Física teórica
MECÁNICA
Cinemática tensorial

Tema 2
Espacio vectorial

Índice.

Historia del Concepto (1).

Apartado-1. (1).

Ideas que condujeron al concepto de Vector y de Espacio Vectorial. Bolzano, Bellavitis, Hamilton y Peano.

Apartado-2. (1).

La noción de Espacio Vectorial, actual, y su importancia.

Espacio y subespacio vectoriales (1).

Apartado-1. (1).

Espacio vectorial (V_L^n, R). Espacio vectorial genérico (V, K).

Apartado-2. (3).

Polinomio ordinario de coeficientes reales. Ecuación polinómica ordinaria. Función polinómica ordinaria. Adición o suma de funciones polinómicas. Grupo abeliano $(P, \oplus)$. Multiplicación o producto de un número real por una función polinómica. R-espacio vectorial de soporte P: (P, R).

Apartado-3. (5).

Suma o adición de funciones polinómicas. Aclaración.

Apartado-4. (5).

Adición o Suma de n-tuplas de R^n. $(R_n, \oplus)$. R-espacio vectorial de soporte R^n: (R^n, R).

Apartado-5. (6).

Subespacio vectorial (definición informal). Teoremas. Elemento neutro.

Subespacio vectorial (7).

Apartado-1. (7).

Subespacio vectorial (definición formal). Teorema. Subespacio trivial.

Apartado-2. (8).

Subespacio propio. Subespacio impropio. Teoremas. Contraejemplo.

Suma de subespacios. (9).

Apartado-1. (9).

Suma de subespacios vectoriales. Teorema.

Apartado-2. (10).

Suma directa. Teorema. Elemento inverso. Elemento simétrico.

Apartado-3. (12).

Subespacios vectoriales suplementarios.

Cinemática tensorial.
Tema 2 (espacio vectorial).

Historia del concepto.

Apartado-1.

Las primeras ideas que condujeron a la noción de Espacio Vectorial se remontan al siglo XVII, con la aparición de la Geometría Analítica, la Teoría de Matrices y los Sistemas de Ecuaciones Lineales. Posteriormente, en 1804, Bolzano introdujo ciertas operaciones sobre puntos, líneas y planos usando coordenadas no cartesianas, y de ahí surgieron ideas que precedieron a la Teoría Vectorial. De todas formas, el esbozo de la definición de Vector, como segmento orientado, con un origen y un extremo, proviene de Bellavitis; pero fue Hamilton, con su Teoría de los Cuaterniones o elementos de R^4, el que inventó el nombre de Vector. Finalmente, el matemático italiano Peano fue quien dio la primera definición moderna de Espacio Vectorial, en 1888, junto con el concepto de Aplicación Lineal.

Apartado-2.

Al presente, el concepto de Espacio Vectorial es fundamental en Matemática General, Ciencias e Ingeniería. Las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales, el Análisis de Fourier y la Teoría de Tensores encuentran en la noción de Espacio Vectorial un marco teórico imprescindible, ya que permite un cálculo abstracto y libre de las limitaciones que acarrean el uso de coordenadas.

Espacio y subespacio vectoriales.

Apartado-1.

El concepto de Espacio Vectorial puede hacerse mucho más abarcador, abstracto o general que el ya estudiado R-espacio vectorial de soporte V_L^n (tema anterior). Recordemos que el espacio vectorial $(V_L^n, R) \equiv [(V_L^n, \oplus), (R, +, \cdot), \odot]$ es una estructura algebraica que goza de las siguientes propiedades:

1).- $(V_L^n, \oplus)$ es un grupo abeliano.

2).- $(R, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo.

3).- $\left.\begin{array}{l}\forall r \in R \\ \forall \vec{v} \in V_L^n\end{array}\right\} \Rightarrow r \odot \vec{v} = r\vec{v} = w \in V_L^n.$

4).- $\left.\begin{array}{l}\forall r, t \in R \\ \forall \vec{v} \in V_L^n\end{array}\right\} \Rightarrow r(t\vec{v}) = (r \cdot t)\vec{v}.$

5).- $\exists 1 \in R \mid \forall \vec{v} \in V_L^n \Rightarrow 1\vec{v} = \vec{v}.$

6).- $\left.\begin{array}{l}\forall r, t \in R \\ \forall \vec{v} \in V_L^n\end{array}\right\} \Rightarrow (r+t)\vec{v} = r\vec{v} \oplus t\vec{v}.$

