Física teórica
MECÁNICA

Cinemática tensorial

Tema 10
Cardinalidad

Tema 10... Cardinalidad.

Sinopsis del tema

Introducción. Biyección. Conjuntos coordinables o equipotentes. Cardinalidad o potencia. Teoría de conjuntos primigenia. Teorías axiomáticas de conjuntos. ZF, NBG y MK **(página 1).**

Teoría informal, primigenia o intuitiva de conjuntos. Conectores lógicos. Georg Cantor. Gottlob Frege. Paradojas de Russell y Berry. Teorías axiomáticas **(página 2).**

Paradoja de Russell. Paradoja. Paradoja del barbero. Bertrand Russell. Teoría de conjuntos cantoriana amenazada **(página 3).**

Paradoja de Russell. Antinomia. Conjunto referencial. Conjunto complementario. Conjunto normal. Conjunto singular. Paradoja de Russell. Teoría ZF. Axioma de elección **(página 4).**

Paradoja de Berry. Conjuntos cuyos elementos son palabras. Paradoja de Berry **(página 5).**

Teoría ZF. Teoría de conjuntos. Georg Cantor. Infinito actual. Conjuntos. Teoría ZF. Teoría ZFS. Teoría NBG **(página 6).**

Anaximandro. Ilimitado. Indeterminado. Infinito. Aristóteles. Conjunto potencialmente infinito. Infinito potencial. Conjunto actualmente infinito. Infinito actual. Atempotalidad matemática **(página 7).**

Conjunto. Elemento. Relación de pertenencia. Teoría de tipos. Teoría ZF. Cantor. Jerarquía alef. Conjunto. Hipótesis del continuo. Cortaduras de Dedekind. Teoría de tipos. Axioma de elección. Axioma de reemplazo. Teoría de conjuntos moderna. Teoría ZF. Segundo teorema de incompletitud de Gödel **(página 8).**

Conjunto universal. Paradoja de Cantor. Conjunto referencial. Universo de conjuntos. Entidad abierta. Teoría ZF. Conjunto **(página 10).**

Teoría ZF. Axiomas de extensión, especificación, apareamiento, unión, conjunto potencia, infinito, elección, sustitución y regularidad. Función de elección **(página 11).**

Axioma de regularidad. Elementos minimal. Teorema 1 **(página 12).**

Axioma de elección. Axioma. Postulado. Polémica en torno al axioma de elección. Intuicionismo matemático **(página 13).**

Teorema de Cantor. Conjunto potencia. Conjunto de las partes. Conjunto de los subconjuntos. Teorema 2. Inducción completa **(página 14).**

Teorema de Cantor. Teorema 3 **(página 16).**

Jerarquía de infinitos. Coordinabilidad de conjuntos. Conjuntos infinitos numerables. Potencia del numerable. Conjuntos infinitos innumerables o no numerables. Potencia del continuo. Número natural. Número transfinito **(página 17).**

Universos de conjuntos. Universo de conjuntos infinitos innumerables. Hipótesis del continuo. Hipótesis generalizada del continuo. Jerarquía de cardinales infinitos **(página 18).**

Conjunto finito numerable. Conjunto infinito numerable. Teoremas 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 y 16 **(página 19).**

Números transfinitos. Jerarquía de transfinitos **(página 23).**

Algunas propiedades de los transfinitos. Cardinal de C. Cardinal de E circulado sub-3 super-oxyz. Cardinal de F circulado sub-3 super-oxyz **(página 24).**

Introducción (1).
Apartado-1 (1).
Biyección. Conjuntos coordinables o equipotentes. Cardinalidad o potencia.
Apartado-2 (1).
Teoría de conjuntos primigenia. Teorías axiomáticas de conjuntos. ZF, NBG y MK.
Apartado-3 (2).
Teoría informal, intuitiva o primigenia de conjuntos. Conectores lógicos. Georg Cantor. Gottlob Frege. Paradojas de Russell y Berry. Teorías axiomáticas.
Paradoja de Russell (3).
Apartado-1 (3).
Paradoja. Paradoja del barbero. Bertrand Russell.
Apartado-2 (3).
Teoría de conjuntos cartoriana amenazada.
Apartado-3 (4).
Paradoja de Russell. Antinomia. Conjunto referencial. Conjunto complementario.
Apartado-4 (4).
Conjunto normal. Conjunto singular.
Apartado-5 (4).
Paradoja de Russell. Teoría ZF. Axioma de elección.
Paradoja de Berry. (5).
Apartado-1 (5).
Conjuntos cuyos elementos son palabras.
Apartado-2 (5).
Paradoja de Berry.
Teoría ZF. (6).
Apartado-1 (6).
Teoría de conjuntos. Georg Cantor. Infinito actual. Conjuntos. Teoría ZF. Teoría ZFS. Teoría NBG.
Apartado-2 (7).
Anaximandro. Ilimitado. Indeterminado. Infinito. Aristóteles. Conjunto potencialmente infinito. Infinito Potencial. Conjunto actualmente

infinito. Infinito actual. Atemporalidad matemática.
Apartado-3. (8).
Conjunto. Elemento. Relación de pertenencia. Teoría de Tipos. Teoría ZF.
Apartado-4. (8).
Cantor. Jerarquía Alef. Conjunto. Hipótesis del continuo. Cortaduras de Dedekind. Teoría de tipos. Axioma de elección. Axioma de reemplazo. Teoría de conjuntos moderna. Teoría ZF. Segundo teorema de incompletitud de Gödel.
Apartado-5 (10).
Conjunto universal. Paradoja de Cantor. Conjunto referencial. Universo de conjuntos. Entidad abierta. Teoría ZF. Conjunto.
Apartado-6 (11).
Teoría ZF. Axiomas de extensión, especificación, apareamiento, unión, conjunto potencia, infinito, elección, sustitución y regularidad. Función de elección.
Apartado-7 (12).
Axioma de regularidad. Elemento minimal. Teorema-1.
Apartado-8 (13).
Axioma de elección. Axioma. Postulado. Polémica en torno al Axioma de Elección. Intuicionismo matemático.
Teorema de Cantor (14).
Apartado-1 (14).
Conjunto potencia. Conjunto de las partes. Conjunto de los subconjuntos. Teorema-2. Inducción completa.
Apartado-2 (16).
Teorema de Cantor. Teorema-3.
Jerarquía de infinitos (17).
Apartado-1 (17).
Coordinabilidad de conjuntos.
Apartado-2 (17).
CONJUNTOS INFINITOS numerables. Potencia del numerable. Conjuntos infinitos innumerables o no numerables. Potencia del continuo. Número natural. Número transfinito.
Apartado-3 (18).
Universos de conjuntos. Universo de conjuntos infinitos innu-

merables. Hipótesis del continuo. Hipótesis generalizada del continuo. Jerarquía de cardinales infinitos.

Apartado-4 (19).

Conjunto finito numerable. Conjunto infinito numerable. Teoremas 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 y 16.

Números transfinitos (23).

Apartado-1 (23).

Números transfinitos. Jerarquía de transfinitos.

Apartado-2 (24).

Algunas propiedades de los transfinitos.

Apartado-3 (24).

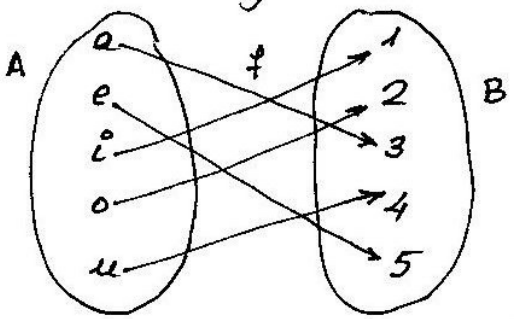
Cardinal de C. Cardinal E_3^{oxyz}. Cardinal de F_3^{oxyz}.

Tema 10 (Cardinalidad).

Introducción.

Apartado-1.

