

Física teórica  
MECÁNICA  
**Cinemática tensorial**

Tema 4  
**Independencia lineal**

## Índice.

(Introducción) (1)-

Apartado-1 (1)

$k$ -espacio  $V$  genérico, y propiedades. Grupo abeliano ( $V, \oplus$ ), y propiedades. Cuerpo conmutativo ( $k, +, \cdot$ ), y propiedades. Grupo abeliano ( $k, *$ ), y propiedades. Grupo abeliano ( $k^*, \circ$ ), y propiedades.

Apartado-2 (2).

Sistema  $n$ -ario de  $V$ . Combinación lineal. Coeficiente. Teoremas 0, 1, 2, 3 y 4.

(Generadores de subespacios.) (4).

Apartado-1 (4).

Subespacio vectorial. Subespacio trivial.

Apartado-2 (5).

Sistema generador. Conjunto engendrado o generado. Teorema-5.

(Independencia lineal.) (5).

Apartado-1 (5).

Sistema Libre. Sistema linealmente independiente. Teoremas 6, 7, 8, 9 y 10. Definición formal de Sistema Libre.

(Dependencia lineal.) (8).

Apartado-1 (8).

Sistema Ligado. Sistema linealmente dependiente. Teoremas 11 y 12. Definición formal de sistema Ligado. Teoremas 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 y 20.

## Cinemática tensorial.

1.

### Tema 4 (independencia lineal).

#### Introducción

##### Apartado - 1.

Un  $k$ -espacio  $V$  genérico (es decir, un  $k$ -espacio vectorial de soporte  $V$ ) es una estructura  $(V, k) \in [(V, \otimes), (k, *, \circ), \odot]$  que cumple las siguientes propiedades:

1).-  $(V, \otimes)$  es un grupo abeliano.

2).-  $(k, *, \circ)$  es un cuerpo conmutativo.

3).-  $\begin{cases} r \in k \\ w \in V \end{cases} \Rightarrow r \otimes w = rw = z \in V.$

4).-  $\begin{cases} r, t \in k \\ w \in V \end{cases} \Rightarrow r(tw) = (r \cdot t)w.$

5).- Siendo  $e \in k$  el elemento neutro de  $(k^*, \circ)$ , tal que  $k^* = k - \{e\}$ , con  $e \in k$  como elemento neutro de  $(k, *)$ , se tiene:  $w \in V \Rightarrow ew = w.$

6).-  $\begin{cases} r, t \in k \\ w \in V \end{cases} \Rightarrow (r * t)w = rw \otimes tw.$

7).-  $\begin{cases} r \in k \\ w, z \in V \end{cases} \Rightarrow r(w \otimes z) = rw \otimes rz.$

En  $(V, k)$ , la estructura  $(V, \otimes)$  es un grupo abeliano y cumple las siguientes propiedades:

1).- Clausura:  $w, z \in V \Rightarrow w \otimes z = y \in V.$

2).- Asociatividad:  $w, z, y \in V \Rightarrow (w \otimes z) \otimes y = w \otimes (z \otimes y).$

3).- Neutralidad:  $w \in V \Rightarrow \exists o \in V \mid w \otimes o = o \otimes w = w.$

Siendo  $o \in V$  el elemento neutro de  $(V, \otimes)$ .

4).- Simetría:  $w \in V \Rightarrow \exists \bar{w} \in V \mid w \otimes \bar{w} = \bar{w} \otimes w = o.$

Siendo  $\bar{w}$  el elemento simétrico de  $w \in V$  en  $(V, \otimes)$ , y viceversa.

5).- Comutatividad:  $w, z \in V \Rightarrow w \otimes z = z \otimes w.$

La estructura  $(k^*, \circ)$  de  $(V, k)$  es un cuerpo conmutativo y cumple:

1).-  $(k, *)$  es un grupo abeliano.

2).-  $(k^*, \circ)$  es un grupo abeliano.