7).- $\left.\begin{array}{l}\forall r \in R \\ \forall \vec{v}, \vec{w} \in V_L^n\end{array}\right\} \Rightarrow r(\vec{v} \oplus \vec{w}) = r\vec{v} \oplus r\vec{w}.$

Pues bien, generalicemos. Sea V un conjunto indefinido (vectorial o no) y sea K otro conjunto indefinido (habitualmente escalar: $R, C, \ldots$). Siendo $\circledast$ una operación interna en V, siendo $*$ una operación interna en K, siendo $\times$ una operación interna en K y siendo $\otimes$ una operación externa con K como dominio de operadores, será $(V, K) \equiv ((V, \circledast), (K, *, \times), \otimes)$ un K-espacio vectorial de soporte V si se cumplen las siguientes propiedades:

1).- $(V, \circledast)$ es un grupo abeliano.

2).- $(K, *, \times)$ es un cuerpo conmutativo.

3).- $\left.\begin{array}{l}\forall q \in K \\ \forall x \in V\end{array}\right\} \Rightarrow q \otimes x = qx = y \in V.$

4).- $\left.\begin{array}{l}\forall q, s \in K \\ \forall x \in V\end{array}\right\} \Rightarrow q(sx) = (q \times s)x.$

5).- $\exists e \in K \mid \forall x \in V \Rightarrow ex = x.$

6).- $\left.\begin{array}{l}\forall q, s \in K \\ \forall x \in V\end{array}\right\} \Rightarrow (q * s)x = qx \circledast sx.$

7).- $\left.\begin{array}{l}\forall q \in K \\ \forall x, y \in V\end{array}\right\} \Rightarrow q(x \circledast y) = qx \circledast qy.$

Evidentemente, pues, (V_L^n, R) queda como una concretización o restricción semántica de (V, K), ya que acorta la significación de V sometiéndola al caso V_L^n (uno de los muchos valo-

res conceptuales de V) y la significación de K para el caso R.

Apartado-2.

Llamamos POLINOMIO (más exactamente: POLINOMIO ORDINARIO DE COEFICIENTES REALES), de grado "n", con $n \in N^{\circ}$, tal que $N^{\circ} = N \cup \{0\}$, a toda expresión algebraica del tipo:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

Es decir:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0$$

Tal que:

$$a_n \neq 0 \; ; \; x \neq 0$$

Con:

$$a_i \in R \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

A partir de esta definición, se llama ECUACIÓN POLINÓMICA (más exactamente: ECUACIÓN POLINÓMICA ORDINARIA), de grado "n", a una expresión de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Y se llama FUNCIÓN POLINÓMICA (más exactamente: FUNCIÓN POLINÓMICA ORDINARIA) a toda función del tipo:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

con $x \in R$ como variable independiente, $P_n(x)$ la función y $a_i \in R$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Denotando por P al conjunto de todas las funciones polinómicas ordinarias $P_n(x)$, con $n \geq 0$, se puede definir la operación ADICIÓN o SUMA de funciones polinómicas ordinarias así:

$$\forall P_m(x), Q_n(x) \in P \quad \left| \begin{array}{l} P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_0 \\ Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0 \end{array} \right.$$

Se tiene:

$$P_m(x) \oplus Q_n(x) = S_p(x) \in P$$

Tal que:

$$\begin{aligned} P_m(x) \oplus Q_n(x) &= (a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_0) + (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0) = \\ &= a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_0 + b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0 = \\ &= c_p x^p + c_{p-1} x^{p-1} + \ldots + c_0 \end{aligned}$$

Con:

$$0 \leq p \leq m+n \; ; \; c_i = a_i + b_i \quad \text{(ver próximo apartado).}$$

De todas formas, estos conceptos son conocidos desde la enseñanza secundaria o preuniversitaria, por lo que no abundaremos en su cálculo. Sólo puntualizaremos que es fácil comprobar que

$(P, \oplus)$ tiene estructura de Grupo Abeliano, pues cumple:

1).- Clausura: $\forall P_m(x), Q_n(x) \in P \Rightarrow \left[P_m(x) \oplus Q_n(x)\right] \in P.$

2).- Asociatividad: $\forall P_m(x), Q_n(x), S_p(x) \in P \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[P_m(x) \oplus Q_n(x)\right] \oplus S_p(x) = P_m(x) \oplus \left[Q_n(x) \oplus S_p(x)\right].$$