Una correspondencia $f: A \to B$, entre 2 conjuntos no vacíos A y B, se llama BIYECCIÓN cuando todo elemento de A posee uno y sólo un elemento imagen en B y todo elemento de B posee uno y sólo un elemento antiimagen en A. Por ejemplo:



Dos conjuntos que son biyectables entre sí (es decir, que admiten ser puestos en biyección) se denominan CONJUNTOS COORDINABLES o EQUIPOTENTES (de igual potencia o cardinalidad). La CARDINALIDAD o POTENCIA de un conjunto A es la cantidad de elementos que posee, y se denota card(A); en el ejemplo, card(A) = card(B) = 5. Para conjuntos finitos (con una cantidad finita de elementos), la cardinalidad es un número natural evidentemente; pero para conjuntos infinitos (con una cantidad infinita de elementos) la cardinalidad no es un número natural, pues sobrepasa a éste.

Apartado-2.

La cardinalidad de conjuntos es un tema de gran interés matemático, puesto que atañe a nociones cuantitativas infinitas y la Infinitud siempre ha sido un reto problemático para los matemáticos. Al principio, los cardinales infinitos se hicieron relevantes en el seno de la teoría de Conjuntos primigenia, de talante intuitivo y deseosa de determinar cómo se comportan los conjuntos a partir de unos fundamentos conceptuales poco rigurosos. Entonces aparecieron paradojas, que obligaron a los teóricos a afinar más la puntería y a no tener más remedio que elaborar una serie de Teorías Axiomáticas, en el interés de la precisión.

Las TEORÍAS AXIOMÁTICAS de Conjuntos son colecciones de axio-

mas bien escogidos, desde donde es posible derivar todas las propiedades de los conjuntos con un rigor matemático suficientemente aceptable. Las Teorías axiomáticas más relevantes son:

1).- La Teoría Axiomática de Conjuntos de Zermelo y Fraenkel, abreviadamente ZF.

2).- La Teoría Axiomática de Conjuntos de Neumann, Bernays y Gödel, abreviadamente NBG.

3).- La Teoría Axiomática de Conjuntos de Morse y Kelley, abreviadamente MK.

Apartado-3.

La Teoría Primigenia o Intuitiva de Conjuntos, a pesar de su rudimentariedad respecto a las Teorías Axiomáticas, ha perdurado hasta el presente, con el nombre de TEORÍA INFORMAL DE CONJUNTOS, quizas debido al hecho de que los trabajos de Gödel sobre los lenguajes formales y sus demostraciones acerca de las limitaciones internas de los formalismos (base de las teorías axiomáticas) han dejado una sombría expectativa de progreso; y, por otra parte, los avances en psicologia cognitiva han llevado a tener que adoptar un enfoque más favorable hacia la intuición, tradicionalmente considerada como hija bastarda del conocimiento.

La Teoría Informal de Conjuntos, pues, permanece en pie actualmente, formando parte del arsenal de teorías matemáticas modernas, a la base misma del conocimiento científico, para intentar iluminar de manera progresiva y multidisciplinar el escabroso y oscuro terreno de los fundamentos del saber humano. En todo ello, los Conjuntos son un concepto de importancia capital en matemáticas y otras ciencias, y sirven de base para definir números, relaciones, funciones y objetos teóricos múltiples.

La Teoría Informal de Conjuntos emplea el lenguaje cotidiano (roman paladino) para teorizar sobre Conjuntos, donde los conectores lógicos Y, O, NO, SI Y SÓLO SI, SI...ENTONCES, etc. no están sujetos a definiciones muy rigurosas, con sus consecuencias positivas y negativas. Ésta era la única Teoría de Conjuntos que existía a finales del siglo XIX, cuando Georg Cantor y Gottlob Frege la enunciaron, aparentemente espoleados por la necesidad de elaborar algún

marco teórico donde poder trabajar con conjuntos infinitos de manera coherente, es decir, sin contradicciones conceptuales. Pero, al permitir la definición de conjuntos sin restricciones en cuanto a sus propiedades características, empezaron a surgir paradojas lógicas, como la planteada por Russell, y semánticas, como la planteada por Berry. Entonces, para poder afrontar las paradojas con éxito, emergieron las ya mencionadas Teorías Axiomáticas, las cuales tenían como denominador común la presencia de restricciones definitorias para los objetos a emplear (conjuntos, elementos, relaciones, etc.) y la consiguiente mayor precisión.

Paradoja de Russell.

Apartado-1.

Una PARADOJA es un razonamiento aparentemente correcto, pero que en sí mismo encierra una contradicción lógica. En 1901, Bertrand Russell enunció la llamada PARADOJA DEL BARBERO, así:

Hace muchos años, en un lejano reino, había muy pocas personas con el oficio de barbero. Ante esta escasez, el rey del país dictaminó que los barberos de su reino sólo podían afeitar a las personas incapaces de afeitarse por sí mismas. Entonces, uno de esos barberos, el único de su comarca, se planteó el siguiente problema: "Como barbero, no puedo afeitar al barbero de mi comarca, que soy yo, ya que entonces me afeitaría a mí mismo, y por orden del rey no puedo hacerlo. Pero si no puedo afeitarme a mí mismo debo ir a un barbero para que lo haga; y, no obstante, el único barbero aquí soy yo. Ante esto, no puedo afeitarme de ningún modo".

Este cuento alberga una contradicción devastadora, que no sólo perjudica al barbero sino, sobretodo, arremete contra los fundamentos mismos de la matemática. ¿Cómo? Apolillando a la Teoría de Conjuntos cantoriana.

Apartado-2.

Si el barbero de la historieta recién narrada pertenece al conjunto A de las personas de su comarca que no pueden afeitarse a sí mismas, tendría derecho a ser afeitada, según la

orden del rey, pero no podría beneficiarse de ello porque no hay otro barbero aparte de él. Pero si lo hacemos pertenecer al conjunto B de las personas de su comarca que pueden afeitarse a sí mismas, tampoco podría eliminar sus barbas puesto que por orden del rey no puede ir al barbero, que es él, para afeitarse.

Esta paradoja, expresada en términos matemáticos, es decir, en Teoría de Conjuntos, hizo temblar a toda la comunidad matemática a comienzos del siglo XX. ¿Por qué? Porque la base de la matemática moderna reposa en la Teoría de Conjuntos y dicha teoría era objeto principal de ataque por esa paradoja.

Apartado-3.

La Paradoja del Barbero recibe el nombre de PARADOJA DE RUSSELL en el ámbito de la Teoría Cantoriana de Conjuntos. Este tipo de paradoja se llama ANTINOMIA (del griego anti= contra, y nomos= Ley): "contradicción de la Ley", o contradicción de carácter irresoluble.

Sea F el conjunto formados por todos los entes matemáticos, al que llamaremos CONJUNTO REFERENCIAL en este contexto. Sea A el conjunto de todos los números. Se llamará CONJUNTO COMPLEMENTARIO de A en F, denotándose $C_F(A)$, al conjunto F-A, o sea:

$$F-A = C_F(A) = \{x \mid x \in F \text{ y } x \notin A\}$$

Donde, como $C_F(A)$ es un ente matemático, sucederá que:

$$C_F(A) \in C_F(A)$$

Apartado-4

Se llama CONJUNTO NORMAL a todo conjunto A tal que $A \notin A$, y se llama CONJUNTO SINGULAR a todo B tal que $B \in B$. Se tiene:

1).- Si A es normal, entonces A no es singular.

2).- Si B es singular, entonces B no es normal.

3).- Todo conjunto C es normal o singular (una sola opción).

Apartado-5.