3).- Distributividad de  $\circ$  respecto a  $*$ :

3.

$$\forall r, s, t \in K \Rightarrow r \circ (s * t) = (r \circ s) * (r \circ t).$$

En  $(K, *, \circ)$ , la estructura  $(K, *)$  es un grupo abeliano y cumple:

1).- Clausura:  $\forall r, t \in K \Rightarrow (r * t) \in K$ .

2).- Asociatividad:  $\forall r, s, t \in K \Rightarrow (r * s) * t = r * (s * t)$ .

3).- Neutralidad:  $\exists e \in K \mid r * e = e * r = r$ .

Siendo  $e \in K$  el elemento neutro de  $(K, *)$ .

4).- Simetría:  $\forall r \in K \Rightarrow \exists \bar{r} \in K \mid r * \bar{r} = \bar{r} * r = e$ .

Siendo  $\bar{r} \in K$  el elemento simétrico de  $r \in K$  en  $(K, *)$ .

5).- Comunitatividad:  $\forall r, t \in K \Rightarrow r * t = t * r$ .

Finalmente, la estructura  $(K^*, \circ)$  de  $(K, *, \circ)$  es grupo abeliano y cumple:

1).- Clausura:  $\forall r, t \in K^* \Rightarrow (r * t) \in K^*$ .

2).- Asociatividad:  $\forall r, s, t \in K^* \Rightarrow (r * s) * t = r * (s * t)$ .

3).- Neutralidad:  $\exists e \in K^* \mid r * e = e * r = r$ .

Siendo  $e \in K^*$  el elemento neutro de  $(K^*, \circ)$ .

4).- Simetría:  $\forall r \in K^* \Rightarrow \exists r^{-1} \in K^* \mid r * r^{-1} = r^{-1} * r = e$ .

Siendo  $r^{-1} \in K^*$  el elemento simétrico de  $r \in K^*$  en  $(K^*, \circ)$ .

5).- Comunitatividad:  $\forall r, t \in K^* \Rightarrow r * t = t * r$ .

### Apartado - 2.

En el  $K$ -espacio vectorial de soporte  $V$ , genérico, se llama SISTEMA a cualquier subconjunto finito  $S \subset V$ , tal que  $S \neq \emptyset$ .

Por tanto,  $\text{card}(S) = n \in \mathbb{N}$ . Dado que  $\text{card}(S) = n$ , a  $S$  se le llama SISTEMA  $n$ -ARIO de  $V$ , en concordancia con su cardinal.

Esto también se puede indicar al denotar a  $S$  por  $S_n$ , con el subíndice de su cardinal:  $S \in S_n$ .

Siendo  $S_n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  un sistema  $n$ -ario de  $V$ , se llamará COMBINACIÓN LINEAL de  $S_n$  (más exactamente dicho: Combinación Lineal de los elementos de  $S_n$ ) a la expresión:

$$(r_1 \odot v_1) \oplus (r_2 \odot v_2) \oplus \dots \oplus (r_n \odot v_n) =$$

$$r_1 v_1 \oplus r_2 v_2 \oplus \dots \oplus r_n v_n = \sum_{i=1}^n r_i v_i$$

Siendo  $r_i \in K$  un escalar cualquiera, al que se le llama COEFICIENTE de la combinación lineal.

### TEOREMA-0:

Siendo  $(V, K) = [(V, \oplus), (K, *, \circ), \odot]$  un espacio vectorial, con  $0 \in V$  como elemento neutro de  $(V, \oplus)$  y  $e \in K$  como elemento neutro de  $(K, *)$ , se cumple:  $\forall w \in V \Rightarrow e \odot w = ew = 0$ .

### DEMOSTRACIÓN:

$$\left. \begin{array}{l} \forall r \in K \\ \forall w \in V \end{array} \right\} \Rightarrow r \odot w = rw = (r + e)w = rw \oplus ew.$$

De donde:

$$\begin{aligned} z &= z \oplus ew \quad | \quad z = rw \in V \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{z} \oplus z &= \bar{z} \oplus (z \oplus ew) \Rightarrow 0 = (\bar{z} \oplus z) \oplus ew \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 &= 0 \oplus ew \Rightarrow 0 = ew \quad c.q.d. \end{aligned}$$

### TEOREMA-1:

El elemento neutro  $0 \in V$  de  $(V, \oplus)$  es combinación lineal de cualquier sistema  $S_n \subset V$ .

