

Física teórica  
MECÁNICA  
*Cinemática tensorial*

Tema 3  
K-espacio V, genérico

Introducción. (1)-

Apartado-1. (1).

Grupo. Soporte. Operandas. Grupo abeliano.

Apartado-2 (1).

Elemento neutro. Teorema-1.

Apartado-3 (1).

Elemento simétrico. Teorema-2.

Apartado-4 (2).

Conjunto  $K$ . Grupo abeliano  $(K, +)$ . Cero. Opuesto.

Apartado-5 (2).

Conjunto  $K^*$ . Grupo abeliano  $(K^*, \cdot)$ . Uno. Unidad. Inverso.

Apartado-6 (3).

Cuerpo. Cuerpo conmutativo. Cuerpo  $(K, +, \cdot)$ .

Apartado-7 (3).

$K$ -espacio  $V$ .  $K$ -espacio vectorial de soporte  $V$ . Dominio de operandos. Dominio de operadores. Operando. Operador.

$R$ -espacio  $V_i^n$  (4).

Apartado-1. (4).

$R$ -espacio vectorial de soporte  $V_i^n$ . Dominio vectorial. Dominio de escalares. Vector. Escalar.

Apartado-2 (5).

El grupo abeliano  $(V_i^n, \oplus)$ .

Apartado-3 (5).

$R$ -espacio vectorial de soporte  $V_i^n$ .  $[(V_i^n, \oplus), (R, +, \cdot), \odot]$ .

$R$ -espacio  $R^n$  (5).

$R$ -espacio vectorial de soporte  $R^n$ .  $[(R^n, \oplus), (R, +, \cdot), \odot]$ . Adición o suma de  $N$ -tuplas ordenadas. Dominio de  $N$ -tuplas.  $N$ -tupla nula.  $N$ -tupla opuesta.

Apartado-2. (6).

Producto de un número real por una  $N$ -tupla. Estructura de  $R$ -espacio vectorial de soporte  $R^n$ .

$R$ -espacio  $M_{m,n}$  (7).

Apartado-1 (7).

Matriz. Matriz numérica. Cuadrados mágicos.

Apartado-2 (7).

Matriz numérica. Regla de Cramer. Determinante.

II.

Teoría de Matrices. Notación Matricial.

Apartado-3 (8).

Matriz. Matriz rectangular. Fila. Columna. Dimensión matricial. Conjunto  $M_{mn}$ .

Apartado-4 (8).

Matrices equidimensionales. Elementos homólogos. Adición o Suma matricial. Matriz nula. Matriz opuesta. Grupo abeliano  $(M_{mn}, \oplus)$ .

Apartado-5 (10).

Producto escalomatricial. Dominio matricial. Dominio real. R-espacio vectorial de soporte  $M_{mn}$ .

R-espacio P. (10).

Apartado-1 (10).

Función polinómica ordinaria. Suma o adición de funciones polinómicas ordinarias. Función polinómica nula. Función polinómica opuesta. Grupo abeliano  $(P, \oplus)$ .

Apartado-2 (11).

Producto escalo-polinómico. Dominio polinomial. Dominio real. R-espacio vectorial de soporte P.

Tema 3 ( $k$ -espacio  $V$ , genérico).Introducción.Apartado-1.

Se denomina GRUPO a toda estructura algebraica  $(A, *)$ , compuesta por un conjunto  $A$ , llamado SOPORTE (conjunto soporte) de la estructura, y por una ley de composición  $*$ , que es interna en este caso y que opera sobre los elementos del Soporte. Los elementos del soporte  $A$  se denominan OPERANDOS de la estructura. Un grupo  $(A, *)$  cumple las siguientes propiedades:

- 1).- Clausura:  $\forall a, b \in A \Rightarrow (a * b) \in A$ .
- 2).- Asociatividad:  $\forall a, b, c \in A \Rightarrow (a * b) * c = a * (b * c)$ .
- 3).- Neutralidad:  $\forall a \in A \Rightarrow \exists e \in A \mid a * e = e * a = a$ .
- 4).- Inversión (o simetría):

$$\forall a \in A \Rightarrow \exists \bar{a} \in A \mid a * \bar{a} = \bar{a} * a = e.$$

Un grupo  $(A, *)$  se llamará GRUPO ABELIANO (o Grupo Comutativo) cuando, además, cumple la siguiente propiedad:

- 5).- Comutatividad:  $\forall a, b \in A \Rightarrow a * b = b * a$ .

Apartado-2.