Sea M el conjunto cuyos elementos son todos los conjuntos normales que se pueden formar. Si decimos que M es normal,

entonces $M \in M$; pero si $M \in M$ entonces M es singular y por tanto debe ser $M \notin M$; y viceversa. O sea, tenemos lo siguiente:

$$M \in M \Rightarrow M \notin M$$
$$M \notin M \Rightarrow M \in M$$

Es decir, la Paradoja de Russell:

$$M \in M \Leftrightarrow M \notin M.$$

Esta situación provocó que los lógicos matemáticos llegaran a la conclusión de que la Teoría cantoriana de conjuntos, tal cual, debería ser sustituída por la misma teoría reformada o restringida, en la que los conjuntos singulares fueran excluídos a priori. Esto llevó a la introducción de la Teoría Axiomática de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel (teoría ZF) y, con ella, a la detención de la alarma provocada por Russell. Sin embargo, uno de los axiomas ZF, el llamado AXIOMA DE ELECCIÓN, ha resultado ser un tanto problemático.

Paradoja de Berry.

Apartado-1.

Sea C un conjunto cuyos elementos son palabras del diccionario de la Lengua Española. Por ejemplo:

$$C = \{río, nube, avión\}$$

Donde, aquí, obviamente, es: $card(C) = 3$.

Por otra parte, llamaremos C_n a un conjunto cuyos elementos son palabras del mismo diccionario que sirven para designar mediante una frase el número natural $n \in N$. Por ejemplo, para $n = 54$, tendremos:

$$C_{54} = \{cincuenta, y, cuatro\}$$

Donde: $card(C_{54}) = 3$

Otro ejemplo:

$$C_{8192} = \{ocho, mil, ciento, noventa, y, dos\}$$
$$Card(C_{8192}) = 6.$$

Apartado-2.

La Paradoja de Berry tiene que ver con un número natural $\alpha \in N$ tal que α es "el menor número natural que no puede definirse con menos de quince palabras". O sea:

$$card(C_\alpha) \geq 15$$

Es decir:

$$card(C_\alpha) > 14$$

Encontrar $\alpha \in N$ es cosa segura, por supuesto. Sin embargo la frase f = "alfa no puede definirse con menos de quince palabras" forma un conjunto C_f, tal que:

C_f = {alfa, no, puede, definirse, con, menos, de, quince, palabras}

card $(C_f) = 9$.

La contradicción surge al comparar C_α y C_f, puesto que:

$$\text{card}(C_\alpha) > \text{card}(C_f)$$

y, sin embargo, C_α y C_f designan el mismo $\alpha \in N$.

Teoría ZF.

Apartado-1.

La TEORÍA DE CONJUNTOS es una rama matemática moderna, cuyo propósito es estudiar unas entidades abstractas llamadas CONJUNTOS, las cuales soportan los fundamentos mismos de la Matemática y, por ende, de toda la Ciencia. La Teoría de Conjuntos fue desarrollada por el matemático alemán Jerg Cantor a finales del siglo XIX, con el propósito de esclarecer conceptos relacionados con el denominado INFINITO ACTUAL, noción desechada o rehuída por eminentes teóricos tales como Pitágoras, Galileo, Gauss y Kronecker. No obstante, Cantor tuvo éxito, aunque su teoría era un tanto imprecisa o falta de rigor y por eso posteriormente tuvo que ser refinada mediante un proceso de axiomatización, trabajo llevado a cabo por Frege, Russell, Zermelo, Skolem y Fraenkel.

Cantor partió de la convicción platonista de que es posible aglutinar o comprimir un conjunto (colección de objetos) hasta considerarlo como un todo o como una sola unidad, aceptando así una serie de supuestos que más tarde se tradujeron en paradojas. Al principio, Cantor desarrolló felizmente su teoría, la cual parecía satisfactoria. Pero con el tiempo se comprobó que su sistema teórico era tan permisivo que no podía menos que generar paradojas, y no tardaron en llegar esas indeseables contradicciones lógicas.

Gottlob Frege ideó un andamiaje más preciso en un intento por sostener la teoría cantoriana de conjuntos, con un fundamento más exquisito. Pero, para su consternación, la Parado-

de Russell llegó como un torpedo y puso al sistema de Frege en peligro de muerte. Sin embargo, justo a tiempo, a principios del siglo XX, Ernest Zermelo consiguió detener la ruína mediante una base axiomática adecuada, la cual era capaz de restringir exitosamente al sistema axiomático de Frege y con ello impedir que la corrosiva paradoja russelliana acabara sepultando definitivamente los trabajos de Cantor.

Las ideas de Zermelo fueron precisadas posteriormente por Skolem y Fraenkel, dando lugar a la TEORÍA ZF, la cual debería llamarse en justicia TEORÍA ZFS, en honor a Skolem.

Otra teoría conjuntista que evitaba las paradojas que amenazaron al sistema cantoriano fue desarrollada por Von Neumann, Bernays y Gödel, y se ha denominado TEORÍA NBG.

Apartado-2.

Anaximandro introdujo el concepto de lo ILIMITADO, y posteriormente, dicho concepto, se fusionó con la noción de lo INDETERMINADO, dando lugar al concepto filosófico de INFINITO. Más adelante, Aristóteles hizo una distinción entre 2 tipos de Infinito: el potencial y el actual.

Según Aristóteles, todo conjunto que admite más y más elementos por agregación, sin que se establezca un final para dicha agregación, es un CONJUNTO POTENCIALMENTE INFINITO, o un INFINITO POTENCIAL. Pero un conjunto que, de entrada, ya posee infinitos elementos es un CONJUNTO ACTUALMENTE INFINITO, o un INFINITO ACTUAL. No obstante, Aristóteles rechazaba de plano el infinito actual y admitía a regañadientes el infinito potencial.

Cantor consideraba que el Infinito Potencial tenía al Infinito Actual como premisa, por lo que en su Teoría de Conjuntos sólo hace uso del Infinito Actual; y la inmensa mayoría de los matemáticos contemporáneos están de acuerdo con Cantor en este asunto. Así, la Teoría ZF sólo baraja el concepto de Infinito Actual. Esto es comprensible si tenemos en cuenta que la Matemática es una ciencia atemporal (en ella no tiene cabida la noción de Tiempo, a diferencia de la Física y demás Ciencias experimentales).

Apartado-3.

El concepto de CONJUNTO se encuentra en un nivel tan elemental para el intelecto humano que no es posible dar una definición precisa del mismo, sino sólo aceptar su existencia en un universo de entidades individuales en donde todo elemento es relativo y todo conjunto también, pues allí donde un conjunto es una colección de elementos es uno de tales elementos una colección de otros elementos a su vez, de tal manera que los conjuntos son construídos o formados según criterios arbitrarios, y donde carece por completo de importancia la naturaleza de las entidades individuales y sólo es relevante el comportamiento del Conjunto como entidad matemática. Ahora bien, entre elemento y conjunto es necesario establecer la llamada RELACIÓN DE PERTENENCIA:

$$a \in A \; ; \; a \notin B.$$

En la teoría cantoriana de conjuntos se suele formar un conjunto A a partir de una propiedad P que deben cumplir los elementos de A y sólo ellos, donde la expresión P(a) significa que el elemento $a \in A$ cumple la propiedad P; esto se nota así:

$$A = \{a \mid P(a)\}$$

En un intento de eliminar la Paradoja de Russell de la teoría cantoriana de conjuntos, Russell mismo y Whitehead idearon la TEORÍA DE TIPOS, harto engorrosa. Sin embargo, la Teoría ZF, mucho más sencilla, y más eficaz, ha conseguido eliminar varias paradojas, incluída la de Russell. De hecho, al presente, la Teoría ZF parece campear sin la amenaza notoria de ninguna Paradoja que la perturbe.

Apartado-4.

