U (1 , + ∞)



Esta gráfica presenta un "hueco" en "Y = 2", Luego la función estará definida en todos los valores de Y menos en "Y = 2".

Rango = R – {2} ; (– ∞ , 2) U (2 , + ∞)

EJERCICIO 8 : Determinar Dominio y Rango de

$$f(x) = \frac{4X^2+4}{2X^2-8}$$

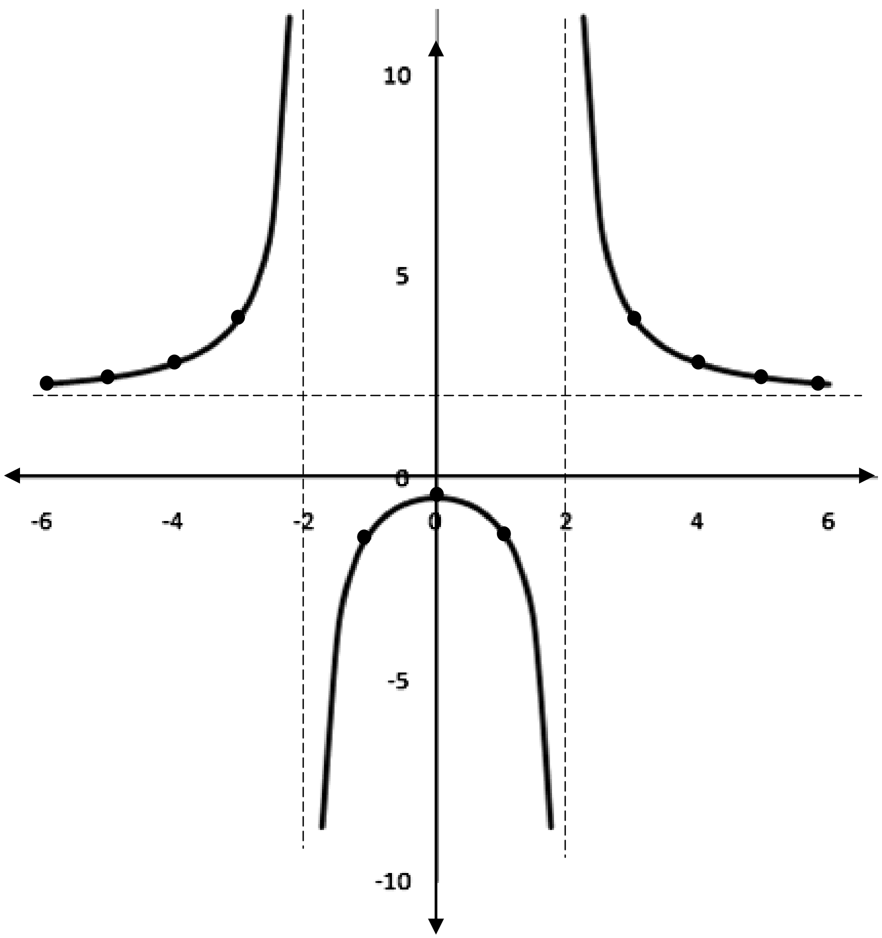
Igualando el denominador a cero :

Las raíces del polinomio **$2X^2 - 8$** *son :* **X = 2** *y* **X = - 2**

Estas raíces las puede obtener aplicando la formula general de segundo grado o el método de factorización que te sea más cómodo.

El dominio estará formado por todos los reales excepto los números "2" y " -2"

Dom $f(x)$ = R – {-2,2} **;** **(– ∞ , -2) U (-2,2) U (2 , + ∞)**



X	-6	-5	-4	-3	-1	0	1	3	4	5	6
Y	2,31	2,47	2,83	4	-1,33	-0,5	-1,33	4	2,83	2,47	2,31

La gráfica presenta una asíntota horizontal en "Y = 2", pero además podemos notar que la curva que está debajo del eje "X" corta al eje "Y" en el punto (0,-0.5). Luego el Rango será :

Rango = (– ∞ , -0.5] U (2 , + ∞)

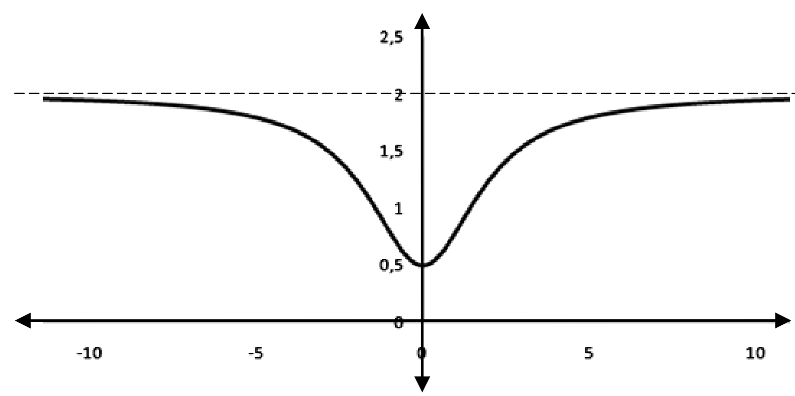
Verifique que los valores de "Y" entre "Y = -0.5" y "Y = 2" no están señalados en la gráfica, por lo tanto no pertenecen al Rango.

EJERCICIO 9 : Determinar Dominio y Rango de

$$f(x) = \frac{4X^2+4}{2X^2+8}$$

Al igualar el denominador a cero puedo notar que el polinomio **$2X^2 + 8$** *no tiene raíces reales, luego no existen valores que anulen al denominador y el Dominio estará representado por todos los números reales.*

Dom $f(x)$ = R



La gráfica presenta una asíntota horizontal en "Y = 2", pero además podemos notar que la curva corta al eje "Y" en el punto (0,0.5). Luego el Rango será :

Rango = [0.5 , 2)

EJERCICIO 10 : *Determinar Dominio y Rango de*

$$f(x) = \frac{X^3 + 3X^2 + 2X}{X^2 + 3x + 2}$$

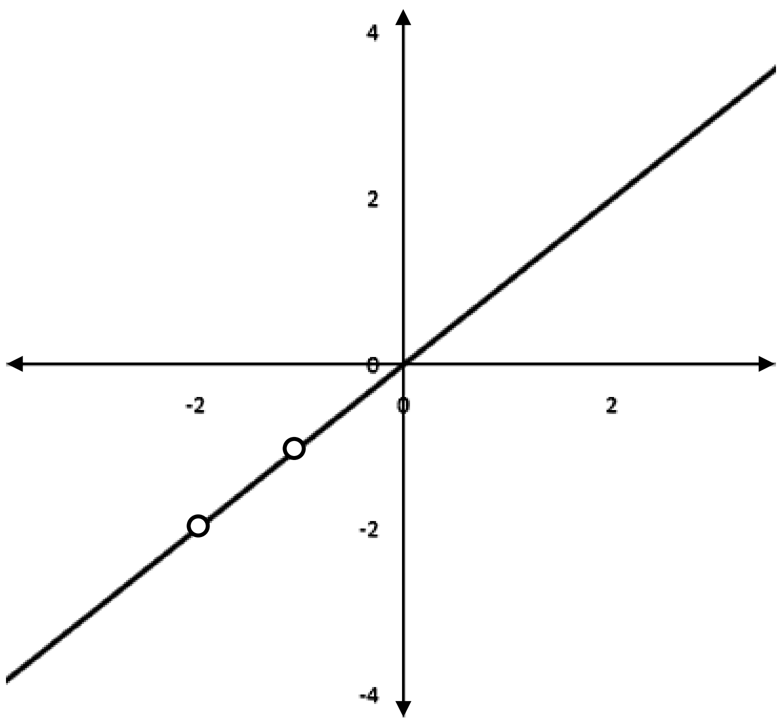
Igualando el denominador a cero :

Las raíces del polinomio $\underline{X^2 + 3x + 2}$ *son :* ***X = -2*** *y* ***X = - 1***

Estas raíces las puede obtener aplicando la formula general de segundo grado o el método de factorización que te sea más cómodo.

El dominio estará formado por todos los reales excepto los números "-2" y " -1"

Dom f(x) = R – {-2,-1} ; (– ∞ , -2) U (-2,-1) U (-1 , + ∞)



Rango = (– ∞ , -2) U (-2,-1) U (-1 , + ∞)

FUNCIONES IRRACIONALES :

Funciones irracionales son las que vienen expresadas a través de un radical que lleve en su radicando la variable independiente.

Si el radical tiene **índice impar**, *entonces* **el dominio será todo el conjunto R de los números reales** *porque al elegir cualquier valor de X siempre vamos a poder calcular la raíz de índice impar de la expresión que haya en el radicando.*

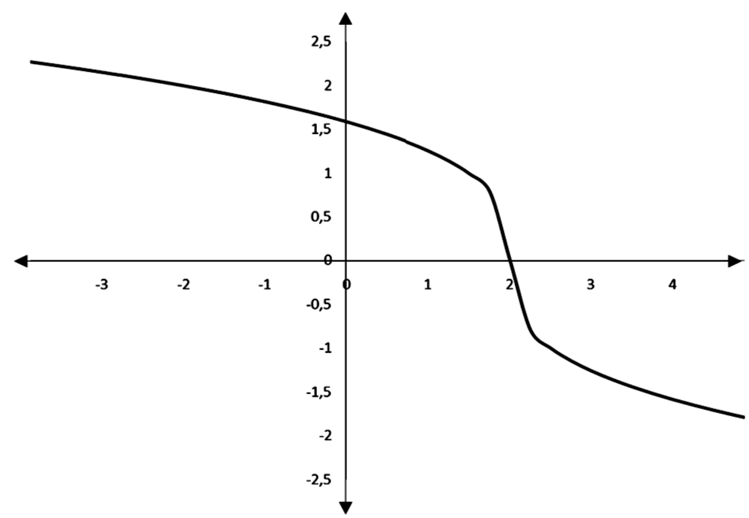
Pero si el radical tiene **índice par**, *para los valores de X que hagan el radicando negativo no existirá la raíz y por tanto no tendrán imagen. Cuando queremos hallar el dominio de este tipo de funciones lo primero que debemos hacer es* **tomar lo que hay dentro de la raíz y hacer que sea mayor o igual que cero. A continuación se resuelve esa inecuación y la solución de dicha inecuación conforma el dominio de la función**.

EJERCICIO 11 : *Determinar Dominio y Rango de*

$$f(x) = \sqrt[3]{-2X + 4}$$

Raíz de índice impar :

Dom f(x) = R



Rango = R

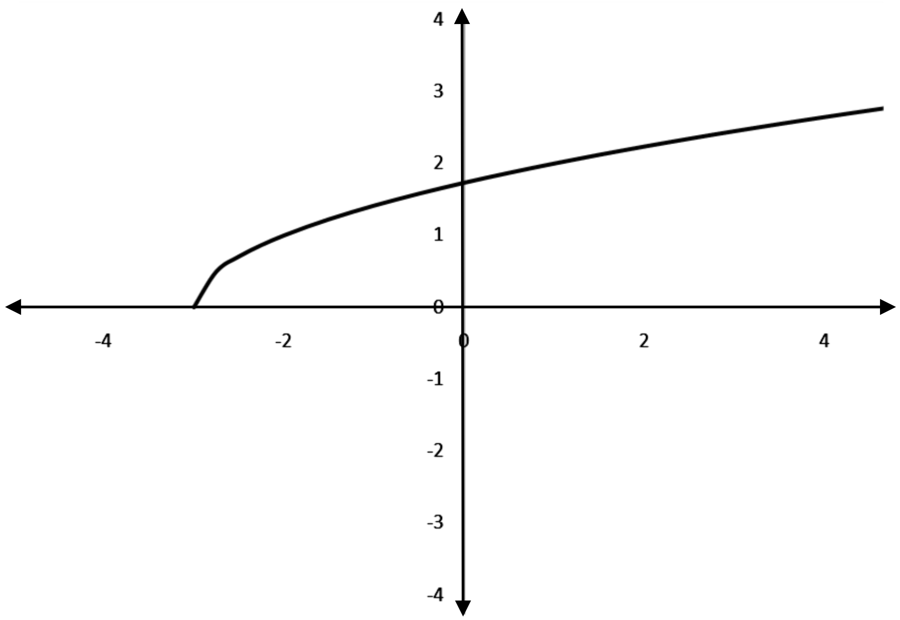
EJERCICIO 12 : *Determinar Dominio y Rango de*

$$f(x) = \sqrt{X + 3}$$

Cuando queremos hallar el dominio de este tipo de funciones lo primero que debemos hacer es tomar lo que hay dentro de la raíz y hacer que sea mayor o igual que cero. A continuación se resuelve esa inecuación y la solución de dicha inecuación conforma el dominio de la función.

$X + 3 \geq 0$; $\boldsymbol{X \geq -3}$

Dom $f(x)$ = $[-3, +\infty)$



Rango = $[0, +\infty)$

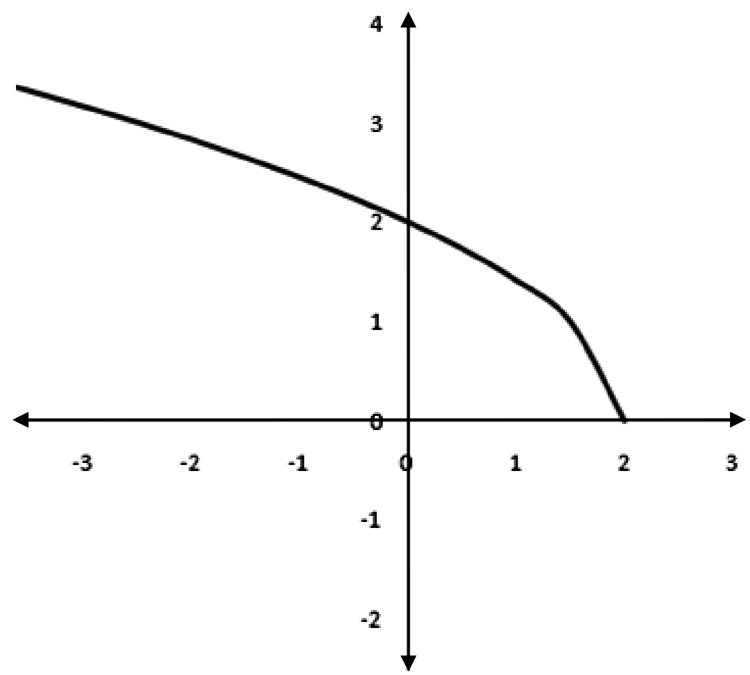
EJERCICIO 13 : *Determinar Dominio y Rango de*

$$f(x) = \sqrt{-2X + 4}$$

Cuando queremos hallar el dominio de este tipo de funciones lo primero que debemos hacer es tomar lo que hay dentro de la raíz y hacer que sea mayor o igual que cero. A continuación se resuelve esa inecuación y la solución de dicha inecuación conforma el dominio de la función.

$-2X + 4 \geq 0$; $-2X \geq -4$ *por menos uno* ; $2X \leq 4$; $\boldsymbol{X \leq 2}$

Dom $f(x)$ = $(-\infty, 2]$

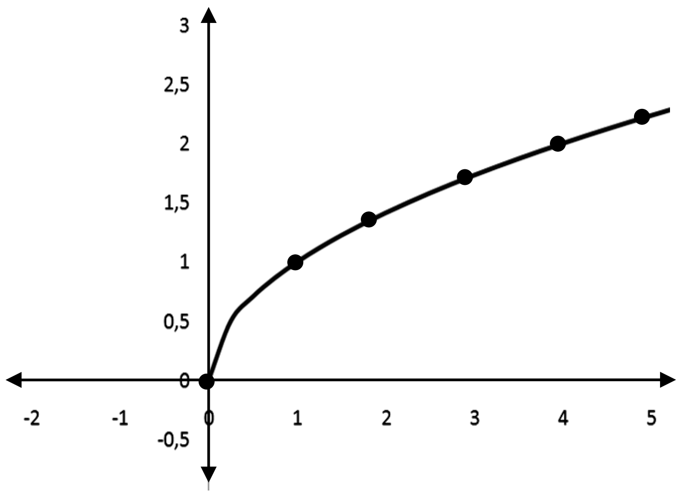


Rango = $[0, +\infty)$

EJERCICIO 14 : Dominio y Rango $f(x) = \sqrt{X}$

$X \geq 0$ Dom $f(x) = [\,0\,,\,+\infty\,)$

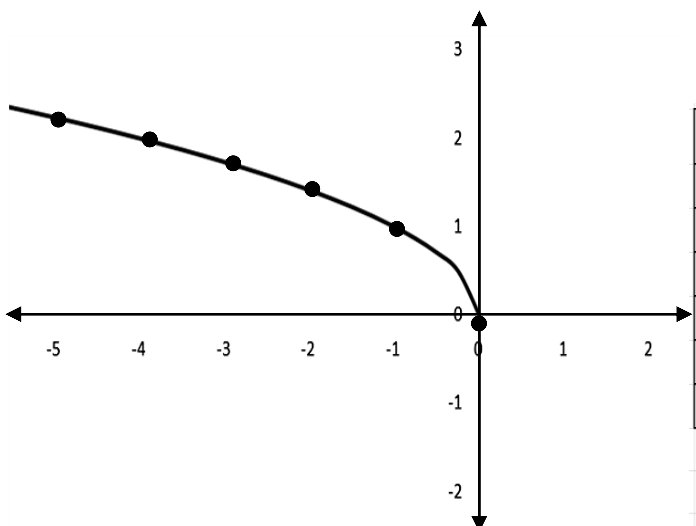
X	Y
0	0
1	1
2	1,41
3	1,73
4	2
5	2,24



Rango $= [\,0\,,\,+\infty\,)$

EJERCICIO 15 : Dominio y Rango $f(x) = \sqrt{-X}$

$-X \geq 0 \;\; ; \;\; X \leq 0$ Dom $f(x) = (-\infty\,,\,0\,]$



X	Y
0	0
_ 1	1
_ 2	1,41
_ 3	1,73
_ 4	2
_ 5	2,24

Rango $= [\,0\,,\,+\infty\,)$

FUNCIONES EXPONENCIALES :

Son aquellas funciones del tipo $f(x) = a^X$ *donde "a" debe ser un número mayor que cero y distinto de 1…(* $a > 0 \;\; ; \;\; a \neq 1$ *)*

Todas las funciones exponenciales tienen como Dominio todos los números reales. **Dom $f(x) = R$**

Todas las funciones exponenciales tienen como Rango todos los números reales positivos sin incluir el cero. **Rango $= (\,0\,,\,+\infty\,)$**

Tomando en cuenta lo indicado anteriormente no es necesario realizar ningún análisis para determinar el Dominio y Rango de una función exponencial.

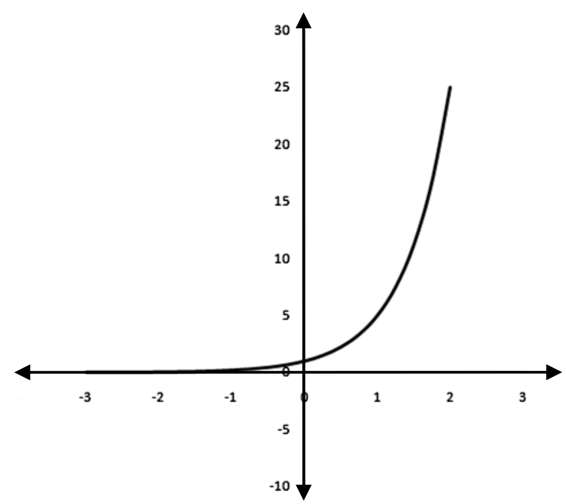
Al detectar que es una función exponencial, podemos afirmar inmediatamente que :

Dom $f(x) = R$

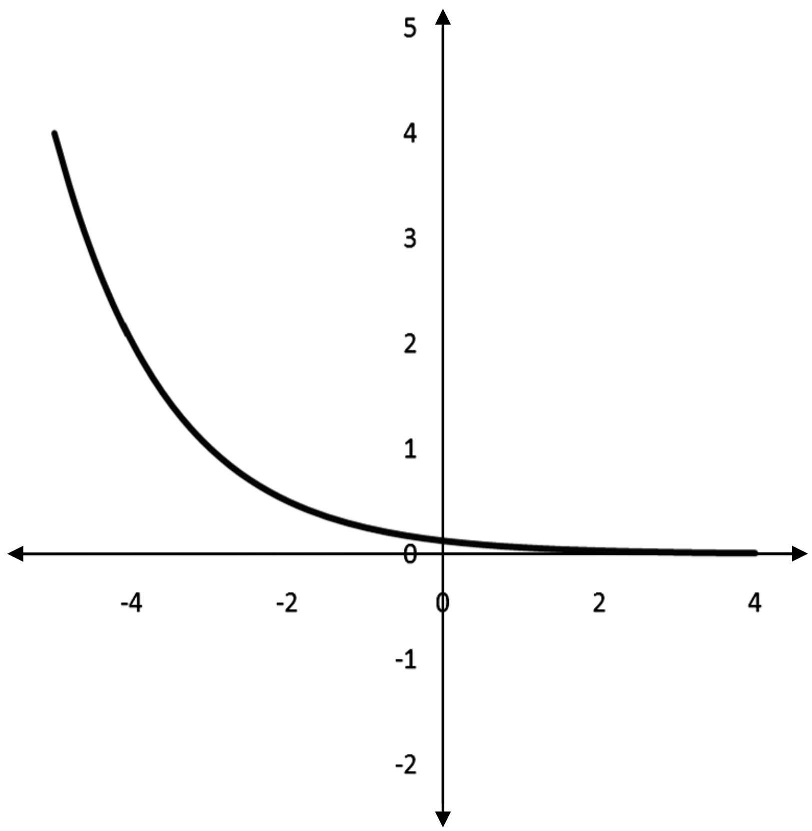
Rango $= (\,0\,,\,+\infty\,)$

Vamos a graficar dos funciones exponenciales para sustentar lo apuntado anteriormente:

$f(x) = 5^X$



$f_{(x)} = (0,5)^{X+3}$



FUNCIONES LOGARÍTMICAS :

Los logarítmos de números negativos y el de 0 no existen. Luego, todas las expresiones a las que se le pretenda calcular su logaritmo deben ser mayores a cero.

El procedimiento para calcular su dominio es bastante similar al de las funciones irracionales. Tomamos lo que hay dentro del logaritmo y hacemos que sea mayor que cero. A continuación resolvemos la inecuación y la solución nos da el dominio.

El Rango estará representado por el conjunto de todos los números reales.

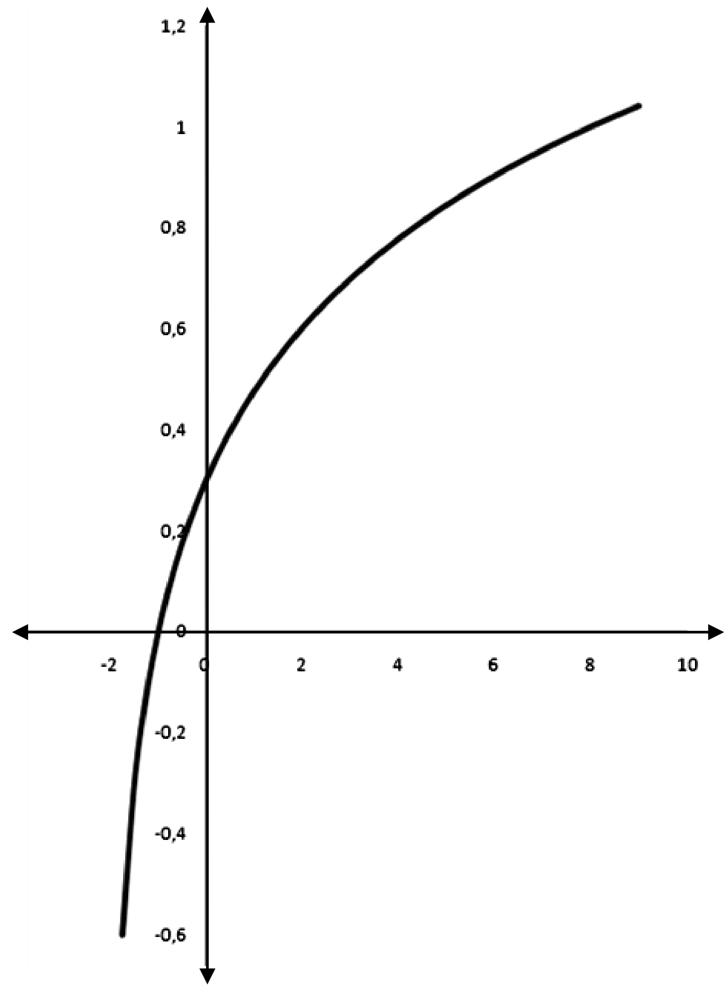
EJERCICIO 16 : *Determinar Dominio y Rango de*

$f_{(x)} = \log(X+2)$

Tomamos lo que hay dentro del logaritmo y hacemos que sea mayor que cero. A continuación resolvemos la inecuación y la solución nos da el dominio.

$X + 2 > 0 \quad ; \quad \boldsymbol{X > -2}$

Dom $f_{(x)} = (-2\,,\,+\infty)$



Rango = R

EJERCICIO 17 : *Determinar Dominio y Rango de*

$$f(x) = log\,(X^2 - 4)$$

Tomamos lo que hay dentro del logaritmo y hacemos que sea mayor que cero. A continuación resolvemos la inecuación y la solución nos da el dominio.