En un grupo  $(A, *)$ , con respecto a la propiedad de Neutralidad, al elemento  $e \in A$  tal que  $\forall a \in A$  se cumple  $a * e = e * a = a$ , se le llama ELEMENTO NEUTRO de  $(A, *)$ .

## TEOREMA-1:

En un grupo  $(A, *)$ , el elemento neutro  $e \in A$  es único.

## DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que  $\exists e_1, e_2 \in A$  tal que  $\forall a \in A$  se verifica:  $e_1 * a = a * e_1 = a$

$$e_2 * a = a * e_2 = a$$

Pues bien, como  $e_1, e_2 \in A$ , también se verifica:

$$e_1 * e_2 = e_2$$

$$e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_1$$

Por ende:  $e_1 = e_2$ , c.q.d.

Apartado-3.

En un grupo  $(A, *)$ , respecto a la propiedad de simetría, al elemento  $\bar{a} \in A$  tal que  $\forall a \in A$  se verifica que  $a * \bar{a} = \bar{a} * a = e$ , se le llama ELEMENTO SIMÉTRICO de  $a \in A$ . Por su parte,  $a \in A$  es, también, el elemento simétrico de  $\bar{a} \in A$ .

### TEOREMA-2:

En un grupo  $(A, *)$ , el elemento simétrico  $\bar{a} \in A$  de cualquier elemento  $a \in A$  es único.

### DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que para un cierto  $a \in A$  existen al menos dos elementos  $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in A$  tales que:

$$a * \bar{a}_1 = \bar{a}_1 * a = e$$

$$a * \bar{a}_2 = \bar{a}_2 * a = e$$

Entonces:

$$a * \bar{a}_1 = a * \bar{a}_2 \Rightarrow \bar{a}_1 * (a * \bar{a}_1) = \bar{a}_2 * (a * \bar{a}_2)$$

De donde:

$$(\bar{a}_1 * a) * \bar{a}_1 = (\bar{a}_1 * a) * \bar{a}_2 \Rightarrow e * \bar{a}_1 = e * \bar{a}_2 \Rightarrow \bar{a}_1 = \bar{a}_2 \text{ c.q.d.}$$

### Apartado-4.

Siendo  $K$  equivalente a cualquiera de estos 3 conjuntos:  $Q$  (números racionales),  $R$  (números reales) o  $C$  (números complejos), la estructura  $(K, +)$ , siendo  $+$  la operación de suma o adición usual para  $Q, R$  ó  $C$ , cumple las siguientes propiedades típicas de un Grupo Abeliano:

1).- Clausura:  $\forall a, b \in K \Rightarrow (a+b) \in K$ .

2).- Asociatividad:  $\forall a, b, c \in K \Rightarrow (a+b)+c = a+(b+c)$ .

3).- Neutralidad:  $\forall a \in K \Rightarrow \exists 0 \in K \mid a+0=0+a=a$ . (donde  $0 \in K$  es el elemento neutro, que en  $K$  recibe el nombre de CERO).

4).- Simetría:  $\forall a \in K \Rightarrow \exists (-a) \in K \mid a+(-a)=(-a)+a=0$ . (donde  $(-a) \in K$  recibe el nombre de OPUESTO de  $a \in K$ , y corresponde al elemento simétrico).

5).- Comunitatividad:  $\forall a, b \in K \Rightarrow a+b=b+a$ .

### Apartado-5.

Siendo  $K^* = K - \{0\}$ , la estructura  $(K^*, \cdot)$ , siendo  $\cdot$  la operación producto o multiplicación usual para  $Q, R$  ó  $C$ , es también grupo abeliano ya que cumple:

1).- Clausura:  $\forall a, b \in K^* \Rightarrow (a \cdot b) \in K^*$ .

- 2).- Asociatividad:  $\forall a, b, c \in K^* \Rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ . 3.
- 3).- Neutralidad:  $\forall a \in K^* \Rightarrow \exists 1 \in K^* \mid a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ . (donde 1 se llama UNO o UNIDAD, correspondiente al elemento neutro).
- 4).- Simetría:  $\forall a \in K^* \mid \exists a' \in K^* \Rightarrow a \cdot a' = a' \cdot a = 1$ . (donde  $a'$  se llama INVERSO de  $a \in K^*$ , correspondiente al elemento simétrico).
- 5).- Comutatividad:  $\forall a, b \in K^* \Rightarrow a \cdot b = b \cdot a$ .