3).- Neutralidad: $\forall P_n(x) \in P \Rightarrow \exists\, 0x^m \in P \mid P_n(x) \oplus 0x^m =$

$$= 0x^m \oplus P_n(x) = P_n(x).$$

4).- Inversión: $\forall P_n(x) \in P \Rightarrow \exists\, -P_n(x) = (-1)\, P_n(x) \mid$

$$P_n(x) \oplus \left[-P_n(x)\right] = 0x^m.$$

5).- Conmutatividad: $\forall P_m(x), Q_n(x) \in P \Rightarrow$

$$\Rightarrow P_m(x) \oplus Q_n(x) = Q_n(x) \oplus P_n(x).$$

Aparte de todo esto, se puede definir la MULTIPLICACIÓN o PRODUCTO de un elemento de R por un elemento de P así:

$$\left.\begin{array}{l} \forall r \in R \\ \forall P_n(x) \in P \end{array}\right\} \quad r \odot P_n(x) = r\, P_n(x) = Q_n(x)$$

Tal que: $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

$$r\, P_n(x) = r\left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0\right) = r a_n x^n + r a_{n-1} x^{n-1} + \dots + r a_0 =$$

$$= Q_n(x) \in P.$$

Por consiguiente, la estructura $(P, R) \equiv \left[(P, \oplus), (R, +, \cdot), \odot\right]$ es un R-espacio vectorial de soporte P, pues cumple:

1).- $(P, \oplus)$ es grupo abeliano.

2.- $(R, +, \cdot)$ es cuerpo conmutativo.

3).- $\left.\begin{array}{l} \forall r \in R \\ \forall P_n(x) \in P \end{array}\right\} \Rightarrow r \odot P_n(x) = r\, P_n(x) = Q_n(x) \in P.$

4).- $\left.\begin{array}{l} \forall r, t \in R \\ \forall P_n(x) \in P \end{array}\right\} \Rightarrow r\left[t\, P_n(x)\right] = (rt)\, P_n(x).$

5).- $\exists\, 1 \in R \mid \forall P_n(x) \in P \Rightarrow 1\, P_n(x) = P_n(x).$

6).- $\left.\begin{array}{l} \forall r, t \in R \\ \forall P_n(x) \in P \end{array}\right\} \Rightarrow (r+t)\, P_n(x) = r\, P_n(x) \oplus t\, P_n(x).$

7).- $\left.\begin{array}{l} \forall r \in R \\ \forall P_m(x), Q_n(x) \in P \end{array}\right\} \Rightarrow r\left(P_m(x) \oplus Q_n(x)\right) = r\, P_m(x) \oplus r\, Q_n(x).$

Con la construcción de la estructura (P, R) hemos querido e-

jemplificar cómo se puede extender el concepto genérico de espacio vectorial (V,K) a conjuntos soportes que no tienen nada que ver con los vectores. 5.

Apartado-3.

En el apartado anterior, al definir la Suma o Adición de Funciones polinómicas ordinarias, escribimos:

$$P_m(x) \oplus Q_n(x) = S_p(x)$$

Tal que:

$$P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0$$
$$Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0$$
$$S_p(x) = c_p x^p + c_{p-1} x^{p-1} + \dots + c_0$$

Con:

$$0 \leq p \leq m+n.$$
$$c_i = a_i + b_i$$

Pues bien, aclaremos la expresión $c_i = a_i + b_i$, pese a que con ello redundamos en conocimientos matemáticos de carácter preuniversitario (el álgebra de polinomios). Por tanto, supongamos que sea $m<n$, pues el caso $m>n$ quedaría englobado en él, en tanto que si $m=n$ entonces $c_i = a_i + b_i$ queda automáticamente esclarecido. Para $m<n$, pues, se tiene:

$$Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$$
$$P_m(x) = 0\, x^n + 0\, x^{n-1} + \dots + a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0$$

De donde:

$$P_m(x) \oplus Q_n(x) = (0+b_n)x^n + (0+b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_m+b_m)x^m + (a_{m-1}, b_{m-1})x^{m-1} + \dots + (a_0+b_0) = \sum_{i=0}^{n} (a_i+b_i)x^i \quad \Big| \; \forall i>m \Rightarrow a_i = 0$$

Apartado-4.