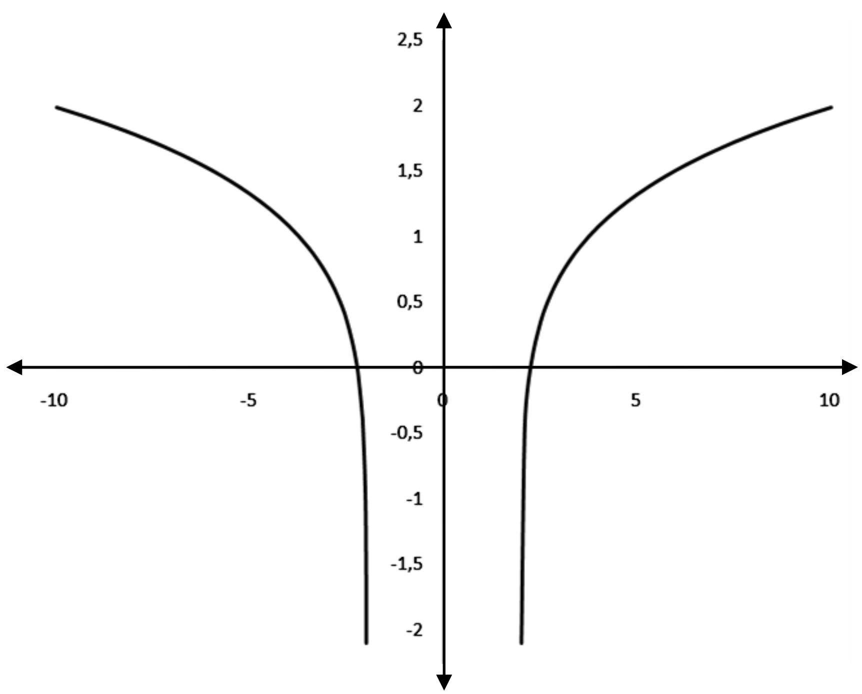
$$X^2 - 4 > 0 \quad ; \quad \boldsymbol{X^2 > 4}$$

Al recordar lo aprendido en INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO O CUADRÁTICAS, los valores que cumplen con ella serán ;

X = ***(– ∞ , -2) U (2 , + ∞)***

Luego el dominio también será :

Dom f(x) = (– ∞ , -2) U (2 , + ∞)



Rango = R

FUNCIONES COMBINADAS (RACIONALES – IRRACIONALES) :

EJERCICIO 18 : *Determinar Dominio y Rango de*

$$f(x) = \frac{\sqrt{X+5}}{X+3}$$

Se nos presenta una función racional que en el numerador posee una función irracional.

Para determinar el Dominio debemos analizar por separado el numerador y el denominador.

<u>Analizando el numerador :</u>

Como el numerador es una raíz de índice par, la cantidad sub-radical o radicando tiene que ser mayor o igual a cero

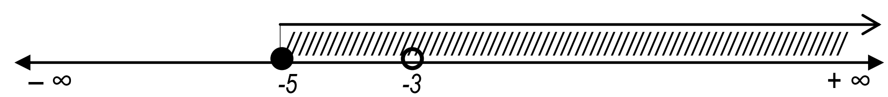
$$X + 5 \geq 0 \quad ; \quad \boldsymbol{X \geq -5}$$

<u>Analizando el denominador :</u>

Como la división por cero no existe, el denominador nunca puede ser igual a cero. Luego :

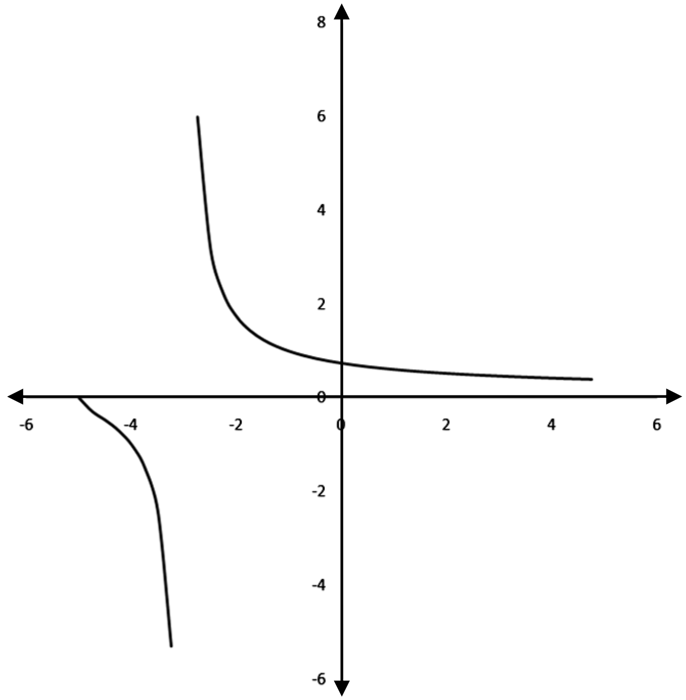
$$X + 3 \neq 0 \quad ; \quad \boldsymbol{X \neq -3}$$

Estos valores lo traslado a la recta real para visualizar mejor los valores que se le pueden asignar a la variable "X" y los mismos conformarán el Dominio de la función estudiada,



Dom f(x) = [-5,-3) U (-3 , + ∞)

Graficamos ahora la función para visualizar su Rango :



Rango = R

EJERCICIO 19 : *Determinar Dominio y Rango de*

$$f_{(x)} = \frac{\sqrt{X+2}}{X+4}$$

Se nos presenta una función racional que en el numerador posee una función irracional.

Para determinar el Dominio debemos analizar por separado el numerador y el denominador.

Analizando el numerador :

Como el numerador es una raíz de índice par, la cantidad sub-radical o radicando tiene que ser mayor o igual a cero

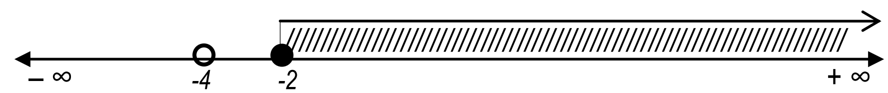
$$X + 2 \geq 0 \quad ; \quad \mathbf{X \geq -2}$$

Analizando el denominador :

Como la división por cero no existe, el denominador nunca puede ser igual a cero. Luego :

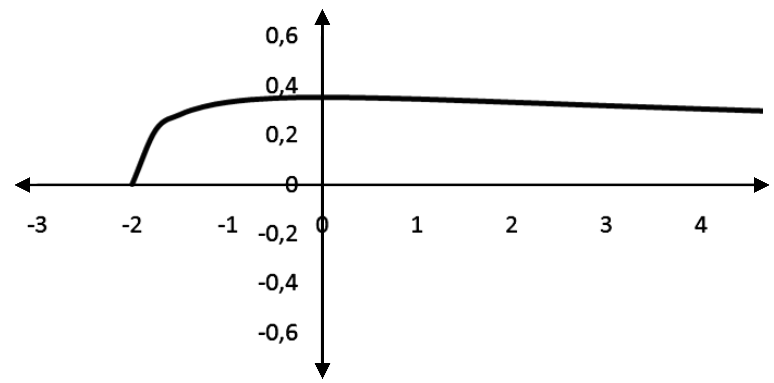
$$X + 4 \neq 0 \quad ; \quad \mathbf{X \neq -4}$$

Estos valores lo traslado a la recta real para visualizar mejor los valores que se le pueden asignar a la variable "X" y los mismos conformarán el Dominio de la función estudiada,



Dom $f_{(x)}$ = [-2 , + ∞)

Graficamos ahora la función para visualizar su Rango :



Rango = [0 , 0.3535]

El valor más alto de "Y" se alcanza cuando la gráfica corta al eje vertical, para calcularlo, sustituyo "X = 0" en la función :

$$Y = \frac{\sqrt{0+2}}{0+4} = 0{,}3535$$

EJERCICIO 20 : *Determinar Dominio y Rango de*

$$f(x) = \frac{\sqrt{X+6}}{\sqrt{X-5}}$$

Se nos presenta una función racional que posee una función irracional en el numerador y otra en el denominador.

Para determinar el Dominio debemos analizar por separado el numerador y el denominador.

Analizando el numerador :

Como el numerador es una raíz de índice par la cantidad sub-radical o radicando tiene que ser mayor o igual a cero

$$X + 6 \geq 0 \quad ; \quad \boldsymbol{X \geq -6}$$

Analizando el denominador :

Como el denominador es una raíz de índice par debo hacer dos consideraciones :

Primero: La cantidad sub-radical o radicando tiene que ser mayor o igual a cero

$$X - 5 \geq 0 \quad ; \quad \boldsymbol{X \geq 5}$$

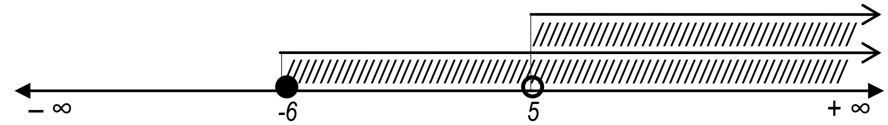
Segundo: Como la división por cero no existe, el denominador nunca puede ser igual a cero. Luego :

$$\sqrt{X-5} \neq 0$$

Al elevar ambos miembros al cuadrado ; $X - 5 \neq 0 \quad : \quad \boldsymbol{X \neq 5}$

Estos valores lo traslado a la recta real para visualizar mejor los valores que se le pueden asignar a la variable "X" y los mismos conformarán el Dominio de la función estudiada,

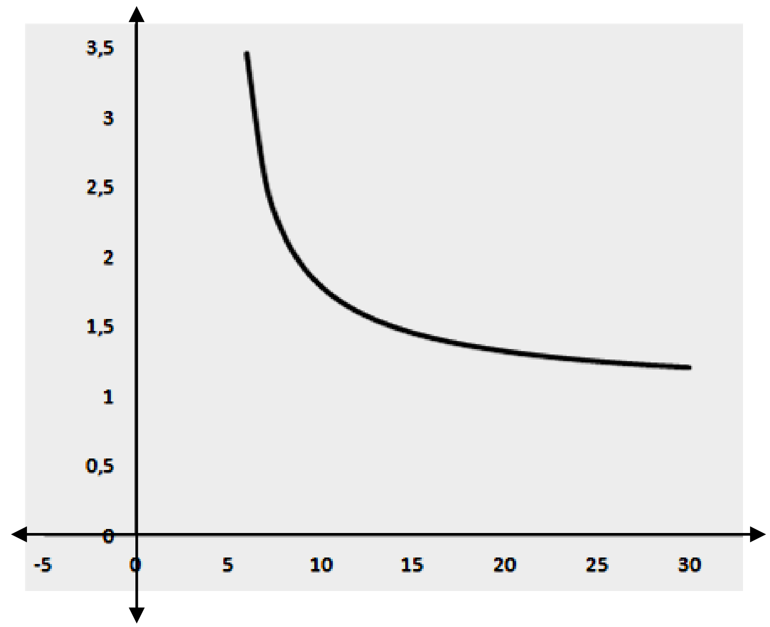
Colocando esta solución sobre la recta real se observa la **INTERSECCION** *de las dos soluciones y ésta representará la solución total :*



Sea muy cuidadoso. La solución estará indicada por aquellos valores de X que cumplen con todas las condiciones, es decir, los valores que están en las dos áreas sombreadas a la vez.

Dom f(x) = (5 , + ∞)

Graficamos ahora la función para visualizar su Rango :



Rango = (1 , + ∞)

Para verificar el rango de la función consulte en estos mismos apuntes lo relacionado a ASÍNTOTAS HORIZONTALES (COMO GRAFICAR UNA FUNCIÓN RACIONAL).

❖ COMO GRAFICAR UNA FUNCION DE SEGUNDO GRADO

Lo primero que debemos hacer para empezar a graficar una función de segundo grado es ordenarla en forma descendente de manera que quede expresada como :

$$f(x) = aX^2 + bX + c$$

EJERCICIO 1 : *Graficar* $f(x) = X^2 - 2X - 3$

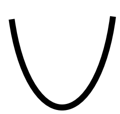
Solución :

Para graficar una función de segundo grado se pueden seguir los siguientes pasos :

Primer paso : *Se identifican los valores de* a, b *y* c *de la función.*

$$a = 1 \quad ; \quad b = -2 \quad ; \quad c = -3$$

Cuando **a > 0** *la parábola es cóncava hacia arriba ;*



Segundo paso : *Se calcula el eje de simetría con la fórmula :* $X = \frac{-b}{2a}$

$$X = \frac{-b}{2a} \quad ; \quad X = \frac{-(-2)}{2(1)} \quad ; \quad X = \frac{2}{2} \quad ; \quad \boldsymbol{X = 1}$$

Esto significa que por X = 1 pasará una recta perpendicular al eje X que representa al eje de simetría de la parábola.

Se introduce este valor en la función $f(x) = X^2 - 2X - 3$ *para determinar el vértice de la parábola.*

$$f(1) = (1)^2 - 2(1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4 \quad ; \quad \boldsymbol{f(1) = -4}$$

Esto nos indica que el vértice de la parábola es el punto. ***(1, – 4)***

Tercer paso : *Se determina si la función intercepta o no al eje X con el uso de la formula conocida como discriminante* ***($b^2 - 4ac$).***
Recuerde que la intercepción o corte con el eje X lo indican las raíces de la función.

- *Si* $b^2 - 4ac > 0$ *la función tiene 2 raíces diferentes (corta al eje X en dos puntos).*
- *Si* $b^2 - 4ac = 0$ *la función tiene 2 raíces iguales (tiene su vértice en un punto contenido en el eje X).*
- *Si* $b^2 - 4ac < 0$ *la función no tiene raíces reales (NO corta al eje X).*

$$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = \mathbf{16}$$

Como $b^2 - 4ac > 0$ *la función tiene 2 raíces diferentes (corta al eje X en dos puntos).*

Cuarto paso : *Se calculan las raíces de la función con el uso de la fórmula general de segundo grado o resolvente:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Este cálculo se nos facilita por el hecho de que la cantidad sub-radical o radicando es la misma conocida como discriminante y ya fue calculada.

$$x = \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-3)}}{2(1)} = \frac{2\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{2\pm 4}{2}$$

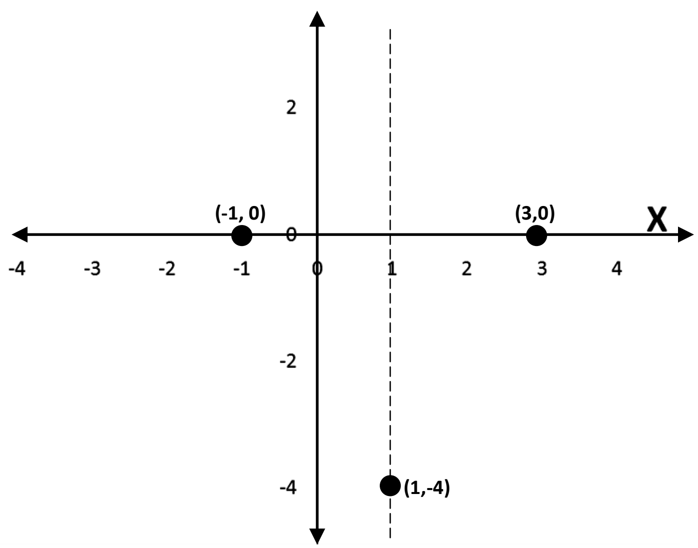
$$X_1 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} \quad ; \quad \boldsymbol{X_1 = 3}$$

*Esto nos indica que la parábola pasa por el punto .**(3,0)***

$$X_2 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} \quad ; \quad \boldsymbol{X_2 = -1}$$

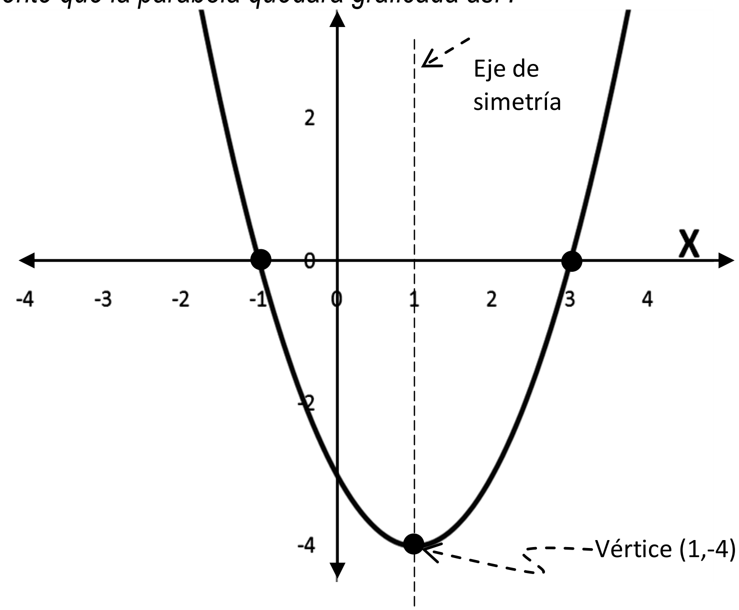
*Esto nos indica que la parábola pasa por el punto. **(–1,0)***

<u>Quinto paso :</u> *Se indican los puntos calculados en un sistema de coordenadas rectangulares y posteriormente se grafica la parábola.*



El hecho de calcular el eje de simetría y el vértice de la parábola nos facilita el procedimiento para graficarla debido a que nos permite visualizar inmediatamente como será su configuración y sobre todo su concavidad y su punto más alto o más bajo (vértice) según sea el caso.

En este caso en particular si unimos los tres puntos se deduce fácilmente que la parábola quedará graficada así :



EJERCICIO 2 : *Graficar* $f(x) = X^2 + 4$

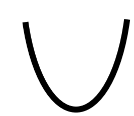
<u>Solución :</u>

Para graficar una función de segundo grado se pueden seguir los siguientes pasos :

<u>Primer paso :</u> *Se identifican los valores de* a, b *y* c *de la función.*

a = 1 ; b = 0 ; c = 4

Cuando **a > 0** *la parábola es cóncava hacia arriba ;*



<u>Segundo paso :</u> *Se calcula el eje de simetría con la fórmula :* $X = \frac{-b}{2a}$

$$X = \frac{-b}{2a} \quad ; \quad X = \frac{-(0)}{2(1)} \quad ; \quad X = \frac{0}{2} \quad ; \quad \boldsymbol{X = 0}$$

Esto significa que por $X = 0$ pasará una recta perpendicular al eje X que representa al eje de simetría de la parábola (en este caso el eje de simetría será el eje "Y" del sistema de coordenadas).

Se introduce este valor en la función $\boldsymbol{f(x) = X^2 + 4}$ *para determinar el vértice de la parábola.*

$$f(0) = (0)^2 + 4 \quad = \quad 0 + 4 \quad = \quad 4 \quad ; \quad \boldsymbol{f(0) = 4}$$

Esto nos indica que el vértice de la parábola es el punto. ***(0 , 4)***

<u>Tercer paso :</u> *Se determina si la función intercepta o no al eje X con el uso de la formula conocida como discriminante* ***($b^2 – 4ac$).***

Recuerde que la intercepción o corte con el eje X lo indican las raíces de la función.

- *Si* $\boldsymbol{b^2 - 4ac > 0}$ *la función tiene 2 raíces diferentes (corta al eje X en dos puntos).*
- *Si* $\boldsymbol{b^2 - 4ac = 0}$ *la función tiene 2 raíces iguales (tiene su vértice en un punto contenido en el eje X).*
- *Si* $\boldsymbol{b^2 - 4ac < 0}$ *la función no tiene raíces reales (NO corta al eje X).*

$$b^2 - 4ac \quad = \quad (0)^2 - 4(1)(4) \quad = \quad 0 - 16 \quad = \boldsymbol{-16}$$

Como $b^2 - 4ac < 0$ la función no tiene raíces reales (NO corta al eje X).

<u>Cuarto paso :</u> *Como no se pueden calcular las dos raíces de la función se procede a calcular dos puntos de la parábola, uno ubicado al lado izquierdo del eje de simetría y el otro al lado derecho, esto nos facilitará visualizar fácilmente la configuración de la parábola.*

Como el eje de simetría es $X = 0$ puedo calcular los puntos cuando $X = -1$ y cuando $X = 1$, para lo cual sustituyo estos valores en la función $\boldsymbol{f(x) = X^2 + 4}$

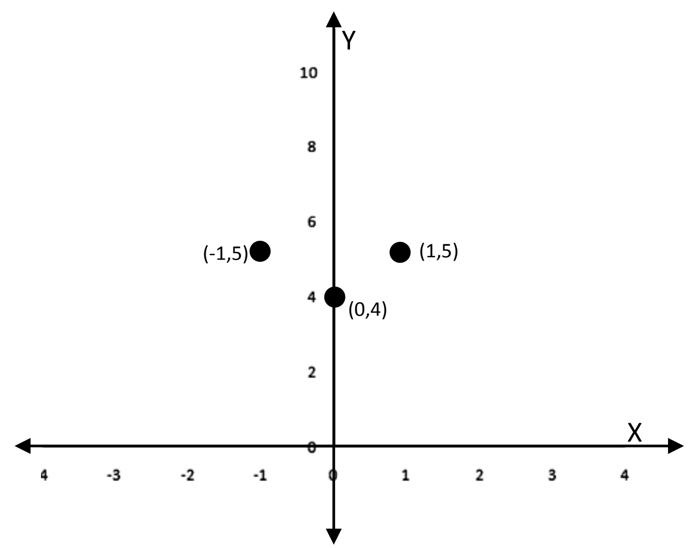
Para $X = -1 \quad ; \quad f(-1) = (-1)^2 + 4 \; = \; 1 + 4 \; = 5$

Esto nos indica que la parábola pasa por el punto ***(–1,5)***

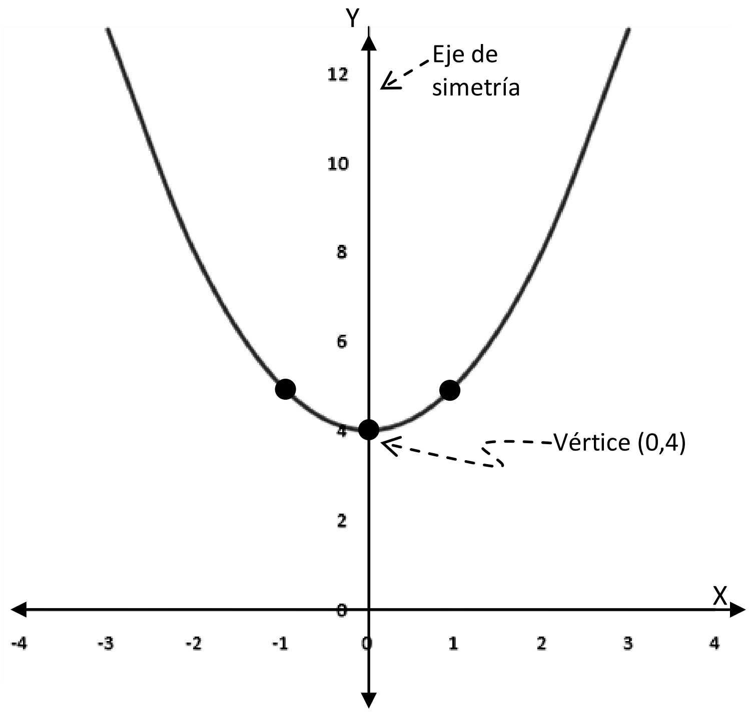
Para $X = 1 \quad ; \quad f(1) = (1)^2 + 4 \; = \; 1 + 4 \; = 5$

Esto nos indica que la parábola pasa por el punto ***(1,5)***

<u>Quinto paso :</u> *Se indican los puntos calculados en un sistema de coordenadas rectangulares y posteriormente se grafica la parábola.*



El hecho de calcular el eje de simetría y el vértice de la parábola nos facilita el procedimiento para graficarla debido a que nos permite visualizar inmediatamente como será su configuración y sobre todo su concavidad y su punto más alto o más bajo (vértice) según sea el caso.



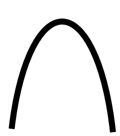
EJERCICIO 3 : *Graficar* $f(x) = -X^2 + 5X - 4$

Solución :

Primer paso : *Se identifican los valores de* a, b *y* c *de la función.*

$$a = -1 \quad ; \quad b = 5 \quad ; \quad c = -4$$

Cuando $a < 0$ *la parábola es cóncava hacia abajo ;*



Segundo paso : *Se calcula el eje de simetría con la fórmula :* $X = \frac{-b}{2a}$

$$X = \frac{-b}{2a} \quad ; \quad X = \frac{-(5)}{2(-1)} \quad ; \quad X = \frac{-5}{-2} \quad ; \quad \boldsymbol{X = 2{,}5}$$

Esto significa que por $X = 2{,}5$ *pasará una recta perpendicular al eje X que representa al eje de simetría de la parábola.*

Se introduce este valor en la función $f(x) = -X^2 + 5X - 4$ *para determinar el vértice de la parábola.*

$$f(2{,}5) = -(2{,}5)^2 + 5(2{,}5) - 4 = -6{,}25 + 12{,}5 - 4 = 2{,}25$$

$$\boldsymbol{f(2{,}5) = 2{,}25}$$

Esto nos indica que el vértice de la parábola es el punto. ***(2.5 , 2.25)***

Tercer paso : *Se determina si la función intercepta o no al eje X con el uso de la formula conocida como discriminante* ***($b^2 - 4ac$).***

$$b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(-1)(-4) = 25 - 16 = \mathbf{9}$$

Como $b^2 - 4ac > 0$ *la función tiene 2 raíces diferentes (corta al eje X en dos puntos).*

Cuarto paso : *Se calculan las raíces de la función con el uso de la fórmula general de segundo grado o resolvente:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Este cálculo se nos facilita por el hecho de que la cantidad sub-radical o radicando es la misma conocida como discriminante y ya fue calculada.