Estudiando las propiedades de las series trigonométricas, en análisis matemático, Cantor (1845-1918) se vio en la necesidad de trabajar con números enteros positivos (naturales) muy grandes. Esto le llevó a descubrir conjuntos infinitos y que éstos pueden ser de distintos tamaños u órdenes de infinitud, por lo que llegó al hallazgo sorprendente de una jerarquía infinita de cardinales infinitos: la JERARQUÍA ALEF, que va desde el $\aleph_0$ hasta el $\aleph_n$ y más allá, sin límite. Entonces comenzó a es-

tudiar la noción de CONJUNTO en sí misma, con el fin de clarificar la jerarquía de conjuntos infinitos. En 1878 enunció su conjetura denominada HIPÓTESIS DEL CONTINUO, que fue resuelta en 1963 por Cohen (1934-2007) apoyándose en ciertos trabajos de Gödel (1906-1978).

Rápidamente, Cantor y sus sucesores entendieron que la noción de CONJUNTO era tan general que permitía reconstruír o redefinir los objetos matemáticos conocidos hasta entonces como si fueran conjuntos puros. En 1872, Dedekind (1831-1916) había dado un notable paso previo en esa dirección, mostrando cómo redefinir los números reales en forma de conjuntos particulares de números racionales llamados CORTADURAS de Dedekind. Así, pues, la Teoría de Conjuntos iba a facilitar un antiguo sueño matemático, a saber, unificar todas las ramas de la Matemática en una teoría única. Sin embargo, la Teoría de conjuntos no es único marco unificador posible; pues también la TEORÍA DE TIPOS de Russell (1872-1970) y Whitehead (1861-1947), cuyos objetos fundamentales son las funciones.

La Teoría cantoriana de conjuntos, nacida en 1870, contenía paradojas, y por eso demandaba una adecuada axiomatización. La primera axiomatización se produjo en 1903, por Frege (1848-1925), el fundador de la lógica Moderna y el Cálculo de Predicados. Pero dicha axiomatización resultó ser inconsistente (incohorente o contradictoria : el tricotaje de los axiomas acababa por dar paradojas), por lo cual debía ser corregida. Y la corrección fue propuesta en 1908 por Zermelo (1871-1953), quien introdujo, además, el famoso AXIOMA DE ELECCIÓN; y en 1922, Fraenkel (1891-1965) y Skolem (1887-1963) completaron dicha corrección, con la introducción de AXIOMA DE REEMPLAZO.

Por lo tanto, la TEORÍA DE CONJUNTOS MODERNA, o TEORÍA ZF, nació realmente en 1922; y hasta el presente no hay constancia de que dicha teoría sea inconsistente. Sin embargo, no es posible demostrar su consistencia, a causa del SEGUNDO TEOREMA DE INCOMPLETITUD DE GÖDEL, enunciado y demos-

trado en 1931 (ver próximo tema: Limitaciones matemáticas).

Apartado-5.

Al querer definir un CONJUNTO UNIVERSAL, $\mathcal{U}$, formado por todos los conjuntos concebibles, se cae en una paradoja que el propio Cantor avistó en su día: PARADOJA DE CANTOR. Por lo tanto, para soslayar esta paradoja, tenemos que afirmar que $\mathcal{U}$ es inexistente como conjunto y que no se puede definir como tal. En cambio, sí es posible definir un CONJUNTO REFERENCIAL, F, capaz de contener de manera particular todos aquellos conjuntos con los que se opera en un momento dado, pero evitando a toda costa dotar a F de carácter universal.

Suele decirse, entonces, que $\mathcal{U}$ es un UNIVERSO DE CONJUNTOS y no un conjunto. Y como universo, $\mathcal{U}$ puede contener a todos los conjuntos concebibles, pues $\mathcal{U}$ se considera abierto y no cerrado. Esto es interesante, porque introduce la noción de ENTIDAD ABIERTA e inconcebible como conjunto o entidad cerrada; por tanto, $\mathcal{U}$ no puede ser un objeto o ente matemático, aunque en él se pueda definir la pertenencia ($\in$) y la igualdad ($=$) para sus elementos o conjuntos:

$$\forall A,B \in \mathcal{U}: \; A=B \iff \begin{cases} \forall a \in A \Rightarrow a \in B \\ \forall b \in B \Rightarrow b \in A. \end{cases}$$

La TEORIA ZF es una construcción matemática de conjuntos puros, no mezclados con otros objetos que no sean conjuntos, y cuando en ella se escribe $x \in y$ ó $x=y$ se entiende implícitamente que $x,y \in \mathcal{U}$ son conjuntos. Por consiguiente, por premisa teórica, los elementos de un conjunto en TEORÍA ZF sólo pueden ser otros conjuntos, y esto por recursividad (de manera reiterativa). Y esta definición no presenta ninguna paradoja en matemáticas, pues todos los objetos matemáticos usuales (números naturales, enteros, racionales, reales y complejos, n-uplas, funciones, rectas, planos, vectores y así por el estilo) pueden ser redefinidos como conjuntos puros dentro de $\mathcal{U}$. De esta manera, pues, $\mathcal{U}$ puede llegar a ser considerado como universo de todos los objetos matemáticos y la noción de CONJUNTO sería un objeto matemático más.

Apartado-6.

La Teoría ZF consta actualmente de los siguientes 9 axiomas:

1).- Axioma de EXTENSIÓN, propuesto por Zermelo en 1908, y dice: "Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si sus elementos coinciden":

$$\forall A,B \in \mathcal{U}: \quad A=B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

2).- Axioma de ESPECIFICACIÓN, propuesto por Zermelo en 1908, y dice: "Dado un conjunto A y una propiedad P(x), con $x \in A$, existe un conjunto B cuyos elementos son aquellos elementos de A que verifican P(x)":

$$\forall A \in \mathcal{U} \,|\, \exists P(x) \,|\, x \in A: \ \exists B \in \mathcal{U} \,|\, x \in B \Leftrightarrow \begin{cases} x: P(x) \\ x \in A \end{cases}$$

3).- Axioma de APAREAMIENTO, propuesto por Zermelo en 1908, y dice: "Dados 2 conjuntos A y B, existe un conjunto C al que pertenecen A y B":

$$\forall A,B \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists C \in \mathcal{U} \left| \begin{matrix} A \in C \\ B \in C \end{matrix} \right.$$

4).- Axioma de la UNIÓN, propuesto por Zermelo en 1908, y dice: "Dada una colección de conjuntos A, existe un conjunto B formado por todos los elementos que pertenecen a los conjuntos que forman la colección A":

$$\forall A \in \mathcal{U}: \ \exists B \in \mathcal{U} \,|\, x \in B \Leftrightarrow \begin{cases} \exists y \in A \\ x \in y \end{cases}$$

5).- Axioma del CONJUNTO POTENCIA (Conjunto de las partes de un conjunto), propuesto por Zermelo en 1908, y dice: "Dado un conjunto A, existe un conjunto $\mathcal{P}(A)$ formado por todos los subconjuntos de A":

$$\forall A \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists \mathcal{P}(A) \,|\, [x \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow x \subset A].$$

6).- Axioma de INFINITO, propuesto por Zermelo en 1908, y dice: "Existe un conjunto W que contiene al conjunto vacío $\emptyset$ y es tal que $\forall x \in W$ sucede que W contiene al sucesor de x, denotándose suc(x) a dicho sucesor y definiendo $suc(x) = x \cup \{x\}$":

$$\exists W \in \mathcal{U} \,|\, \emptyset \in W \,|\, \forall x \in W \Rightarrow suc(x) \in W.$$

7).- Axioma de ELECCIÓN, propuesto por Zermelo en 1908, y dice: "Dada una colección de conjuntos A, existe una función f, llamada FUNCIÓN DE ELECCIÓN, que asigna a cada elemento $x \in A$, con $x \neq \emptyset$, un elemento $y \in x$":

$$\forall A \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists f \mid \forall x \in A \mid x \neq \emptyset \Rightarrow f(x) \in x.$$

8).- Axioma de SUSTITUCIÓN, introducido por Fraenkel en 1922, y dice: "Si P es una propiedad tal que para cada $x \in \mathcal{U}$ existe un único $y \in \mathcal{U}$ que verifica $P(x,y)$, entonces para todo conjunto $A \in \mathcal{U}$ existe un conjunto $B \in \mathcal{U}$ tal que $y \in B$ si y sólo si existe $x \in A$ tal que $P(x,y)$":

$$\left(\forall x,y,z \in \mathcal{U} \left| \begin{matrix} P(x,y) \\ P(x,z) \end{matrix} \right\} \Rightarrow y = z\right) \Rightarrow \left(\forall A \in \mathcal{U} : \exists B \in \mathcal{U} \mid y \in B \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \exists x \in A \\ P(x,y) \end{matrix} \right.\right)$$

9).- Axioma de REGULARIDAD, introducido por Zermelo y Von Neumann en 1930, y dice: "Dado un conjunto A no vacío, existe un elemento $x \in A$ que es disjunto con el propio A": $\forall A \in \mathcal{U} \mid A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in A \mid x \neq \emptyset \mid x \cap A = \emptyset.$

<u>Apartado-7</u>.