A partir de la definición de Suma o Adición de componentes de vectores de V_f^n (tema anterior, página 12, apartado-6) y de la definición de vector libre (tema anterior, página 11, apartado-5), es posible establecer un álgebra abstracta de n-tuplas de números reales $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, donde la Adición o Suma de estas entidades (las n-tuplas) quedaría así:

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \oplus y = (x_1, x_2, \dots, x_n) \oplus (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n) \in R^n$$

Siendo evidente, pues, que $(R^n, \oplus)$ posee estructura algebraica de Grupo Abeliano, ya que cumple:

1).- Clausura: $\forall x, y \in R^n \Rightarrow (x \oplus y) \in R^n$.

2).- Asociatividad:

$$\forall x, y, z \in R^n \Rightarrow (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$$

3).- Neutralidad:

$$\forall x \in R^n \Rightarrow \exists\, 0 = (0, 0, \ldots, 0) \in R^n \mid x \oplus 0 = 0 \oplus x = x.$$

4).- Inversión:

$$\forall x \in R^n \Rightarrow \exists\, -x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \in R^n \mid x \oplus (-x) = (-x) \oplus x = 0.$$

5).- Conmutatividad:

$$\forall x, y \in R^n \Rightarrow x \oplus y = y \oplus x.$$

Ahora bien, poniendo en interacción $(R^n, \oplus)$ con $(R, +, \cdot)$, mediante el producto $\odot$ (multiplicación de un escalar real por una n-tupla de R^n), se obtiene una estructura de R-espacio vectorial de soporte R^n, $(R^n, R) \equiv [(R^n, \oplus), (R, +, \cdot), \odot]$, que cumple las siguientes propiedades:

1).- $(R^n, \oplus)$ es grupo abeliano.

2).- $(R, +, \cdot)$ es cuerpo conmutativo.

3).- $\left.\begin{array}{l}\forall r \in R \\ \forall x \in R^n\end{array}\right\} \Rightarrow r \odot x = rx = r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (r \cdot x_1, r \cdot x_2, \ldots, r \cdot x_n) \in R^n$.

4).- $\left.\begin{array}{l}\forall r, t \in R \\ \forall x \in R^n\end{array}\right\} \Rightarrow r(tx) = (r \cdot t)x$.

5).- $\exists\, 1 \in R \mid \forall x \in R^n \Rightarrow 1x = x$.

6).- $\left.\begin{array}{l}\forall r, t \in R \\ \forall x \in R^n\end{array}\right\} \Rightarrow (r+t)x = rx \oplus tx$.

7).- $\left.\begin{array}{l}\forall r \in R \\ \forall x, y \in R^n\end{array}\right\} \Rightarrow r(x \oplus y) = rx \oplus ry$.

<u>Apartado-5.</u>

Sea $(V, K) \equiv [(V, \circledast), (K, *, \times), \otimes]$ un K-espacio vectorial (genérico) de soporte V, y sea $W \subset V$; se dirá que $(W, K) \equiv [(W, \circledast), (K, *, \times), \otimes]$ es un SUBESPACIO VECTORIAL de (V, K) si (W, K) tiene estructura algebraica de K-espacio vectorial de soporte W.

Esta definición da lugar a una relativamente numerosa serie de teoremas, entre los cuales están los siguientes.

TEOREMA-1:

Siendo (W,K) un subespacio vectorial de (V,K), se cumple que el Elemento Neutro de $(V,\circledast)$ pertenece a W.

DEMOSTRACIÓN: Trivial, a partir de la propiedad de Neutralidad de $(V,\circledast)$: $\forall x \in V \Rightarrow \exists 0 \in V \mid x \circledast 0 = 0 \circledast x = x$

Siendo $0 \in V$ el ELEMENTO NEUTRO de $(V,\circledast)$.

TEOREMA-2:

Siendo (W,K) un subespacio vectorial de (V,K), se cumple: $0 \in (V \cap W)$, siendo 0 el elemento neutro de $(V,\circledast)$.

DEMOSTRACIÓN: Corolario del teorema anterior.

TEOREMA-3:

Siendo (V,K) un K-espacio vectorial de soporte V y siendo $W \subset V$, con $W \neq \emptyset$, será (W,K) un Subespacio Vectorial de (V,K) si se cumplen las 2 condiciones siguientes:

1).- $\forall v,w \in W \Rightarrow (v \circledast w) \in W$.

2).- $\left.\begin{array}{l}\forall r \in K \\ \forall v \in W\end{array}\right\} \Rightarrow r \otimes v = rv \in W$.