### DEMOSTRACIÓN:

Sea  $S_n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

Tomemos  $r_i = 0 \in K$ , con  $e \in K$  el elemento neutro de  $(K, *)$ , para todo  $r_i \in K$  que sea coeficiente de la combinación lineal:

$$\sum_{i=1}^n r_i v_i$$

Obviamente, esto lleva a:

$$\sum_{i=1}^n ev_i = 0$$

en virtud del teorema-0.

c.q.d.

### TEOREMA-2:

Cualquier elemento  $w \in V$  es combinación lineal de sí mismo, es decir, del sistema unitario  $S_1 = \{w\} \subset V$ .

### DEMOSTRACIÓN:

trivial.

### TEOREMA-3:

Siendo  $S_n$  un sistema  $n$ -ario de  $V$ , cualquier elemento  $v_k \in S_n$  es combinación lineal de  $S_n$ .

### DEMOSTRACIÓN:

Bastaría elegir todos los  $r_i = e$ , salvo  $r_k = \varepsilon$ , en  $\bigoplus_{i=1}^n r_i v_i$ , con  $r_i \in K$  y  $v_i \in S_n$ . Por teorema-0 anterior, entonces:

$$\bigoplus_{i=1}^n r_i v_i = \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n r_i v_i \oplus r_k v_k = ev_i \oplus \varepsilon v_k = 0 \oplus v_k = v_k \quad \text{c.q.d.}$$

#### TEOREMA-4:

Si  $w \in V$  es combinación lineal del sistema  $S_n = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  y cada  $v_i \in S_n$  es combinación lineal del sistema  $S_m = \{u_1, \dots, u_m\}$  de  $V$ , entonces  $w \in V$  es combinación lineal de  $S_m$ .

**DEMOSTRACIÓN:** Por hipótesis:  $w = \bigoplus_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in K; v_i \in S_n \subset V$ .

También:  $\forall v_i \in S_n \Rightarrow v_i = \bigoplus_{j=1}^m t_{ij} u_j \mid t_{ij} \in K; u_j \in S_m \subset V$ .

$$\begin{aligned} \text{Por consiguiente: } w &= \bigoplus_{i=1}^n r_i v_i = \bigoplus_{i=1}^n r_i \left( \bigoplus_{j=1}^m t_{ij} u_j \right) = \\ &= r_1 \bigoplus_{j=1}^m t_{1j} u_j \oplus r_2 \bigoplus_{j=1}^m t_{2j} u_j \oplus \dots \oplus r_n \bigoplus_{j=1}^m t_{nj} u_j = \\ &= \bigoplus_{i=1}^n (r_i \cdot t_{i1}) u_1 \oplus \bigoplus_{i=1}^n (r_i \cdot t_{i2}) u_2 \oplus \dots \oplus \bigoplus_{i=1}^n (r_i \cdot t_{im}) u_m = \\ &= q_1 u_1 \oplus q_2 u_2 \oplus \dots \oplus q_m u_m = \bigoplus_{j=1}^m q_j u_j \mid q_j = \bigoplus_{i=1}^n r_i \cdot t_{ij} \end{aligned}$$

Obviamente:

$$q_j \in K; u_j \in S_m \quad \text{c.q.d.}$$

#### Generadores de subespacios.

##### Apartado-1.

Como ya se dijo en el tema 2 (espacio vectorial), siendo  $(V, K) \equiv \{[V, \oplus], [K, *, \circ], \odot\}$  un espacio vectorial, se dirá que un  $W \subset V$  forma una estructura  $(W, K) \equiv \{[W, \oplus], [K, *, \circ], \odot\}$  de SUBESPACIO VECTORIAL de  $(V, K)$  si  $(W, K)$  es un espacio vectorial. Ello equivale a decir que  $(W, K)$  es un subespacio vectorial de  $(V, K)$  si se cumplen las 3 condiciones siguientes:

- 1).-  $W \subset V$ .
- 2).-  $\forall u, v \in W \Rightarrow (u \oplus v) \in W$ .
- 3).-  $\begin{cases} \forall r \in K \\ \forall u \in W \end{cases} \Rightarrow r \odot u = ru \in W$ .