### Apartado - 6.

Se denomina CUERPO a toda estructura algebraica  $(A, *, \circ)$  compuesta de un conjunto Soporte A y de 2 leyes de composición internas, \* y  $\circ$ , que operan sobre los elementos del soporte A, también llamados OPERANDOS. Un cuerpo  $(A, *, \circ)$  debe cumplir las siguientes propiedades:

- 1).-  $(A, *)$  es un grupo abeliano.
- 2).-  $(A^*, \circ)$  es un grupo, con  $A^* = A - \{e\}$ , siendo eEA el elemento neutro de  $(A, *)$ .

- 3).- Distributividad de  $\circ$  respecto a \*:

$$\forall a, b, c \in A \Rightarrow a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c).$$

Un cuerpo  $(A, *, \circ)$  se llamará CUERPO COMUTATIVO cuando  $(A, \circ)$  es un grupo abeliano. Así, siendo K uno de los conjuntos Q, R ó C, se cumple que  $(K, +, \circ)$  es un cuerpo comunitario, puesto que:

- 1).-  $(K, +)$  es un grupo abeliano.

- 2).-  $(K^*, \circ)$  es un grupo abeliano.

- 3).- Distributividad del producto ( $\circ$ ) respecto a la suma (+):

$$\forall a, b, c \in K \Rightarrow a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) = ab + ac.$$

### Apartado - 7.

Un K-espacio V, es decir, un K-espacio vectorial de soporte V, es una estructura  $(V, K) \equiv [(V, \otimes), (K, *, \circ), \otimes]$ , donde V se llama DOMINIO DE OPERANDOS (no siempre formado por vectores) y K se llama DOMINIO DE OPERADORES (habitualmente formado por elementos numéricos racionales, reales o complejos, aunque no siempre), siendo un OPERANDO un elemento de V y un OPERADOR un elemento de K;  $\otimes$  es una ley de composición interna

a  $V$ ,  $y * y \circ$  son sendas leyes de composición internas a  $K$ , 4. en tanto que  $\odot$  (producto escalarvectorial) es una ley de composición externa de  $K$  sobre  $V$  que convierte parejas ordenadas  $(a, b) \in K \times V$  en elementos de  $V$ ; y sucede que  $(V, K)$  cumple las siguientes propiedades:

- 1).-  $(V, \oplus)$  es un grupo abeliano.
- 2).-  $(K, *, \circ)$  es un cuerpo conmutativo.
- 3).-  $\forall r \in K \quad \forall w \in V \quad \{ \Rightarrow r \odot w = rw = z \in V.$
- 4).-  $\forall r, t \in K \quad \forall w \in V \quad \{ \Rightarrow r(tw) = (r \cdot t)w.$
- 5).-  $\exists e \in K$ , siendo  $e \in K$  el elemento neutro de  $(K, +, \circ)$ , siendo  $K^* = K - \{e\}$ , siendo  $e \in K$  el elemento neutro de  $(K, *)$ , tal que:  $\forall w \in V \Rightarrow ew = w.$
- 6).-  $\forall r, t \in K \quad \forall w \in V \quad \{ \Rightarrow (r * t)w = rw \odot tw.$
- 7).-  $\forall r \in K \quad \forall w, z \in V \quad \{ \Rightarrow r(w \oplus z) = rw \oplus rz.$

### R-espacio $V_L^n$ .

#### Apartado - 1.

Un R-espacio  $V_L^n$  (es decir, un R-espacio vectorial de soporte  $V_L^n$ ) es un K-espacio vectorial de soporte  $V$  en donde K ha sido sustituido por R (conjunto de los números reales) y V ha sido sustituido por  $V_L^n$  (conjunto de los vectores libres n-dimensionales, o vectores libres representables en  $E_n^{0x_1 \dots x_n}$ ); también se ha sustituido  $\odot$  por  $\oplus$ ,  $*$  por  $+$ ,  $\circ$  por  $\cdot$ , y  $\odot$  por  $\circ$ . Por tanto, un R-espacio vectorial de soporte  $V_L^n$  es una estructura  $(V_L^n, R) \equiv [(V_L^n, \oplus), (R, +, \cdot), \circ]$ , donde  $(V_L^n, \oplus)$  es un grupo abeliano de soporte  $V_L^n$  y la operación interna  $\oplus$  (suma o adición de vectores libres), donde  $(R, +, \cdot)$  es el cuerpo conmutativo de los números reales con respecto a la adición y la multiplicación, y donde  $\circ$  (producto escalarvectorial) define el producto de un número real por un vector libre.