DEMOSTRACIÓN:

La condición 1 asegura que $(W,\circledast)$ es grupo abeliano. Por lo tanto, las propiedades 1 y 2 para espacio vectorial se cumplen en (W,K), tal como aparecen en la página 2 anterior.

La condición 2 asegura que $[(W,\circledast),(K,*,\times),\otimes]$ cumple las propiedades 3 a 7 de espacio vectorial, obviamente.

Subespacio Vectorial.

Apartado-1.

Siendo $(V,K) \equiv [(V,\circledast),(K,*,\times),\otimes]$ un K-espacio vectorial de soporte V, se dirá que $W \subset V$ es SUBESPACIO VECTORIAL de (V,K) si (W,K) cumple las 2 condiciones siguientes (definición formal, tomada del teorema anterior):

1).- $\forall v,w \in W \Rightarrow (v \circledast w) \in W$.

2).- $\left.\begin{array}{l}\forall r \in K \\ \forall v \in W\end{array}\right\} \Rightarrow r \otimes v = rv \in W$.

Esta definición conduce al Teorema siguiente:

TEOREMA-4:

Sea (V,K) un K-espacio vectorial de soporte V, y sea $T \subset V$, con $T=\{0\}$, siendo 0 el elemento neutro de $(V,\circledast)$. Se cumple que (T,K) es un subespacio vectorial de (V,K), denominado SUBESPACIO TRIVIAL de (V,K).

DEMOSTRACIÓN: Basta aplicar a (T,K) la definición formal dada anteriormente.

<u>Apartado-2.</u>

Siendo (W,K) un subespacio vectorial de (V,K), se dirá que (W,K) es SUBESPACIO IMPROPIO de (V,K) si $W=V$; y se dirá que (W,K) es SUBESPACIO PROPIO de (V,K) si $W \subset V$ y $W \neq V$, es decir, si $W \subsetneq V$.

TEOREMA-5:

Todo K-espacio vectorial (V,K) de soporte V, con $\text{card}(V)$ mayor que 1, contiene al menos 2 subespacios vectoriales diferentes: el trivial (T,K) y el impropio (V,K).

DEMOSTRACIÓN: Innecesaria.

TEOREMA-6:

Sea (V,K) un espacio vectorial y sean (H_1,K) y (H_2,K) sendos subespacios vectoriales de (V,K). Se cumple que $(H_1 \cap H_2, K)$ es un subespacio vectorial de (V,K).

DEMOSTRACIÓN: Pueden suceder 2 cosas: que $H_1 \cap H_2 = T = \{0\}$, en cuyo caso, aplicando el Teorema-4 anterior, se concluye. O bien, que $H_1 \cap H_2 \neq T$, para lo cual consideremos $v, w \in H_1 \cap H_2$; como (H_1,K) es subespacio vectorial, se tendrá que $(v \circledast w) \in H_1$; y como (H_2,K) es subespacio vectorial, se tendrá que $(v \circledast w) \in H_2$; en consecuencia, $(v \circledast w) \in H_1 \cap H_2$. Con ello, se cumple la primera condición de la definición formal de subespacio vectorial (página anterior), a saber: $\forall v,w \in (H_1 \cap H_2) \Rightarrow (v \circledast w) \in (H_1 \cap H_2)$.

Finalmente, $\forall r \in K$ y $\forall v \in H_1 \cap H_2$ se cumple que $rv \in H_1$ y $rv \in H_2$, al ser (H_1,K) y (H_2,K) sendos subespacios vectoriales de (V,K). En consecuencia, con ello también se cumple la segunda condición de la citada definición formal: $\left.\begin{array}{l}\forall r \in K \\ \forall v \in H_1 \cap H_2\end{array}\right\} \Rightarrow rv \in H_1 \cap H_2$.

TEOREMA-7:

Sea (V,K) un K-espacio vectorial de soporte V y sean (H_1,K) y (H_2,K) sendos subespacios vectoriales de (V,K). Se cumple que $(H_1 \cup H_2, K)$ no necesariamente es subespacio vectorial de (V,K).

