Tema: ECS. DIFERENCIALES Fecha: 9 AGO 04

LIBRO GUÍA = EDWARDS – PENNEY FONO PROF. = 22118

PROGRAMA:

E.D's
- Elementales ordinarias
- EC. D. ORDEN SUPERIOR (LINEALES)
- SIST. DE E.D.O. DE 1ER ORDEN
  - LINEALES
  - Y NO LINEALES

- E.D. Parciales
  - (I) DE ONDA.
  - (II) DE CALOR
  - (III) DE LAPLACE

CLAVES P/ RESOLVER E.D's

+ En 1 ec. dif. ordinaria (E.D.O), la INCÓGNITA (lo desconocido) es una FUNCIÓN

+ Lo que se conoce es una RELACIÓN entre la variable independiente la f(x) y la DERIVADA d' la f(x).

+ La "cara" de una ec. dif. ord. es ésta:

$$F(x, y, y') = \emptyset \quad , \quad y = y(x)$$

[OBS. MÍA = $F(x, y, y') = \emptyset$ es de orden 1: sólo deriva una vez]

$$\left\{ \begin{array}{ll} G(t, x, \dot{x}) = \emptyset & , \; x = x(t) \\ \quad \text{SS} & \\ G(\dot{x}, x, t) = \emptyset & \end{array} \right.$$

[$\dot{x}$ → Notación d' ¿ISAAC NEWTON? p/ la derivada]

$$H(m, n, n') = \emptyset$$

SS

$$H(p, m, n') = \emptyset \quad , \quad n = n(p)$$

11.733

y $F(G,H)$ es conocida.

Ejemplos:

$x = a \cdot t$ $\quad$ a = constante

$\dot{x} = a$ ← se deriva c/r de t

(1) $\dot{x} = 3$

$\dot{x} - 3 = \emptyset$ ✓

(2) $x + y + y' = \emptyset$

Aquí

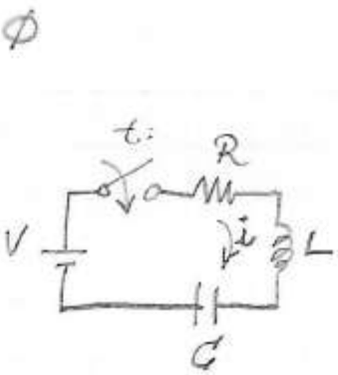
$F(t, s, w) = t + s + w$ ✓

(3) cto. eléctrico básico (con error)

(*) $R \cdot i + C \dfrac{dV}{dt} + L \dfrac{di}{dt} = \emptyset$ $\qquad$ $i = i(t)$, $V = V(t)$

Pero $V(t) = R \cdot i(t)$

$\dfrac{dV}{dt} = R \cdot \dfrac{di}{dt}$



↓ Reemplazando en (*) (Matemático de Liceo) ((W.F))

$R \cdot i + C \cdot R \cdot \dfrac{di}{dt} + L \cdot \dfrac{di}{dt} = \emptyset$

$(CR + L) \dfrac{di}{dt} + R \cdot i = \emptyset$

Tema | Fecha / /

08 (4) $x \cdot y' = 1$ ← AY DIME CORAZÓN

09 (5) $y' = \dfrac{y}{x}$

10 (6) $z' = \dfrac{x}{z}$

11

12

13

14

Juega (31 Mar, 01 y 02 Abril)

15 Vi, Jue: 19^{00}

Sab y Dom: 16^{00} y 19^{00}

16

17

18

19

20

Tema: Remembertorio Fecha: 11 AGO 04

1) la E.D. c/ var. separables

$$\boxed{y' = f(x) . g(y)}$$

f, g continuas ; $g(y) \neq \emptyset$

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + \mathbb{C}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$$

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + \mathbb{C}$$

2) LA ECUACIÓN HOMOGÉNEA

$$\boxed{y' = h\left(\frac{y}{x}\right)}$$ con h continua

(tiene 2 variables)

Hacemos el ⟨cambio d' variable⟩ → ES 1 MANERA MUY RÁPIDA

$u(x) = \frac{y(x)}{x}$ (1M)

cuando se hace 1 CHANGE O' VARIABLE (CALC. DIF)
¿QUE SE VÁ A CAMBIAR? → $y(x)$ se vá a cambiar.