En  $(V_L^n, R)$ , al dominio de operandos  $V_L^n$  se le da el nombre más preciso de DOMINIO VECTORIAL (dominio de vectores) y al dominio de operadores R se le da el nombre más preciso de DOMINIO DE ES-

CALARES, siendo un VECTOR (es decir, un vector libre) un elemento cualquiera de  $V_L^n$  y siendo un ESCALAR un elemento cualquiera de  $\mathbb{R}$  (es decir, un número real). 5.

### Apartado - 2.

El grupo abeliano  $(V_L^n, \oplus)$ , con  $V_L^n$  el conjunto de los vectores libres  $n$ -dimensionales y  $\oplus$  la suma de vectores libres, cumple las siguientes propiedades:

1).- Clausura:  $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V_L^n \Rightarrow (\vec{v} \oplus \vec{w}) \in V_L^n$ .

2).- Asociatividad:  $\forall v, w, z \in V_L^n \Rightarrow (\vec{v} \oplus \vec{w}) \oplus \vec{z} = \vec{v} \oplus (\vec{w} \oplus \vec{z})$ .

3).- Neutralidad:  $\forall \vec{v} \in V_L^n \Rightarrow \exists \vec{0} \in V_L^n \mid \vec{v} \oplus \vec{0} = \vec{0} \oplus \vec{v} = \vec{v}$ .

Siendo  $\vec{0} \in V_L^n$  (vector nulo) el elemento neutro de  $(V_L^n, \oplus)$ .

4).- Simetría:  $\forall \vec{v} \in V_L^n \Rightarrow \exists (-\vec{v}) \in V_L^n \mid \vec{v} \oplus (-\vec{v}) = (-\vec{v}) \oplus \vec{v} = \vec{0}$ .

Siendo  $(-\vec{v}) \in V_L^n$  (vector opuesto al  $\vec{v} \in V_L^n$ ) el elemento simétrico de  $\vec{v} \in V_L^n$  en  $(V_L^n, \oplus)$ .

5).- Comunitatividad:  $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V_L^n \Rightarrow \vec{v} \oplus \vec{w} = \vec{w} \oplus \vec{v}$ .

### Apartado - 3.

El  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de soporte  $V_L^n$ , tal que  $(V_L^n, \mathbb{R}) = [(V_L^n, \oplus), (\mathbb{R}, +, \cdot), \odot]$ , cumple las siguientes propiedades:

1).-  $(V_L^n, \oplus)$  es un grupo abeliano.

2).-  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  es un cuerpo commutativo.

3).-  $\forall r \in \mathbb{R} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \forall \vec{v} \in V_L^n \end{array} \right\} \Rightarrow r \odot \vec{v} = r \vec{v} = \vec{w} \in V_L^n$ .

4).-  $\forall r, t \in \mathbb{R} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \forall \vec{v} \in V_L^n \end{array} \right\} \Rightarrow r(t\vec{v}) = (r \cdot t)\vec{v}$ .

5).-  $\exists 1 \in \mathbb{R} \mid \forall \vec{v} \in V_L^n \Rightarrow 1\vec{v} = \vec{v}$ .

6).-  $\forall r, t \in \mathbb{R} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \forall \vec{v} \in V_L^n \end{array} \right\} \Rightarrow (r+t)\vec{v} = r\vec{v} \oplus t\vec{v}$ .

7).-  $\forall r \in \mathbb{R} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \forall \vec{v}, \vec{w} \in V_L^n \end{array} \right\} \Rightarrow r(\vec{v} \oplus \vec{w}) = r\vec{v} \oplus r\vec{w}$ .

### ( $\mathbb{R}$ -espacio $\mathbb{R}^n$ )

### Apartado - 1.

Un  $\mathbb{R}$ -espacio  $\mathbb{R}^n$  (es decir, un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de soporte  $\mathbb{R}^n$ ) es un  $k$ -espacio vectorial de soporte  $V$  en donde  $k$  ha sido susti-

tuido por  $R$  y  $V$  ha sido sustituido por  $R^n$  (conjunto de  $\mathbb{R}$ , todas las  $n$ -tuplas ordenadas de componentes reales); también, se ha sustituido necesariamente  $\otimes$  por  $\oplus$ ,  $*$  por  $+$ ,  $\cdot$  por  $\cdot$ , y  $\odot$  por  $\odot$ . Por tanto, un  $R$ -espacio vectorial de soporte  $R^n$  es una estructura  $(R^n, R) \equiv [(R^n, \oplus), (R, +, \cdot), \odot]$ , donde  $(R^n, \oplus)$  es un grupo abeliano de soporte  $R^n$  y operación interna  $\oplus$  (suma o adición de  $n$ -tuplas), y donde  $\odot$  (producto escalarvectorial) define el producto o multiplicación de un número real por una  $n$ -tupla.