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-5 \pm 3}{-2}$$

$$X_1 = \frac{-5+3}{-2} = \frac{-2}{-2} \quad ; \quad \boldsymbol{X_1 = 1}$$

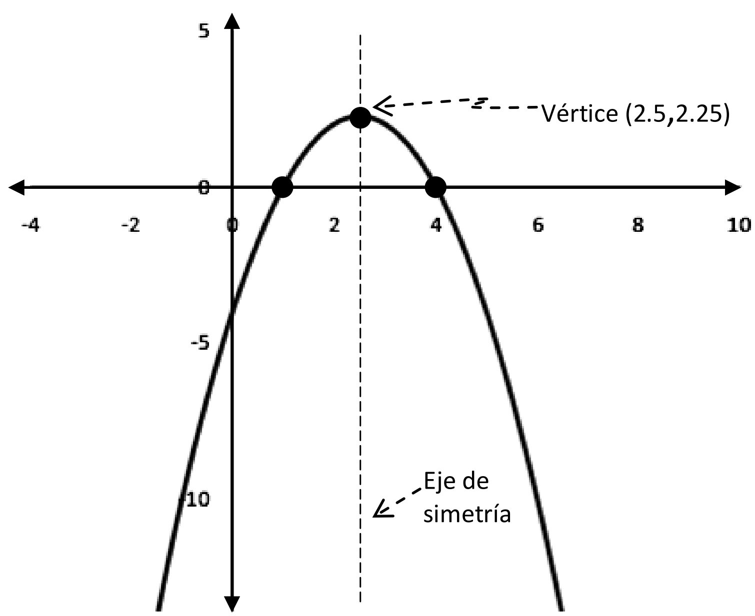
*Esto nos indica que la parábola pasa por el punto .**(1,0)***

$$X_2 = \frac{-5-3}{-2} = \frac{-8}{-2} \quad ; \quad \boldsymbol{X_2 = 4}$$

*Esto nos indica que la parábola pasa por el punto. **(4,0)***

<u>Quinto paso :</u> *Se indican los puntos calculados en un sistema de coordenadas rectangulares y posteriormente se grafica la parábola.*

El hecho de calcular el eje de simetría y el vértice de la parábola nos facilita el procedimiento para graficarla debido a que nos permite visualizar inmediatamente como será su configuración y sobre todo su concavidad y su punto más alto o más bajo (vértice) según sea el caso.



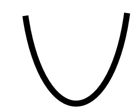
EJERCICIO 4 : *Graficar* $f(x) = X^2 - 8X + 16$

<u>Solución :</u>

<u>Primer paso :</u> *Se identifican los valores de* a, b *y* c *de la función.*

a = 1 ; b = - 8 ; c = 16

Cuando **a > 0** *la parábola es cóncava hacia arriba ;*



<u>Segundo paso :</u> *Se calcula el eje de simetría con la fórmula :* $X = \frac{-b}{2a}$

$$X = \frac{-b}{2a} \quad ; \quad X = \frac{-(-8)}{2(1)} \quad ; \quad X = \frac{8}{2} \quad ; \quad \boldsymbol{X = 4}$$

Esto significa que por X = 4 pasará una recta perpendicular al eje X que representa al eje de simetría de la parábola.

Se introduce este valor en la función $f(x) = X^2 - 8X + 16$ *para determinar el vértice de la parábola.*

$$f(4) = (4)^2 - 8(4) + 16 = 16 - 32 + 16 = 0 \quad ; \quad \boldsymbol{f(4) = 0}$$

*Esto nos indica que el vértice de la parábola es el punto. **(4 ,0)***

<u>Tercer paso :</u> *Se determina si la función intercepta o no al eje X con el uso de la formula conocida como discriminante **(** $b^2 - 4ac$ **).***

$$b^2 - 4ac = (8)^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = \boldsymbol{0}$$

Como $b^2 - 4ac = 0$ *la función tiene 2 raíces iguales (tiene su vértice en un punto contenido en el eje X).*

Otra particularidad que presenta el hecho de que el determinante sea igual a cero es que al calcular el punto donde la parábola corta al eje X es el mismo vértice.

Esta consideración anterior nos obliga a aplicar el cuarto paso como si no existieran raíces reales.

<u>Cuarto paso :</u> *Se procede a calcular dos puntos de la parábola, uno ubicado al lado izquierdo del eje de simetría y el otro al lado derecho, esto nos facilitará visualizar fácilmente la configuración de la parábola.*

Como el eje de simetría es $X = 4$ puedo calcular los puntos cuando $X = 3$ y cuando $X = 5$, para lo cual sustituyo estos valores en la función $\boldsymbol{f(x) = X^2 - 8X + 16}$

Para $X = 3$; $f(3) = (3)^2 - 8(3) + 16 = 9 - 24 + 16 = 1$

Esto nos indica que la parábola pasa por el punto ***(3,1)***

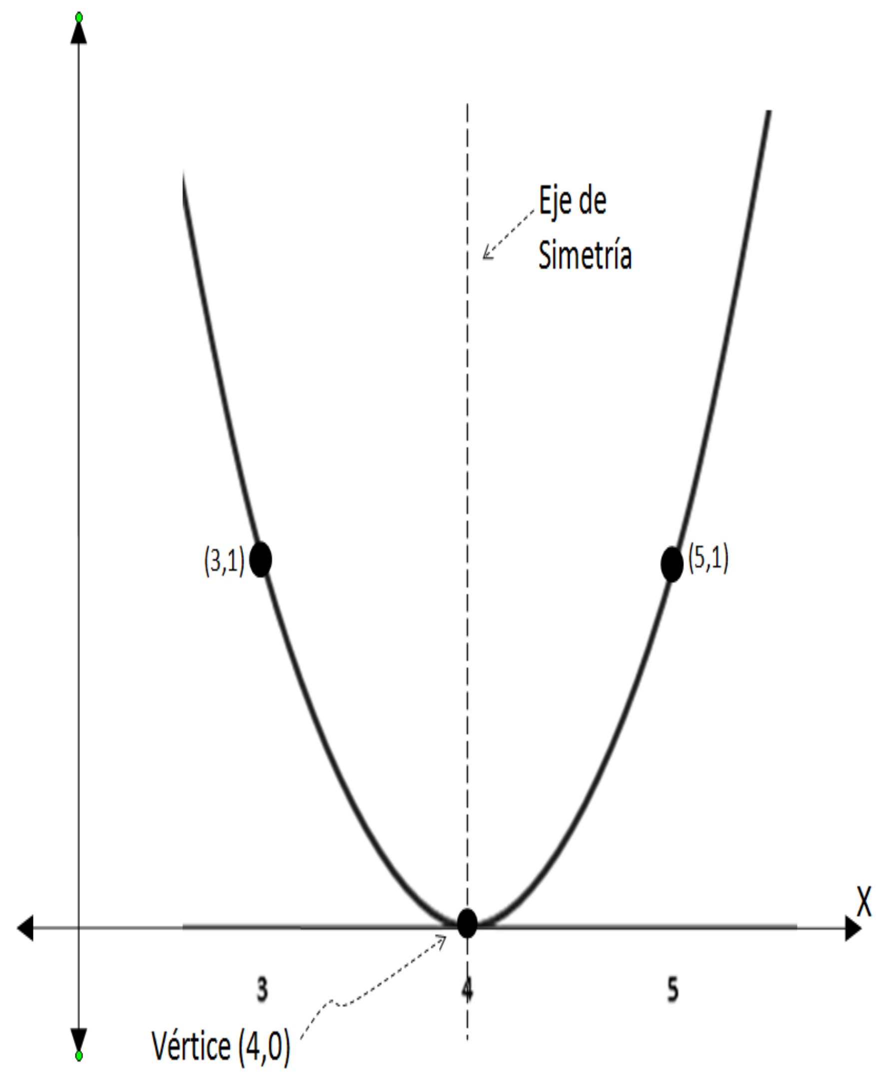
Para $X = 5$; $f(5) = (5)^2 - 8(5) + 16 = 25 - 40 + 16 = 1$

Esto nos indica que la parábola pasa por el punto ***(5,1)***

<u>Quinto paso :</u> *Se indican los puntos calculados en un sistema de coordenadas rectangulares y posteriormente se grafica la parábola.*

El hecho de calcular el eje de simetría y el vértice de la parábola nos facilita el procedimiento para graficarla debido a que nos permite visualizar inmediatamente como será su configuración y sobre todo su concavidad y su punto más alto o más bajo (vértice) según sea el caso.

En este caso en particular si unimos los tres puntos se deduce fácilmente que la parábola quedará graficada así :



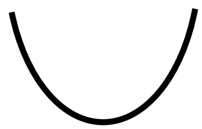
EJERCICIO 5 : Graficar $f(x) = X^2 + 4X$

Solución :

Primer paso : Se identifican los valores de a, b y c de la función.

a = 1 ; b = 4 ; c = 0

Cuando **a > 0** la parábola es cóncava hacia arriba ;



Segundo paso : Se calcula el eje de simetría con la fórmula : $X = \frac{-b}{2a}$

$$X = \frac{-b}{2a} \quad ; \quad X = \frac{-(4)}{2(1)} \quad ; \quad X = \frac{-4}{2} \quad ; \quad \boldsymbol{X = -2}$$

Esto significa que por $X = -2$ pasará una recta perpendicular al eje X que representa al eje de simetría de la parábola.

Se introduce este valor en la función $f(x) = X^2 + 4X$ para determinar el vértice de la parábola.

$$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) = 4 - 8 = -4 \quad ; \quad f(-2) = -4$$

Esto nos indica que el vértice de la parábola es el punto. **(-2 ,-4)**

Tercer paso : Se determina si la función intercepta o no al eje X con el uso de la formula conocida como discriminante **($b^2 - 4ac$).**

$$b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(0) = 16 - 0 = \mathbf{16}$$

Como $b^2 - 4ac > 0$ la función tiene 2 raíces diferentes (corta al eje X en dos puntos).

Cuarto paso : Se calculan las raíces de la función con el uso de la fórmula general de segundo grado o resolvente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Este cálculo se nos facilita por el hecho de que la cantidad sub-radical o radicando es la misma conocida como discriminante y ya fue calculada.

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-4 \pm 4}{2}$$

$$X_1 = \frac{-4 + 4}{2} = \frac{0}{2} \quad ; \quad \boldsymbol{X_1 = 0}$$

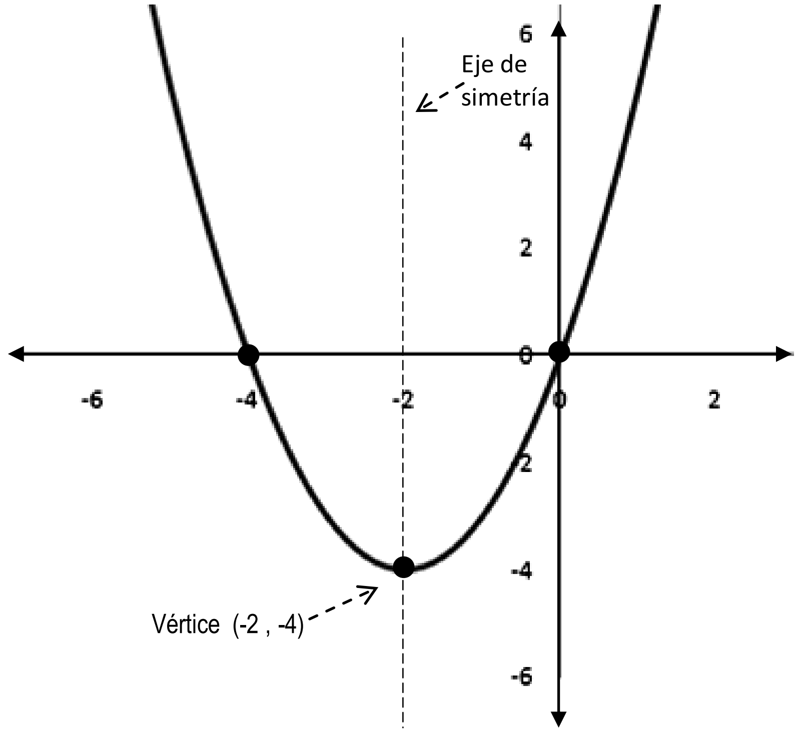
Esto nos indica que la parábola pasa por el punto .**(0,0)**

$$X_2 = \frac{-4 - 4}{2} = \frac{-8}{2} \quad ; \quad \boldsymbol{X_2 = -4}$$

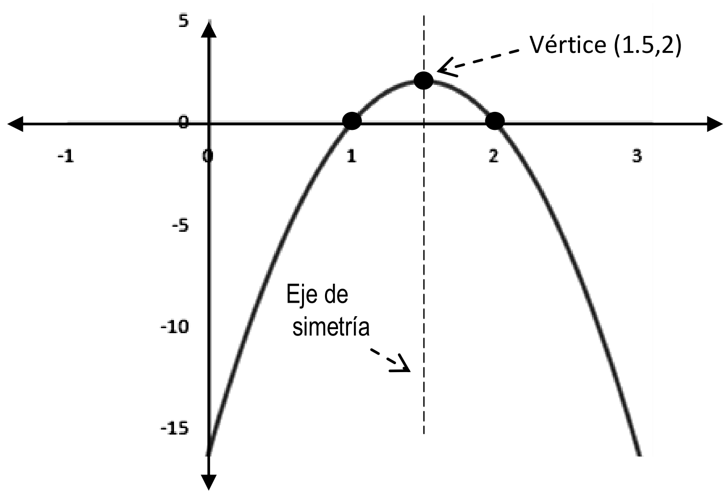
Esto nos indica que la parábola pasa por el punto. **(–4,0)**

Quinto paso : Se indican los puntos calculados en un sistema de coordenadas rectangulares y posteriormente se grafica la parábola.

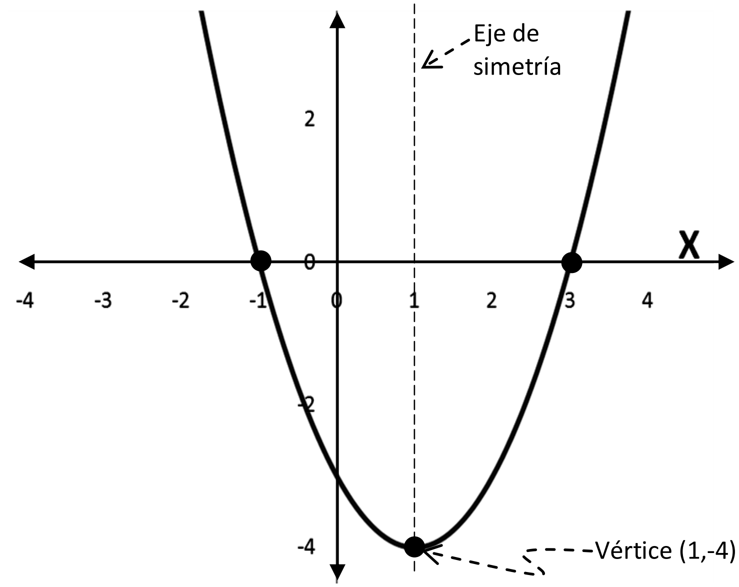
El hecho de calcular el eje de simetría y el vértice de la parábola nos facilita el procedimiento para graficarla debido a que nos permite visualizar inmediatamente como será su configuración y sobre todo su concavidad y su punto más alto o más bajo (vértice) según sea el caso.



EJERCICIO 6 : *Graficar* $f(x) = -8X^2 + 24X - 16$



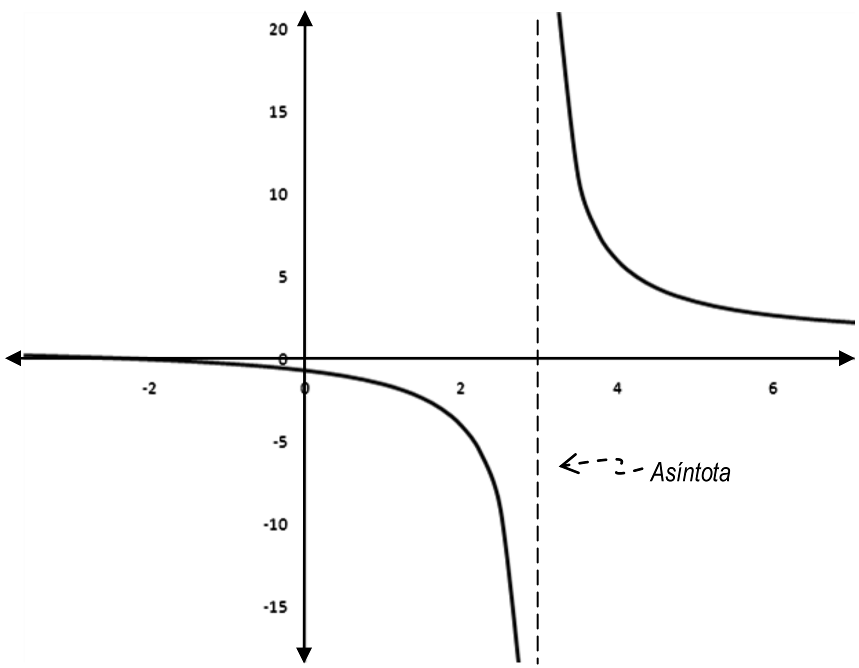
EJERCICIO 7 : *Graficar* $f(x) = X^2 - 2X - 3$



❖ COMO GRAFICAR UNA FUNCION-RACIONAL

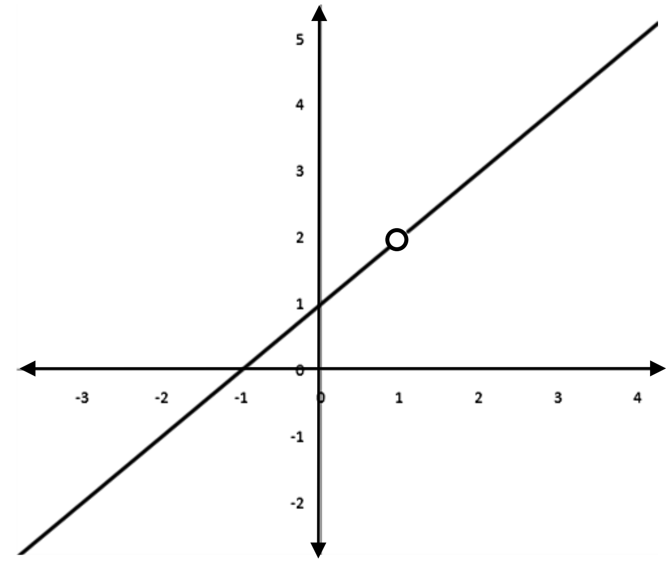
Graficar este tipo de función requiere mayor atención que las otras, sobre todo por la presencia de las "ASÍNTOTAS" y "HUECOS".

*Una **ASÍNTOTA** es una recta a la cual se aproxima la gráfica, al crecer indefinidamente "X" o "Y", pero nunca la toca.*



La figura muestra la gráfica de la función $f(x) = \frac{X+2}{X-3}$ *y podemos observar la presencia de una "asíntota vertical" en X = 3.*

*Un **HUECO** representa el valor que no se le puede asignar a la función por presentar una indeterminación al sustituir la variable "X en la misma. Recuerde que* $\frac{0}{0}$ *es una indeterminación.*



Así, en la gráfica de $f(x) = \frac{X^2-1}{X-1}$ *podemos observar un "hueco" cuando X = 1.*

Tipos de asíntotas :

ASÍNTOTA HORIZONTAL :

Para saber si una función racional tiene asíntota horizontal solo se comparan los grados del numerador y denominador.

Si en la función $$f(x) = \frac{a\,X^n + \ldots\ldots + c}{b\,X^m + \ldots\ldots + d}$$

1) **n > m** *f(x) NO posee asíntota horizontal*

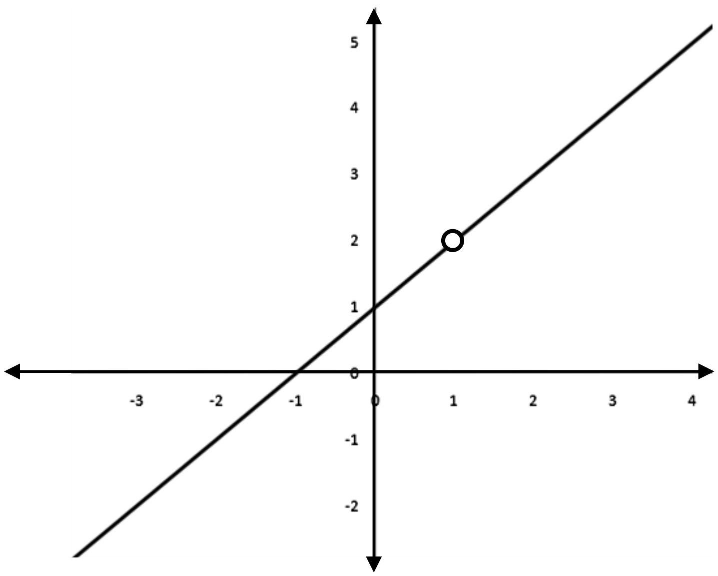
2) **n = m** *f(x) SI posee asíntota horizontal y es la recta* $y = \frac{a}{b}$

3) **n < m** *f(x) SI posee asíntota horizontal y es el eje X.*

Ejemplo del caso 1 : **n > m** *f(x) NO posee asíntota vertical.*

$$f(x) = \frac{X^2 - 1}{X - 1}$$

n = 2 ; m = 1

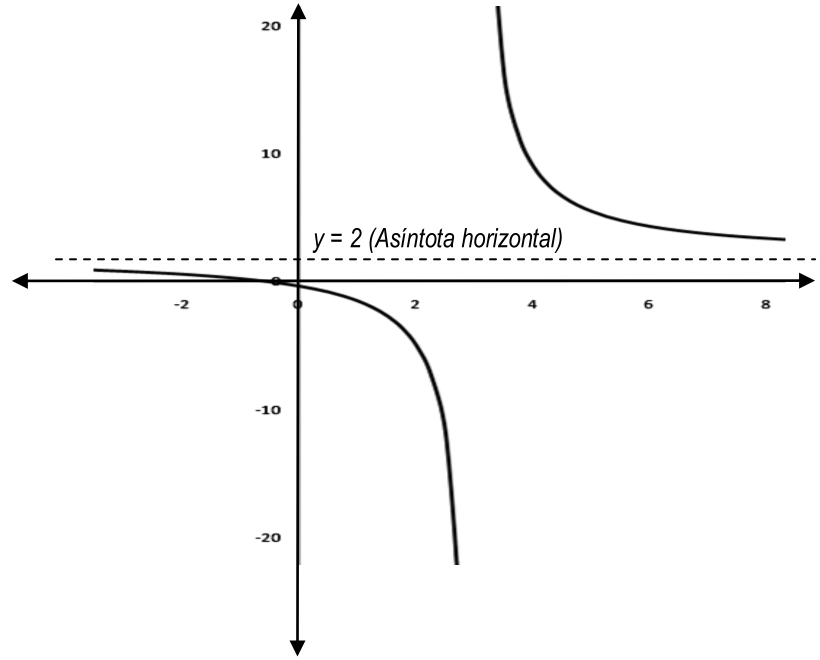


Ejemplo del caso 2 : **n = m** *f(x) SI posee asíntota horizontal y es la recta* $y = \frac{a}{b}$

$$f(x) = \frac{4X + 2}{2X - 6}$$

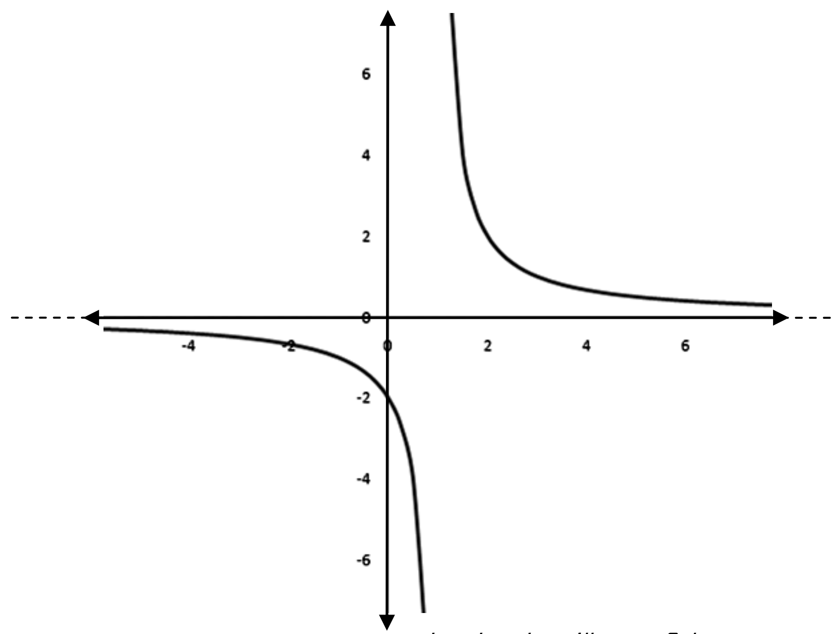
n = 1 ; m = 1

Como a = 4 y b = 2 la asíntota horizontal será la recta $y = \frac{4}{2} = 2$



Ejemplo del caso 3 : **n < m** *f(x) SI posee asíntota horizontal y es el eje X.*

$$f(x) = \frac{2}{X - 1} \quad ; \quad n = 0 \quad ; \quad m = 1$$

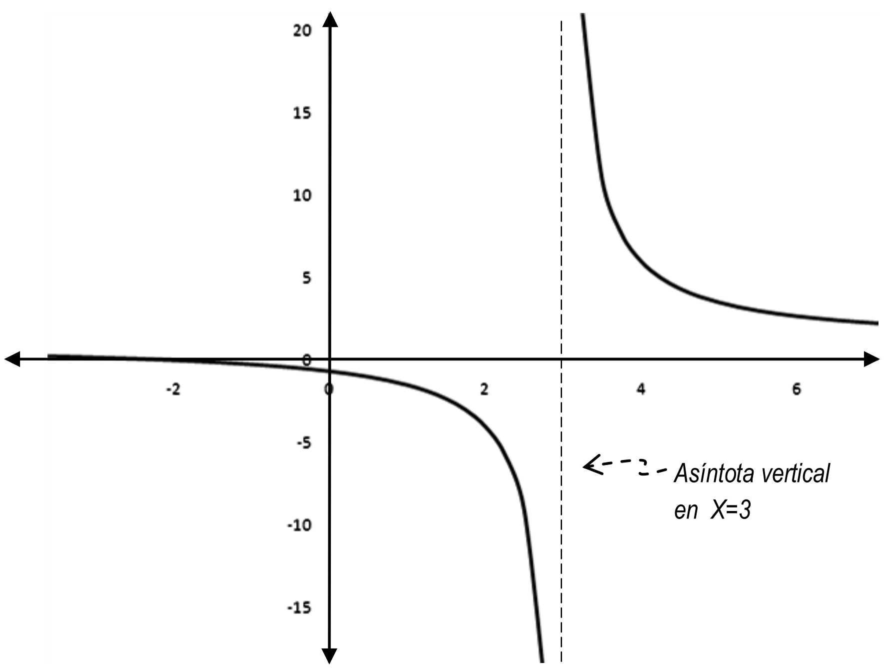


ASÍNTOTA VERTICAL :

Para encontrar una asíntota vertical se iguala el denominador a cero. Las raíces del polinomio que conforma el denominador de la función representarán los valores de X por donde pasa la asíntota vertical (Perpendicular al eje X).

