Física teórica
MECÁNICA
Cinemática tensorial

Tema 5
Dimensionalidad

Sinopsis

Tema 5... Dimensionalidad.

Introducción. Subconjunto. Subconjunto propio. Subconjunto impropio. Superconjunto. Superconjunto propio. Superconjunto impropio. Inclusión. Subestructura. Subestructura propia. Subestructura impropia. Superestructura. Superestructura propia. Superestructura impropia **(página 1)**.

Subespacios y superespacios vectoriales, propios e impropios. Subestructuras de (V, K) . Sistema. Sistema n -ario. Sistema generador. Teorema 1 **(página 2)**.

Sistema libre. Teorema 2. Sistema ligado. Teoremas 3, 4 y 5 **(página 3)**.

Base. Base. Componente i -ésima. Teoremas 6 y 7 **(página 4)**.

Espacio vectorial finitamente generado. Teoremas 8, 9, 10, 11, 12 y 13. Teorema de la base **(páginas 5 y 6)**.

Dimensión. Dimensión. Teoremas 14, 15 y 16 **(página 7)**.

Introducción. (1).Apartado-1 (1).

Subconjunto. Subconjunto propio. Subconjunto impropio.

Superconjunto. Superconjunto propio. Superconjunto impropio.

Inclusión.

Apartado-2 (1)

Subestructura. Subestructura propia. Subestructura impropia. Superestructura. Superestructura propia. Superestructura impropia.

Apartado-3 (2).

Subespacios y superespacios vectoriales, propios e impropios.

Apartado-4 (2).

Subestructuras de (V, K) .

Apartado-5 (2).

Sistema. Sistema n -ario. Sistema generador. Teorema-1.

Apartado-6 (3).

Sistema libre. Teorema-2.

Apartado-7 (3).

Sistema ligado. Teoremas 3, 4 y 5.

Base. (4).Apartado-1 (4).

Base. Componente i -ésima. Teoremas 6 y 7.

Apartado-2 (5).

Espacio vectorial finitamente generado. Teoremas 8, 9, 10, 11 y 12. Teorema 13. Teorema de la Base.

Dimensión. (7).Apartado-1 (7).

Dimensión. Teoremas 14, 15 y 16.

Introducción.Apartado-1.

Dado un conjunto A y un subconjunto B de A , la relación $\subseteq$ significa "incluido o igual a" y es prácticamente equivalente a la relación $\subset$, que significa "incluido en", pues $\subset$ contempla la posibilidad de la inclusión impropia (es decir, la posibilidad de que un conjunto se incluya a sí mismo). En ambos casos, sea que se escriba $B \subseteq A$ o se escriba $B \subset A$, se dirá que B es SUBCONJUNTO de A ; y si sucede que $B \subset A$ y $B \neq A$, entonces se dice que B es SUBCONJUNTO PROPIO de A ; pero si $B = A$, entonces se dirá que B es SUBCONJUNTO IMPROPIO de A . Todo esto nace de la misma definición de INCLUSIÓN, a saber: "Se dice que un conjunto B está incluido o contenido en otro A cuando todo elemento de B también pertenece a A ".

La relación $B \subset A$, o $B \subseteq A$, también se puede escribir $A \supset B$, o $A \supseteq B$. Y cuando $B \neq A$ se dirá que A es SUPERCONJUNTO PROPIO de B , pero cuando $B = A$ se dirá que A es SUPERCONJUNTO IMPROPIO de B . Evidentemente, cuando A es superconjunto impropio de B también es B subconjunto impropio de A ; ambas denominaciones, pues, son sinónimas. De la misma forma, si A es superconjunto propio de B es por que B es subconjunto propio de A .

Apartado-2.