DEMOSTRACIÓN: Basta con poner un CONTRAEJEMPLO, es decir, un ejemplo que contradiga una de las 2 condiciones para subespacio vectorial, tal como la primera condición. Esto es, hay que probar:

$$\forall v,w \in (H_1 \cup H_2) \not\Rightarrow (v \circledast w) \in (H_1 \cup H_2).$$

Para ello, consideremos el R-espacio vectorial de soporte R^2, (R^2,R). En R^2 existen 2 subconjuntos no vacíos que son:

$$H_1 = \{(x,0) \in R^2 \mid x \in R\}$$
$$H_2 = \{(0,x) \in R^2 \mid x \in R\}$$

Y sucede que tanto (H_1,R) como (H_2,R) son subespacios vectoriales de (R^2,R), pero $\forall x \neq 0$ y $x \in R$ se tiene:

$$[(x,0) \oplus (0,x)] \notin (H_1 \cup H_2)$$

Pues: $(x,0) \oplus (0,x) = (x,x) \notin (H_1 \cup H_2)$.

Suma de subespacios.

Apartado-1.

Sea $(V,K) \equiv [(V,\circledast),(K,*,\times),\otimes]$ un K-espacio vectorial de soporte V y sean (S,K) y (W,K) sendos subespacios vectoriales de (V,K). Se define la SUMA DE SUBESPACIOS VECTORIALES de (V,K) así:

$$(S,K)+(W,K) = S+W = \{s \circledast w = v \in V \mid s \in S,\ w \in W\}$$

TEOREMA-8:

Siendo (V,K) un K-espacio vectorial de soporte V y siendo (S,K) y (W,K) sendos subespacios vectoriales de (V,K), se cumple que $(S+W,K)$ es subespacio vectorial de (V,K).

DEMOSTRACIÓN: Como quiera que $\forall x \in (S+W)$ es $x \in V$, evidentemente, pues, es $(S+W) \subset V$. Por otra parte, consideremos 2 elementos cualesquiera $x_1, x_2 \in (S+W)$:

$$x_1 = s_1 \circledast w_1 \quad | s_1 \in S,\ w_1 \in W.$$
$$x_2 = s_2 \circledast w_2 \quad | s_2 \in S,\ w_2 \in W.$$

Se tendrá:

$$x_1 \circledast x_2 = (s_1 \circledast w_1) \circledast (s_2 \circledast w_2) = (s_1 \circledast s_2) \circledast (w_1 \circledast w_2) =$$
$$= s_3 \circledast w_3 \quad | s_3 \in S,\ w_3 \in W.$$

En consecuencia, se cumple en $(S+W, \circledast)$ la primera condición para subespacio vectorial (página 7):

$$\forall x_1, x_2 \in (S+W) \Rightarrow (x_1 \circledast x_2) \in (S+W)$$

Además, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \forall r \in K \\ \forall x_1 \in (S+W) \end{array}\right\} \Rightarrow r \otimes x_1 = r x_1 = r(s_1 \circledast w_1) =$$
$$= r s_1 \circledast r w_1 \quad \left| \begin{array}{l} r s_1 \in S \\ r w_1 \in W \end{array}\right.$$

De donde: $r x_1 \in (S+W)$

Por lo tanto, también se cumple la segunda condición para subespacio vectorial:

$$\left.\begin{array}{l} \forall r \in K \\ \forall x \in (S+W) \end{array}\right\} \Rightarrow r \otimes x = r x \in (S+W).$$

<u>Apartado-2</u>.

Sea (V,K) un K-espacio vectorial y sean (S,K) y (W,K) sendos subespacios vectoriales de (V,K); cuando sucede que $S \cap W = \{0\}$, siendo 0 el elemento neutro de $(V, \circledast)$, entonces la suma $S+W$ se llama SUMA DIRECTA (caso particular de la suma $S+W$) y se denota por $S \oplus W$.

TEOREMA-9:

En el subespacio vectorial $(S \oplus W, K)$ del K-espacio vectorial (V,K), todo elemento $x \in (S \oplus W)$ se escribe de manera única: $x = s \circledast w \ | s \in S,\ w \in W$.

Esto quiere decir que, si sucede:

$$x = s_1 \circledast w_1 \ | s_1 \in S,\ w_1 \in W$$
$$x = s_2 \circledast w_2 \ | s_2 \in S,\ w_2 \in W$$

entonces también sucede:

$$s_1 = s_2 \ ; \quad w_1 = w_2.$$

DEMOSTRACIÓN:

Como sabemos, $(V, \circledast)$ es un grupo abeliano y, por tanto, cumple la propiedad de inversión:

$$\forall v \in V \Rightarrow \exists (-v) \in V \ | \ v \circledast (-v) = (-v) \circledast v = 0$$

siendo 0 el elemento neutro de $(V, \circledast)$. Al elemento $(-v) \in V$ se le

llama ELEMENTO INVERSO (o ELEMENTO SIMÉTRICO) de $v \in V$. 11.