Ejemplo 1 : $f(x) = \dfrac{X+2}{X-3}$

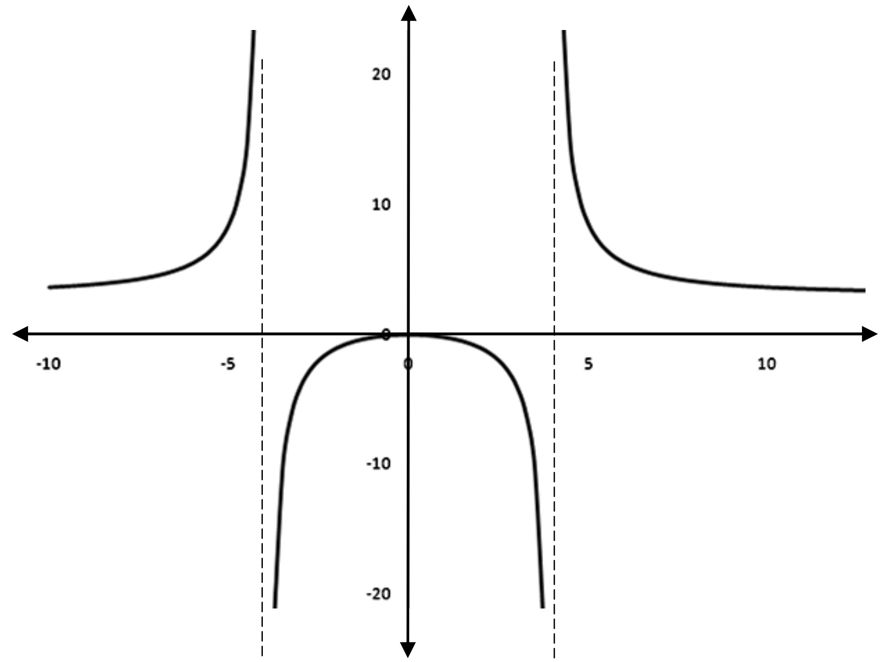
Cuando $X - 3 = 0$; $X = 3$ *; nos indica que por X=3 pasará una asíntota vertical (perpendicular al eje X) :*



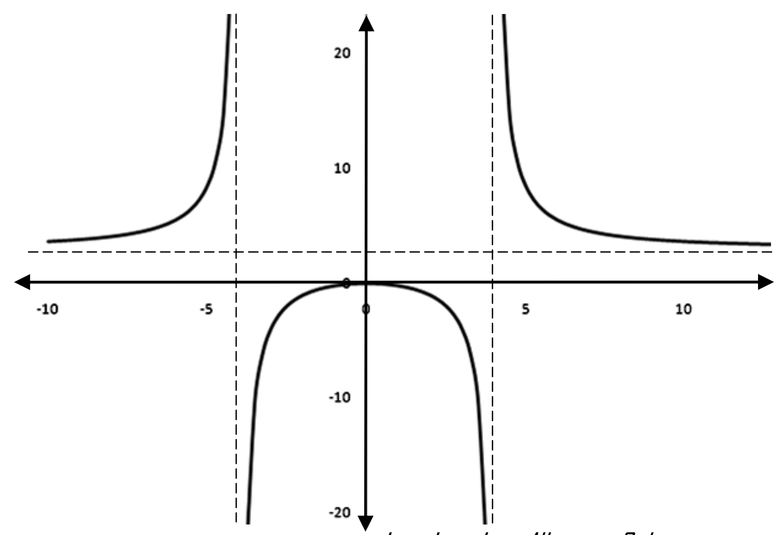
Una función puede tener más de una asíntota vertical, todo depende de las raíces que posee el denominador. Sin embargo, algunas veces, una de las raíces del denominado indica la presencia de un "hueco" de la función (este caso será explicado más adelante con un ejemplo).

Ejemplo 2 : $f(x) = \dfrac{3X^2+1}{X^2-16}$

Como el denominador posee dos raíces : $X = 4$ *y* $X = -4$*, nos indica la presencia de dos asíntotas verticales (una en cada raíz).*



Una función puede poseer asíntotas horizontales y verticales a la vez.



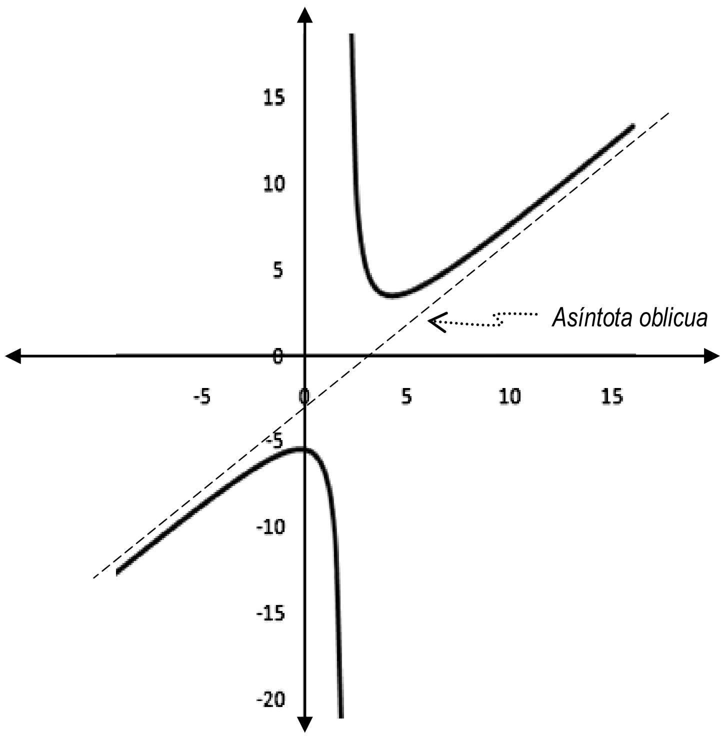
ASÍNTOTA OBLICUA :

La asíntota oblicua es una asíntota que no es horizontal ni vertical.

¿Cómo identificar una asíntota oblicua en una función?

Si en una función el grado del numerador es una unidad mayor que el denominador, la función tiene asíntota oblicua.

Ejemplo : $$f(x) = \frac{X^2 - 5X + 11}{X - 2}$$



Una función puede poseer asíntotas oblicuas y verticales a la vez.

Observe bien la gráfica anterior y notará que además de la asíntota oblicua señalada también hay una asíntota vertical en X = 2. Aspecto que resulta lógico ya que el denominador de la función es X - 2

Tomando en cuenta los aspectos señalados anteriormente se sugieren los siguientes pasos para graficar una función racional :

1) *Identificar y graficar en "líneas punteadas" las posibles asíntotas que pueda tener la función.*
2) *Determinar si existen cortes con el eje "X" (Esto se obtiene igualando el numerador a cero).*
3) *Determinar si existen cortes con el eje "Y" (Esto se obtiene haciendo "X=0" en la función). En otras palabras calculando f(0).*
4) *Calcular tres o cuatro puntos de la función en cada uno de los intervalos en que quedó dividido el sistema de coordenadas una vez graficadas las asíntotas verticales.*

Con la finalidad de fijar bien los pasos indicados anteriormente se procederá a resolver varios ejercicios de menor a mayor grado de dificultad.

$\boxed{\textbf{Ejercicio 1 :}}$ *Graficar la función* $$f(x) = \frac{X + 2}{X - 3}$$

***Primero :* Identificar y graficar en "líneas punteadas" las posibles asíntotas que pueda tener la función.**

ASÍNTOTA HORIZONTAL :

Para saber si una función racional tiene asíntota horizontal solo se comparan los grados del numerador y denominador.

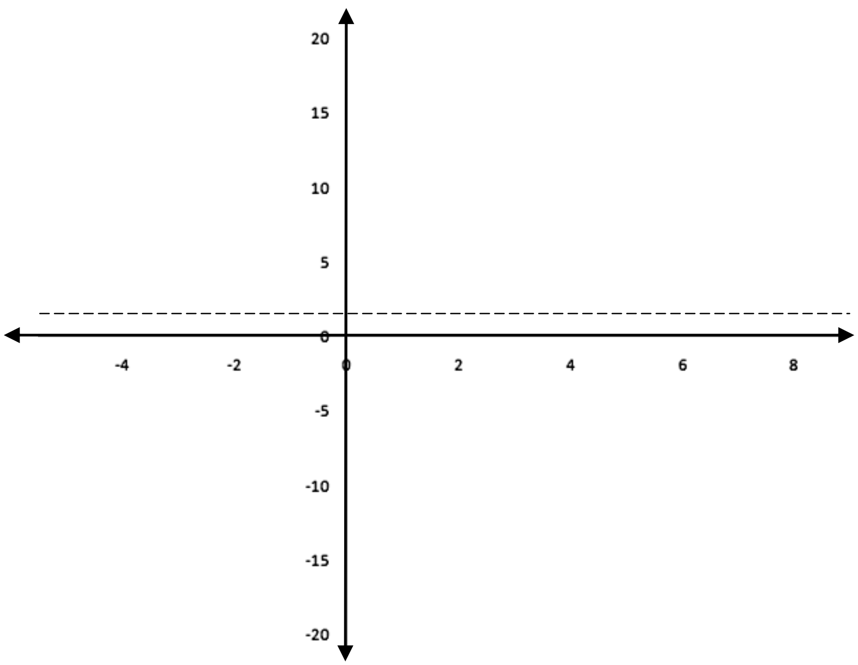
Si en la función $$f(x) = \frac{a\,X^n + \,.....+ \,c}{b\,X^m + \,.....+ \,d}$$

1) **n > m** *f(x) NO posee asíntota horizontal*

2) **n = m** *f(x) SI posee asíntota horizontal y es la recta* $y = \frac{a}{b}$

3) **n < m** *f(x) SI posee asíntota horizontal y es el eje X.*

Esta función cumple con el caso 2, luego la **asíntota horizontal** *es la recta* ***"Y = 1"*** $(Y = \frac{1}{1})$

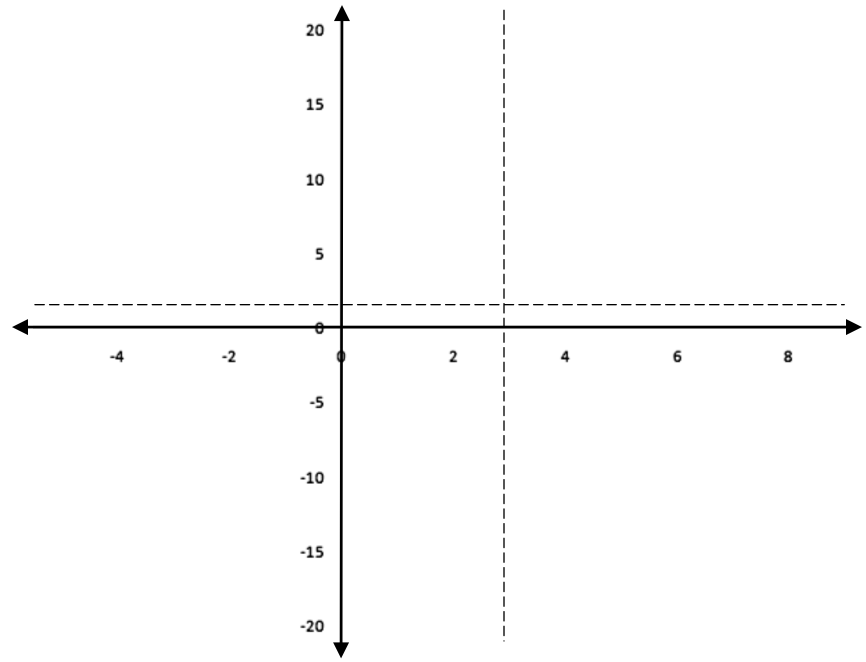


ASÍNTOTA VERTICAL :

Para encontrar una asíntota vertical se iguala el denominador a cero. Las raíces del polinomio que conforma el denominador de la función representarán los valores de X por donde pasa la asíntota vertical (Perpendicular al eje X).

$$\text{Cuando } X - 3 = 0 \quad ; \quad X = 3$$

Esto nos indica que por ***"X = 3"*** *pasará una asíntota vertical (perpendicular al eje X) :*



ASÍNTOTA OBLICUA :

Si en una función el grado del numerador es una unidad mayor que el denominador, la función tiene asíntota oblicua.

Como en este caso ambos grados son iguales no hay asíntota oblicua.

Segundo : ***Determinar si existen cortes con el eje "X" (Esto se obtiene igualando el numerador a cero).***

$$X + 2 = 0 \quad ; \quad X = -\ 2$$

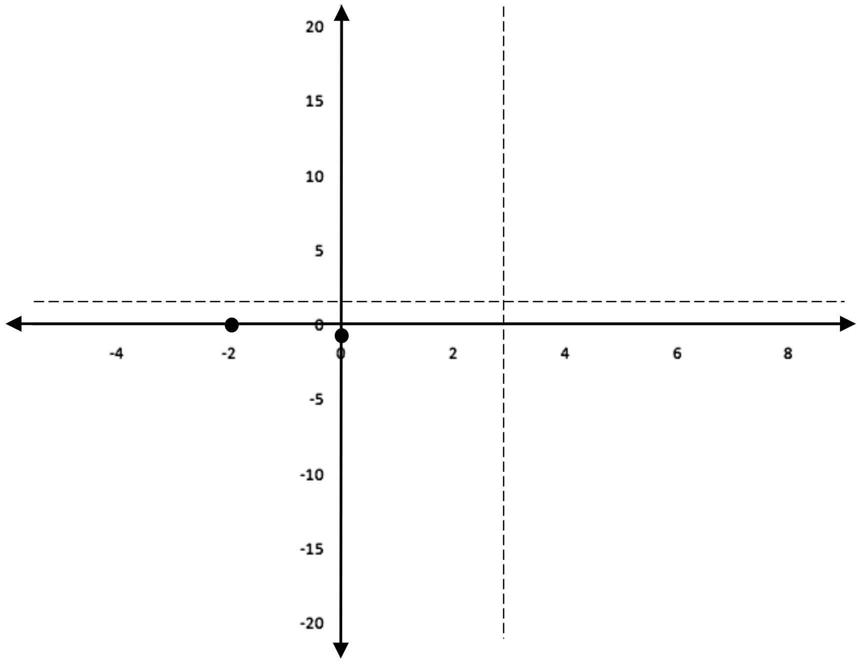
Esto nos indica que la función corta al eje X en el punto ***(– 2,0)***

Tercero : ***Determinar si existen cortes con el eje "Y" (Esto se obtiene haciendo "X=0" en la función). En otras palabras calculando f(0).***

$f(x) = \frac{X+2}{X-3}$; $f(0) = \frac{0+2}{0-3}$; $f(0) = \frac{2}{-3}$ = -0,67

*Esto nos indica que la función corta al eje Y en el punto **(0 , – 0.67)***

Graficando estos "puntos de corte" en el plano se nos va facilitando la visualización de la futura gráfica :



Cuarto : **Calcular tres o cuatro puntos de la función en cada uno de los intervalos en que quedó dividido el sistema de coordenadas una vez graficadas las asíntotas verticales.**

Notamos que el eje X quedó dividido en dos intervalos, uno a la izquierda y otro a la derecha de la asíntota vertical en X = 3.

En el intervalo de la izquierda ya están graficados dos puntos (los cortes con los ejes), luego sería necesario graficar uno o dos puntos más.

Para X = 1

$f(x) = \frac{X+2}{X-3}$; $f(1) = \frac{1+2}{1-3}$; $f(1) = \frac{3}{-2}$ = -1,5

*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(1 , -1.5)***

Para X = 2

$f(x) = \frac{X+2}{X-3}$; $f(2) = \frac{2+2}{2-3}$; $f(2) = \frac{4}{-1}$ = -4

*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(2 , -4)***

Dando valores a la derecha de la asíntota vertical :

Para X = 4

$f(x) = \frac{X+2}{X-3}$; $f(4) = \frac{4+2}{4-3}$; $f(4) = \frac{6}{1}$ = 6

*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(4,6)***

Para X = 5

$f(x) = \frac{X+2}{X-3}$; $f(5) = \frac{5+2}{5-3}$; $f(5) = \frac{7}{2}$ = 3,5

*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(5 , 3.5)***

Para X = 6

$f(x) = \frac{X+2}{X-3}$; $f(6) = \frac{6+2}{6-3}$; $f(6) = \frac{8}{3}$ = 2,67

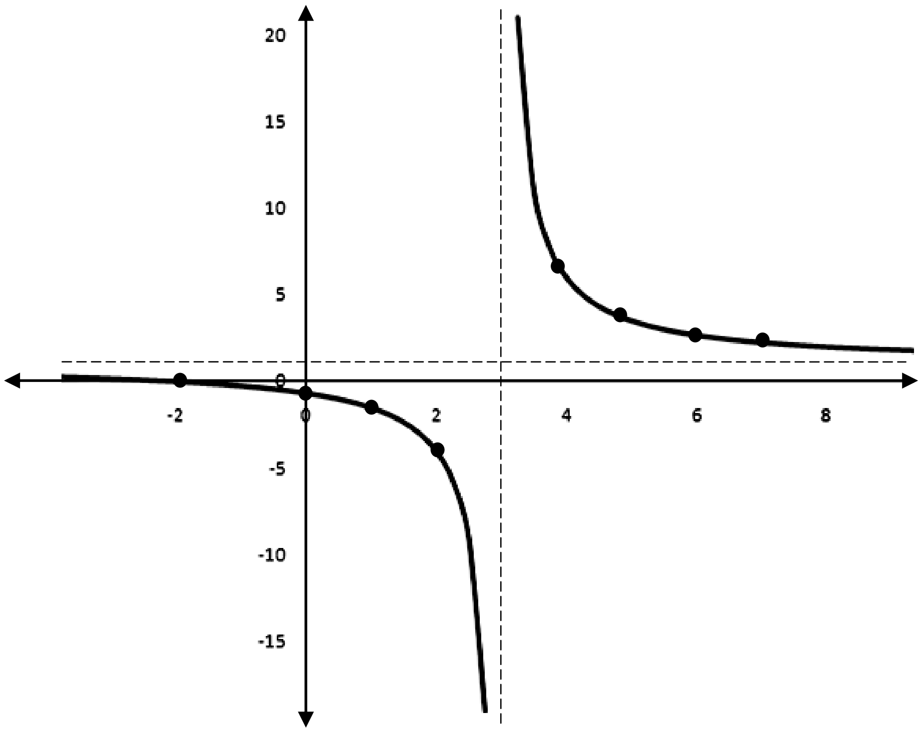
*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(6 , 2.67)***

Para X = 7

$f(x) = \frac{X+2}{X-3}$; $f(7) = \frac{7+2}{7-3}$; $f(7) = \frac{9}{4}$ = 2,25

*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(7 , 2.25)***

Todos estos puntos se grafican sobre el mismo sistema de coordenadas Una vez graficados los puntos y recordando el concepto de asíntota, la gráfica quedará expresada así :



X	-2	0	1	2	4	5	6	7
Y	0	-0,67	-1,5	-4	6	3,5	2,67	2,25

Ejercicio 2 :

Graficar la función $f(x) = \frac{X-1}{2X+3}$

***Primero :* Identificar y graficar en "líneas punteadas" las posibles asíntotas que pueda tener la función.**

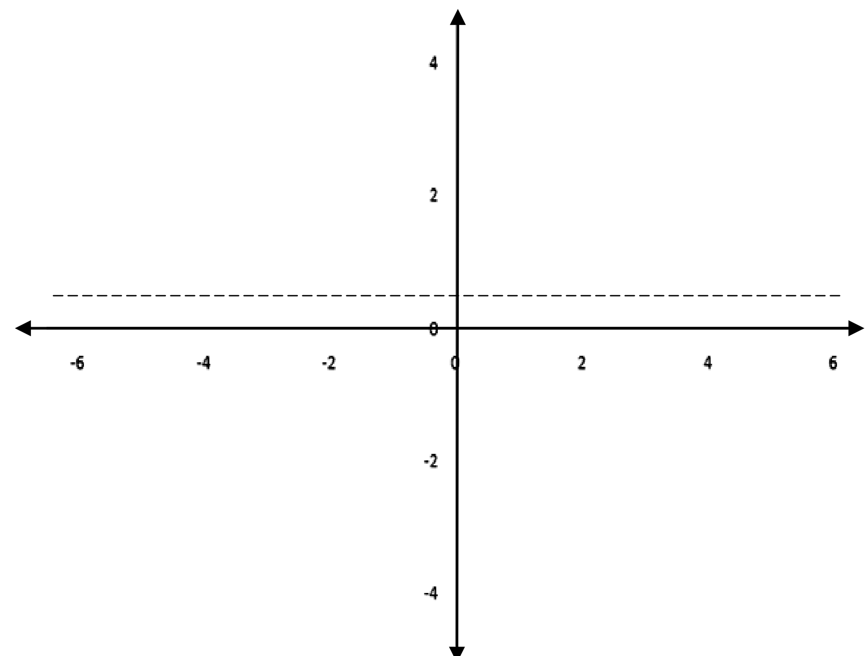
ASÍNTOTA HORIZONTAL :

Para saber si una función racional tiene asíntota horizontal solo se comparan los grados del numerador y denominador.

Si en la función $$f(x) = \frac{a\,X^n + \ldots + c}{b\,X^m + \ldots + d}$$

1) **n > m** *f(x) NO posee asíntota horizontal*
2) **n = m** *f(x) SI posee asíntota horizontal y es la recta* $y = \frac{a}{b}$
3) **n < m** *f(x) SI posee asíntota horizontal y es el eje X.*

Esta función cumple con el caso 2, luego la **asíntota horizontal** *es la recta* ***Y =*** $\frac{1}{2}$ ***= 0,5***

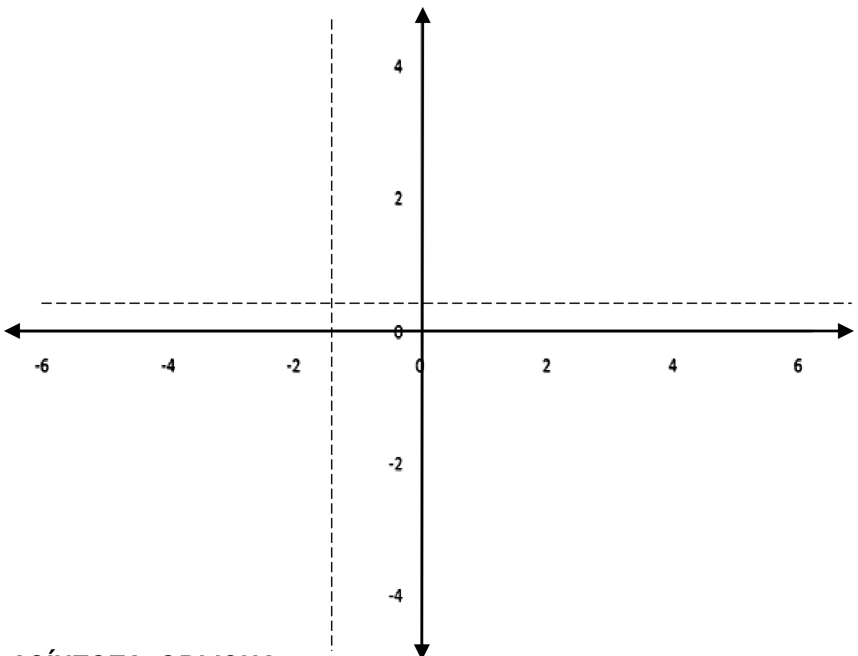


ASÍNTOTA VERTICAL :

Para encontrar una asíntota vertical se iguala el denominador a cero. Las raíces del polinomio que conforma el denominador de la función representarán los valores de X por donde pasa la asíntota vertical (Perpendicular al eje X).