EL AXIOMA DE REGULARIDAD de la Teoría ZF dice que dado un conjunto $A \neq \emptyset$, existe un conjunto $B \in A$ tal que $A \cap B = \emptyset$. Un tal elemento $B \in A$ se denomina ELEMENTO MINIMAL de A. Por tanto, este Axioma de Regularidad dice, en otras palabras, que, dado un conjunto $A \neq \emptyset$, existe un conjunto $B \in A$ tal que si $C \in B$ entonces $C \notin A$. Ello conduce a una consecuencia que evita que la Teoría ZF sea vulnerable a la Paradoja de Russell. Dicha consecuencia es el teorema siguiente.

TEOREMA-1:

Dado un conjunto $A \in \mathcal{U}$, entonces se cumple $A \notin A$.

DEMOSTRACIÓN: Si $A = \emptyset$, entonces es obvio que $A \notin A$, puesto que por definición $\emptyset$ carece de elementos. Pero si suponemos que $A \neq \emptyset$ y $A \in A$, entonces es $\{A\} \subset A$, donde es $\{A\} \neq \emptyset$. Por el Axioma de Regularidad, $\exists B \in \{A\}$ tal que se cumple $B \cap \{A\} = \emptyset$. Pero como $\{A\}$ es un conjunto unitario (con un solo elemento), tiene que ser $B = A$, puesto que hemos dicho que $B \in \{A\}$. De $B \cap \{A\} = \emptyset$ y $B = A$ se sigue que $A \cap \{A\} = \emptyset$. De $B \in \{A\}$ y $B = A$ se sigue que $A \in \{A\}$. Y como hemos partido de la suposición de que $A \in A$ y hemos dicho que $A \in \{A\}$, entonces no nos queda más remedio que admitir que $A \in A \cap \{A\} = \emptyset$, lo cual es absurdo. Por tanto, $A \in A$ es falso, debiendo ser $A \notin A$, c.q.d.

El AXIOMA DE ELECCIÓN de la Teoría ZF viene a decir que si tenemos un conjunto no vacío A, siempre podremos elegir un elemento de cada una de las clases de A. Si A es finito, no hay problema. Pero si A es infinito (sabiendo a priori que hay una jerarquía infinita de distintos órdenes de infinitud), cabe la pregunta: ¿Podría completarse el proceso de elección? Bueno, el Axioma de Elección está puesto en la Teoría ZF para garantizar dogmáticamente el sí a dicha pregunta.

Si bien un AXIOMA es una verdad básica y evidente, al grado de que no precisa demostración, el Axioma de Elección, a pesar de llamarse Axioma, no resulta tan evidente cuando hablamos de conjuntos infinitos; hubiera sido más exacto llamarlo POSTULADO DE ELECCIÓN, más bien que Axioma. Es por esto, por lo que el Axioma de Elección se ha convertido en una premisa polémica en Teoría de Conjuntos. Dicho Axioma admite muchas expresiones sinónimas, como:

1).- Si A es un conjunto no vacío formado por clases de equivalencia, es posible elegir un elemento de cada clase de A y formar con todos los elementos elegidos otro conjunto B.

2).- Si A es una familia de conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos, existe un conjunto B que contiene un elemento de cada uno de esos conjuntos.

3).- Si A es un recipiente lleno de bolsas y cada bolsa contiene al menos un elemento, es posible crear otro recipiente B que contenga un elemento de cada una de las bolsas de A. Y esto es practicable cuando A contiene una cantidad finita de bolsas, pero impracticable (elección no viable, por infinitud del proceso) cuando la cantidad de bolsas de A es infinita, pues en dicho caso el mecanismo de llenado de B sería inacabable.

Kurt Gödel demostró (en la primera mitad del siglo XX) que si la Teoría ZF prescindía del Axioma de Elección y se le suponía consistente sin él, entonces también era consistente con dicho Axioma admitido. Este hallazgo causó gran revuelo en la

comunidad matemática, pues permitía vislumbrar una hipotética demostración del Axioma de Elección a partir de los restantes ocho axiomas de la Teoría ZF. Sin embargo, en 1963, Cohen demostró definitivamente que el Axioma de Elección es independiente de los otros ocho del Sistema ZF (Teoría ZF), o sea, no puede ser demostrado a partir de ellos.

Pero, a día de hoy, la polémica en torno al Axioma de Elección sigue en pie, aunque la mayoría de los matemáticos lo aceptan. Pero existe una corriente de matemáticos, denominada INTUICIONISMO, que rechaza dicho Axioma. Por otra parte, dicho Axioma se ha hecho imprescindible y no se puede rechazar sin cosechar graves implicaciones. Por ejemplo, ciertos resultados de gran importancia teórica, como el Principio de buena ordenación y el Lema de Zorn, serían imposibles de aceptar si se rechaza el Axioma de Elección.

Teorema de Cantor.

Apartado-1.

Dado un conjunto A cualquiera (vacío, finito o infinito), se llama CONJUNTO POTENCIA (o CONJUNTO DE LAS PARTES, o CONJUNTO DE LOS SUBCONJUNTOS) de A, y se denota $\mathcal{P}(A)$, al conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos que pueden formarse con los elementos de A. Se considera que el conjunto vacío ϕ tiene un conjunto potencia $\mathcal{P}(\phi)$ de cardinal unitario, es decir:

$$card(\phi)=0\ ;\quad card[\mathcal{P}(\phi)]=1$$

Ya que: $\mathcal{P}(\phi)=\{\phi\}$

TEOREMA-2:

El cardinal del conjunto potencia de un conjunto finito A es igual a 2 elevado al cardinal de A:

$$card[\mathcal{P}(A)]=2^{card(A)}$$

DEMOSTRACIÓN:

Para $A=A_0=\phi$, tenemos: $card[\mathcal{P}(\phi)]=1=2^0=2^{card(\phi)}$

Para $A=A_1=\{e_1\}$, siendo e_1 un elemento cualquiera, al que podemos designar genéricamente como e_1, obtenemos:

$$\mathcal{P}(A_1)=\{\phi,\{e_1\}\}=\{\phi,A_1\}$$

$$card\,[\mathcal{P}(A_1)] = 2 = 2^1 = 2^{card(A_1)}$$

Para $A = A_2 = \{e_1, e_2\}$, obtenemos:

$$\mathcal{P}(A_2) = \{\phi, \{e_1\}, \{e_2\}, A_2\};\ card\,[\mathcal{P}(A_2)] = 4 = 2^2 = 2^{card(A_2)}$$

Para $A = A_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$, obtenemos:

$$\mathcal{P}(A_3) = \{\phi, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_2, e_3\}, A_3\}$$

$$card\,[\mathcal{P}(A_3)] = 8 = 2^3 = 2^{card(A_3)}$$

Usando el método demostrativo de INDUCCIÓN COMPLETA, supongamos que el teorema es cierto para $A_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$:

$$card\,[\mathcal{P}(A_n)] = 2^{card(A_n)} = 2^n$$

Entonces, lo único que hay que probar es que el teorema es cierto para $A_{n+1} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}\}$. Es decir, hay que demostrar lo siguiente:

$$card\,[\mathcal{P}(A_{n+1})] = 2^{card(A_{n+1})} = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2 \cdot card\,[\mathcal{P}(A_n)]$$

Veamos:

$$A_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

$$A_{n+1} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}\} = A_n \cup \{e_{n+1}\}$$

Por ende:

$$\mathcal{P}(A_{n+1}) = \mathcal{P}[A_n \cup \{e_{n+1}\}]$$

Observándose que es posible establecer en $\mathcal{P}(A_{n+1})$ una partición π formada por 2 clases de equivalencia o subconjuntos disjuntos, a saber:

1).- Los subconjuntos de $\mathcal{P}(A_{n+1})$ que no contienen el elemento e_{n+1}; y éstos son todos los subconjuntos o elementos de $\mathcal{P}(A_n)$.