El $y \times \mu$, y el y'

RESULTAN 2 COSAS

a) $y(x) = x \cdot \mu(x)$

b) $y'(x) = \mu(x) + x \mu'(x)$

reemplazando en la ec. (1M)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu + x\mu' = h(\mu) \\ \therefore \mu' = \frac{1}{x}[h(\mu) - \mu] \end{array} \right.$$

la var. dependiente es μ

Tema: Fecha: / /

Ejemplo:

1) $y' = \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right)$

Sea $u = \frac{y}{x} \rightarrow y = x \cdot u$

$$\boxed{y' = u + x \cdot u'}$$

$$u + x \cdot u' = \operatorname{sen} u$$

$$u' = \frac{1}{x}\left[\operatorname{sen} u - u\right]$$

EC. C/VAR. SEP.

$$\frac{du}{\operatorname{sen} u - u} = \frac{dx}{x}$$

TRAER TABLAS DE $\int$

$$\int \frac{du}{\operatorname{sen} u - u} = \ln x + C$$

2) $y' = 3 \cdot e^{\frac{y}{x}}$

$u = \frac{y}{x} \rightarrow y = x \cdot u$

$$y' = u + x \cdot u'$$

$$u + x \cdot u' = 3 \cdot e^{u}$$

$$u' = \frac{1}{x}\left[3e^{u} - u\right] \longrightarrow \text{Resolver}$$

$$\frac{du}{3e^{u} - u} = \frac{dx}{x}$$

etc...

Tema Fecha

(3) $y' = \dfrac{ax+by}{a'x+b'y}$ / se divide * x arriba y abajo

$$= \frac{a + b\frac{y}{x}}{a' + b'\frac{y}{x}} \quad , \quad x \neq \emptyset$$

$u = \dfrac{y}{x} \rightarrow y = xu$

$y' = u + x \cdot u'$

Reemplazando

$$u + xu' = \frac{a+bu}{a'+b'u}$$

$$u' = \frac{1}{x}\left[\frac{a+bu}{a'+b'u} - u\right]$$

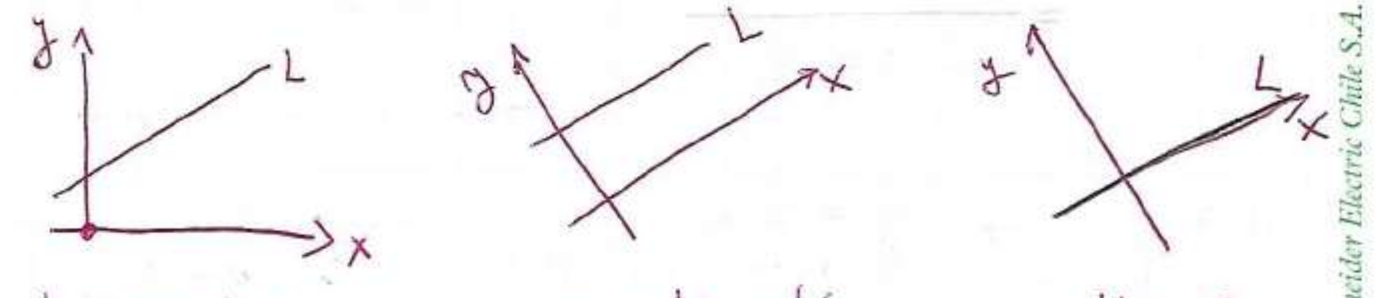
4) $y' = \dfrac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}$ tb. es homogénea

Es ec. de 1 recta Tarea = Probar q' es homogénea

V) $f(x+y) + g(x+y) = y'$ ← Puede q' no es homogénea

iiiii) $y' = g\left(\dfrac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$

tb es homogénea



$y = mx + p$ $\qquad$ $y = k = \text{ctte.}$ $\qquad$ $y = 0$

12/AGO/04

3) EC. LINEAL (DIFERENCIAL)

(*)''' $\boxed{y' = a(x)y + b(x)}$ a, b funciones continuas.

P.Q' la $f(x)$ incógnita y su derivada entran linealmente en la ec.