Cuando $2X + 3 = 0$; $2X = -3$; $Y = \frac{-3}{2} = -1{,}5$

*Esto nos indica que por **"X = -1,5"** pasará una asíntota vertical (perpendicular al eje X) :*



ASÍNTOTA OBLICUA :

Si en una función el grado del numerador es una unidad mayor que el denominador, la función tiene asíntota oblicua.

Como en este caso ambos grados son iguales no hay asíntota oblicua.

Segundo :** **Determinar si existen cortes con el eje "X" (Esto se obtiene igualando el numerador a cero).

$X - 1 = 0$; $X = 1$

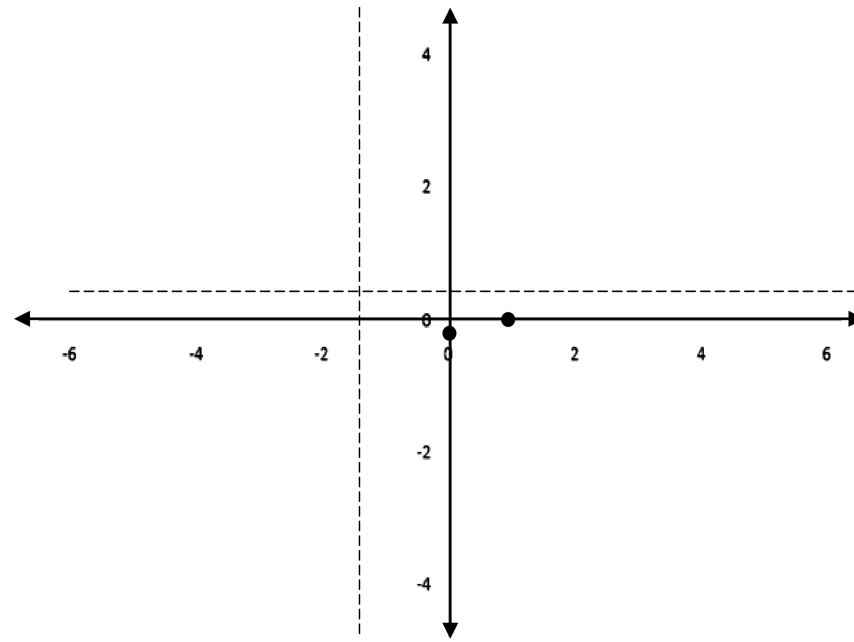
*Esto nos indica que la función corta al eje X en el punto **(1,0)***

Tercero :** **Determinar si existen cortes con el eje "Y" (Esto se obtiene haciendo "X=0" en la función). En otras palabras calculando f(0).

$f(x) = \frac{X-1}{2X+3}$; $f(0) = \frac{0-1}{2(0)+3}$; $f(0) = \frac{-1}{3}$ = -0,33

*Esto nos indica que la función corta al eje Y en el punto **(0 , – 0.33)***

Graficando estos "puntos de corte" en el plano se nos va facilitando la visualización de la futura gráfica :



Cuarto :** **Calcular tres o cuatro puntos de la función en cada uno de los intervalos en que quedó dividido el sistema de coordenadas una vez graficadas las asíntotas verticales.

Notamos que el eje X quedó dividido en dos intervalos, uno a la izquierda y otro a la derecha de la asíntota vertical en X = -1,5.

En el intervalo de la derecha ya están graficados dos puntos (los cortes con los ejes), luego sería necesario graficar uno o dos puntos más.

Para X = -1

$$f(x) = \frac{X-1}{2X+3} \quad ; \quad f(-1) = \frac{-1-1}{2(-1)+3} \quad ; \quad f(-1) = \frac{-2}{1} = -2$$

*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(-1 , -2)***

Para X = 2

$$f(x) = \frac{X-1}{2X+3} \quad ; \quad f(2) = \frac{2-1}{2(2)+3} \quad ; \quad f(2) = \frac{1}{7} = 0,14$$

*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(2 , 0.14)***

Dando valores a la izquierda de la asíntota vertical :

Para X = -2

$$f(-2) = \frac{-2-1}{2(-2)+3} \quad ; \quad f(-2) = \frac{-3}{-1} = 3$$

*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(-2,3)***

Para X = -3

$$f(-3) = \frac{-3-1}{2(-3)+3} \quad ; \quad f(-3) = \frac{-4}{-3} = 1,33$$

*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(-3 , 1.33)***

Para X = -4

$$f(-4) = \frac{-4-1}{2(-4)+3} \quad ; \quad f(-4) = \frac{-5}{-5} = 1$$

*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(-4 , 1)***

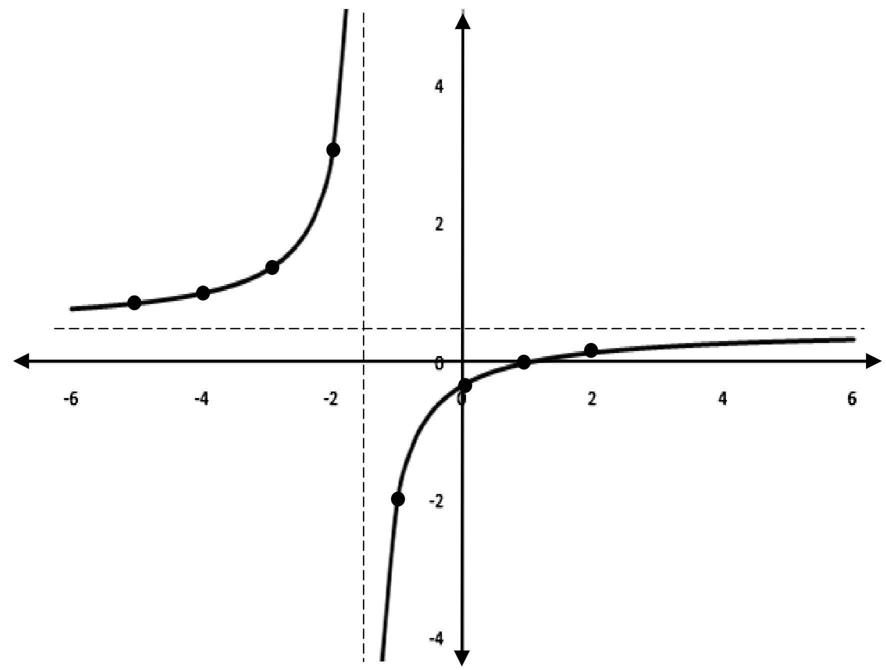
Para X = -5

$$f(-5) = \frac{-5-1}{2(-5)+3} \quad ; \quad f(-5) = \frac{-6}{-7} = 0,86$$

*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(-5 , 0.86)***

Todos estos puntos se grafican sobre el mismo sistema de coordenadas.

Una vez graficados los puntos y recordando el concepto de asíntota, la gráfica quedará expresada así :



X	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
Y	0,86	1	1,33	3	-2	-0,33	0	0,14

Ejercicio 3 : Graficar la función $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{X^2 - 1}{X - 1}}$

Cuando observe que una función racional presenta un polinomio igual o mayor de segundo grado (en el numerador o en el denominador) es recomendable efectuar su factorización.

Esto nos permitirá visualizar si existen raíces comunes en el numerador y denominador.

Si existe alguna raíz o raíces comunes esto nos indicará que existe uno o varios puntos donde la función posee una indeterminación del tipo "cero entre cero" ($\frac{0}{0}$). Esta raíz representará la presencia de un "hueco" y no de asíntotas.

En la función que queremos graficar observamos que el numerador es un polinomio de segundo grado. Al factorizarlo (diferencia de cuadrados) obtendremos :

$$X^2 - 1 = (X + 1).(X - 1)$$

Luego la función quedará expresada como :

$$f(x) = \frac{(X+1).(X-1)}{X-1}$$

El factor "X – 1" se encuentra tanto en el numerador como en el denominador. Cuando este factor se "haga" igual a cero es evidente que se generará una indeterminación del tipo cero sobre cero.

Para que $X - 1 = 0$; $X = 1$; entonces $X = 1$ es una raíz común del numerador y denominador.

Si tomamos en cuenta que se puede suprimir el factor (X – 1) tanto en el numerador como en el denominador notaremos que surge una función equivalente a la estudiada :

$$f(x) = \frac{(X+1).\cancel{(X-1)}}{\cancel{(X-1)}} = X + 1$$

El hecho de factorizar la función nos facilita el procedimiento para graficarla, ya que la función equivalente obtenida es de menor grado y es más fácil calcular sus puntos.

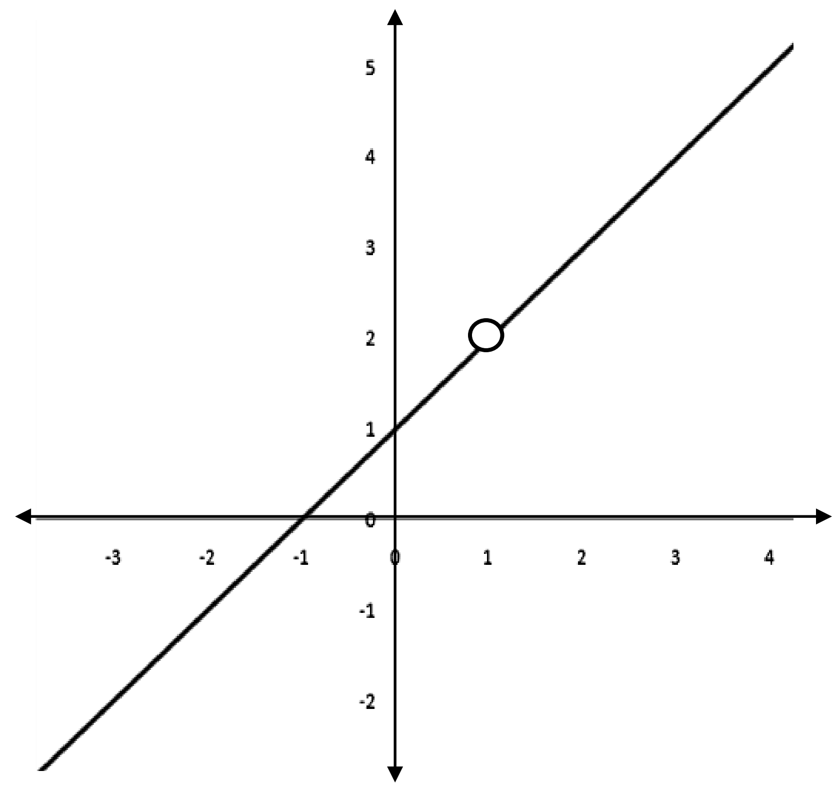
Sin embargo, NO SE DEBE OLVIDAR que se debe graficar el "hueco" que generará la raíz que es común al numerador y el denominador.

En este ejercicio ese valor está representado por "X = 1". Introduciendo este valor en la función equivalente obtendré la ubicación del "hueco".

$$f(x) = X + 1 \quad ; \quad f(1) = 1 + 1 \quad = \quad 2$$

Esto nos indica que la función tiene un "hueco" en ***(1 , 2)***

Ahora grafico la función equivalente $f(x) = X + 1$ *e indico la presencia del "hueco".*



Ejercicio 4 : *Graficar la función* $f(x) = \dfrac{X^2+3x+2}{X^2-2X-3}$

Cuando observe que una función racional presenta un polinomio igual o mayor de segundo grado (en el numerador o en el denominador) es recomendable efectuar su factorización.

Esto nos permitirá visualizar si existen raíces comunes en el numerador y denominador.

Si existe alguna raíz o raíces comunes esto nos indicará que existe uno o varios puntos donde la función posee una indeterminación del tipo "cero entre cero" ($\frac{0}{0}$). Esta raíz representará la presencia de un "hueco" y no de asíntotas.

En la función que queremos graficar observamos que tanto el numerador como el denominador son polinomios de segundo grado. Al factorizarlos obtendremos :

$$f(x) = \frac{X^2+3x+2}{X^2-2X-3} \quad ; \quad f(x) = \frac{(X+2)(X+1)}{(X-3)(X+1)}$$

El factor "X + 1" se encuentra tanto en el numerador como en el denominador. Cuando este factor se "haga" igual a cero es evidente que se generará una indeterminación del tipo cero sobre cero.

Para que $X + 1 = 0$; $X = -1$ *; entonces* $X = -1$ *es una raíz común del numerador y denominador.*

Si tomamos en cuenta que se puede suprimir el factor (X + 1) tanto en el numerador como en el denominador notaremos que surge una función equivalente a la estudiada :

$$f(x) = \frac{(X+2)\cancel{(X+1)}}{(X-3)\cancel{(X+1)}} \quad ; \quad f(x) = \frac{(X+2)}{(X-3)}$$

El hecho de factorizar la función nos facilita el procedimiento para graficarla, ya que la función equivalente obtenida es de menor grado y es más fácil calcular sus puntos.

Sin embargo, NO SE DEBE OLVIDAR que se debe graficar el "hueco" que generará la raíz que es común al numerador y el denominador.

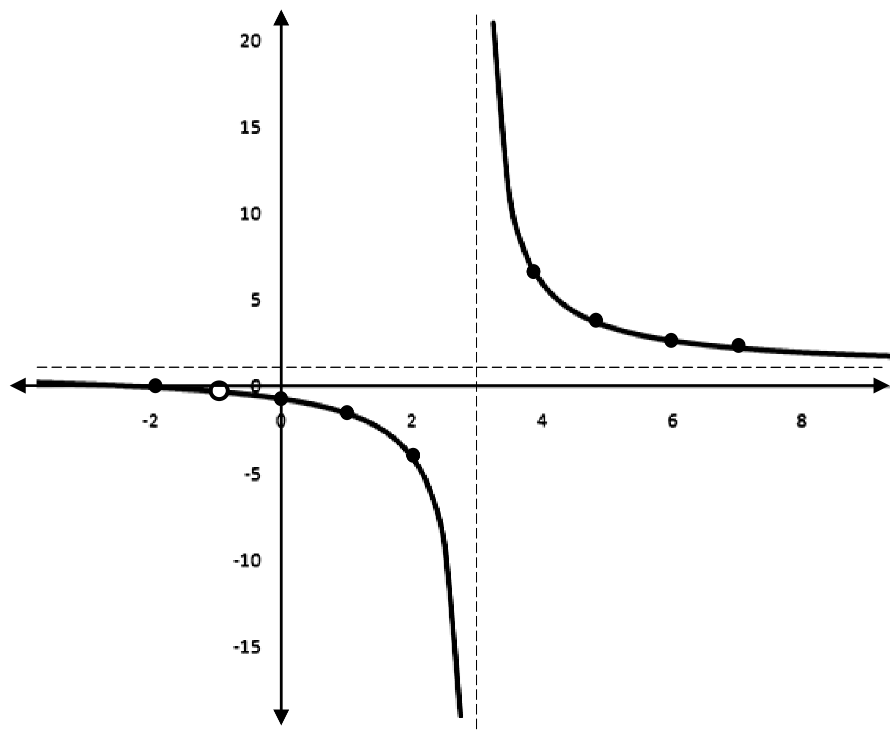
En este ejercicio ese valor está representado por "X = –1". Introduciendo este valor en la función equivalente obtendré la ubicación del "hueco".

$$f(x) = \frac{(X+2)}{(X-3)} \quad ; \quad f(-1) = \frac{(-1+2)}{(-1-3)} = \frac{1}{-4} = -0{,}25$$

Esto nos indica que la función tiene un "hueco" en ***(-1 , -0.25)***

Ahora grafico la función equivalente $f(x) = \dfrac{(X+2)}{(X-3)}$ *e indico la presencia del "hueco".*

La gráfica de esta función equivalente está explicada en el ejercicio 1 de esta guía.



Ejercicio 5 : Graficar la función $f(x) = \frac{4X^2+4}{2X^2-8}$

Cuando observe que una función racional presenta un polinomio igual o mayor de segundo grado (en el numerador o en el denominador) es recomendable efectuar su factorización.

Esto nos permitirá visualizar si existen raíces comunes en el numerador y denominador.

Si existe alguna raíz o raíces comunes esto nos indicará que existe uno o varios puntos donde la función posee una indeterminación del tipo "cero entre cero" ($\frac{0}{0}$). Esta raíz representará la presencia de un "hueco" y no de asíntotas.

En la función que queremos graficar observamos que tanto el numerador como el denominador son polinomios de segundo grado.

Al tratar de factorizar el numerador ($4X^2$ + 4) notaremos que es un polinomio "NO FACTORIZABLE" (al aplicar la formula general de segundo grado o resolvente notaremos que dentro de la raíz cuadrada se presentará un número negativo y éstos generan una raíz imaginaria).

Esto nos indica que no existen "huecos" en la función ni cortes con el eje X.

Ahora procedo de acuerdo a lo indicado en los ejercicios 1 y 2 de esta guía.

***Primero :** Identificar y graficar en "líneas punteadas" las posibles asíntotas que pueda tener la función.*

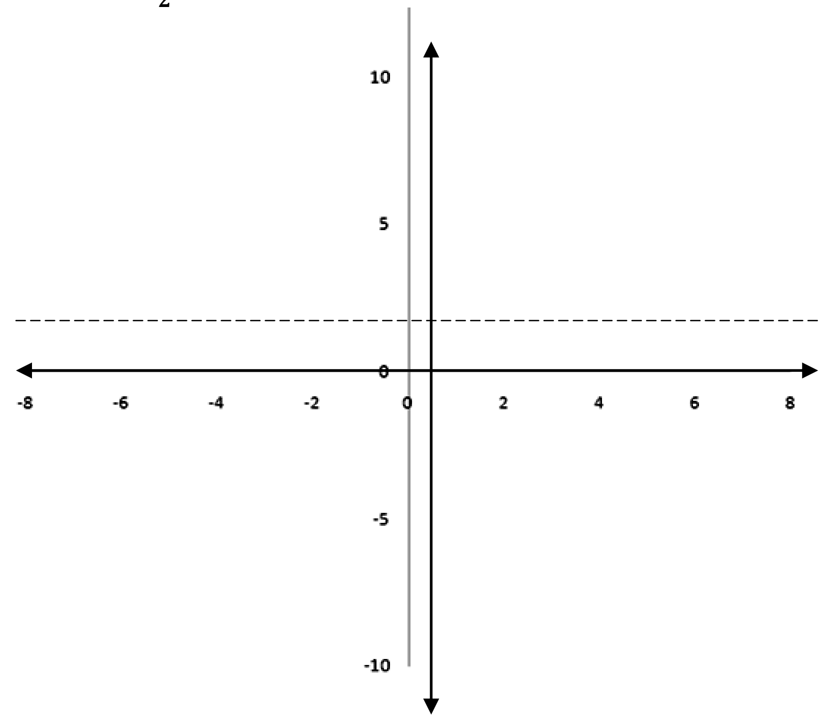
ASÍNTOTA HORIZONTAL :

Para saber si una función racional tiene asíntota horizontal solo se comparan los grados del numerador y denominador.

Si en la función $f(x) = \frac{a\,X^n + \ldots + c}{b\,X^m + \ldots + d}$

1) **n > m** f(x) NO posee asíntota horizontal
2) **n = m** f(x) SI posee asíntota horizontal y es la recta $y = \frac{a}{b}$
3) **n < m** f(x) SI posee asíntota horizontal y es el eje X.

Esta función cumple con el caso 2, luego la **asíntota horizontal** *es la recta* **" Y = $\frac{4}{2} = 2$ "**



ASÍNTOTA VERTICAL :

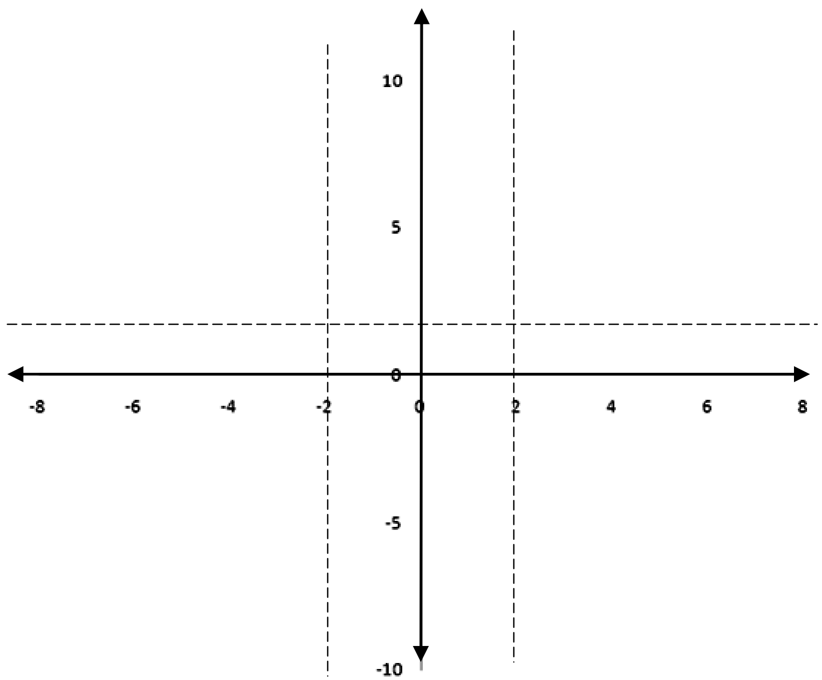
Para encontrar una asíntota vertical se iguala el denominador a cero. Las raíces del polinomio que conforma el denominador de la función representarán los valores de X por donde pasa la asíntota vertical (Perpendicular al eje X).

Las raíces del polinomio **$2X^2 - 8$** *son :*

X = 2 *y* ***X = - 2***

Estas raíces las puede obtener aplicando la formula general de segundo grado o el método de factorización que le sea más cómodo.

Esto nos indica que la gráfica presentará dos asíntotas verticales, una en ***X = 2*** *y otra en* ***X = - 2***



<u>ASÍNTOTA OBLICUA :</u>

Si en una función el grado del numerador es una unidad mayor que el denominador, la función tiene asíntota oblicua.

Como en este caso ambos grados son iguales no hay asíntota oblicua.

<u>Segundo :</u> Determinar si existen cortes con el eje "X" (Esto se obtiene igualando el numerador a cero).

Como ya pudimos notar al principio de este ejercicio, el polinomio que conforma el numerador no tiene raíces reales, por lo tanto LA FUNCIÓN NO "CORTA" AL EJE X.

<u>Tercero :</u> Determinar si existen cortes con el eje "Y" (Esto se obtiene haciendo "X=0" en la función). En otras palabras calculando f(0).

$$f(x) = \frac{4X^2+4}{2X^2-8} \quad ; \quad f(0) = \frac{4(0)^2+4}{2(0)^2-8} \quad ; \quad f(0) = \frac{4}{-8}$$

$$f(0) = \frac{4}{-8} = -0{,}5$$

Esto nos indica que la función corta al eje Y en el punto ***(0 , – 0.5)***

<u>Cuarto :</u> Calcular tres o cuatro puntos de la función en cada uno de los intervalos en que quedó dividido el sistema de coordenadas una vez graficadas las asíntotas verticales.

Notamos que el eje X quedó dividido en tres intervalos, uno a la izquierda de "-2", uno entre "-2" y "2", y otro a la derecha de "2".

<u>Estudiando el intervalo a la izquierda de "-2" :</u>

<u>Para X = -6</u>

$$f(x) = \frac{4X^2+4}{2X^2-8} \quad ; \quad f(-6) = \frac{4(-6)^2+4}{2(-6)^2-8} = 2{,}31$$

Esto nos indica que la función "pasa" por el punto ***(-6 , 2.31)***

Para X = -5

$$f(x) = \frac{4X^2+4}{2X^2-8} \quad ; \quad f(-5) = \frac{4(-5)^2+4}{2(-5)^2-8} = 2{,}47$$

Esto nos indica que la función "pasa" por el punto ***(-5 , 2.47)***

Para X = -4

$$f(x) = \frac{4X^2+4}{2X^2-8} \quad ; \quad f(-4) = \frac{4(-4)^2+4}{2(-4)^2-8} = 2{,}83$$

Esto nos indica que la función "pasa" por el punto ***(-4 , 2.83)***

Para X = -3

$$f(x) = \frac{4X^2+4}{2X^2-8} \quad ; \quad f(-3) = \frac{4(-3)^2+4}{2(-3)^2-8} = 4$$

Esto nos indica que la función "pasa" por el punto ***(-3 , 4)***

Estudiando el intervalo entre "-2" y "2" :

*En este intervalo sabemos que existe el corte con el eje "Y". Fue calculado en el paso 3 [la función corta al eje Y en el punto **(0 , – 0.5)**]*

Luego es necesario estudiar un punto antes y otro después del corte con el eje Y. Esto nos permite visualizar fácilmente si la concavidad es positiva o negativa.