2).- Los subconjuntos o elementos de $\mathcal{P}(A_{n+1})$ que contienen al elemento e_{n+1}; y éstos son los elementos de $B = \mathcal{P}(A_{n+1}) - \mathcal{P}(A_n)$.

Por tanto:

$$\pi = \{\mathcal{P}(A_n), B\}$$

En consecuencia, lo único que hay que demostrar es lo siguiente:

$$card\,[\mathcal{P}(A_n)] = card\,(B)$$

Y esto se logra estableciendo una biyección β así:

$$\beta:\ \mathcal{P}(A_n) \longrightarrow B$$

Tal biyección es factible, pues basta con hacer corresponder a cada elemento $x \in \mathcal{P}(A_n)$ el elemento $y = (x \cup \{e_{n+1}\}) \in B$, resultando obvio que cada $x \in \mathcal{P}(A_n)$ posee un y sólo un elemento imagen $y \in B$. También, es evidente que cada $y \in B$ posee un y sólo un elemento antiimagen $x = (y - \{e_{n+1}\}) \in \mathcal{P}(A_n)$. Con esto, pues, queda demostrado el teorema.

Apartado-2.

En el apartado anterior ha sido demostrado el Teorema de Cantor para conjuntos finitos, dentro de la Teoría ZF: $\forall A \in \mathcal{U} \mid card(A) = n \Rightarrow card[\mathcal{P}(A)] = 2^{card(A)}$.

O sea: $\forall A \in \mathcal{U} \mid card(A) = n \Rightarrow card(A) < card[\mathcal{P}(A)]$

Falta, pues, demostrar el mismo teorema para A infinito, dentro de la Teoría ZF. Tal es el TEOREMA DE CANTOR propiamente dicho, en el seno de la Teoría ZF, a saber:

TEOREMA-3:

Siendo A un conjunto cualquiera (vacío, finito o infinito), se cumple: $card(A) < card[\mathcal{P}(A)]$.

DEMOSTRACIÓN: Siendo $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots\}$ el conjunto de todas las posibles aplicaciones de A en $\mathcal{P}(A)$: $\alpha_i : A \to \mathcal{P}(A)$

Basta probar que $\forall \alpha_i \in \alpha$ es $\alpha_i : A \to \mathcal{P}(A)$ una inyección no sobreyectiva; es decir, $\forall \alpha_i \in \alpha$ se cumple que $\exists y \in \mathcal{P}(A)$ tal que $y \in \mathcal{P}(A)$ carece de antiimagen en A. O sea:

$$\exists y \in \mathcal{P}(A) \mid \nexists x \in A \mid y = \alpha_i(x).$$

Ello garantizaría que:

$$card(A) \neq card[\mathcal{P}(A)]$$
$$card(A) \leqslant card[\mathcal{P}(A)]$$

Es decir, que: $card(A) < card[\mathcal{P}(A)]$.

Se hace evidente que tiene que existir un subconjunto particular y bien definido $B \in \mathcal{P}(A)$ tal que:

$$B = \{x \in A \mid x \notin \alpha_i(x) = y \mid y \in \mathcal{P}(A)\} = A - \alpha_i(x).$$

Y debemos probar únicamente que: $\nexists z \in A \mid \alpha_i(z) = B$.

Lo cual es factible por reducción al absurdo, suponiendo que $\exists a \in A$ tal que $\alpha_i(a) = B$; distinguiéndose 2 opciones:

1).- Admitir que $a \in B$, con lo cual, por definición de B, obtendríamos la contradicción: $a \notin B$.

2).- Admitir que $a \notin B$, con lo cual, por definición de B, obtendríamos la contradicción: $a \in B$.

Por tanto, se cumple: $\exists B \in \mathcal{P}(A) \mid \nexists a \in A \mid \alpha_i(a) = B$

O sea: $card(A) < card[\mathcal{P}(A)]$, c.q.d.

Apartado-1.

La COORDINABILIDAD DE CONJUNTOS (ver apartado-1, página 1) puede definirse mediante una relación denotada por $\sim$, denominada "tener la misma cardinalidad". Así, dos conjuntos A y B son coordinables entre sí, escribiéndose $A \sim B$, si se cumple que $card(A) = card(B)$:

$$\forall A, B \in \mathcal{U} \mid A \sim B \Rightarrow card(A) = card(B).$$

También: $\forall A, B \in \mathcal{U} \mid card(A) = card(B) \Rightarrow A \sim B.$

ya que si $card(A) = card(B)$, entonces es posible encontrar una aplicación biyectiva $\beta : A \to B$. Más brevemente, escribiremos: $\forall A, B \in \mathcal{U} : \quad A \sim B \Leftrightarrow card(A) = card(B).$

De donde: $A \sim B \Leftrightarrow B \sim A.$

Y esto permite establecer una clasificación o partición en $\mathcal{U}$ mediante $\sim$, en clases de equivalencia, con $\mathcal{U}/_{\sim}$ como conjunto cociente; siendo los elementos de $\mathcal{U}/_{\sim}$ las distintas clases o partición generada en $\mathcal{U}$ por $\sim$. Y como toda relación de equivalencia, $\sim$ cumple las siguientes propiedades en $\mathcal{U}$:

1).- Reflexividad: $\forall A \in \mathcal{U} \Rightarrow A \sim A.$

2).- Simetría: $\forall A, B \in \mathcal{U} \mid A \sim B \Rightarrow B \sim A.$

3).- Transitividad: $\forall A, B, C \in \mathcal{U} \mid A \sim B \mid B \sim C \Rightarrow A \sim C.$

Apartado-2.

Del apartado anterior se desprende que todos los conjuntos del universo $\mathcal{U}$ pueden ser organizados en Clases o Grupos disjuntos, de acuerdo a su cardinalidad o tamaño. Así, dos conjuntos A y B aparecerán en el mismo grupo si y sólo si tienen el mismo cardinal.

Centrándonos en los conjuntos infinitos, a continuación veremos que los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ pertenecen a una misma clase de equivalencia en $\mathcal{U}/_{\sim}$, la clase de todos los CONJUNTOS INFINITOS NUMERABLES. Por lo tanto, la cardinalidad o potencia de $\mathbb{N}$ (conjunto de los números naturales) es la misma que la de $\mathbb{Z}$ (conjunto de los números enteros) y la de $\mathbb{Q}$ (conjunto de los números racionales), y a dicha cardinalidad se la conoce como

La POTENCIA DEL NUMERABLE, y se representa por el número transfinito $\aleph_0$ (alef-sub-cero):

$$card(N) = card(Z) = card(Q) = \aleph_0$$

Sin embargo, R (conjunto de los números reales) y C (conjunto de los números complejos) pertenecen a otra clase de $U/_{\sim}$ llamada Clase de todos los CONJUNTOS INFINITOS INNUMERABLES o NO NUMERABLES, siendo $card(R) = card(C) = \aleph_1$ (alef-sub-uno), o POTENCIA DEL CONTINUO, representada por el número transfinito $\aleph_1$. Y sucede que:

$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0} = 2^{card(N)} = card[P(N)]$$

De donde:

$$\aleph_0 < \aleph_1$$

O sea:

$$card(N) < card(R)$$

<u>Nota</u>: De la misma manera que al cardinal o potencia de un conjunto finito se le llama NÚMERO NATURAL, al cardinal o potencia de un conjunto infinito se le denomina NÚMERO TRANSFINITO (de TRANS, más allá; y FINITO).