Por otra parte, siendo  $T = \{0\} \subset V$  el conjunto unitario formado

por el elemento neutro de  $(V, \oplus)$  en  $(V, K)$ . Según el Tema 2 (espacio vectorial),  $(T, K)$  es un Subespacio Vectorial de  $(V, K)$  llamado SUBESPACIO TRIVIAL de  $(V, K)$ .

### Apartado - 2.

Todo sistema  $n$ -ario  $S_n \subset V$  se denomina también SISTEMA GENERADOR en  $(V, K)$ , porque, salvo en el caso de  $S_n = T$  (subespacio trivial, para el que  $[T] = T$ , de cardinal uno),  $S_n$  posee o da lugar a una infinita cantidad de combinaciones lineales, las cuales engendran o generan elementos de  $V$  que forman un conjunto  $[S_n] = A \subset V$  de cardinal infinito, llamado CONJUNTO ENGENDRADO o GENERADO por  $S_n$ .

### TEOREMA - 5:

Siendo  $S_n \subset V$  y  $[S_n] = A$ , es  $(A, K)$  un subespacio vectorial de  $(V, K)$ .

DEMOSTRACIÓN: Para  $S_n = T$  es  $A = T$ , y el teorema queda demostrado.

Pero para  $S_n \neq T$ , veamos:

1º) -  $A \subset V$ , pues toda combinación lineal de  $S_n$  es un elemento de  $V$ .

2º) -  $\forall u, v \in A \Rightarrow (u \oplus v) \in A$ . En efecto, sean:

$$u = \bigoplus_{i=1}^n r_i v_i \quad | \quad r_i \in K; v_i \in S_n.$$

$$v = \bigoplus_{i=1}^n t_i v_i \quad | \quad t_i \in K; v_i \in S_n.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} u \oplus v &= \bigoplus_{i=1}^n r_i v_i \oplus \bigoplus_{i=1}^n t_i v_i = \bigoplus_{i=1}^n (r_i + t_i) v_i = \\ &= \bigoplus_{i=1}^n s_i v_i \in A, \text{ pues: } r_i + t_i = s_i \in K. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3º) - \forall t \in K \quad \forall u \in A \Rightarrow t \odot u = tu = t \bigoplus_{i=1}^n r_i v_i = \bigoplus_{i=1}^n (t \cdot r_i) v_i = \bigoplus_{i=1}^n q_i v_i \in A \\ \text{Tal que: } q_i = (t \cdot r_i) \in K \quad \text{c.q.d.} \end{aligned}$$

### Independencia Lineal.

### Apartado - 1.

Siendo  $S_n \subset V$  un sistema de  $V$  tal que  $S_n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , se dirá que  $S_n$  es un SISTEMA LIBRE o LINEALMENTE INDEPENDIENTE cuando ningún elemento  $v_k \in S_n$ , con  $1 \leq k \leq n$ , puede ser engendrado o

generado por el sistema  $S_{n-1} = S_n - \{v_k\}$ .

6.

TEOREMA-6:

Siendo  $(K, *, \circ)$  un cuerpo conmutativo, con  $e \in K$  como elemento neutro de  $(K, *)$ , se cumple lo siguiente:

$$\forall r \in K \Rightarrow r \circ e = e \circ r = e.$$

DEMOSTRACIÓN:

Por el principio de permanencia en las leyes formales, debe ser:  $\forall t, r \in K \Rightarrow t \circ r = (t * e) \circ r = (t * r) * (e \circ r) = s * (e \circ r) \quad | \quad s = t \circ r$

De donde:

$$s = s * (e \circ r) \Rightarrow \bar{s} * s = \bar{s} * [s * (e \circ r)] \Rightarrow \\ \Rightarrow e = (\bar{s} * s) * (e \circ r) \Rightarrow e = e * (e \circ r) \Rightarrow e = e \circ r \quad c.q.d.$$

TEOREMA-7:

Siendo  $S_n \subset V$  un sistema de  $V$  tal que  $S_n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , si  $S_n$  es libre entonces se cumple:  $\forall v_i \in S_n \Rightarrow v_i \neq 0$

Siendo  $0 \in V$  el elemento neutro de  $(V, \oplus)$  en el espacio vectorial  $(V, K) \equiv [(V, \oplus), (K, *, \circ), \oplus]$ .