En  $(R^n, R)$ , al dominio de operandos  $R^n$  se le llama más propiamente DOMINIO DE  $N$ -TUPLAS; y la adición de  $n$ -tuplas se define así:

$$\forall x, y \in R^n \Rightarrow x \oplus y = z \in R^n$$

Tal que:

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \\ y &= (y_1, y_2, \dots, y_n) \mid y_i \in \mathbb{R} \\ z &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el grupo abeliano  $(R^n, \oplus)$  cumple las siguientes propiedades:

1).- Clausura:  $\forall x, y \in R^n \Rightarrow (x \oplus y) \in R^n$ .

2).- Asociatividad:  $\forall x, y, z \in R^n \Rightarrow (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ .

3).- Neutralidad:  $\forall x \in R^n \Rightarrow \exists 0 \in R^n \mid x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$ .

Siendo  $0 = (0, 0, \dots, 0) \in R^n$  el elemento neutro de  $(R^n, \oplus)$ , más propiamente llamado  $N$ -TUPLA NEUTRA.

4).- Simetría:  $\forall x \in R^n \Rightarrow \exists \bar{x} \in R^n \mid x \oplus \bar{x} = \bar{x} \oplus x = 0$ .

Siendo  $\bar{x} \in R^n$  el elemento simétrico de  $x \in R^n$  en  $(R^n, \oplus)$ , al que más exactamente habría que llamar  $N$ -TUPLA OPUESTA a la  $x \in R^n$ . Si  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , entonces, obviamente:  $\bar{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ .

5).- Comunitatividad:  $\forall x, y \in R^n \Rightarrow x \oplus y = y \oplus x$ .

### Apartado-2.

El producto de un número real  $r \in \mathbb{R}$  por una  $n$ -tupla  $x \in R^n$ , se define así:

$$\left. \begin{array}{l} \forall r \in \mathbb{R} \\ \forall x \in R^n \end{array} \right\} \Rightarrow r \odot x = rx = r(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ = (r \cdot x_1, r \cdot x_2, \dots, r \cdot x_n) = (x_1 \cdot r, x_2 \cdot r, \dots, x_n \cdot r) = \\ = (x_1, x_2, \dots, x_n)r = xr.$$

Por lo tanto, existe el  $R$ -espacio vectorial de soporte  $R^n$ , tal que  $(R^n, R) \in [(R^n, \oplus), (R, +, \cdot), \odot]$ , que cumple:

1).-  $(R^n, \oplus)$  es un grupo abeliano.

2).-  $(R, +, \cdot)$  es un cuerpo conmutativo.

3).-  $\forall r \in R \quad \forall x \in R^n \quad \{ \Rightarrow rx = x \in R^n \}$

4).-  $\forall r, t \in R \quad \forall x \in R^n \quad \{ \Rightarrow r(tx) = (r \cdot t)x \}$

5).-  $\exists 1 \in R \mid \forall x \in R^n \Rightarrow 1x = x$ .

6).-  $\forall r, t \in R \quad \forall x \in R^n \quad \{ \Rightarrow (r+t)x = rx \oplus tx \}$

7).-  $\forall r \in R \quad \forall x, y \in R^n \quad \{ \Rightarrow r(x \oplus y) = rx \oplus ry \}$

### R-espacio $\mathcal{M}_{mn}$ .

#### Apartado-1.

El origen de lo que actualmente se llama MATRIZ (o MATRIZ NUMÉRICA), esto es, un rectángulo de elementos numéricos o escalares (racionales, reales o complejos), es muy antiguo. Tuvo su antecedente en los llamados CUADRADOS MÁGICOS, usados ya en el año 650 antes de la EC (era común o cristiana) en China.

Un CUADRADO MÁGICO era una tabla compuesta por una colección de números enteros que formaban un cuadro o matriz, de tal manera que la suma de dichos números tomados por columnas, filas y diagonales coincidía. Llegaron a ser muy usados en las ciencias ocultas (de ahí el nombre de Cuadrado MÁGICO), pero actualmente carecen de valor científico y técnico, por lo que han quedado recluidos al simple entretenimiento o recreación (matemática recreativa).