<u>Apartado-3.</u>

Hay que matizar que U queda dividido o particionado en 2 clases disjuntas entre sí, U_F y U_I; siendo U_F la clase o universo de los conjuntos finitos y U_I la clase o universo de los conjuntos infinitos. A su vez, U_I queda dividido o particionado en 2 clases disjuntas entre sí, U_{IN} y U_{II}; siendo U_{IN} la clase o universo de los conjuntos infinitos numerables y U_{II} la clase o universo de los conjuntos infinitos innumerables. Usamos la palabra UNIVERSO para todas estas clases (U, U_F, U_I, U_{IN} y U_{II}) porque todas ellas son afectadas por la Paradoja de Cantor (página 10, apartado 5) si, a priori, suponemos que son conjuntos. A U_{II} llamaremos UNIVERSO DE CONJUNTOS INFINITOS INNUMERABLES; y tendremos:

$$U_{IN}/_{\sim} = \{cl(\aleph_0)\}$$

$$U_{II}/_{\sim} = \{cl(\aleph_1), cl(\aleph_2), cl(\aleph_3), \ldots, cl(\aleph_n), \ldots\}$$

Donde:

$$\aleph_0 = card(N)$$

$$\aleph_1 = card[P(N)] = 2^{card(N)} = card(R) = 2^{\aleph_0}$$

$$\aleph_2 = card(P[P(N)]) = 2^{\aleph_1}$$

$\aleph_3 = 2^{\aleph_2}$

- - - - - - -

$\aleph_n = 2^{\aleph_{n-1}}$

- - - - - - - -

Siendo $cl(\aleph_i)$, con $i \in N$, la clase de equivalencia de $U_{II}/_{\sim}$ formada por todos los conjuntos de U_{II} coordinables entre sí o de cardinalidad $\aleph_i$. Y de todo esto resulta una JERARQUÍA infinita de cardinales infinitos:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots < \aleph_n < \dots$$

Cantor afirmó que entre $\aleph_0$ y $\aleph_1$ no existe otro cardinal intermedio infinito, pero esto no se ha podido probar. Es una premisa indecidible en la Teoría ZF, y su asunción se denomina HIPÓTESIS DEL CONTINUO: "Entre $\aleph_0 = card(N)$ y $\aleph_1 = card[\mathcal{P}(N)] = card(R)$ no existe un cardinal infinito γ tal que $\aleph_0 < \gamma < \aleph_1$". Esta hipótesis, generalizada, dice: "Entre $\aleph_n$ y $\aleph_{n+1}$ no existe γ tal que $\aleph_n < \gamma < \aleph_{n+1}$".

<u>Apartado-4.</u>

Todo conjunto de U_F se llama CONJUNTO FINITO NUMERABLE, pues si $A \in U_F$ entonces $card(A) = n \in N$. Y todo conjunto de F_I se dirá CONJUNTO INFINITO NUMERABLE si y sólo si es posible encontrar al menos una inyección entre ese conjunto y N. Así, si $B \in F_I$ y es posible establecer una inyección f de B en N: $f: B \to N$ (inyección)

entonces, evidentemente: $card(B) \leq card(N)$

Y como no hay ningún conjunto $X \in U_I$ tal que:

$$card(N) > card(X)$$

Entonces: $f: B \to N \Rightarrow card(B) = card(N)$.

TEOREMA-4:

El conjunto N, de los números naturales, es numerable.

DEMOSTRACIÓN: Trivial, pues existe una biyección, que es la aplicación identidad $i: N \to N$, que, por ser biyección también es inyección, con lo cual, esto hace que $i: N \to N$ sea una inyección, c.q.d.

TEOREMA-5: Todo subconjunto infinito de un conjunto numerable, es numerable.

DEMOSTRACIÓN: Trivial.

TEOREMA-6: El conjunto producto cartesiano $N^2 = N \times N$ es numerable.

DEMOSTRACIÓN: Existe la inyección $f: N^2 \to N$ dada por:

$$\forall (a,b) \in N^2 \Rightarrow \exists n \in N \mid f(a,b) = 2^a \cdot 3^b$$

Donde: $2^a \cdot 3^b = 2^c \cdot 3^d \Leftrightarrow 2^{a-c} \cdot 2^{b-d} = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-c=0 \\ b-d=0 \end{cases} \Leftrightarrow (a,b) = (c,d)$$

c.q.d.

TEOREMA-7: Siendo A un conjunto numerable, el conjunto $A^2 = A \times A$ es numerable.

DEMOSTRACIÓN: Si A es numerable, entonces, por definición es $card(A) = card(N)$. Por tanto:

$$card(A^2) = card(N^2) = card(N)$$

c.q.d.

TEOREMA-8: $\forall n \in N$ se cumple que $N^n = \overbrace{N \times N \times \ldots \times N}^{n \text{ veces}}$ es numerable.

DEMOSTRACIÓN: Corolario del teorema-6 anterior.

TEOREMA-9: Siendo $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ una colección finita de conjuntos A_i numerables, entonces se cumple que el producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ es numerable.

DEMOSTRACIÓN: Como $Card(A_i) = card(N)$, resulta que:

$$card(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = card(N^n) = card(N)$$

c.q.d.

TEOREMA-10: Siendo $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ una colección numerable de conjuntos A_i numerables y siendo A una partición, entonces la unión $\cup A_i$ de todos los A_i es numerable.

DEMOSTRACIÓN: Como A es numerable, es $card(A) = card(N)$.

También, $\forall A_i \in A$ es $card(A_i) = card(N)$. Además, como A es una partición, entonces para cualesquier $A_i, A_j \in A$, con $i \neq j$, se cumple $A_i \cap A_j = \phi$. El símbolo $\cup A_i$ significa la unión de todos los elementos de A, o sea:

$$\cup A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$$

y lo que hay que demostrar es lo siguiente:

$$card(\cup A_i) = card(N).$$

Veamos, por ser los A_i numerables, existen aplicaciones inyectivas $f_i : A_i \to N$ para todo $i \in I$. Ello permite definir una aplicación $f: \cup A_i \to I \times N$ tal que $f(a) = [i, f_i(a)]$ para todo $a \in A_i$, la cual es inyectiva porque:

$$[i, f_i(a)] = [j, f_j(b)] \Rightarrow i = j$$
$$f_i(a) = f_j(b) \Rightarrow \begin{cases} i = j \\ a = b \end{cases}$$

Como I es numerable y N también, entonces $I \times N$ es numerable y consecuentemente también $\cup A_i$, c.q.d.