DEMOSTRACIÓN:

Si suponemos que en el sistema libre  $S_n$  hay al menos un  $v_k \in S_n$  tal que  $v_k = 0$ , entonces tenemos que admitir que  $S_{n-1} = S_n - \{v_k\}$  puede engendrar a  $v_k \in S_n$ , en concordancia con el teorema-1 anterior. Pero ello sería un absurdo, puesto que iría contra la definición de sistema libre.  $c.q.d.$

TEOREMA-8:

Siendo  $S_n \subset V$  un sistema de  $V$  tal que  $S_n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , si  $S_n$  es libre entonces se cumple:  $\sum_{i=1}^n r_i \cdot v_i = 0 \Leftrightarrow \forall r_i : r_i = e$ .

Siendo  $0 \in V$  el elemento neutro de  $(V, \oplus)$  y  $e \in K$  el elemento neutro de  $(K, *)$  en el espacio vectorial  $(V, K) \equiv [(V, \oplus), (K, *, \circ), \oplus]$ .

DEMOSTRACIÓN: Si  $S_n$  es libre, entonces, por definición, se cumple

lo siguiente:  $\forall v_k \in S_n \Rightarrow v_k \neq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n r_i \cdot v_i$

De donde:  $\bar{v}_k \oplus v_k \neq \bar{v}_k \oplus \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n r_i \cdot v_i \Rightarrow 0 \neq \bar{v}_k \oplus \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n r_i \cdot v_i$

Ahora bien,  $\bar{v}_k \neq 0$ , puesto que si fuera  $\bar{v}_k = 0$  entonces tendría que ser necesariamente  $v_k = 0$ , contra hipótesis. Esto es así porque:  $\bar{v}_k = 0 \Rightarrow \bar{v}_k \otimes v_k = 0 * v_k \Rightarrow 0 = v_k$ .

En consecuencia,  $\exists r_k \in K$  tal que  $r_k \neq e$  y  $\bar{v}_k = r_k v_k$ , pues por el Teorema-0 anterior es  $e v_k = 0$ . Ahora bien, ¿es posible hallar  $r_k$ ? Veamos; por hipótesis:

$$\bar{v}_k = r_k v_k$$

De donde:

$$\begin{aligned} \bar{v}_k = r_k v_k &\Rightarrow v_k \otimes \bar{v}_k = v_k \otimes r_k v_k \Rightarrow 0 = v_k \otimes r_k v_k \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 = e v_k \otimes r_k v_k \Rightarrow 0 = (e * r_k) v_k \Rightarrow e v_k = (e * r_k) v_k \Rightarrow \\ &\Rightarrow e = e * r_k \Rightarrow \bar{e} * e = \bar{e} * (e * r_k) \Rightarrow \bar{e} = (\bar{e} * e) * r_k \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{e} = e * r_k \Rightarrow r_k = \bar{e}. \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$\bar{v}_k = \bar{e} v_k \quad | \quad \bar{e} \neq e.$$

Por otra parte, como todo elemento  $v_k \in S_n$  tiene que cumplir la hipótesis siguiente:

$$v_k \neq \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n r_i v_i$$

Entonces, se deduce:

$$e v_k = e \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n r_i v_i = e w \quad | \quad w = \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n r_i v_i$$

y como:  $\forall v_k, w \in V \Rightarrow e v_k = e w = 0$

Entonces:

$$\begin{aligned} e v_k = e \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n r_i v_i &\Rightarrow e v_k \otimes e v_k = e \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n r_i v_i \otimes e v_k \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 = \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (e * r_i) v_i \otimes e v_k \end{aligned}$$

Por teorema-6:

$$e * r_i = e.$$

De donde:

$$0 = \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n e v_i \otimes e v_k \Rightarrow 0 = \bigoplus_{i=1}^n e v_i$$

O sea, lo que se ha concluido es lo siguiente:

$$\bigoplus_{i=1}^n r_i v_i = 0 \Leftrightarrow r_i = e$$

c.q.d.