⇒ la y la y' están linealmente relacionados.

a) <u>1ER CASO</u>: Si $\underbrace{b(x) \equiv 0}_{\text{idénticamente cero}}$, la ec. se dice LINEAL HOMOGÉNEA

(*) $y' = a(x)y$

es con variables separables

(**) $\dfrac{dy}{y} = a(x)\cdot dx$

Sea x_0 un punto, en el Dom de $y(x)$

ojo ⇒ $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{y} = \int_{x_0}^{x} a(s)\,ds$ $\qquad$ s = la variable de integración

$$\ln y - \ln y_0 = \int_{x_0}^{x} a(s)\,ds \qquad y(x) \leftrightarrow y$$

$$\ln_e\left(\frac{y}{y_0}\right) = \int_{x_0}^{x} a(s)\,ds$$

$$\therefore\; y(x) = y_0 \cdot e^{\left[\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right]} \quad \leftarrow \text{solución en general.}$$

Expresión q' individualiza la solución con ayuda de un valor en un punto cualquiera d' su dominio

[LO QUE SE NECESITA ES CARACTERIZAR LA SOLUCIÓN en general]

Ejemplos

$$y' = x^2 y$$

$$a(x) = x^2 = \int_{x_0}^{x} s^2\,ds = \frac{s^3}{3}\Big|_{x_0}^{x}$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x_0^3}{3}$$

$$\therefore\; y = y(x_0)\cdot e^{\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x_0^3}{3}\right]}$$

CHECK (COMPROBACIÓN)

$$\frac{dy}{dx} = y(x_0)\, e^{\frac{x^3}{3} - \frac{x_0^3}{3}}$$

$$= x^2\, y(x_0)\cdot e^{\frac{x^3}{3} - \frac{x_0^3}{3}} \quad \text{esto es } y$$

Otra manera =

$$\frac{dy}{y} = a(x) \cdot dx$$

Integro:

$$\ln y = \int a(x)\, dx + C$$

$$y = \tilde{C} \cdot e^{\int a(x)\, dx}$$

$$z' - (\operatorname{sen} x) z = 0$$

$$z(x) = C \cdot e^{\int \operatorname{sen} x\, dx}$$

$$z(x) = C \cdot e^{-\cos x}$$

b) <u>2do CASO</u> = Si $b(x) \not\equiv 0$ [Euler)

SABEMOS QUE LA SOL. GRAL. DE LA EC. <u>HOMOGÉNEA ASOCIADA</u> a (*) es:

$$y_h = y(x_0) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(s)\, ds}$$

Busquemos la sol. de la ec. NO HOMOGÉNEA (*)''' BAJO LA FORMA:

$$y(x) = \varphi(x) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(s)\, ds} \qquad [1]$$

En donde $\varphi(x)$ es una función × DETERMINAR

Si es así entonces:

$$y' = \varphi'(x)\cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds} + \varphi(x)\cdot a(x)\cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds} \quad [2]$$

Poniendo [1] y [2] en $(*)'''$:

$$\varphi'\cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} \cancel{+\varphi\cdot a\cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}} = \cancel{a\cdot\varphi\cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}} + b$$

$$\therefore\ \varphi'(x) = \frac{b(x)}{e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}} = e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds}\cdot b(x)$$

Integrando desde x_0 hasta x:

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{s} a(t)\,dt}\ b(s)\,ds$$

O sea:

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{s} a(t)dt}\ b(s)\,ds$$

POR LO TANTO LA SOL. DE $(*)'''$ SE ESCRIBE ASÍ =

$$y(x) = \left[\varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{s} a(t)\,dt}\ b(s)\,ds\right]\cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds}$$

Tema: Fecha: / /

Si $x = x_0 \Rightarrow$

$$y(x_0) = [\varphi(x_0) + \emptyset] \cdot 1 = \varphi(x_0)$$

¡¡ Ahhh !!

$$(**) \quad \boxed{y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds} \left[y(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{s} a(t)\,dt} \, b(s)\,ds \right]}$$

Formula de Variación de las Constantes

OBSERVACIÓN (1) EL PRIMER SUMANDO DE (**) ES

$$y(x_0) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds}$$

QUE ES JUSTA% LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA EC. HOMOGÉNEA ASOCIADA A (*)'''

OBSERVACIÓN (2) ¿QUE REPRESENTA EL OTRO SUMANDO? (TAREA)