TEOREMA-11: **Siendo $A = \{A_i \mid i \in I = N\}$ una colección infinita numerable de conjuntos A_i numerables, es la unión $\cup A_i$ de todos los A_i también numerable.**

DEMOSTRACIÓN: Si A es una partición, el teorema anterior sirve ahora de demostración. Pero si A no es partición, entonces $\exists A_i, A_j \in A$ tales que $A_i \cap A_j \neq \phi$, con $i \neq j$. Por lo tanto, consideremos la colección o familia de conjuntos B, definida así:

$$B = \{B_i \mid i \in I\}$$
$$B_1 = A_1$$
$$B_n = A_n - \bigcup_1^{n-1} A_k \quad , \text{con } n \geq 2$$

Claramente, la familia B es numerable y una partición, ya que $\forall B_i, B_j \in B \Rightarrow B_i \cap B_j = \phi$, con $i \neq j$. Además, es trivial que $\cup A_i = \cup B_i$, ya que $\cup B_i \subset \cup A_i$; y para probar que $\cup B_i \supset \cup A_i$, o que $\cup A_i \subset \cup B_i$, consideremos que $x \in \cup A_i$ y es i_1 el primer índice tal que $x \in A_{i_1}$ y $x \notin A_i$ para $i < i_1$. Es decir, $x \notin \bigcup_1^{i_1-1} A_i$, con lo que $x \in A_{i_1} - \bigcup_1^{i_1-1} A_i = B_{i_1}$, lo que implica que $x \in B_i$. Así se prueba que $\cup A_i \subset \cup B_i$. En consecuencia, al ser $\cup A_i = \cup B_i$ y B una partición, es, por teorema anterior, $\cup A_i$ numerable, c.q.d.

TEOREMA-12:

El conjunto Z de los números enteros, es numerable.

DEMOSTRACIÓN: Notando por Z^+ al conjunto de los enteros positivos y por Z^- al de los enteros negativos, tendremos:

$$Z = Z^+ \cup \{0\} \cup Z^-$$

Como Z^+ y Z^- son numerables, también lo es Z (teorema-11).
c.q.d.

TEOREMA-13:

El conjunto Q de los números racionales, es numerable.

DEMOSTRACIÓN: La aplicación $h: Q \to Z \times Z$ definida por $h\left(\frac{a}{b}\right) = (a,b)$, donde $mcd(a,b)=1$, es obviamente una inyección. Como $Z \times Z$ es numerable (teoremas previos), también lo es Q.
c.q.d.

TEOREMA-14:

El conjunto R de los números reales, es innumerable.

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que el intervalo abierto $I=(0,1) \subset R$ es innumerable. En efecto, si fuera numerable entonces sus elementos puntuales constituirían una sucesión numerable de valores de la forma:

$$x_1 = 0'a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \dots$$
$$x_2 = 0'a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \dots$$
$$\text{----------}$$
$$x_n = 0'a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{nn} \dots$$
$$\text{----------}$$

siendo $a_{ij} \in \{0,1,2,3,\dots,9\}$ y donde cada decimal contiene un número infinito de cifras distintas de cero. Tomemos entonces el número real $y = 0'b_1\, b_2 \dots b_n \dots$ tal que todo $b_i \neq 0$, y además $b_1 = a_{11}$, $b_2 = a_{22}, \dots, b_n = a_{nn}, \dots$

Resultará, pues, que $y \in (0,1)$ pero es distinto de todos los x_i, lo cual es una contradicción. En consecuencia, $I=(0,1)$ es innumerable (no numerable) y también R. Los únicos casos en los que 2 decimales con cifras distintas pueden coincidir son los del tipo $0'5000\dots$ y $0'4999\dots$, pero éstos difieren del caso que hemos considerado. c.q.d.

TEOREMA-15:

$$card(R) = card[\mathcal{P}(N)] = 2^{card(N)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Se puede probar (aquí no lo haremos) que existe una biyección entre los elementos o puntos del intervalo real $I=(0,1)\subset R$ (un intervalo abierto) y el propio $R=(-\infty,+\infty)$, quedando entonces:

$$card(I)=card(R)$$

Por otra parte, todo $x\in I$ es expresable mediante un número decimal de infinita (infinito-numerable, o $\aleph_0$) cantidad de cifras: $0'abc\ldots d\ldots$

donde:

$$a,b,c,\ldots,d,\ldots\in D=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

Pero también dicho decimal, dado en base 10, puede ser expresado en base 2 (base binaria). Así, para todo $x\in I$, con $x=0'abc\ldots_{(10}$, existe uno y sólo un $y=0'\alpha\beta\gamma\ldots_{(2}$, donde:

$$\alpha,\beta,\gamma,\ldots\in B=\{0,1\}$$

Tal que $x=y$; y viceversa.

Obviamente, para escoger α en $0'\alpha\beta\gamma\ldots$ hay 2 posibilidad (0, ó 1), y lo mismo para escoger $\beta,\gamma,\ldots$ (hasta escoger un total de $\aleph_0$ dígitos binarios). Hay, pues, $2\cdot2\cdot2\cdots$ (con $\aleph_0$ veces el factor 2) posibilidades de dotar a cada $y\in I$ de sus infinitos (infinito-numerables) dígitos binarios, o sea, $2^{\aleph_0}$ posibilidades. En consecuencia:

$$card(I)=card(R)=2^{\aleph_0}=2^{card(N)}=card[\mathcal{P}(N)].$$ c.q.d.

TEOREMA-16: $\forall n\in N:\quad card(R^n)=card(R).$

DEMOSTRACIÓN: Por teorema-8 anterior: $card(N^n)=card(N)$

De donde: $\aleph_0{}^n=\aleph_0$

Por tanto: $card(R^n)=\aleph_1{}^n=(2^{\aleph_0})^n=2^{n\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\aleph_1.$ c.q.d.

Números transfinitos.

Apartado-1.

Se llaman NÚMEROS TRANSFINITOS a los cardinales infinitos, a saber:

$$\aleph_0=card(N)$$
$$\aleph_1=card(R)$$
$$\aleph_2=card[\mathcal{P}(R)]=card(\rho)\quad|\ \rho=\mathcal{P}(R)$$
$$\aleph_3=card[\mathcal{P}(\rho)]$$
$$\cdots\cdots$$
$$\aleph_n=card[\mathcal{P}(\tau)]$$
$$\cdots\cdots$$

Por lo tanto, tenemos la siguiente JERARQUÍA infinita de números transfinitos, ordenados de menor a mayor: $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots < \aleph_n < \dots$

Apartado-2.

Las propiedades (algunas propiedades) de los números transfinitos son las siguientes (que enunciaremos si demostración de las mismas):

1).- $\aleph_0 = \aleph_0^n = card(N) \quad | n \in N.$

2).- $\aleph_1 = 2^{\aleph_0} = n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_1^{\aleph_0} = card(R).$

3).- $\aleph_2 = 2^{\aleph_1} = \aleph_1^{\aleph_1} = \aleph_2^{\aleph_1} = card[\mathcal{P}(R)]$

4).- $\aleph_n = 2^{\aleph_{n-1}} = \aleph_{n-1}^{\aleph_{n-1}} = \aleph_n^{\aleph_{n-1}}$

Apartado-3.

Como el conjunto C de los números complejos es biyectable sobre R^2, o viceversa, tenemos: $card(C) = card(R) = \aleph_1$

En el tema anterior (tema 9: R-espacio vectorial V_L^2), página 9, se expresó: $card\left[\mathcal{E}_3^{oxyz}\right] < card\left[\mathcal{F}_3^{oxyz}\right]$

Donde: $card\left[\mathcal{E}_3^{oxyz}\right] = card(R^3) = card(R)$

$$card\left[\mathcal{F}_3^{oxyz}\right] = card(R)^{card(R)} = \aleph_1^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1} = card[\mathcal{P}(R)]$$

Sin embargo, es errónea la conclusión:

$$card\left[\mathcal{F}_3^{oxyz}\right] = card[\mathcal{P}(R)] = 2^{\aleph_1}$$

Porque: $card\left[\mathcal{F}_3^{oxyz}\right] = card(R) + card(R) + \dots [card(R) \text{ veces}] = \aleph_1 \cdot \aleph_1 = \aleph_1^2 = \aleph_1$

Pues:

$$\left.\begin{array}{l} \aleph_1 \leq \aleph_1^2 \\ \aleph_1^2 \leq \aleph_1^{\aleph_0} \\ \aleph_1 = \aleph_1^{\aleph_0} \end{array}\right\} \Rightarrow \aleph_1^2 = \aleph_1$$

En consecuencia, es: $card\left[\mathcal{F}_3^{oxyz}\right] = card(R).$