Para X = -1

$$f(x) = \frac{4X^2+4}{2X^2-8} \quad ; \quad f(-1) = \frac{4(-1)^2+4}{2(-1)^2-8} = -1{,}33$$

Esto nos indica que la función "pasa" por el punto ***(-1 , -1.33)***

Para X = 1

$$f(x) = \frac{4X^2+4}{2X^2-8} \quad ; \quad f(1) = \frac{4(1)^2+4}{2(1)^2-8} = -1{,}33$$

Esto nos indica que la función "pasa" por el punto ***(1 , -1.33)***

Estudiando el intervalo a la derecha de "2" :

Para X = 3

$$f(x) = \frac{4X^2+4}{2X^2-8} \quad ; \quad f(3) = \frac{4(3)^2+4}{2(3)^2-8} = 4$$

Esto nos indica que la función "pasa" por el punto ***(3 , 4)***

Para X = 4

$$f(x) = \frac{4X^2+4}{2X^2-8} \quad ; \quad f(4) = \frac{4(4)^2+4}{2(4)^2-8} = 2{,}83$$

Esto nos indica que la función "pasa" por el punto ***(4 , 2.83)***

Para X = 5

$$f(x) = \frac{4X^2+4}{2X^2-8} \quad ; \quad f(5) = \frac{4(5)^2+4}{2(5)^2-8} = 2{,}47$$

Esto nos indica que la función "pasa" por el punto ***(5 , 2.47)***

Para X = 6

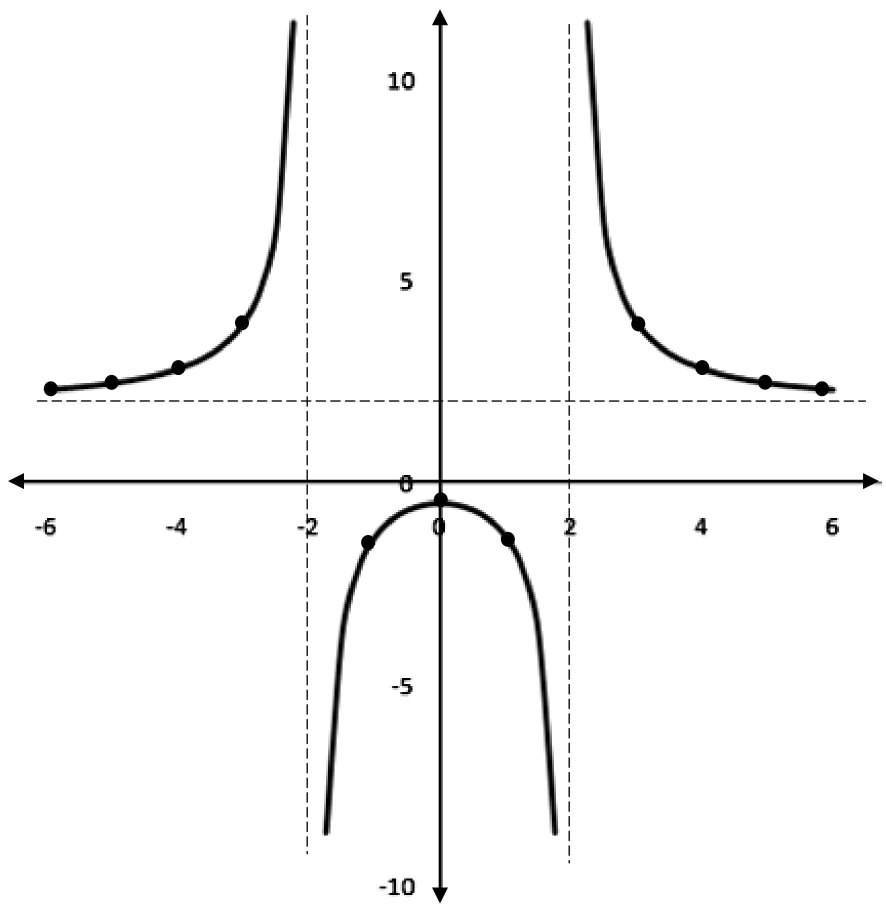
$$f(x) = \frac{4X^2+4}{2X^2-8} \quad ; \quad f(6) = \frac{4(6)^2+4}{2(6)^2-8} = 2{,}31$$

Esto nos indica que la función "pasa" por el punto ***(6 , 2.31)***

Con esta información podemos graficar la función de una manera bastante precisa.

Se recomienda que se vaya graficando intervalo por intervalo y tomando mucho en cuenta la definición de asíntota y los cortes con el eje horizontal y el eje vertical cuando los haya.

X	-6	-5	-4	-3	-1	0	1	3	4	5	6
Y	2,31	2,47	2,83	4	-1,33	-0,5	-1,33	4	2,83	2,47	2,31



Ejercicio 6 : Graficar $f(x) = \dfrac{X^2 - 5X + 11}{X - 2}$

Cuando observe que una función racional presenta un polinomio igual o mayor de segundo grado (en el numerador o en el denominador) es recomendable efectuar su factorización.

Esto nos permitirá visualizar si existen raíces comunes en el numerador y denominador.

Si existe alguna raíz o raíces comunes esto nos indicará que existe uno o varios puntos donde la función posee una indeterminación del tipo "cero entre cero" ($\frac{0}{0}$). Esta raíz representará la presencia de un "hueco" y no de asíntotas.

En la función que queremos graficar observamos que el numerador es un polinomio de segundo grado.

Al tratar de factorizar el numerador notaremos que es un polinomio "NO FACTORIZABLE" (al aplicar la formula general de segundo grado o resolvente notaremos que dentro de la raíz cuadrada se presentará un número negativo y éstos generan una raíz imaginaria).

Esto nos indica que no existen "huecos" en la función ni cortes con el eje X.

Ahora procedo de acuerdo a lo indicado en los ejercicios 1 y 2 de esta guía.

***Primero :* Identificar y graficar en "líneas punteadas" las posibles asíntotas que pueda tener la función.**

ASÍNTOTA HORIZONTAL :

Para saber si una función racional tiene asíntota horizontal solo se comparan los grados del numerador y denominador.

Si en la función $f(x) = \dfrac{a\,X^n + \ldots + c}{b\,X^m + \ldots + d}$

1) **n > m** *f(x) NO posee asíntota horizontal*

2) **n = m** *f(x) SI posee asíntota horizontal y es la recta* $y = \frac{a}{b}$

3) **n < m** *f(x) SI posee asíntota horizontal y es el eje X.*

Esta función cumple con el caso 2, **n > m** *f(x)* ***NO posee*** *asíntota horizontal*

ASÍNTOTA VERTICAL :

Para encontrar una asíntota vertical se iguala el denominador a cero. Las raíces del polinomio que conforma el denominador de la función representarán los valores de X por donde pasa la asíntota vertical (Perpendicular al eje X).

$$X - 2 = 0 \qquad ; \qquad X = 2$$

Esto nos indica que por ***"X = 2"*** *pasará una asíntota vertical (perpendicular al eje X) :*

ASÍNTOTA OBLICUA :

Si en una función el grado del numerador es una unidad mayor que el denominador, la función tiene asíntota oblicua.

Como en este caso la afirmación anterior se cumple, se procede a calcular la ecuación de la asíntota oblicua.

Para calcular la ecuación de la asíntota oblicua se divide el numerador por el denominador y el cociente obtenido representará la ecuación buscada (se recomienda "repasar" DIVISION DE POLINOMIOS).

En este caso en particular :

$$\frac{X^2 - 5X + 11}{X - 2} = \underbrace{(X - 3)}_{\text{Cociente}} + \underbrace{5}_{\text{Resto}}$$

El cociente obtenido (X – 3) es la ecuación de una recta y su gráfica representará la asíntota oblicua de la función estudiada.

Segundo : ***Determinar si existen cortes con el eje "X" (Esto se obtiene igualando el numerador a cero).***

Como ya pudimos notar al principio de este ejercicio, el polinomio que conforma el numerador no tiene raíces reales, por lo tanto LA FUNCIÓN NO "CORTA" AL EJE X.

Tercero : ***Determinar si existen cortes con el eje "Y" (Esto se obtiene haciendo "X=0" en la función). En otras palabras calculando f(0).***

$$f(x) = \frac{X^2 - 5X + 11}{X - 2} \qquad ; \qquad f(0) = \frac{(0)^2 - 5(0) + 11}{0 - 2}$$

$$f(0) = \frac{11}{-2} = -5{,}5$$

Esto nos indica que la función corta al eje Y en el punto ***(0 , – 5.5)***

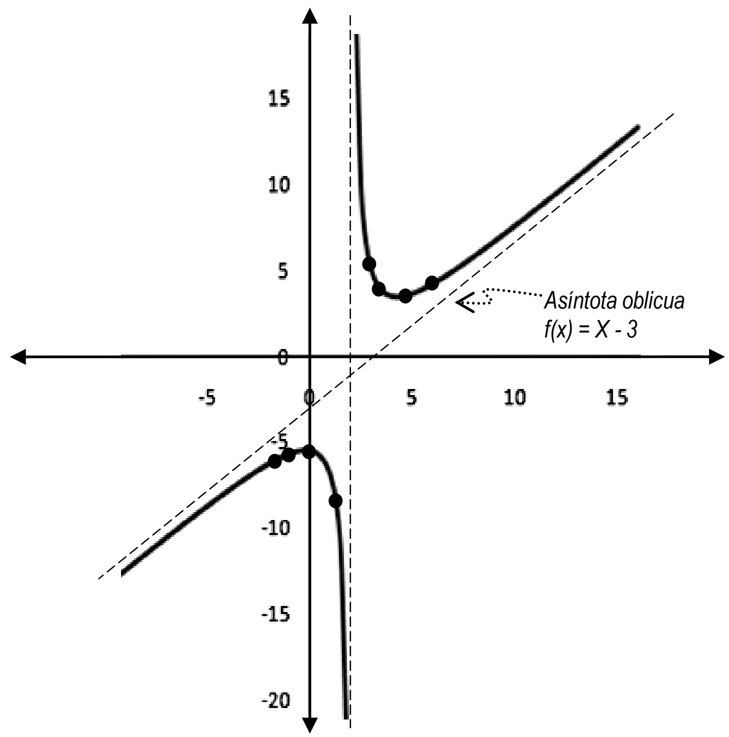
Cuarto : ***Calcular tres o cuatro puntos de la función en cada uno de los intervalos en que quedó dividido el sistema de coordenadas una vez graficadas las asíntotas verticales.***

Notamos que el eje X quedó dividido en dos intervalos, uno a la izquierda y otro a la derecha de la asíntota vertical en X = 2.

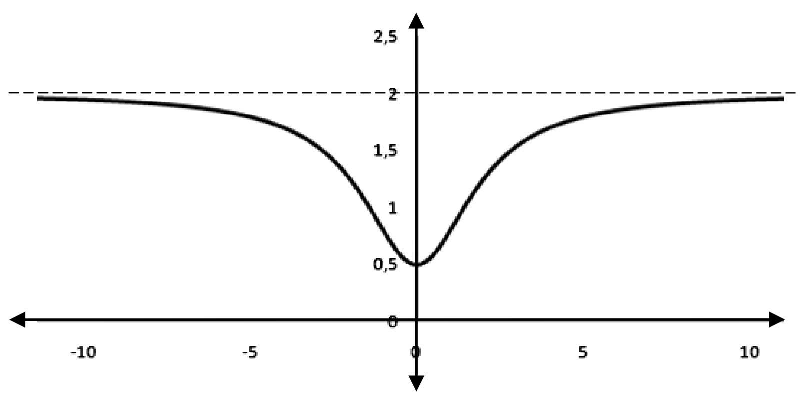
Con esta información podemos graficar la función de una manera bastante precisa.

Se recomienda que se vaya graficando intervalo por intervalo y tomando mucho en cuenta la definición de asíntota y los cortes con el eje horizontal y el eje vertical cuando los haya.

X	-2	-1	0	1	3	4	5	6
Y	-6,25	-5,67	-5,5	-7	5	3,5	3,67	4,24



Ejercicio 7 : Graficar la función $f(x) = \dfrac{4X^2 + 4}{2X^2 + 8}$



Ejercicio 8 : Graficar la función $f(x) = \dfrac{X^3 + 3X^2 + 2X}{X^2 + 3x + 2}$

Este ejercicio ha "asustado" a muchos de los estudiantes de bachillerato y de la universidad. Al ver que el numerador es un polinomio de tercer grado se imaginan que la gráfica resultará muy difícil.

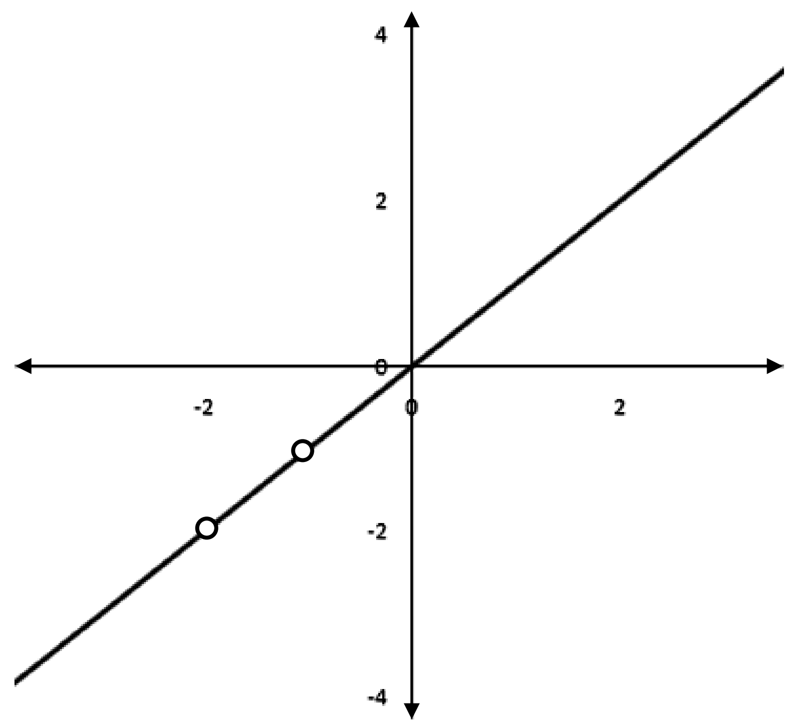
Vean lo fácil que es graficar esta función :

Factorizando el numerador y denominador tendremos :

$$f(x) = \frac{X^3 + 3X^2 + 2X}{X^2 + 3x + 2} \quad ; \quad f(x) = \frac{X.(X^2 + 3X + 2)}{X^2 + 3X + 2}$$

$$f(x) = \frac{X.\cancel{(X+2)}.\cancel{(X+1)}}{\cancel{(X+2)}.\cancel{(X+1)}} \quad ; \quad f(x) = X$$

Lo que nos indica que la función a graficar será "Y = X" pero presentando "huecos" cuando X+2=0 y cuando X+1=0 (X=-2 y X=-1)



❖ COMO GRAFICAR UNA FUNCIÓN iRRACIONAL

Antes de iniciar el procedimiento de cómo graficar este tipo de función, consideramos necesario recordar algunos aspectos importantes sobre los SIGNOS DE LAS RAÍCES :

1) Las **raíces impares** *de una cantidad tienen el mismo signo que la cantidad sub-radical o radicando.*

Así,

- $\sqrt[3]{27a^3} = 3a$ porque $(3a)^3 = 27a^3$
- $\sqrt[3]{-27a^3} = -3a$ porque $(-3a)^3 = -27a^3$
- $\sqrt[5]{X^{10}} = X^2$ porque $(X^2)^5 = X^{10}$
- $\sqrt[5]{-X^{10}} = -X^2$ porque $(-X^2)^5 = -X^{10}$

2) Las **raíces pares** *de una cantidad positiva tienen doble signo.*

Así,

- $\sqrt{25X^2} = 5X$ ó $-5X$ porque $(5X)^2 = 25X^2$ y $(-5X)^2 = 25X^2$
  Esto se indica de este modo : $\sqrt{25X^2} = \pm 5X$
- $\sqrt[4]{16a^4} = 2a$ y $-2a$ porque $(2a)^4 = 16a^4$ y $(-2a)^4 = 16a^4$
  Esto se indica : $\sqrt[4]{16a^4} = \pm 2a$

3) Las **raíces pares** *de una cantidad negativa no se pueden extraer. Estas raíces se llaman* **cantidades imaginarias**.

Así,

$\sqrt{-4}$ no se puede extraer. La raíz de -4 no es 2 porque "$2^2 = 4$" y no -4, y tampoco es -2 porque $(-2)^2 = 4$ y no -4.

"$\sqrt{-4}$ " es una **cantidad imaginaria**.

EJERCICIO 1 : Graficar $f(x) = \sqrt{X+3}$

Primero se determina el dominio de la función a graficar.

Como la función está determinada por una Raíz Cuadrada (índice par) y las raíces pares de una cantidad negativa no se pueden extraer (son cantidades imaginarias) significa que el dominio de la función estará conformada únicamente por aquellos valores que garanticen que la cantidad sub-radical o radicando sea mayor o igual a cero.

Luego: **X + 3** *tiene que ser mayor o igual a cero.*

$$X + 3 \geq 0 \quad ; \quad \mathbf{X \geq -3}$$

Tomando en cuenta lo indicado anteriormente se deben asignar valores mayores e igual a menos tres (-3) a la función para graficarla.

Es recomendable hacerlo con cuatro o más valores para calcular puntos suficientes de manera que la gráfica sea lo más representativa posible :

Para $X = -3$; $f(-3) = \sqrt{-3+3}$; $f(-3) = \sqrt{0} = 0$

Esto nos indica que la función pasa por el punto **(-3,0)**

Para $X = -2$; $f(-2) = \sqrt{-2+3}$; $f(-2) = \sqrt{1} = 1$

Esto nos indica que la función pasa por el punto **(-2,1)**

Para $X = -1$; $f(-1) = \sqrt{-1+3}$; $f(-1) = \sqrt{2} = 1{,}41$

Esto nos indica que la función pasa por el punto **(-1,1.41)**

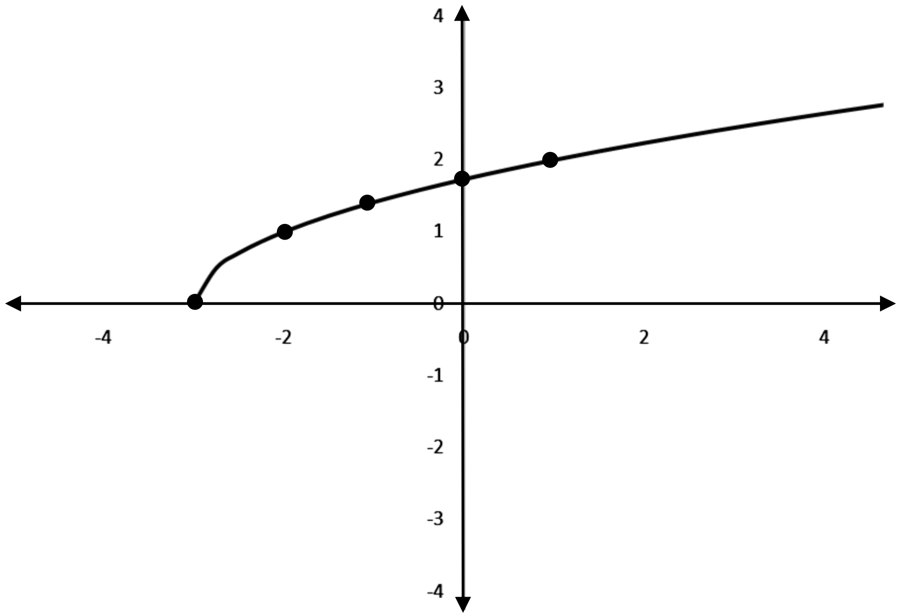
Para $X = 0$; $f(0) = \sqrt{0+3}$; $f(0) = \sqrt{3} = 1{,}73$

Esto nos indica que la función pasa por el punto **(0,1.73)**

Para $X = 1$; $f(1) = \sqrt{1+3}$; $f(1) = \sqrt{4} = 2$

Esto nos indica que la función pasa por el punto **(1,2)**

X	- 3	- 2	- 1	0	1
Y	0	1	1,41	1,73	2



EJERCICIO 2 :

Graficar $f(x) = \sqrt{-2X + 4}$

Primero se determina el dominio de la función a graficar.

El dominio de la función estará conformada únicamente por aquellos valores que garanticen que la cantidad sub-radical o radicando sea mayor o igual a cero.

$-2X + 4 \geq 0$; $-2X \geq -4$ por menos uno ; $2X \leq 4$; $\mathbf{X \leq 2}$

Tomando en cuenta lo indicado anteriormente se deben asignar valores menores e igual a dos (2) a la función para graficarla.

Es recomendable hacerlo con cuatro o más valores para calcular puntos suficientes de manera que la gráfica sea lo más representativa posible :

Para $X = 2$; $f(2) = \sqrt{-2(2) + 4}$; $f(2) = \sqrt{0} = 0$

Esto nos indica que la función pasa por el punto ***(2,0)***

Para $X = 1$; $f(1) = \sqrt{-2(1) + 4}$; $f(1) = \sqrt{2} = 1{,}41$

Esto nos indica que la función pasa por el punto ***(1,1.41)***

Para $X = 0$; $f(0) = \sqrt{-2(0) + 4}$; $f(0) = \sqrt{4} = 2$

Esto nos indica que la función pasa por el punto ***(0,2)***

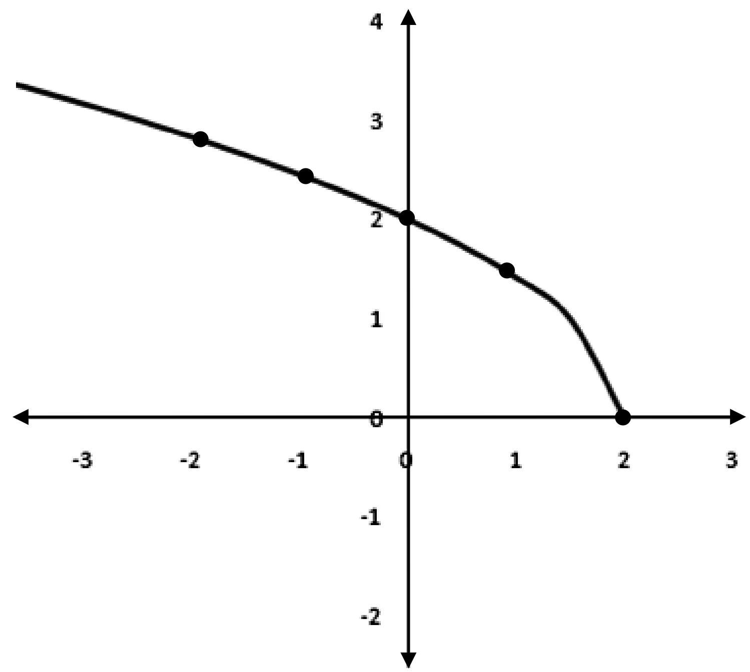
Para $X = -1$; $f(-1) = \sqrt{-2(-1) + 4}$; $f(-1) = \sqrt{6} = 2{,}45$

Esto nos indica que la función pasa por el punto ***(-1,2.45)***

Para $X = -2$; $f(-2) = \sqrt{-2(-2) + 4}$; $f(-2) = \sqrt{8} = 2{,}83$

Esto nos indica que la función pasa por el punto ***(-2,2.83)***

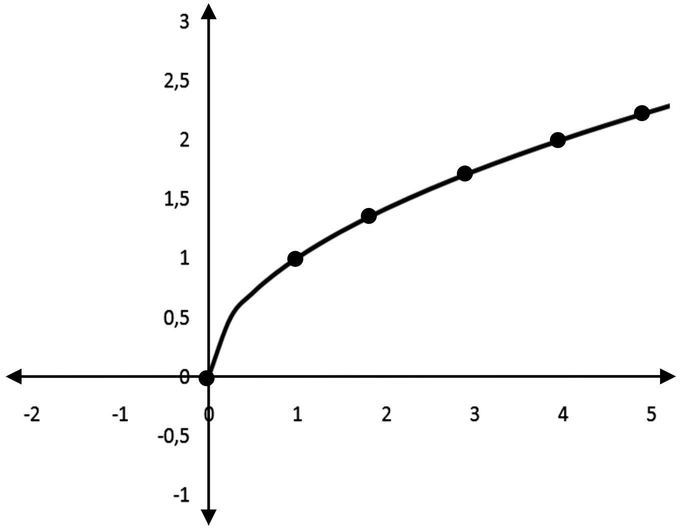
X	- 2	- 1	0	1	2
Y	2,83	2,45	2	1,41	0



EJERCICIO 3 : Graficar $f(x) = \sqrt{X}$

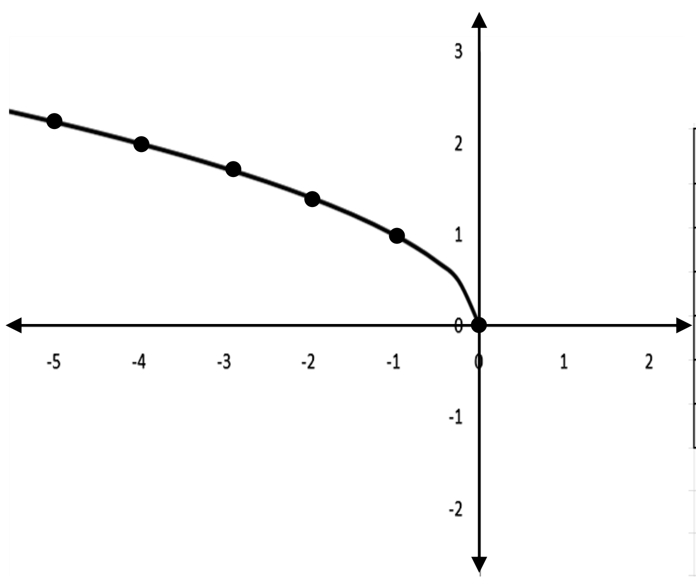
X ≥ 0

X	Y
0	0
1	1
2	1,41
3	1,73
4	2
5	2,24



EJERCICIO 4 : Graficar $f(x) = \sqrt{-X}$

- X ≥ 0 *multiplicando por menos uno* ***X ≤ 0***



X	Y
0	0
−1	1
−2	1,41
−3	1,73
−4	2
−5	2,24

EJERCICIO 5 : Graficar $f(x) = \sqrt[3]{X-2}$

Primero se determina el dominio de la función a graficar.