#### Apartado-2.

Los intentos de resolución de ecuaciones lineales, agrupadas en forma de sistemas de ecuaciones, facilitaron mucho la consolidación del concepto de MATRIZ NUMÉRICA. A mediados del siglo XVIII, Cramer presentó su famosa Regla (La

Regla de Cramer), que facilitó el uso de matrices de coeficientes numéricos y la aplicación del concepto de DETERMINANTE de una matriz cuadrada. Sylvester, en 1850, usó por primera vez el vocablo MATRIZ y, en breve, Hamilton hizo aportes suculentos a lo que empezó a llamarse TEORÍA DE MATRICES. Cayley, en 1858, introdujo la denominada NOTACIÓN MATRICIAL como forma abreviada de escribir un sistema de ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas. Finalmente, en 1925, Heisenberg redescubrió el Cálculo Matricial para poder formular matemáticamente lo que posteriormente se llamaría Mecánica Cuántica; y tras la II Guerra Mundial la Teoría Matricial ha cobrado un auge impresionante como herramienta teórica universal.

### Apartado-3.

Una MATRIZ es un rectángulo bidimensional de números o elementos escalares (elementos de  $K$ ), que suele representarse por una letra mayúscula tal como  $A, B, C$ , etc. y suele expresarse así:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

diciéndose, en este caso genérico, que la matriz  $A$  es una MATRIZ RECTANGULAR compuesta de  $m$  filas (cada FILA es una línea horizontal de elementos numéricos) y  $n$  columnas (cada COLUMNAS es una línea vertical de elementos numéricos), de dimensión  $mn$  ( $m$  por  $n$ ), lo cual se expresa:

$$\dim(A) = mn$$

Los elementos de  $A$  se denotan genéricamente por  $a_{ij}$  (con  $i=1, 2, \dots, m$ ; y con  $j=1, 2, \dots, n$ ). Abreviadamente, la matriz  $A$  se puede escribir así:

$$A \equiv A_{mn} = (a_{ij}) \equiv (a_{ij})_{mn}$$

donde:  $1 \leq i \leq m$ ;  $1 \leq j \leq n$ .

Y siendo  $M_{mn}$  el conjunto de todas las matrices de dimensión  $mn$ , sería, pues:  $A \in M_{mn}$

### Apartado-4.

Se llaman MATRICES EQUIDIMENSIONALES a las que poseen iguales dimensiones. Pues bien, dadas 2 matrices equidimensionales,  $A_{mn}$  y  $B_{mn}$ , se dirá que un determinado elemento  $a_{kp} \in A_{mn}$  es ELEMENTO HOMÓLOGO de otro elemento  $b_{ij} \in B_{mn}$  cuando sucede que  $i=k$  y  $j=p$ , es decir, cuando ambos elementos ocupan exactamente el mismo lugar (la misma fila y la misma columna) en sus respectivas matrices. Por tanto, son homólogos los elementos  $a_{11}$  y  $b_{11}$ ,  $a_{12}$  y  $b_{12}$ , ...,  $a_{mn}$  y  $b_{mn}$ .

La ADICIÓN o SUMA MATRICIAL (o de matrices) se define como la operación que da como resultado una matriz cuyos elementos son el resultado de sumar los elementos homólogos de las matrices que se operan. Por consiguiente, ello obliga a establecer la condición necesaria de que sólo se pueden sumar matrices equidimensionales. En consecuencia, definimos:  $\forall A, B \in M_{mn} \Rightarrow A \oplus B = C \in M_{mn}$

Tal que:  $A \oplus B = (a_{ij}) \oplus (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = (c_{ij}) = C$ .

Donde:  $a_{ij} \in A$ ;  $b_{ij} \in B$ ;  $c_{ij} \in C$ ;  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

Y donde:  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$  son elementos homólogos.

En definitiva:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

A partir de estas definiciones, es fácil deducir que la estructura  $(M_{mn}, \oplus)$  es un grupo abeliano, pues:

1).- Clausura:  $\forall A, B \in M_{mn} \Rightarrow A \oplus B = C \in M_{mn}$ .

2).- Asociatividad:  $\forall A, B, C \in M_{mn} \Rightarrow (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ .

3).- Neutralidad:  $\forall A \in M_{mn} \Rightarrow \exists 0 \in 0_{mn} \in M_{mn} \mid A \oplus 0 = 0 \oplus A = A$ .

Siendo  $0 \in M_{mn}$ , tal que  $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$  la llamada MATRIZ NULA (el elemento neutro) de  $(M_{mn}, \oplus)$ .

4).- Simetría:  $\forall A \in M_{mn} \Rightarrow \exists \bar{A} \in M_{mn} \mid A \oplus \bar{A} = \bar{A} \oplus A = 0_{mn}$ .