Ejemplo: $y' = y + 1$; $\{ y(x) = -1$; es una solución particular

$y' = 2y + 1$; $\{ y(x) = -\frac{1}{2}$; es una solución particular

DATO: BUSCAR SOLS. SIMPLES

CONCLUSION: La ecuación lineal NO HOMOG.

$$y' = ay + b \quad ; \quad a, b \text{ constantes}$$

admite una sol. particular constante que es:

$$y = -\frac{b}{a}$$

RESOLVAMOS ESTA ECUACIÓN VIA VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES:

La ec. homog. asociada es:

$$y' = a \cdot y$$

CUYA SOL. GRAL ES

$$y_h = C \cdot e^{ax}$$

O SI SE QUIERE:

$$\left(y_h = y(x_0) \cdot e^{a(x - x_0)} \right)$$

Ahora sea:

$$y = \varphi(x) \cdot e^{ax} \xrightarrow[\text{D'rivando}]{} y' = \varphi' \cdot e^{ax} + \varphi \cdot a e$$

Reemplazando en la ec. NO HOMOGÉNEA

$$\varphi' \cdot e^{ax} + \varphi \cdot a \cdot e^{ax} = a \cdot \varphi \cdot e^{ax} + b$$

$$\varphi' = e^{-ax} \cdot b$$

$$\varphi(x) = b\int e^{-ax}\,dx + C = -\frac{b}{a} \cdot e^{-ax} + C$$

Así es:

$$y = \left[C - \frac{b}{a} \cdot e^{-ax}\right] \cdot e^{ax}$$

$$\boxed{y = C \cdot e^{ax} - \frac{b}{a}}$$ ← ESTA ES LA SOL. GRAL.
[VERGARA PIENSA QUE ES SOLUCIÓN]

~~Veamos otro caso~~

~~3. $xy' = xy$~~

COMPROBACIÓN

DERIVAMOS

$$y' = a \cdot C \cdot e^{ax}$$

$$ay + b = a \cdot \left[C \cdot e^{ax} - \frac{b}{a}\right] + b$$

$$= a \cdot C \cdot e^{ax} - b + b$$

$$= a \cdot C \cdot e^{ax}$$

Tema: Fecha:

DEL LIBRO

$$2)\ y' - 2y = 3\cdot e^{2x}$$

LA HOMOGÉNEA ASOCIADA ES:

$$y' = 2y$$

LA SOL. GRAL DE ÉSTA ES:

$$y = C\cdot e^{2\cdot x}$$

Ahora sea =

$$y = \varphi(x)\cdot e^{2x} \qquad (1)$$

la candidata a solución de la ec. NO HOMOGÉNEA =

$$y' = \varphi'\cdot e^{2x} + 2\cdot\varphi\cdot e^{2x} \qquad (2)$$

Reemplazando (1) y (2) en la EC.

$$\varphi\cdot e^{2x} + 2\cdot\varphi\cdot e^{2x} = 2\cdot\varphi\cdot e^{2x} = 3\cdot e^{2x}$$

$$\varphi' = 3$$

$$\varphi(x) = 3x + C$$

Por lo tanto; la solución grol. es:

$$y = (3x + C) \cdot e^{2x}$$

——— o ———

EVALUACIONES:

1 er Control x LUN 27 SEPTIEMBRE '04 / 15:50 HRS.
2do " x LUN 18 OCTUBRE '04 / 15:50 HRS.
3ro " x LUN 22 NOVIEMBRE '04 / 15:50 HRS
RECUPERACIÓN x LUN 29/11/04 / 15:50 HRS.
- OPTATIVO.
- REEMPL. LA NOTA + BAJA.
- ACUMULATIVO.

Xámen = Viernes 10/12/04 (Vale 1 30%)

Con nota ≥ 6,0 → El profe ofrece la nota d' presentación

Tema: Recuento Fecha: 16 Ago '04

$\boxed{1)\ y' = f(x)\cdot g(y) \quad \text{c/variables separables}}$

$\boxed{2)\ y' = h\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{homogénea}}$

$\boxed{3)\ y' = a(x)y + b(x) \quad \text{Ec. lineal}}$

La solución particular que verifica la condición inicial $y(x_0)=y_0$ está dada por:

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{s} a(t)dt} f(s)\,ds\right]$$ → Fmla. de variación de las ctes.