**TEOREMA-9:**

Si  $S_n \subset V$  es un sistema de  $V$  tal que  $S_n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y se cumplen las 2 condiciones siguientes:

- 1).-  $\forall v_i \in S_n \Rightarrow v_i \neq 0.$
- 2).-  $\forall \sum_{i=1}^n r_i v_i = 0 \Leftrightarrow r_i = e$

Entonces  $S_n$  es un sistema libre del espacio vectorial  $(V, K) \equiv [(V, \oplus), (K, +, \circ), \odot]$ , con  $0 \in V$  como elemento neutro de  $(V, \oplus)$  y  $e \in K$  como elemento neutro de  $(K, +)$ .

**DEMOSTRACIÓN:**

Supongamos que:

$$\exists v_k \in S_n \mid v_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n r_i v_i$$

$$\text{Entonces: } v_k \oplus \bar{v}_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n r_i v_i \oplus \bar{v}_k \Rightarrow 0 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n r_i v_i \oplus \bar{v}_k$$

Ahora bien, por lo establecido en la demostración del teorema anterior:

$$\bar{v}_k = r_k v_k \mid r_k \neq e.$$

$$\text{De donde: } 0 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n r_i v_i \oplus r_k v_k \Rightarrow 0 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n r_i v_i \mid r_k \neq e$$

contra la hipótesis del teorema, c.q.d.

**TEOREMA-10 (Definición formal de Sistema Libre):**

Las condiciones necesarias y suficientes para que un sistema  $S_n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$  sea libre son las siguientes:

- 1).-  $\forall v_i \in S_n \Rightarrow v_i \neq 0.$
- 2).-  $\forall \sum_{i=1}^n r_i v_i = 0 \mid r_i \in K \Rightarrow r_i = e.$

Siendo  $0 \in V$  el elemento neutro de  $(V, \oplus)$  y  $e \in K$  el elemento neutro de  $(K, +)$  en el espacio vectorial  $(V, K) \equiv [(V, \oplus), (K, +, \circ), \odot]$ .

**DEMOSTRACIÓN:**

Corolario de los 3 teoremas anteriores.

### Dependencia Lineal.

#### Apartado-1.

Siendo  $S_n \subset V$  un sistema de  $V$  tal que  $S_n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , se dirá que  $S_n$  es un **SISTEMA LIGADO** o **LINEALMENTE DEPENDIENTE** en el espacio vectorial  $(V, K) \equiv [(V, \oplus), (K, +, \circ), \odot]$  cuando  $\exists v_k \in S_n$ , con  $1 \leq k \leq n$ , tal

que  $v_k \in S_n$  puede ser engendrado o generado por el sistema  $S_{n-1} = S_n - \{v_k\}$ .

9.

### TEOREMA-11:

(Definición formal de Sistema Ligado).

Siendo  $S_n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$  un sistema de  $V$ , será  $S_n$  un sistema ligado en el espacio vectorial  $(V, K) = [(V, \oplus), (K, *, \circ), \otimes]$ , con  $0 \in V$  como elemento neutro de  $(V, \oplus)$  y  $e \in K$  el elemento neutro de  $(K, *)$ , si y sólo si se cumple una de las 2 condiciones siguientes:

$$1). \forall v_i \in S_n \Rightarrow \exists v_k \in S_n \mid v_k = 0$$

$$2). \forall \sum_{i=1}^n r_i v_i = 0 \mid r_i \neq 0 \mid r_i \in K \Rightarrow \exists r_k \in K \mid r_k \neq e \mid r_k \in S_n.$$

### DEMOSTRACIÓN:

La condición 1 es evidente, a raíz del teorema-1 anterior. La condición 2 nos lleva a:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n r_i v_i \otimes r_k v_k = 0$$