Siendo  $\bar{A} = (-a_{ij}) \in M_{mn}$  la llamada MATRIZ OPUESTA (o elemento simétrico) de la  $A \in M_{mn}$ . 10.

5).- Commutatividad:  $\forall A, B \in M_{mn} \Rightarrow A \oplus B = B \oplus A$ .

### Apartado - 5.

Se define el PRODUCTO ESCALOMATRICIAL (variante del producto escalovectorial) de un escalar real  $r \in R$  por una matriz  $A \in M_{mn}$  así:

$$r \odot A = r A = r (a_{ij}) = r \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} r \cdot a_{11} & \dots & r \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r \cdot a_{m1} & \dots & r \cdot a_{mn} \end{pmatrix} = (r \cdot a_{ij}) = (a_{ij} \cdot r) = Ar.$$

Por lo tanto, es fácil comprobar que  $(M_{mn}, R)$  tiene estructura  $[(M_{mn}, \oplus), (R, +, \cdot), \odot]$  de espacio vectorial, con  $M_{mn}$  como DOMINIO MATRICIAL (dominio de matrices u operandos) y  $R$  como DOMINIO REAL (dominio escalar o de operadores). En consecuencia, un  $R$ -espacio  $M_{mn}$  (es decir, un  $R$ -espacio vectorial de soporte  $M_{mn}$ ) es un  $K$ -espacio vectorial de soporte  $V$  en donde  $K$  ha sido substituido por  $R$  y  $V$  por  $M_{mn}$ ;  $\oplus$  ha sido sustituido por  $\oplus$  (suma matricial),  $+$  por  $+$ ,  $\cdot$  por  $\cdot$ , y  $\odot$  por  $\odot$  (producto escalomatricial). El  $R$ -espacio  $M_{mn}$  cumple, pues, las siguientes propiedades:

1).-  $(M_{mn}, \oplus)$  es un grupo abeliano.

2).-  $(R, +, \cdot)$  es un cuerpo conmutativo.

3).-  $\forall r \in R \quad \left. \begin{array}{l} \\ A \in M_{mn} \end{array} \right\} \Rightarrow r \odot A = r A \in M_{mn}$ .

4).-  $\forall r, t \in R \quad \left. \begin{array}{l} \\ A \in M_{mn} \end{array} \right\} \Rightarrow r(tA) = (r \cdot t)A$ .

5).-  $\exists 1 \in R \mid \forall A \in M_{mn} \Rightarrow 1A = A$ .

6).-  $\forall r, t \in R \quad \left. \begin{array}{l} \\ A \in M_{mn} \end{array} \right\} \Rightarrow (r+t)A = rA \oplus tA$ .

7).-  $\forall r \in R \quad \left. \begin{array}{l} \\ A, B \in M_{mn} \end{array} \right\} \Rightarrow r(A \oplus B) = rA \oplus rB$ .

### R-espacio P.

#### Apartado - 1.

Se llama FUNCIÓN POLINÓMICA ORDINARIA  $A_n(x)$  a toda expresión algebraica y funcional del tipo:

$$A_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0 = \\ = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

donde  $a_i \in \mathbb{R}$  y  $x \in K$ , con  $K = \mathbb{R}$  ó  $K = \mathbb{C}$ .

Denotando por  $P$  al conjunto de todas las funciones polinómicas ordinarias  $A_n(x)$ , con  $n \geq 0$  y  $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , se define la SUMA ó ADICIÓN de funciones polinómicas ordinarias,  $\oplus$ , como una operación interna en  $(P, \oplus)$ , tal que:

$$\forall A_m, B_n \in P \mid m \geq n \Rightarrow A_m \oplus B_n = C_m \in P.$$

Por ejemplo, para:

$$A_m = A_g = a_9 x^9 + a_8 x^8 + a_7 x^7 + a_6 \\ B_n = B_g = b_9 x^9 + b_8 x^8 + b_7 x^7 + b_6 x$$

Tendremos:

$$A_m \oplus B_n = A_g \oplus B_g = (a_9 x^9 + a_8 x^8 + a_7 x^7 + a_6) \oplus (b_9 x^9 + \\ + b_8 x^8 + b_7 x^7 + b_6 x) = a_9 x^9 + a_8 x^8 + a_7 x^7 + a_6 + b_9 x^9 + \\ + b_8 x^8 + b_7 x^7 + b_6 x = a_9 x^9 + (a_8 + b_8) x^8 + a_7 x^7 + b_7 x^7 + b_6 x + \\ + a_6 = c_9 x^9 + c_8 x^8 + c_7 x^7 + c_6 x^6 + c_5 x + c_4 = C_g = C_m.$$

Tal que:

$$c_9 = a_9; \quad c_8 = a_8 + b_8; \quad c_7 = a_7; \quad c_6 = b_7; \quad c_5 = b_6; \quad c_4 = a_6$$

Según esto,  $(P, \oplus)$  tiene estructura de grupo abeliano, pues cumple:

1).- Clausura:  $\forall A_m, B_n \in P \Rightarrow (A_m \oplus B_n) \in P$ .