Las **raíces impares** *de una cantidad tienen el mismo signo que la cantidad sub-radical o radicando.*

Esto nos indica que la X puede tomar cualquier valor y que el dominio de la función es el conjunto de los números reales. Luego, para graficar la función, lo único que debemos hacer es asignar valores (cualesquiera) a la X para determinar los puntos que conforman la gráfica.

Sin embargo, se recomienda calcular los cortes con los ejes para visualizar mejor la gráfica.

Para calcular el corte con el eje "X" igualamos la cantidad sub-radical o radicando a cero.

$X - 2 = 0$; $\mathbf{X = 2}$

Esto nos indica que la función pasa por el punto ***(2,0)***

Para calcular el corte con el eje "Y" hacemos X = 0, es decir calculamos el valor de la función cuando X vale cero [f(0)].

Para $X = 0$; $f(0) = \sqrt[3]{0-2}$; $f(0) = \sqrt[3]{-2} = -1{,}26$

Esto nos indica que la función pasa por el punto ***(0,-1.26)***

Para que la función sea graficada de la manera más exacta posible se recomienda calcular dos puntos antes o después de cada corte con los ejes y dos puntos entre los ejes.

<u>Estudiando dos puntos antes del corte con el eje "Y" :</u>

Para $X = -1$; $f(-1) = \sqrt[3]{-1-2}$; $f(-1) = \sqrt[3]{-3} = -1{,}44$

Para $X = -2$; $f(-2) = \sqrt[3]{-2-2}$; $f(-2) = \sqrt[3]{-4} = -1{,}59$

<u>Estudiando dos puntos entre los cortes con los ejes :</u>

Para $X = 1$; $f(1) = \sqrt[3]{1-2}$; $f(1) = \sqrt[3]{-1} = -1$

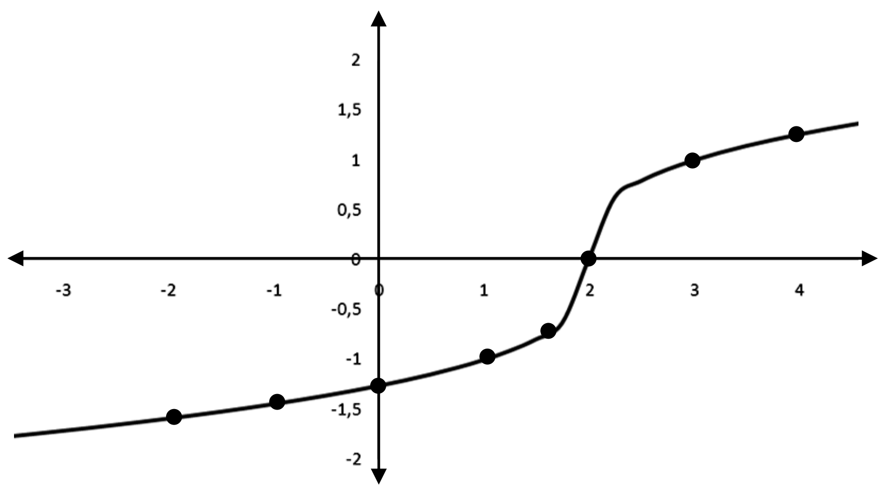
Para $X = 1{,}5$; $f(1{,}5) = \sqrt[3]{1{,}5-2}$; $f(1{,}5) = \sqrt[3]{-0{,}5} = -0{,}79$

__Estudiando dos puntos después del corte con el eje “X” :__

Para $X = 3$; $f(3) = \sqrt[3]{3-2}$; $f(3) = \sqrt[3]{1} = 1$

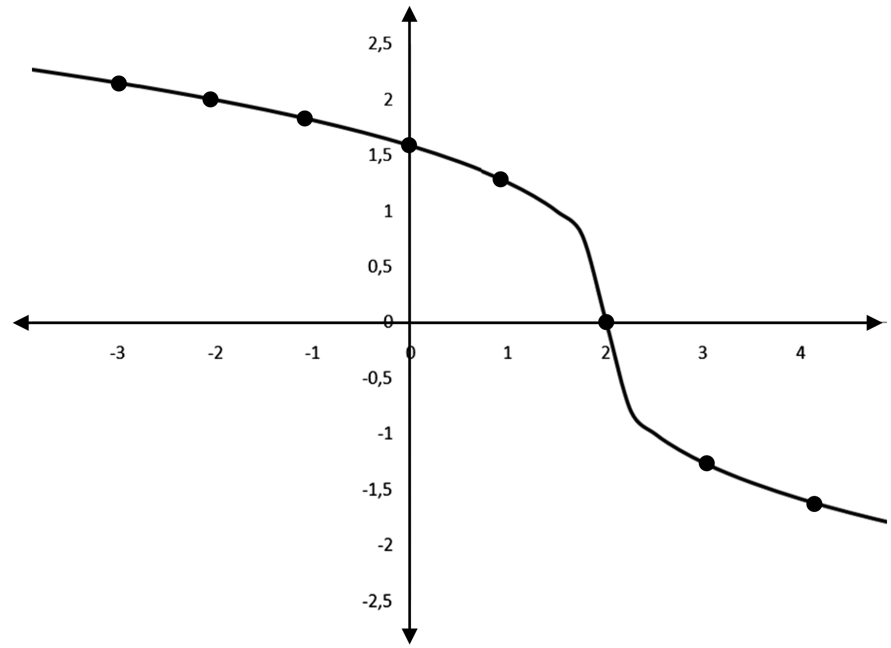
Para $X = 4$; $f(4) = \sqrt[3]{4-2}$; $f(4) = \sqrt[3]{2} = 1{,}26$

X	-2	-1	0	1	1,5	2	3	4
Y	-1,59	-1,44	-1,26	-1	-0,79	0	1	1,26



EJERCICIO 6 : Graficar $f(x) = \sqrt[3]{-2X+4}$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Y	2,15	2	1,81	1,59	1,26	0	-1,26	-1,59



❖ MATRiCES

Se denomina **matriz** *a todo conjunto de números o expresiones dispuestos en forma rectangular, formando "m" filas y "n" columnas.*

Ejemplo :

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B_{2x4} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad C_{3x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Donde:

2x2 indica que la matriz "A" tiene 2 filas y 2 columnas.
2x4 indica que la matriz "B" tiene 2 filas y 4 columnas.
3x2 indica que la matriz "C" tiene 3 filas y 2 columnas.

Los números que forman la matriz se llaman **elementos de la matriz** *y los indicamos con letras minúsculas, mientras que los nombres de las matrices se indican con letras mayúsculas.*

Las matrices varían en tamaño u orden. El **tamaño u orden** *de una matriz se describe especificando el número de* **filas o renglones** *(líneas horizontales) y* **columnas** *(líneas verticales) que aparecen en la matriz. Por lo tanto, una matriz de orden "m x n" tiene "m" filas y "n" columnas (primero se indican las filas y después las columnas).*

Si "A" es una matriz de orden "m x n" entonces se denotará "a_{ij}" *para indicar el elemento que está en la i-ésima fila y j-ésima columna.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se llama **matriz** *de orden "m × n" a un conjunto rectangular de elementos a_{ij} dispuestos en m filas y en n columnas. El orden de una matriz también se denomina dimensión o tamaño, siendo m y n números naturales*

Ejemplo :

$$\begin{array}{cl} A_{3x3} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \longleftrightarrow \textit{primera fila} \\ \longleftrightarrow \textit{segunda fila} \\ \longleftrightarrow \textit{tercera fila} \end{array} \end{array}$$

primera columna
segunda columna
tercera columna

Donde :

$a_{11} = -1$; $a_{12} = 5$; $a_{13} = 2$
$a_{21} = 4$; $a_{22} = 3$; $a_{23} = 6$
$a_{31} = 7$; $a_{32} = -2$; $a_{33} = 0$

ALGUNOS TIPOS DE MATRICES

Hay algunas matrices que aparecen frecuentemente y que según su forma, sus elementos, reciben nombres diferentes :

MATRIZ FILA: *Aquella matriz que tiene una sola fila, siendo su orden 1x n.*

$$A_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

MATRIZ COLUMNA: *Aquella matriz que tiene una sola columna, siendo su orden m x 1.*

$$A_{3\times 1} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

MATRIZ RECTANGULAR: *Aquella matriz que tiene distinto número de filas que de columnas, siendo su orden "m x n", donde* $m \neq n$.

$$A_{3\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 5 & 7 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ TRASPUESTA: *Dada una matriz A, se llama traspuesta de A a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas. Se representa por* A^t ó A^T.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \end{pmatrix} \;;\; A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

MATRIZ OPUESTA: *La matriz opuesta de una dada es la que resulta de sustituir cada elemento por su opuesto. La opuesta de* A *es* -A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -7 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \;,\; -A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 7 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

MATRIZ NULA: *Si todos sus elementos son cero. También se denomina matriz cero y se denota por* $0_{m\times n}$

$$0_{3\times4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRIZ CUADRADA: *Aquella matriz que tiene igual número de filas que de columnas, m = n, diciéndose que la matriz es de* *orden n.*

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Diagonal principal : *son los elementos* a_{11} , a_{22}, ..., a_{nn}

$$\text{Diagonal principal : } A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 4 & 11 \\ 1 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Diagonal secundaria : *son los elementos* a_{ij} *con* $i+j = n+1$

$$\text{Diagonal secundaria : } A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 4 & 11 \\ 1 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Traza de una matriz cuadrada : *es la suma de los elementos de la diagonal principal* "tr A".

MATRIZ SIMÉTRICA: *Es una matriz cuadrada que es igual a su traspuesta.*

$$A = A^t \;,\; a_{ij} = a_{ji}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{9} & \boxed{-6} \\ \boxed{9} & 2 & \boxed{1} \\ \boxed{-6} & \boxed{1} & 5 \end{pmatrix}$$

MATRIZ ANTISIMÉTRICA: *Es una matriz cuadrada que es igual a la opuesta de su traspuesta.*

$A = -A^t$, $a_{ij} = -a_{ji}$

Necesariamente $a_{ii} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} => -A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRIZ DIAGONAL: *Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal.*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

MATRIZ ESCALAR: *Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son iguales.*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

MATRIZ IDENTIDAD: *Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son iguales a* 1. *También se denomina matriz unidad.*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ TRIANGULAR: *Es una matriz cuadrada que tiene todos los elementos por encima (o por debajo) de la diagonal principal nulos.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

T. superior T. inferior

MATRIZ ORTOGONAL: *Una matriz ortogonal es necesariamente cuadrada e invertible :* $A^{-1} = A^T$
La inversa de una matriz ortogonal es una matriz ortogonal. El producto de dos matrices ortogonales es una matriz ortogonal. El determinante de una matriz ortogonal vale +1 ó -1

$$A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ NORMAL: *Una matriz es normal si conmuta con su traspuesta. Las matrices simétricas, antisimétricas u ortogonales son necesariamente normales.*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^T = A^T \cdot A$$

MATRIZ INVERSA: *Decimos que una matriz cuadrada* A *tiene inversa,* A^{-1}, *si se verifica que* $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ (Siendo "I" la matriz identidad.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; \; A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

SUMA Y RESTA DE MATRICES
(Adición de matrices)

Para poder sumar o restar matrices, éstas deben tener el mismo número de filas y de columnas. Es decir, si una matriz es de orden 3x2 y otra de 3x3, no se pueden sumar ni restar. Esto es así ya que, tanto para la suma como para la resta, se suman o se restan los términos que ocupan el mismo lugar en las matrices.

Ejemplo :

Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

Sumando A + B :

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Restando B – A :

$$B - A = \begin{pmatrix} b_{11} - a_{11} & b_{12} - a_{12} \\ b_{21} - a_{21} & b_{22} - a_{22} \end{pmatrix}$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 5-1 & 6-2 \\ 7-3 & 8-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo :

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Sumando A + B :

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 + (-1) & 1+2 & 2+4 \\ 0+2 & 5+5 & -3+8 \\ 7+0 & 0+1 & 4+(-2) \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 2 & 10 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Restando A – B :

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & a_{13} - b_{13} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & a_{23} - b_{23} \\ a_{31} - b_{31} & a_{32} - b_{32} & a_{33} - b_{33} \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 - (-1) & 1-2 & 2-4 \\ 0-2 & 5-5 & -3-8 \\ 7-0 & 0-1 & 4-(-2) \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -11 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: *Dadas las matrices:*

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1&0+0&1+1\\3+1&0+2&0+1\\5+1&1+1&1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&2\\4&2&1\\6&2&1\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1&0-0&1-1\\3-1&0-2&0-1\\5-1&1-1&1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-2&-1\\4&0&1\end{pmatrix}$$

Para sumar o restar más de dos matrices se procede igual. No necesariamente para poder sumar o restar matrices, éstas tienen que ser cuadradas.

Ejemplo:

Sean $A=\begin{pmatrix}-1&2&4\\2&7&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2&0\\0&-3&-1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}5&-1&3\\1&1&2\end{pmatrix}$.

Sumando A + B + C :

$$A+B+C=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11}+c_{11}&a_{12}+b_{12}+c_{12}&a_{13}+b_{13}+c_{13}\\a_{21}+b_{21}+c_{21}&a_{22}+b_{22}+c_{22}&a_{23}+b_{23}+c_{23}\end{bmatrix}$$

$$A+B+C=\begin{bmatrix}-1+3+5&2+2+(-1)&4+0+3\\2+0+1&7+(-3)+1&6+(-1)+2\end{bmatrix}$$

$$A+B+C=\begin{pmatrix}7&3&7\\3&5&7\end{pmatrix}.$$

Suma y resta combinadas (A – B + C) :

$$A-B+C=\begin{bmatrix}a_{11}-b_{11}+c_{11}&a_{12}-b_{12}+c_{12}&a_{13}-b_{13}+c_{13}\\a_{21}-b_{21}+c_{21}&a_{22}-b_{22}+c_{22}&a_{23}-b_{23}+c_{23}\end{bmatrix}$$

$$A-B+C=\begin{pmatrix}-1&2&4\\2&7&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&2&0\\0&-3&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&-1&3\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&7\\3&11&9\end{pmatrix}.$$

PROPIEDADES DE LA ADICIÓN (SUMA Y RESTA) DE MATRICES

Interna: *La suma de dos matrices de orden m x n es otra matriz dimensión m x n.*

Asociativa: *A + (B + C) = (A + B) + C*

Elemento neutro: *A + 0 = A . Donde O es la matriz nula de la misma dimensión que la matriz A.*

Elemento opuesto: *A + (-A) = O . La matriz opuesta es aquella en que todos los elementos están cambiados de signo.*

Conmutativa: *A + B = B + A*

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

Para multiplicar un escalar por una matriz se multiplica el escalar por todos los elementos de la matriz, obteniéndose otra matriz del mismo orden.

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda\cdot A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Entonces:

$$3A=\begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot(-2) & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 5 & 3\cdot(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 15 & -6 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad ; \quad (-5)\cdot A=\begin{pmatrix} -5 & 10 & -15 \\ 0 & -5 & -40 \end{pmatrix}$$

Si una matriz está dividida entre un escalar, todos los términos de la matriz quedarán divididos por ese escalar.

Ejemplo:

Sean la matriz $A=\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, y $k=2$ un escalar. En este caso:

$$A/k=\frac{\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}}{2}=\begin{pmatrix} 8/2 & 16/2 \\ 3/2 & -6/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3/2 & -3 \end{pmatrix}$$

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Dos matrices A y B se dicen multiplicables si el número de columnas de A coincide con el número de filas de B.

El elemento c_{ij} *de la matriz producto se obtiene multiplicando cada elemento de la* ***fila i de la matriz A*** *por cada elemento de la* ***columna j de la matriz B*** *y* ***sumándolos.***

$$A_{m\times n} \ \times \ B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

Para poder multiplicar dos matrices, la primera debe tener el mismo número de columnas que filas la segunda. La matriz resultante del producto quedará con el mismo número de filas de la primera y con el mismo número de columnas de la segunda.

Es decir, si tenemos una matriz 2 x 3 y la multiplicamos por otra de orden 3 x 5, la matriz resultante será de orden 2 x 5.

Se puede observar que el producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa, ya que en el ejemplo anterior, si multiplicamos la segunda por la primera, no podríamos efectuar la operación puesto que la primera matriz no tiene el mismo número de columnas que filas la segunda.

Para aclarar lo indicado anteriormente procederemos a explicar paso a paso algunos ejemplos de multiplicación de dos matrices.

Ejemplo : *Dadas las matrices :*

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad y \quad B=\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Calcular A x B (identificarla como matriz "C")

Primero verificamos que el número de columnas de la matriz "A" sea igual al número de filas de la matriz "B" . Como en este caso se cumple (2=2) se procede a efectuar la multiplicación.

*Se escogen los elementos de la **1era fila** de la matriz "A" y se multiplican (uno a uno) con los elementos de la **1era columna** de la matriz "B" y se suman.*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Nos permitiremos señalar un "truco" muy utilizado para facilitar la multiplicación de matrices :

Se colocan la fila y la columna escogida una al lado de la otra y así se visualizará fácilmente la operación que debemos efectuar :

$$\begin{matrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{-1} \end{matrix} \quad \mathbf{x} \quad \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \quad \text{- - - >} \quad \mathbf{(5)(1) + (-1)(0)}$$

Esta operación se coloca como elemento $\mathbf{c_{11}}$

$$C = A \ x \ B = \begin{bmatrix} \mathbf{(5)(1) + (-1)(0)} & & \\ & & \end{bmatrix}$$

*Se escogen los elementos de la **1era fila** de la matriz "A" y se multiplican (uno a uno) con los elementos de la **2da columna** de la matriz "B" y se suman.*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Esta operación se coloca como elemento $\mathbf{c_{12}}$

$$C = A \ x \ B = \begin{bmatrix} (5)(1) + (-1)(0) & \mathbf{(5)(-4)+(-1)(-2)} & \\ & & \end{bmatrix}$$

*Se escogen los elementos de la **1era fila** de la matriz "A" y se multiplican (uno a uno) con los elementos de la **3era columna** de la matriz "B" y se suman.*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Esta operación se coloca como elemento $\mathbf{c_{13}}$

$$C = A \ x \ B = \begin{bmatrix} (5)(1) + (-1)(0) & (5)(-4)+(-1)(-2) & \mathbf{(5)(6)+(-1)(7)} \\ & & \end{bmatrix}$$

*Se escogen los elementos de la **2da fila** de la matriz "A" y se multiplican (uno a uno) con los elementos de la **1era columna** de la matriz "B" y se suman.*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Esta operación se coloca como elemento $\mathbf{c_{21}}$

$$C = A \ x \ B = \begin{bmatrix} (5)(1) + (-1)(0) & (5)(-4)+(-1)(-2) & (5)(6)+(-1)(7) \\ \mathbf{(-3)(1) + (2)(0)} & & \end{bmatrix}$$

*Se escogen los elementos de la **2da fila** de la matriz "A" y se multiplican (uno a uno) con los elementos de la **2da columna** de la matriz "B" y se suman.*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Este resultado se coloca como elemento $\mathbf{c}_{22}$

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} (5)(1)+(-1)(0) & (5)(-4)+(-1)(-2) & (5)(6)+(-1)(7) \\ (-3)(1)+(2)(0) & \boxed{(-3)(-4)+(2)(-2)} & \end{bmatrix}$$

Se escogen los elementos de la ***2da fila*** *de la matriz "A" y se multiplican (uno a uno) con los elementos de la* ***3era columna*** *de la matriz "B" y se suman.*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Esta operación se coloca como elemento $\mathbf{c}_{23}$

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} (5)(1)+(-1)(0) & (5)(-4)+(-1)(-2) & (5)(6)+(-1)(7) \\ (-3)(1)+(2)(0) & (-3)(-4)+(2)(-2) & \boxed{(-3)(6)+(2)(7)} \end{bmatrix}$$

Efectuando las multiplicaciones indicadas :

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} 5-0 & -20+2 & 30-7 \\ -3+0 & 12-4 & -18+14 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{Solución} = C = A \times B = \begin{bmatrix} 5 & -18 & 23 \\ -3 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

Observe que la matriz "C" producto de multiplicar "AxB" tiene el número de filas que tiene "A" (2) y el número de columnas que tiene "B" (3).

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 0 & 3\cdot 1 + 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A \bullet B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se escogen los elementos de la ***1era fila*** *de la matriz "A" y se multiplican (uno a uno) con los elementos de la* ***1era columna*** *de la matriz "B" y se suman.*

$$A \bullet B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos permitiremos señalar un "truco" muy utilizado para facilitar la multiplicación de matrices :

Se colocan la fila y la columna escogida una al lado de la otra y así se visualizará fácilmente la operación que debemos efectuar :

$$\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \quad x \quad \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \quad \text{--->} \quad \mathbf{(2)(1) + (0)(1) + (1)(1)}$$

Esta operación se coloca como elemento $\mathbf{c_{11}}$ *y así sucesivamente :*

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot1+0\cdot1+1\cdot1 & 2\cdot0+0\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot1+0\cdot1+1\cdot0 \\ 3\cdot1+0\cdot1+0\cdot1 & 3\cdot0+0\cdot2+0\cdot1 & 3\cdot1+0\cdot1+0\cdot0 \\ 5\cdot1+1\cdot1+1\cdot1 & 5\cdot0+1\cdot2+0\cdot1 & 5\cdot1+1\cdot1+1\cdot0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejemplo (tomado de www.lamatematicadefidel.com) :

DADAS LAS MATRICES : $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; $B = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \\ 7 & 5 & -4 \end{vmatrix}$

HALLAR : $A \times B$

$2\times3 \quad 3\times3$

Solución:

$$A \times B = \begin{vmatrix} 2\cdot5+1(-3)+(-3)\cdot7 & 2\cdot1+1(-2)+(-3)\cdot5 & 2\cdot2+1\cdot0+(-3)(-4) \\ (-4)\cdot5+5(-3)+6\cdot7 & (-4)\cdot1+5(-2)+6\cdot5 & (-4)2+5\cdot0+6(-4) \end{vmatrix}$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} 10-3-21 & 2-2-15 & 4+0+12 \\ -20-15+42 & -4-10+30 & -8+0-24 \end{vmatrix}$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} -14 & -15 & 16 \\ 7 & 16 & -32 \end{vmatrix} \checkmark$$

2×3

Ejemplo (tomado de www.lamatematicadefidel.com) :

DADAS LAS MATRICES : $A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & -7 \end{vmatrix}$; $B = \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 4 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$

HALLAR : $A \times B$

$3\times3 \quad 3\times2$

Solución:

$$A \times B = \begin{vmatrix} 5(-6)+(-2)\cdot4+4\cdot1 & 5\cdot2+(-2)(-3)+4\cdot5 \\ (-3)(-6)+1\cdot4+0\cdot1 & (-3)\cdot2+1(-3)+0\cdot5 \\ 7(-6)+6\cdot4+(-7)\cdot1 & 7\cdot2+6(-3)+(-7)\cdot5 \end{vmatrix}$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} -30-8+4 & 10+6+20 \\ 18+4+0 & -6-3+0 \\ -42+24-7 & 14-18-35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -34 & 36 \\ 22 & -9 \\ -25 & -39 \end{vmatrix}$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE MATRICES

Asociativa: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

Elemento neutro: $A \cdot I = A$

Donde I es la matriz identidad del mismo orden que la matriz A.

No es Conmutativa: $A \cdot B \neq B \cdot A$

Distributiva del producto respecto de la suma:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

DIVISIÓN DE MATRICES

La división de matrices se define como el producto del numerador multiplicado por la matriz inversa del denominador.

Es decir, sean las matrices A y B tal que $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}^{-1}$

Para realizar esta operación es necesario que conozcamos cómo calcular una MATRIZ INVERSA; esto lo explicaremos en la página 19 de esta guía.

EJERCICIOS RESUELTOS CON MATRICES

Ejercicio 1 :

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular:

A + B; A - B; A x B; B x A; A^t.