$\boxed{\begin{array}{l}\text{4) Ecuación de Bernoulli} \\ y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha} \quad (*)\end{array}}$

a) Si $\alpha=1 \Rightarrow y' = [a(x)+b(x)]y$
y la ec. resulta ser lineal homogénea

b) Si $\alpha = 1$

Sea $u = y^{1-\alpha} \rightarrow y = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$ (1)

$\rightarrow y' = \frac{1}{1-\alpha}\, u^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\cdot u'$ (2)

Poniendo (1) y (2) en (*)

$$\frac{1}{1-\alpha}\, u^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\, u' = a(x)\cdot u^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(x)\, u^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \Big/ (1-\alpha)u$$

Ejemplo: La ec. diferencial logística

$$x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

Con

$r > 0$: tasa intrínseca de crecimiento de la población.

$K > 0$: capacidad máxima de sustentación del medio ambiente.

$x(t)$: tamaño de la población en t, $t \geq 0$

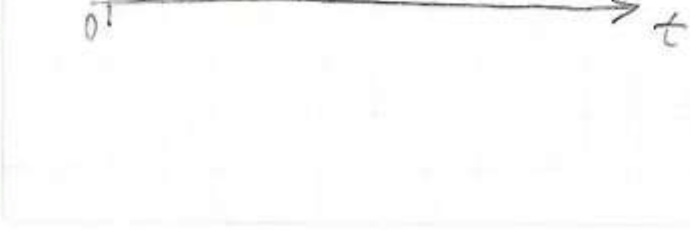
Antecedentes históricos : 17xx = Malthus (demógrafo inglés)

En gral: la población humana crece a tasa constante.

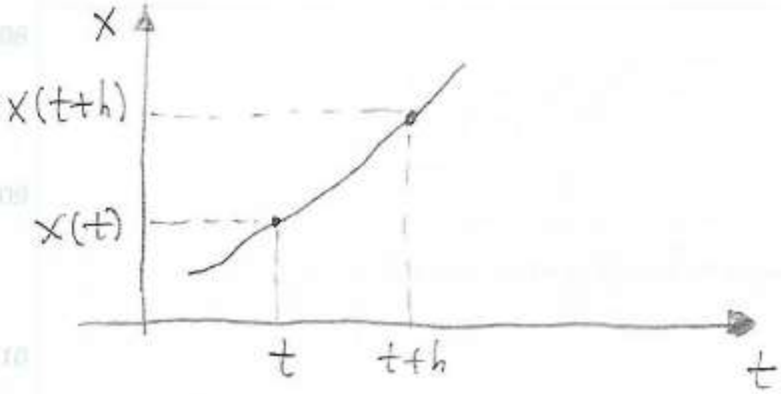
En nuestra notación actual esto significa que:

TASA d' cambio en el instante t →

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{x} = r = \text{cte}.$$



$$x(t) = a \cdot e^{bt}, \quad t \geq 0$$



$x(t+h) - x(t)$: crecimiento de la población desde t hasta $(t+h)$

$\dfrac{x(t+h) - x(t)}{x(t)}$: tasa de crecimiento promedio desde t hasta $(t+h)$

$\dfrac{x(t+h) - x(t)}{x(t)\cdot h}$: tasa de crecimiento prom por unidad de tiempo (desde t hasta $t+h$)

Tomando límite cuando $h \to \emptyset$, en esta última expresión

$\dfrac{x'}{x}$: tasa instantánea de crecimiento de la población

---

$$\frac{x'}{x} = r$$

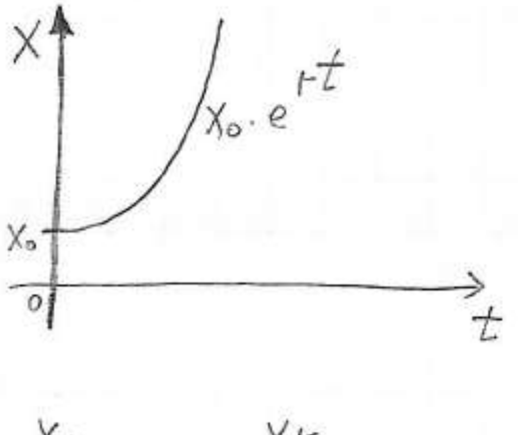
$$\frac{dx}{x} = r\,dt$$

$$x = C e^{rt}$$

Si $X(0) = X_0 \rightarrow$

$$\boxed{X(t) = X_0 \cdot e^{rt}}$$

Expresión que dá el crecimiento exponencial



$X_1, X_2, \ldots, X_K \ldots$
tamaño de la población en el año K.