De donde:

$$w \otimes r_k v_k = 0 \quad \left| \begin{array}{l} w = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n r_i v_i \\ \end{array} \right. \Rightarrow (\bar{w} \otimes \bar{w}) * r_k v_k = \bar{w} \Rightarrow \bar{r}_k v_k = \bar{w}$$

Por lo argumentado en la demostración del teorema-8 anterior, será entonces:

$$r_k v_k = \bar{w} \Rightarrow \bar{r}_k^{-1}(r_k v_k) = \bar{r}_k^{-1}(\bar{w}) \Rightarrow (\bar{r}_k^{-1} \circ \bar{r}_k) v_k = (\bar{r}_k^{-1} \circ \bar{e}) w \Rightarrow \bar{e} v_k = t w \mid t = \bar{r}_k^{-1} \circ \bar{e} \in K^* \Rightarrow v_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (t \circ r_i) v_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n s_i v_i \mid s_i \in K$$

Esto significa que  $v_k \in S_n$  es combinación lineal de  $S_{n-1} = S_n - \{v_k\}$ , c.q.d.

### TEOREMA-12:

Todo sistema  $S_n \subset V$  en  $(V, K)$  es libre o ligado. Si es libre, entonces no es ligado; y si es ligado, entonces no es libre.

### DEMOSTRACIÓN:

Es corolario de los teoremas anteriores.

### TEOREMA-13:

Siendo  $(V, K) = [(V, \oplus), (K, *, \circ), \otimes]$  un espacio vectorial y siendo  $T = \{0\}$  el subespacio trivial  $(T, K)$  de  $(V, K)$ , con  $0 \in V$  como elemento neutro de  $(V, \oplus)$ , es  $T \subset V$  un sistema Linealmente Dependiente.

### DEMOSTRACIÓN:

Corolario del teorema-11 anterior.

**TEOREMA-14:**

Siendo  $(V, K) = [(V, \oplus), (K, +, \cdot), \odot]$  un espacio vectorial y  $S_1 = \{u\} \subset V$  tal que  $u \neq 0$ , con  $0 \in V$  el elemento neutro de  $(V, \oplus)$ , es  $S_1$  un sistema linealmente independiente.

**DEMOSTRACIÓN:** Es corolario del Teorema-9 anterior.

**TEOREMA-15:**

Sea  $S_n \subset V$  un sistema libre de  $(V, K)$  y sea  $S_p \subset S_n$ , con  $p \leq n$ . Si  $S_n$  es libre, entonces  $S_p$  es también libre.

**DEMOSTRACIÓN:** Trivial.

**TEOREMA-16:**

Sea  $S_m \subset V$  un sistema de  $(V, K)$  y sea  $S_n$  otro sistema de  $(V, K)$ , tal que  $S_m \subset S_n$ . Si  $S_m$  es ligado, entonces  $S_n$  también es ligado.

**DEMOSTRACIÓN:** Trivial.

**TEOREMA-17:**

Sea  $S_n \subset V$  un sistema de  $(V, K) = [(V, \oplus), (K, +, \cdot), \odot]$  y sea  $0 \in S_n$ , con  $0 \in V$  el elemento neutro de  $(V, \oplus)$ . Entonces  $S_n$  es ligado.

**DEMOSTRACIÓN:** Corolario de los teoremas 10 y 12.

**TEOREMA-18:**

En el espacio vectorial  $(V, K)$ , si un elemento  $v \in V$  es combinación lineal de un sistema libre  $S_n \subset V$ , entonces dicha combinación lineal es única.