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 0+0 & 1+1 \\ 3+1 & 0+2 & 0+1 \\ 5+1 & 1+1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 0-0 & 1-1 \\ 3-1 & 0-2 & 0-1 \\ 5-1 & 1-1 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1+0\cdot1+1\cdot1 & 2\cdot0+0\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot1+0\cdot1+1\cdot0 \\ 3\cdot1+0\cdot1+0\cdot1 & 3\cdot0+0\cdot2+0\cdot1 & 3\cdot1+0\cdot1+0\cdot0 \\ 5\cdot1+1\cdot1+1\cdot1 & 5\cdot0+1\cdot2+0\cdot1 & 5\cdot1+1\cdot1+1\cdot0 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2+0\cdot3+1\cdot5 & 1\cdot0+0\cdot0+1\cdot1 & 1\cdot1+0\cdot0+1\cdot1 \\ 1\cdot2+2\cdot3+1\cdot5 & 1\cdot0+2\cdot0+1\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot0+1\cdot1 \\ 1\cdot2+1\cdot3+0\cdot5 & 1\cdot0+1\cdot0+0\cdot1 & 1\cdot1+1\cdot0+0\cdot1 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 13 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 :

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectuar las siguientes operaciones:

$$(A + B)^2; \qquad (A - B)^2; \qquad (B)^3; \qquad A \cdot B^t \cdot C.$$

Para calcular **(A + B)²** *primero realizamos la suma "A + B" y dicha suma se multiplica por ella misma.* $(A + B)^2 = (A+B) \times (A+B)$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -14 & 42 \\ 19 & -6 & 35 \\ 34 & -15 & 73 \end{pmatrix}$$

Para calcular **(A – B)²** *primero realizamos la resta "A – B" y dicha resta se multiplica por ella misma.* $(A - B)^2 = (A - B) \times (A - B)$

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - B)^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -1 \\ -16 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Para calcular **B³** *procederemos a multiplicar "B x B" y su producto ("B²") se debe volver a multiplicar por "B". Es decir* $B^3 = B \times B \times B$,

$$B^3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & -6 & 14 \\ 12 & -5 & 14 \\ -3 & -4 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -27 & 70 \\ 33 & -26 & 70 \\ -24 & -11 & 42 \end{pmatrix}$$

Para calcular **A x B·ᵗ x C** *primero multiplico a "A" por la traspuesta de "B" y dicho resultado lo multiplico por "C",*

$$A \cdot B^t \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 9 \\ -3 & -1 & 3 \\ 20 & 17 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 23 & 16 \\ 14 & 3 & 3 \\ 30 & 52 & 47 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 :

Demostrar que: $\mathbf{A^2 - A - 2I = 0}$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 :

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\ y\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcular:

- $A - B + C$.
- $A + B - C$.
- $3A + C/2$.

- $$-A - B + C = -\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2-3+2 & -4+1+0 & -1+2-1 \\ -1-0+0 & 2-5-1 & -3-6+2 \\ -5-0+1 & 0-0-2 & 1-9+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & -7 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

- $$A + B - C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+3-2 & 4-1-0 & 1-2+1 \\ 1+0-0 & 2+5+1 & 3+6-2 \\ 5-0-1 & 0+0+2 & -1+9-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- $$3A + C/2 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}}{2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 12 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \\ 15 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & -1 & 5/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6+1 & 12+0 & 3-1/2 \\ 3+0 & -6-1/2 & 9+1 \\ 15+1/2 & 0-1 & -3+5/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 12 & 5/2 \\ 3 & -13/2 & 10 \\ 31/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

El determinante de una **matriz cuadrada** *es un escalar o polinomio, que resulta de obtener todos los productos posibles de una matriz de acuerdo a una serie de restricciones, siendo denotado como* ***|A|*** *o como* ***Det(A).***

El valor numérico es conocido también como modulo de la matriz.

Nota : *El determinante de una matriz "1 x 1" es el mismo valor del único elemento de la matriz.*

$$\text{Si } A = [5] \quad ; \quad |A| = 5$$

DETERMINANTE DE ORDEN 2

Sea ***A*** *una matriz cuadrada de orden* ***2****,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Se llama **determinante** *de* ***A*** *al número real:*

$$\text{Det}(A) = \text{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Es decir, el **determinante** *de una matriz cuadrada de orden* **2** *es igual al producto de los elementos de la* **diagonal principal** *menos el producto de los elementos de la* **diagonal secundaria.**

Ejemplo :

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *calcular su determinante :*

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (5)(2) = 3 - 10 = -7.$$

Ejemplo :

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ *calcular su determinante :*

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = (2)(-4) - (-3)(1) = -8 - (-3) = -8 + 3 = -5.$$

Ejemplo :

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} sen\,\beta & -cos\,\beta \\ cos\,\beta & sen\,\beta \end{bmatrix}$ *calcular su determinante :*

$$|A| = Det\,(A) = +(sen\,\beta).(sen\,\beta) - (cos\,\beta).(-\,cos\,\beta)$$

$$|A| = Det\,(A) = sen^2\,\beta + cos^2\,\beta$$

Existe una identidad trigonométrica que nos indica que :

$$sen^2\,\beta + cos^2\,\beta = 1$$

Luego podemos decir que :

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} sen\,\beta & -cos\,\beta \\ cos\,\beta & sen\,\beta \end{bmatrix}$ *su determinante será :*

$$|A| = Det\,(A) = 1$$

DETERMINANTE DE ORDEN 3

(Regla de Sarrus)

*Dada una matriz cuadrada **A** de orden **3**,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

*Se llama **determinante** de **A** al número real:*

$$\text{Det}(A) = \text{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}$$

$$- a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11}$$

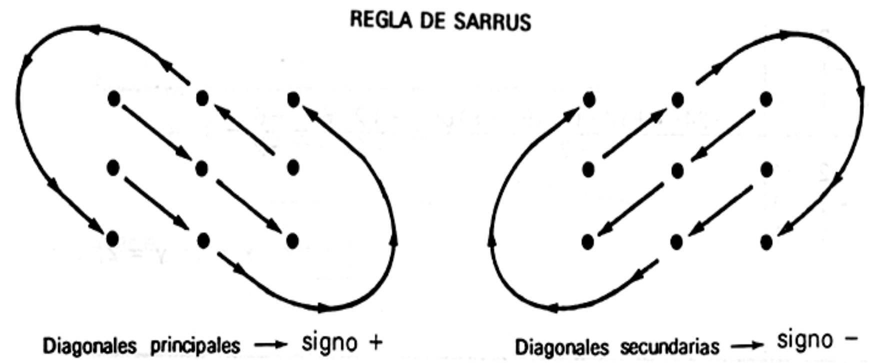
*La **regla de Sarrus** permite recordar fácilmente el desarrollo del determinante de una matriz de orden 3.*

*Los **productos con signo " + "**, están formados por los elementos de la **diagonal principal**, y los de las dos diagonales paralelas (por encima y por debajo), con su correspondiente vértice opuesto.*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

*Los **productos con signo " − "**, se forman con los elementos de la **diagonal secundaria** y los de las dos diagonales paralelas, con su correspondiente vértice opuesto.*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



Ejemplo :

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ *calcular su determinante :*

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \boxed{(3)(2)(4)}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (3)(2)(4) \boxed{+ (2)(-5)(-2)}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (3)(2)(4) + (2)(-5)(-2) + (0)(1)(1)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (3)(2)(4) + (2)(-5)(-2) + (0)(1)(1) - (-2)(2)(1)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (3)(2)(4) + (2)(-5)(-2) + (0)(1)(1) - (-2)(2)(1) - (0)(2)(4)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (3)(2)(4) + (2)(-5)(-2) + (0)(1)(1) - (-2)(2)(1) - (0)(2)(4) - (1)(-5)(3) =$$

$$= 24 + 20 + 0 - (-4) - 0 - (-15) = 44 + 4 + 15 = 63$$

Ejemplo :

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *calcular su determinante :*

Nos permitiremos mostrarte un "atajo visual" que facilita la utilización de la Regla de Sarrus.

El mismo consiste en colocar las columnas (líneas verticales) 1 y 2 al lado derecho de la matriz y eso nos permitirá visualizar fácilmente los elementos que tienen que ser multiplicados.

Valores positivos (diagonal principal) :

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (3)(-1)(2) + (2)(1)(4) + (-1)(1)(-1)$$

Valores negativos (diagonal secundaria) :

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (3)(-1)(2)+(2)(1)(4)+(-1)(1)(-1) - (-1)(-1)(4) - (3)(1)(-1) - (2)(1)(2)$$

$$= -6 + 8 + 1 - 4 + 3 - 4 = -2 \qquad \textbf{Resp.} \quad |A| = -2$$

Ejemplo :

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ *calcular su determinante :*

Nos permitiremos mostrarte otro "atajo visual" que facilita la utilización de la Regla de Sarrus.

El mismo consiste en colocar las filas (líneas horizontales) 1 y 2 debajo de la matriz y eso nos permitirá visualizar fácilmente los elementos que tienen que ser multiplicados.

Valores positivos (diagonal principal) :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$= (2)(2)(-1) + (1)(0)(3) + (1)(1)(5)$

Valores negativos (diagonal secundaria) :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$=(2)(2)(-1)+(1)(0)(3)+(1)(1)(5) - (3)(1)(2) - (-1)(0)(1) - (5)(2)(1)$

$= -4 + 0 + 5 - 6 + 0 - 10 = -15$ **Resp. $|A| = -15$**

MATRiZ ADJUNTA

La **matriz adjunta** *es aquella en la que cada elemento se sustituye por su adjunto (o cofactor). También es conocida como matriz de cofactores.*

La adjunta de A se denota como $\mathbf{A^*}$.

Se llama **adjunto** *del elemento* $\mathbf{a_{ij}}$ *al* **menor complementario** *de la matriz, anteponiendo :*

- *El signo positivo si "i + j" es par.*
- *El signo negativo si "i + j" es impar.*

Se denomina **menor complementario** *al determinante resultante después de eliminar la fila "i" y la columna "j" de la matriz inicial.*

Ejemplo :

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular el adjunto del elemento $\mathbf{a_{11}}$ *:*

Este elemento estará ubicado en :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego se eliminan la fila 1 y la columna 1:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El menor complementario será :

$$\begin{vmatrix}0&0\\1&1\end{vmatrix} = (0).(1) - (0).(1) = 0$$

Este adjunto tendrá signo positivo ya que "i + J" es par (1+1=2) y el determinante obtenido es positivo (0).

<u>Ejemplo :</u> *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{pmatrix}$$

Calcular el adjunto del elemento $\mathbf{a_{12}}$ *:*

Este elemento estará ubicado en :

$$A = \begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{pmatrix}$$

Luego se eliminan la fila 1 y la columna 2:

$$A = \begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{pmatrix}$$

Este adjunto tendrá signo negativo ya que "i + J" es impar (1+2=3) y el determinante que se obtiene es positivo (3 – 0 = 3)

$$-\begin{vmatrix}3&0\\5&1\end{vmatrix} = -3$$

<u>Ejemplo :</u> *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{pmatrix}$$

Calcular el adjunto del elemento $\mathbf{a_{22}}$ *:*

Este elemento estará ubicado en :

$$A = \begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{pmatrix}$$

Luego se eliminan la fila 2 y la columna 2:

$$A = \begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{pmatrix}$$

Este adjunto tendrá signo negativo ya que el determinante es negativo (2 – 5 = – 3) y "j + i" es par (más por menos da menos).

$$+\begin{vmatrix}2&1\\5&1\end{vmatrix} = -3$$

Para calcular la <u>matriz adjunta</u> se debe determinar el adjunto de cada uno de los elementos de la matriz inicial :

<u>Ejemplo :</u>

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{pmatrix}$$

Calcular su adjunta :

$$A^{*} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix}0&0\\1&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3&0\\5&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3&0\\5&1\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2&1\\5&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&0\\5&1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&1\\3&0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2&0\\3&0\end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-3&3\\1&-3&-2\\0&3&0\end{pmatrix}$$

Ejemplo : *Dada la matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Su adjunta será :

$$\mathbf{A^*} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{21} & A_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Ejemplo : *Dada la matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular su adjunta :

El adjunto del elemento $\mathbf{a_{11}}$ *será :*

$$+\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+1 = 1$$

El adjunto del elemento $\mathbf{a_{12}}$ *será :*

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(0-2) = -(-2) = 2$$

El adjunto del elemento $\mathbf{a_{13}}$ *será :*

$$+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1-0 = 1$$

El adjunto del elemento $\mathbf{a_{21}}$ *será :*

$$-\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0-3) = (-1)(-3) = 3$$

El adjunto del elemento $\mathbf{a_{22}}$ *será :*

$$+\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0+6 = 6$$

El adjunto del elemento $\mathbf{a_{23}}$ *será :*

$$-\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(2-4) = -(-2) = 2$$

El adjunto del elemento $\mathbf{a_{31}}$ *será :*

$$+\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2-0 = 2$$

El adjunto del elemento $\mathbf{a_{32}}$ *será :*

$$-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-2-3) = -(-5) = 5$$

El adjunto del elemento $\mathbf{a_{33}}$ *será :*

$$+\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+2 = 2$$

Su adjunta será :

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

MATRiZ iNVERSA

Se dice que una **matriz cuadrada** $\mathbf{A}$ *es invertible, si existe una matriz* $\mathbf{B}$ *con la propiedad de que*

$$\mathbf{A \times B = B \times A = I}$$

siendo $\mathbf{I}$ *la matriz identidad. Denominamos a la matriz* $\mathbf{B}$ *la inversa de* $\mathbf{A}$ *y la denotamos por* $\mathbf{A^{-1}}$.

Para que una matriz sea invertible es necesario que su determinante sea distinto de cero ($|A| \neq 0$*).*

Ejemplo:

Supongamos $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Puesto que $AB = BA = I$*, A y B son invertibles, siendo cada una la inversa de la otra.*

CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA

Para calcular la inversa de una matriz generalmente se utilizan dos métodos, el primero : utilizando la matriz adjunta y el determinante y el segundo : el método de Gauss-Jordán.

Primer método : *Se utiliza la siguiente fórmula :*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(A^*\right)^t}$$

Donde :

- $\mathbf{A^{-1}}$ *es la Matriz Inversa.*
- $\mathbf{|A|}$ *es el Determinante de la Matriz.*
- $\mathbf{A^*}$ *es la Matriz Adjunta.*
- $\mathbf{(A^*)^t}$ *es la Matriz Traspuesta de la adjunta.*

Ejemplo :

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz inversa :

1.- *Calculamos el determinante de la matriz (Página 14),* **en el caso que el determinante sea nulo (**$|A| = 0$**) la matriz no tendrá inversa.**

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

2.- *Hallamos la matriz adjunta (Página 16) :*

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

3.- *Calculamos la traspuesta de la matriz adjunta (Página 2) :*

$$(A^*)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

4.- Aplicamos la fórmula y se obtiene la matriz inversa :

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Para comprobar el resultado se debe multiplicar la matriz obtenida (Inversa) por la matriz inicial y el producto debe ser la matriz identidad.

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo : *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz inversa :

1.- *Calculamos el determinante de la matriz (Página 14),* **en el caso que el determinante sea nulo (| A | = 0) la matriz no tendrá inversa.**

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 54$$

2.- *Hallamos la matriz adjunta (Página 16) :*

$$A^* = \begin{pmatrix} 25 & -9 & 4 \\ 7 & -9 & -14 \\ -1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

3.- *Calculamos la traspuesta de la matriz adjunta (Página 2) :*

$$(A^*)^t = \begin{pmatrix} 25 & 7 & -1 \\ -9 & -9 & 9 \\ 4 & -14 & 2 \end{pmatrix}$$

4.- Aplicamos la fórmula y se obtiene la matriz inversa :

$$A^{-1} = \frac{1}{54}(A^*)^t = \begin{pmatrix} \frac{25}{54} & \frac{7}{54} & \frac{-1}{54} \\ \frac{-9}{54} & \frac{-9}{54} & \frac{9}{54} \\ \frac{4}{54} & \frac{-14}{54} & \frac{2}{54} \end{pmatrix}$$

Segundo método : *Método de Gauss-Jordan*

Este método consiste en colocar junto a la matriz de partida **(A)** *la matriz identidad* **(I)** *y hacer operaciones por filas, afectando esas operaciones tanto a* **A** *como a* **I**, *con el objeto de transformar la matriz* **A** *en la matriz identidad, la matriz resultante de las operaciones sobre* **I** *es la inversa de* **A** .

Las operaciones que podemos hacer sobre las filas son:

a) Sustituir una fila por ella multiplicada por una constante, por ejemplo, sustituimos la fila 2 por ella multiplicada por 3.

b) Permutar dos filas

c) Sustituir una fila por una combinación lineal de ella y otras.

Ejemplo : *Dada la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Calcular la matriz inversa utilizando el método de Gauss-Jordán.

Primero debemos recordar que para que una matriz sea invertible es necesario que su determinante sea distinto de cero ($|A| \neq 0$).

$$|A| = (3)(7) - (5)(4) = 21 - 20 = 1$$

Como la matriz tiene determinante distinto de cero se puede calcular su inversa.

Se construye una matriz ampliada colocando la matriz identidad al lado derecho de la matriz inicial :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora debemos hacer operaciones por filas, afectando esas operaciones tanto a **A** *como a* **I**, *con el objeto de transformar la matriz* **A** *en la matriz identidad.*

Para que el elemento $\mathbf{a_{11}}$ *contenga el nro. 1, podemos sustituir la primera fila por ella misma dividida entre 3.*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 = \frac{1}{3} f_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Para que el elemento $\mathbf{a_{21}}$ *contenga el nro. 0, podemos sustituir la segunda fila por el resultado de restar a la segunda fila cinco veces la primera fila.*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 = f_2 - 5 f_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & -5/3 & 1 \end{array}\right)$$

Para que el elemento $\mathbf{a_{22}}$ *contenga el nro. 1, podemos multiplicar la segunda fila por 3.*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & -5/3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 = 3 f_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right)$$

Para que el elemento $\mathbf{a_{12}}$ *contenga el nro. 0, podemos sustituir la primera fila por el resultado de restar a la primera fila la segunda fila multiplicada por* $\frac{4}{3}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 = f_1 - \frac{4}{3} f_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right)$$

Una vez que hemos conseguido la matriz identidad a la izquierda de la línea el proceso termina. La matriz inversa de "A" es la matriz que se encuentra a la derecha de la línea.

Solución: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

<u>Comprobación :</u> *Se puede comprobar fácilmente si el resultado que hemos obtenido es el correcto. Basta multiplicar la matriz A, que nos dan en el enunciado, por la matriz que hemos obtenido, A^{-1}. El resultado debe ser la matriz identidad I.*

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

<u>Ejercicios para practicar :</u>

Calcular la inversa de las siguientes matrices :

$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ **Solución** $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **Solución** $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ **Solución** $C^{-1} = \begin{bmatrix} 5/2 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ **Solución** $D^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/12 \\ 0 & 1/8 \end{bmatrix}$

<u>Ejemplo :</u> *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz inversa utilizando el método de Gauss-Jordán.

Primero debemos recordar que para que una matriz sea invertible es necesario que su determinante sea distinto de cero ($|A| \neq 0$).

Como esta matriz tiene determinante distinto de cero **($|A| = -1$)** *se puede calcular su inversa.*

Se construye una matriz ampliada colocando la matriz identidad al lado derecho de la matriz inicial :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Para que el elemento $\mathbf{a_{21}}$ contenga el nro. 0, podemos sustituir la segunda fila por el resultado de restar la primera fila de la segunda..

$$f_2 = f_2 - f_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Para que el elemento $\mathbf{a_{32}}$ contenga el nro. 0, podemos sustituir la tercera fila por el resultado de sumar las filas 2 y 3.

$$f_3 = f_2 + f_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Para que el elemento $\mathbf{a}_{23}$ contenga el nro. 0, podemos sustituir la segunda fila por el resultado de restar la fila 3 de la fila 2.

$$f_2 = f_2 - f_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Para que el elemento $\mathbf{a}_{12}$ contenga el nro. 0, podemos sustituir la primera fila por el resultado de sumar las filas 1 y 2.

$$f_1 = f_1 + f_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Para que el elemento $\mathbf{a}_{22}$ contenga el nro. 1, simplemente podemos multiplicar la segunda fila por menos uno.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Una vez que hemos conseguido la matriz identidad a la izquierda de la línea el proceso termina. La matriz inversa de "A" es la matriz que se encuentra a la derecha de la línea.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo :

Calcular la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 Construir una matriz del tipo M = (A | I)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

2 Utilizar el método Gauss para transformar la mitad izquierda, A, en la matriz identidad, y la matriz que resulte en el lado derecho será la matriz inversa: $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\xrightarrow{f_3-2f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3-2f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Recomendamos observar los dos videos que encontraras en la Web identificados con los siguientes links :

http://www.youtube.com/watch?v=91xUg1L7O7s

http://www.youtube.com/watch?v=pUabaQqbrug&feature=related

DETERMINANTE DE ORDEN 4

Los métodos que hemos visto hasta el momento solo pueden ser aplicados a matrices de orden 1, 2 y 3.

Existen 2 métodos que permiten calcular el determinante a cualquier tipo de matriz.

REGLA DE LAPLACE *: El determinante de una matriz cuadrada de orden "n" es igual a la suma de los productos de los elementos de una linea (fila o columna) cualquiera por sus adjuntos respectivos.*

Es decir, tomando la fila "i" se tiene :

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

Ejemplo : *Calcular el determinante utilizando la Regla de Laplace :*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Recuerde que :

Se llama **adjunto** *del elemento* $\mathbf{a_{ij}}$ *al* **menor complementario** *de la matriz, anteponiendo :*

- *El signo positivo si "i + j" es par.*
- *El signo negativo si "i + j" es impar.*

Se denomina **menor complementario** *al determinante resultante después de eliminar la fila "i" y la columna "j" de la matriz inicial.*

En la página 16 y siguientes de esta guía se muestra como calcular los adjuntos.

Los adjuntos de los distintos elementos de una matriz 4 x 4 tienen los siguientes signos :

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Desarrollando por los adjuntos de la primera fila se tiene :

Estudiando el elemento $\mathbf{a_{11}}$ *:*

Como "i + j" es par (1+1=2) se antepone el signo positivo. Para visualizar la matriz reducida a la que se le va a calcular el determinante (menor complementario) se elimina la fila 1 y la columna 1 de la matriz inicial :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

El primer elemento de la suma será :

$$+\,1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Estudiando el elemento $\mathbf{a_{12}}$ *:*

Como "i + j" es impar (1+2=3) se antepone el signo negativo. Para visualizar la matriz reducida a la que se le va a calcular el determinante (menor complementario) se elimina la fila 1 y la columna 2 de la matriz inicial :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

El segundo elemento de la suma será :

$$-0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Estudiando el elemento $\mathbf{a_{13}}$ *:*

Como "i + j" es par (1+3=4) se antepone el signo positivo. Para visualizar la matriz reducida a la que se le va a calcular el determinante (menor complementario) se elimina la fila 1 y la columna 3 de la matriz inicial :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

El tercer elemento de la suma será :

$$+1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Estudiando el elemento $\mathbf{a_{14}}$ *:*

Como "i + j" es impar (1+4=5) se antepone el signo negativo. Para visualizar la matriz reducida a la que se le va a calcular el determinante (menor complementario) se elimina la fila 1 y la columna 4 de la matriz inicial :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

El cuarto elemento de la suma será :

$$-2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Se procede ahora a calcular el determinante de las matrices reducidas 3x3 de cada uno de los miembros de la suma aplicando la Regla de Sarrus (página 14).

Una vez calculados los determinantes se sustituyen en la suma :

$$(1).(-10) + 0 + (1).(5) + (-2)(-12) =$$

$$-10 + 5 + 24 = 19$$

Luego :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 19$$

<u>REGLA DE CHIO</u> *: Se fundamenta en operaciones elementales de fila o de columna y un pivote que por rapidez en las operaciones matemáticas (multiplicación y sustracción) escogemos un elemento identificado con el número uno (1); si en los elementos del determinante de la matriz no se tiene un elemento identificado con este número, se busca este elemento sacando un factor común a todos los elementos de una fila o una columna o se aplican operaciones elementales de fila o de columna, tales como constituir una nueva columna por la suma algebraica de dos columnas.*

El objetivo es transformar el determinante de una matriz cuadrada de orden "n" en una de orden "n-1" y así sucesivamente hasta llegar a un determinante de tercer orden (n=3) donde su solución puede ser obtenida a través de la regla de Sarrus. Para ello se requiere conformar una fila o columna con sus elementos nulos (0), excepto un elemento identificado con el numero uno (1).

Si observamos el ejemplo anterior notaremos que el mismo resultado se puede obtener **haciendo ceros** *en la primera fila, utilizando la siguiente propiedad de los determinantes :*

> "El valor de un determinante no varía si a los elementos de una línea se les suma otra paralela multiplicada por un número".

En realidad la Regla de Chio es la aplicación de la Regla de Laplace pero en una matriz equivalente a la inicial que permita facilitar su aplicación.

Se facilita la aplicación en el sentido de que al "hacer ceros" en una línea y dejar un uno en un elemento de esa línea, los otros adjuntos se anularán al tener que multiplicarse por cero.

Luego la operación quedará reducida a multiplicar ese uno por el determinante de la matriz reducida que quede después de eliminar la fila y la columna donde se encuentre ubicado dicho uno.

En efecto, sumando a la tercera columna la primera columna multiplicada por menos uno y a la cuarta columna la primera multiplicada por menos dos resulta :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 19$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 19$$

<u>Recuerde que :</u>

Se llama **adjunto** *del elemento* $\mathbf{a_{ij}}$ *al* **menor complementario** *de la matriz, anteponiendo :*

- *El signo positivo si "i + j" es par.*
- *El signo negativo si "i + j" es impar.*

Se denomina **menor complementario** *al determinante resultante después de eliminar la fila "i" y la columna "j" de la matriz inicial.*