$$\frac{X_{K+1} - X_K}{X_K} = \rho$$

$$X_{K+1} = (1+\rho)\, X_K \quad , K \geq 0$$

$$X_1 = (1+\rho) X_0$$

$$X_2 = (1+\rho) X_1 = (1+\rho)(1+\rho) X_0$$

$$X_K = (1+\rho)^K \cdot X_0$$

<u>TAREA</u>: ¿Que relación hay entre r y ρ?

<u>Pero</u>: Supone un crecimiento ilimitado. No es aceptable.
No se dá en muchas poblaciones

Ejemplo:
La ec. diferencial logística.

$$\boxed{x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)}$$

OBSERVACIÓN:

$$\frac{x'}{x} = r\left(1 - \frac{x}{K}\right) = r - \frac{rx}{K}$$

$$\frac{x'}{x} = \frac{r}{K}(K - x)$$

Se supone una población cerrada (sin migraciones)

Escribamos la ec. así:

$$x' = rx - \frac{r}{K}x^2$$

Es una ecuación del tipo Bernoulli con $\alpha = 2$

Sea $u = x^{-1} \rightarrow x = u^{-1}$ $(*)$

$\rightarrow x' = -u^{-2} \cdot u'$

Reemplazando en la ec. logística:

$$-u^{-2}u' = ru^{-1} - \frac{r}{K} \cdot u^{-2} \quad / -u^2$$

$$\boxed{u' = -ru + \frac{r}{K}}$$

$\longrightarrow$ $\therefore$ La solución general de esta ecuación lineal no homogénea es:

$$u = C \cdot e^{-rt} + \frac{1}{K}$$

Así es $(*)$

$$X(t) = \frac{1}{\frac{1}{k} + Ge^{-rt}}$$

$$X = \frac{k}{1 + kG \cdot e^{-rt}}$$

Si $X(\emptyset) = x_0$, el tamaño inicial de la población, entonces

$$X(\emptyset) = \frac{k}{1 + k \cdot G} = x_0$$

$$\rightarrow \frac{k}{x_0} = 1 + kG \longrightarrow \frac{k}{x_0} - 1 = k \cdot G$$

$$G = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{k}$$

Así, la población que parte desde x_0, en $t = \emptyset$, es:

$$X(t) = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{x_0} - 1\right) \cdot e^{-rt}}$$

Observemos que:

$$\lim_{t \to \infty} X(t) = k$$

Además, derivando la ecuación logística, respecto de t, resulta:

$$x'' = r \cdot x' - \frac{2r}{K} x \cdot x'$$

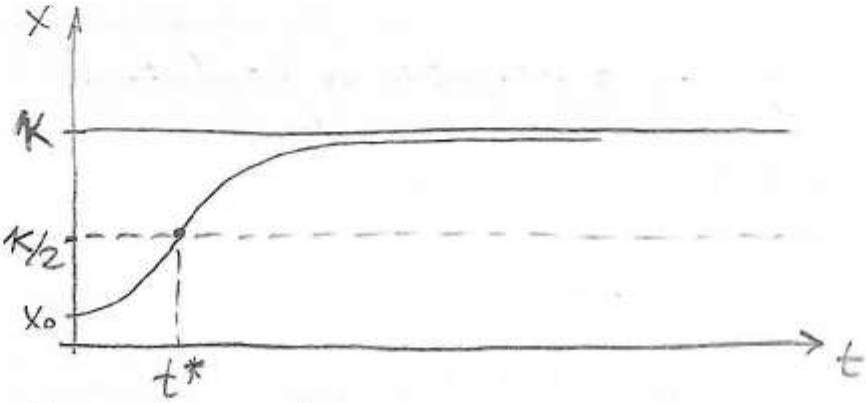
$$= r\left(1 - \frac{2x}{K}\right) x'$$

$$= r^2 \left(1 - \frac{2x}{K}\right) x \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

Si la curva $x = x(t)$ tiene su punto de inflexión, esto se alcanza cuando $x'' = \emptyset$, es decir cuando:

$$r^2\left(1 - \frac{2}{K}x\right)x\left(1 - \frac{x}{K}\right) = \emptyset$$

$x_1 = \emptyset$
$x_2 = K$
$x_3 = \frac{K}{2}$



curva sigmoídea

La ecuación $x(t^*) = \frac{K}{2}$; dá el momento t^*, en el cual se produce la inflexión

Tema: Pregunta 2) Fecha: 18 AGO 2004

1.- $\boxed{y' = f(x)\cdot g(y)}$ Ec. c/var. sep.