**DEMOSTRACIÓN:** Sean:

$$S_n = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

$$v = \sum_{i=1}^n r_i u_i$$

Supongamos que existe:  $v = \sum_{i=1}^n t_i u_i = w$

Entonces, sería:

$$v \oplus \bar{v} = \sum_{i=1}^n r_i u_i \oplus \bar{w} \Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^n (r_i + \bar{t}_i) u_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n e u_i = \sum_{i=1}^n (r_i + \bar{t}_i) u_i \Rightarrow e = r_i + \bar{t}_i \Rightarrow r_i = t_i$$

Puesto que:  $\forall r, v \in V \mid r \in K, v \in V \Rightarrow rv = \bar{r}v$

ya que:  $\bar{r}v \oplus rv = 0$

$$\bar{r}v \oplus rv = (\bar{r} * r)v = ev = 0$$

De donde:

$$\bar{r}v \oplus rv = \bar{r}v \oplus \bar{r}v \Rightarrow \bar{r}v = \bar{r}v \quad \text{c.q.d.}$$

### TEOREMA-19:

Sea  $S_n$  un sistema ligado y generador de  $V$  en  $(V, K)$ . Entonces  $\exists v_k \in S_n$  tal que  $S_{n-1} = S_n - \{v_k\}$  es también un sistema generador de  $(V, K)$ .

DEMOSTRACIÓN:

Es consecuencia inmediata de la definición de sistema ligado.

### TEOREMA-20:

Siendo  $S_n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  un sistema libre del espacio vectorial  $(V, K) \in [(V, \oplus), (K, +, \cdot), \odot]$ , sea  $v_{n+1} \in V$  y  $v_{n+1} \notin S_n$ , tal que  $S_{n+1} = S_n \cup \{v_{n+1}\} = \{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$ , siendo  $S_{n+1}$  un sistema ligado de  $(V, K)$ . Entonces, se cumple que  $v_{n+1} \in [S_n]$ .

DEMOSTRACIÓN:

Como  $S_{n+1}$  es ligado, por teorema-11 anterior cabe una, y sólo una, de las dos posibilidades siguientes:

$$1). - \forall v_i \in S_{n+1} \Rightarrow \exists r_k \in S_{n+1}, | v_k = 0 | 1 \leq k \leq n+1.$$

$$2). - \forall \sum_{i=1}^{n+1} r_i v_i = 0 | v_i \neq 0 \Rightarrow \exists r_k \in K | r_k \neq e | 1 \leq k \leq n+1.$$

Si consideramos que se cumple la primera posibilidad, entonces, como  $S_n$  es libre, resulta que, por teorema-7 anterior,  $\forall v_i \in S_n \Rightarrow v_i \neq 0$ . En consecuencia, tendría que ser  $v_k = v_{n+1} = 0$ , por lo que, aplicando el teorema-1 anterior, llegaríamos a:  $v_{n+1} = 0 \in [S_n]$ , c.q.d.

Pero si consideramos que se cumple la segunda posibilidad, en la que  $\forall v_i \in S_{n+1}$  es  $v_i \neq 0$ , entonces:  $\sum_{i=1}^{n+1} r_i v_i = 0 \Rightarrow \exists r_k \neq e$ .

De donde:

$$\sum_{i=1}^n r_i v_i \oplus r_{n+1} v_{n+1} = 0 \Rightarrow \exists r_k \neq e.$$

O sea:

$$w \oplus r_{n+1} v_{n+1} = 0 \Rightarrow \exists r_k \neq e \quad | \quad w = \sum_{i=1}^n r_i v_i$$

Rudiendo ahora suceder dos casos mutuamente excluyentes, a saber:  $w = 0$  ó  $w \neq 0$ . Si  $w = 0$ , entonces sería  $r_{n+1} v_{n+1} = 0$ , de donde se deduce que  $r_{n+1} = e$ , puesto que  $v_{n+1} \neq 0$ ; y esto conduce a la conclusión contradictoria de que  $S_{n+1}$  es libre. Por lo tanto, sólo es admisible la opción:

$w \neq 0$ ; y ante esto, según la demostración del teorema-15 anterior, sería:

$$w \oplus r_{n+1} v_{n+1} = 0 \Rightarrow w = \overline{r_{n+1}} v_{n+1} \Rightarrow v_{n+1} = (\overline{r_{n+1}})^{-1} w \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_{n+1} = t w \mid t = (\overline{r_{n+1}})^{-1} \Rightarrow v_{n+1} \in [s_n], c.q.d.$$

12.