Supongamos que:

$$\exists x \in (S+W) \left| \begin{array}{l} x = s_1 \circledast w_1 \mid s_1 \in S,\ w_1 \in W. \\ x = s_2 \circledast w_2 \mid s_2 \in S,\ w_2 \in W. \end{array} \right.$$

Entonces tendremos:

$$s_1 \circledast w_1 = s_2 \circledast w_2$$

De donde:

$$(s_1 \circledast w_1) \circledast (-w_1) = (s_2 \circledast w_2) \circledast (-w_1) \Rightarrow$$

$$s_1 \circledast [w_1 \circledast (-w_1)] = s_2 \circledast w_2 \circledast (-w_1) \Rightarrow$$

$$s_1 \circledast 0 = s_2 \circledast w_2 \circledast (-w_1) \Rightarrow s_1 = s_2 \circledast w_2 \circledast (-w_1) \Rightarrow$$

$$(-s_1) \circledast s_1 = (-s_1) \circledast [s_2 \circledast w_2 \circledast (-w_1)] \Rightarrow$$

$$0 = (-s_1) \circledast s_2 \circledast w_2 \circledast (-w_1) \Rightarrow [s_2 \circledast (-s_1)] \circledast [w_2 \circledast (-w_1)] = 0 \Rightarrow$$

$$s_3 \circledast [w_2 \circledast (-w_1)] = 0 \mid s_3 = s_2 \circledast (-s_1) \Rightarrow$$

$$(-s_3) \circledast \{ s_3 \circledast [w_2 \circledast (-w_1)] \} = (-s_3) \circledast 0 \Rightarrow$$

$$[(-s_3) \circledast s_3] \circledast [w_2 \circledast (-w_1)] = -s_3 \Rightarrow 0 \circledast [w_2 \circledast (-w_1)] = -s_3 \Rightarrow$$

$$w_2 \circledast (-w_1) = -s_3 \Rightarrow w_2 \circledast (-w_1) = -[s_2 \circledast (-s_1)] \Rightarrow$$

$$w_2 \circledast (-w_1) = s_1 \circledast (-s_2)$$, pues:

$$s_3 \circledast (-s_3) = 0 \Rightarrow$$

$$[s_2 \circledast (-s_1)] \circledast (-s_3) = 0 \Rightarrow$$

$$(-s_2) \circledast s_2 \circledast (-s_1) \circledast (-s_3) = (-s_2) \circledast 0 \Rightarrow$$

$$(-s_1) \circledast (-s_3) = (-s_2) \Rightarrow s_1 \circledast [(-s_1) \circledast s_3] = -s_2 \Rightarrow$$

$$s_3 = s_1 \circledast (-s_2)$$

Así, pues, hemos llegado a la siguiente conclusión:

$$w_2 \circledast (-w_1) = s_1 \circledast (-s_2)$$

O sea:

$$s_1 \circledast (-s_2) = w_2 \circledast (-w_1)$$

lo cual significa que:

$$[s_1 \circledast (-s_2)] \in S$$
$$[w_2 \circledast (-w_1)] \in W$$

Y como:

$$s_1 \circledast (-s_2) = w_2 \circledast (-w_1) = v_0$$

Entonces:

$$v_0 \in (S \cap W)$$

Pero:

$$S \cap W = \{0\}$$

Luego:

$$s_1 \circledast (-s_2) = w_2 \circledast (-w_1) = 0$$

De donde:

$$s_1 \circledast (-s_2) = 0 \Rightarrow s_1 \circledast (-s_2) \circledast s_2 = 0 \circledast s_2 \Rightarrow s_1 = s_2$$

También:

$$w_2 \circledast (-w_1) = 0 \Rightarrow w_2 \circledast (-w_1) \circledast w_1 = 0 \circledast w_1 \Rightarrow w_2 = w_1$$

c.q.d.

Apartado-3.

Siendo (V,K) un K-espacio vectorial de soporte V y siendo (S,K) y (W,K) sendos subespacios vectoriales de (V,K) tales que $S \oplus W = V$, los espacios (S,K) y (W,K) se denominan SUBESPACIOS SUPLEMENTARIOS en (V,K).