2.- $\boxed{y' = h\left(\frac{y}{x}\right)}$ EC. HOMOGÉNEA

3.- $\boxed{y' = a(x)y + b(x)}$

4.- $\boxed{y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}}$, $\alpha \neq 1$

$X(t)$: tamaño de la pobl. en $t \geq 0$

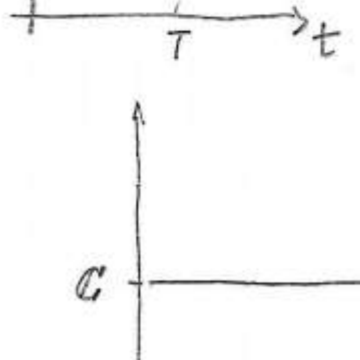
$X' = rX$ ← El cambio en la población

$X' = rX\left(1 - \frac{X}{K}\right)$

<u>Ejemplo</u>: Una población crece según la ley exponencial. Si la población es explotada, digamos extrayendo "C" individuos por unidad de tiempo. ¿Cuánto debe ser c ("c" chico) de manera que al cabo de T unidades de tiempo, la población sea X_T? Se supone que inicialmente es $X(0) = X_0$

LEY exponencial dice que: $X = C \cdot e^{rt}$

$r\,(>0)$: Tasa intrínseca de crecimiento de la población



La dinámica de explotación de la población está dada por:

$$x' = rx - c \quad ; \text{ Cond. inicial } ; \; x(0) = x_0$$

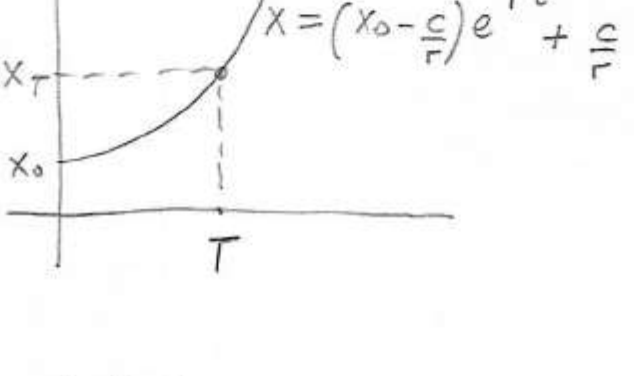
La solución general de esta ec. diferencial lineal NO HOMOGÉNEA es:

$$x(t) = C e^{rt} + \frac{c}{r}$$

$$x(0) = C + \frac{c}{r} = x_0 \rightarrow \boxed{C = x_0 - \frac{c}{r}}$$

$\therefore$

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{c}{r}\right) \cdot e^{rt} + \frac{c}{r} \quad , \; t \geq 0$$



$$x' = rx - c$$
$$x' = rx$$
$$\frac{dx}{dt} = rx$$
$$\frac{dx}{x} = r\,dt$$
$$\ln x = rt + C$$
$$x = C \cdot e^{rt}$$

TAREA: Probar que: la solución general de la ec. no homogénea, es = a la sol. gral. de la ec. homogénea asociada, más una sol. particular de la ec. no homogénea

Por lo tanto

$$X(T) = \left(x_0 - \frac{c}{r}\right) \cdot e^{rT} + \frac{c}{r} = X_T$$

$$X_T = \left(x_0 - \frac{c}{r}\right) \cdot e^{rT} + \frac{c}{r}$$
$$= x_0 \cdot e^{rT} - \frac{c}{r} e^{rT} + \frac{c}{r} = x_0 \cdot e^{rT} + \frac{c}{r}\left(1 - e^{rT}\right)$$

Tema:

Fecha: / /

$$X_T = X_0 \cdot e^{rT} + \frac{c}{r}\left(1 - e^{rT}\right)$$

$$\frac{c}{r} = \frac{1}{(1-e^{rT})} \times \left(X_T - X_0 \cdot e^{rT}\right)$$

$$c = \frac{r}{(1-e^{rT})} \times \left(X_T - X_0 \cdot e^{rT}\right)$$

$r > 0$ (es + porque crece)

Si se echa a correr e^{rT}

Como debe ser $c > \emptyset$

$$\Rightarrow X_T - X_0 \cdot e^{rT} < \emptyset$$

$$X_T < X_0 \cdot e^{rT}$$

$$\frac{X_T}{X_0} < e^{rT} \quad / \ln \quad \ln \frac{X_T}{X_0} < rT$$

O bien si:

$$r > \frac{1}{T} \times \ln \frac{X_T}{X_0}$$

Tema: TALLER #1 Fecha:

$$x' = 0{,}075 \,\frac{\text{TON}}{\text{SEM}} \cdot x \left(1 - \frac{x}{10^3\,\text{TON}}\right)$$

$x(0) = 1$ TONELADA DE ALEVINES.

TRUCO:

Sea $u = \dfrac{x}{K} \rightarrow x = K \cdot u$
$\qquad\qquad\quad x' = K \cdot u'$

$\cancel{K} \cdot u' = r \cancel{K} u(1-u)$

$u' = r u (1-u)$ ← Ec. tipo Bernoulli ; $u(t)$

Hagamos un cambio en la var. independiente (Es el tiempo t)

$t = \alpha \cdot \tau$

$u(\tau) = u[t(\tau)]$

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{du}{dt} \cdot \underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{\alpha} = \alpha \cdot \frac{du}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{du}{d\tau}$$

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{du}{d\tau} = r u (1-u)$$

Así tomando $\alpha = \frac{1}{r}$, resulta $\Rightarrow \cancel{r} \cdot \frac{du}{d\tau} = \cancel{r}\, u(1-u)$

la ec. en $u(\tau)$:

$$\frac{du}{d\tau} = u(1-u) \xrightarrow{\text{o lo que es lo mismo}} \frac{du}{u(1-u)} = d\tau$$ ⟵ Ec. de var. separables

Tema: Fecha:

$$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{1-\mu}\, d\mu = d\tau$$

Integrando

$$\ln \mu - \ln(1-\mu) = \tau + C$$

$$\ln\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right) = \tau + C$$

$$\frac{\mu}{1-\mu} = \mathbb{C} \cdot e^{\tau}$$

Pero $t = \frac{1}{r}\tau \Rightarrow \tau = rt$

$$\frac{\mu}{1-\mu} = \mathbb{C} \cdot e^{rt}$$

$$\mu = \mathbb{C} \cdot e^{rt} - \mathbb{C}\, e^{rt} \cdot \mu$$

$$\mu(1 + \mathbb{C}\, e^{rt}) = \mathbb{C}\, e^{rt}$$

$$\mu = \frac{\mathbb{C}\, e^{rt}}{1 + \mathbb{C}\, e^{rt}} = \frac{1}{1 + \tilde{\mathbb{C}} e^{-rt}}$$

Recordando el TRUCO, se dijo que: $\mu = \frac{x}{K}$

$$\frac{x}{K} = \frac{1}{1 + C \cdot e^{-rt}}$$

$$\therefore\ x = \frac{K}{1 + \mathbb{C} \cdot e^{-rt}}$$

$$x(0) = \frac{10^3}{1+C} = 1 \rightarrow C = 10^3 - 1$$

$$\boxed{C = 999}$$

$$X(t) = \frac{1000}{1+999 \cdot e^{-0{,}075t}}$$

Para t^*:

$$\frac{1000}{1+999 \cdot e^{-0{,}075 \cdot t^*}} = 1000 \times 0{,}75$$

$$\frac{1000}{1+999 \cdot e^{-0{,}075t^*}} = 750$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 22} \\ 999 \cdot 3 \\ \hline 2997 \end{array}$$

$$\frac{1}{1+999 \cdot e^{-0{,}075t^*}} = \frac{3}{4}$$

$$3\left(1+999 \cdot e^{-0{,}075t^*}\right) = 4$$

$$3 + 2997 \cdot e^{-0{,}075t^*} = 4$$

$$2997 \cdot e^{-0{,}075t^*} = 1$$

$$e^{-0{,}075t^*} = \frac{1}{2997}$$