2).- Asociatividad:  $\forall A_m, B_n, C_p \in P \Rightarrow (A_m \oplus B_n) \oplus C_p = \\ = A_m \oplus (B_n \oplus C_p)$ .

3).- Neutralidad:  $\forall A_m \in P \Rightarrow \exists 0 = 0x^0 \in P \mid A_m \oplus 0 = 0 \oplus A_m = A_m$

Siendo  $0 \in P$  el elemento neutro (la FUNCIÓN POLINÓMICA NULA) de  $(P, \oplus)$ .

4).- Simetría:  $\forall A_m \in P \Rightarrow \exists (-A_m) \in P \mid A_m \oplus (-A_m) = (-A_m \oplus A_m) = 0$ .

Siendo  $(-A_m) \in P$  el elemento simétrico (la FUNCIÓN POLINÓMICA OPUESTA) de  $A_m \in P$ . Por ejemplo,

si  $A_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0$ , entonces es:

$$-A_m(x) = -a_m x^m - a_{m-1} x^{m-1} - \dots - a_0.$$

5).- Comutatividad:  $\forall A_m, B_n \in P \Rightarrow A_m \oplus B_n = B_n \oplus A_m$ .

## Apartado-2.

Siendo  $r \in \mathbb{R}$  y  $A_m \in P$ , se define el PRODUCTO ESCALO-POLINÓMICO (una variante del producto escalar vectorial) de  $r \in \mathbb{R}$  por  $A_m \in P$  así:

$$r \odot A_m = r A_m = r (a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0) =$$

$$\begin{aligned}
 &= r \cdot a_m \cdot x^m + r \cdot a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \dots + r \cdot a_0 = \\
 &= a_m x^m \cdot r + a_{m-1} x^{m-1} \cdot r + \dots + a_0 \cdot r = \\
 &= (a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0) r = A_m r.
 \end{aligned}$$

42.

Por lo tanto, es fácil comprobar que  $(P, \oplus) = [(P, \oplus), (R, +, \cdot), \odot]$  tiene estructura de espacio vectorial, con  $P$  como DOMINIO POLINOMIAL (dominio de funciones polinómicas u operandos) y  $R$  como DOMINIO REAL. En consecuencia, un  $R$ -espacio  $P$  (es decir, un  $R$ -espacio vectorial de soporte  $P$ ) es un  $k$ -espacio vectorial de soporte  $V$  en donde  $k$  ha sido sustituido por  $R$  y  $V$  por  $P$ ;  $\oplus$  ha sido sustituido por  $\oplus$  (suma de funciones polinómicas),  $*$  por  $+$ ,  $\bullet$  por  $\cdot$ , y  $\odot$  por  $\odot$  (producto escalar polinómico). El  $R$ -espacio  $P$  cumple, pues, las siguientes propiedades:

1).-  $(P, \oplus)$  es un grupo abeliano.

2).-  $(R, +, \cdot)$  es un cuerpo commutativo.

3).-  $\forall r \in R \quad \forall A_m \in P \quad \left\{ \begin{array}{l} r \odot A_m = r A_m \in P. \\ r A_m \in P \end{array} \right.$

4).-  $\forall r, t \in R \quad \forall A_m \in P \quad \left\{ \begin{array}{l} r(t A_m) = (r \cdot t) A_m. \\ r(t A_m) \in P \end{array} \right.$

5).-  $\exists 1 \in R \mid \forall A_m \in P \Rightarrow 1 A_m = A_m.$

6).-  $\forall r, t \in R \quad \forall A_m \in P \quad \left\{ \begin{array}{l} (r+t) A_m = r A_m \oplus t A_m. \\ (r+t) A_m \in P \end{array} \right.$

7).-  $\forall r \in R \quad \forall A_m, B_n \in P \quad \left\{ \begin{array}{l} r(A_m \oplus B_n) = r A_m \oplus r B_n. \\ r(A_m \oplus B_n) \in P \end{array} \right.$