Siendo $(A, *)$ una estructura algebraica determinada, se dirá que $(B, *)$ es una SUBESTRUCTURA de $(A, *)$ cuando $B \subset A$, de tal manera que si $B \neq A$ se dirá que $(B, *)$ es una SUBESTRUCTURA PROPIA de A , en tanto que si $B = A$ se dirá que $(B, *)$ es una SUBESTRUCTURA IMPROPIA de $(A, *)$. Por su parte, $(A, *)$ se dice SUPERESTRUCTURA de $(B, *)$, siendo PROPIA cuando $A \neq B$ e IMPROPIA cuando $A = B$. Si $(B, *)$ es subestructura propia de $(A, *)$ es porque $(A, *)$ es superestructura propia de $(B, *)$, o viceversa; y si $(B, *)$ es subestructura

impropia de $(A, *)$ es porque $(A, *)$ es superestructura impropia de $(B, *)$, o viceversa. 3.

Apartado-3.

Siendo $[(V, \oplus), (K, *, \cdot), \odot] \equiv (V, K)$ un espacio vectorial y siendo (W, K) un subespacio vectorial de (V, K) , se dirá que (W, K) es un SUBESPACIO VECTORIAL PROPIO de (V, K) cuando $W \subset V$ y $W \neq V$, y se dirá que (W, K) es SUBESPACIO VECTORIAL IMPROPIO de (V, K) cuando $W = V$. Por su parte, (V, K) es SUPERESPACIO VECTORIAL de (W, K) , PROPIO cuando $V \supset W$ y $V \neq W$ e IMPROPIO cuando $V = W$.

Las estructuras $(V, \oplus)$, $(K, *, \cdot)$, $(K, *)$, $(K^*, \cdot)$ y (W, K) son SUBESTRUCTURAS PROPIAS de (V, K) , siendo (V, K) una SUPERESTRUCTURA PROPIA de cada una de ellas. A su vez, (V, K) es subestructura y superestructura impropias de (V, K) .

Apartado-4.

En el espacio vectorial $(V, K) \equiv [(V, \oplus), (K, *, \cdot), \odot]$ es $(V, \oplus)$ una subestructura de (V, K) con estructura de grupo abeliano y $(K, *, \cdot)$ es una subestructura de (V, K) con estructura de cuerpo conmutativo. Por su parte, $(K, *)$ es una subestructura de $(K, *, \cdot)$ con estructura de grupo abeliano y $(K^*, \cdot)$ es una subestructura de $(K, *, \cdot)$ con estructura de grupo abeliano, siendo $K^* = K - \{e\}$ tal que $e \in K$ es el elemento neutro de $(K, *)$.

Apartado-5.

En un espacio vectorial (V, K) , todo conjunto finito $S \subset V$, tal que $S \neq \emptyset$, se llama SISTEMA de V en (V, K) . Para $\text{card}(S) = n$, se dice que $S \equiv S_n$ es un SISTEMA N-ARIO de V . Todas las combinaciones de un sistema S_n dan lugar a un subconjunto de V que denotaremos por $[S_n]$, y a S_n se le llamará SISTEMA GENERADOR de $[S_n] \subset V$.

TEOREMA-1:

Siendo $S_n \subset V$ un sistema del espacio vectorial (V, K) , es $([S_n], K)$ un subespacio vectorial de (V, K) .

DEMOSTRACIÓN:

Página 5 del Tema-4 (independencia lineal).

Apartado-6.

3.

Siendo $S_n \subset V$ un sistema n -ario de V en el espacio vectorial (V, K) , se dirá que S_n es un SISTEMA LIBRE (o Linealmente Independiente) de V en (V, K) cuando ningún elemento $v_k \in S_n$ puede ser engendrado por el sistema $(n-1)$ -ario $S_{n-1} = S_n - \{v_k\}$ en (V, K) .

TEOREMA-2:

Siendo $S_n \subset V$ un sistema n -ario en (V, K) , S_n es libre si y sólo si cumple las 2 condiciones siguientes:

1).- $\forall v_i \in S_n \Rightarrow v_i \neq 0$.

2).- $\forall \sum_{i=1}^n r_i v_i = 0 \Rightarrow r_i = e$.

Siendo $0 \in V$ el elemento neutro de $(V, \oplus)$ y $e \in K$ el elemento neutro de $(K, *)$.

DEMOSTRACIÓN:

Página 8 del tema-4 (Independencia Lineal), teorema-10.

Apartado-7.

Siendo $S_n \subset V$ un sistema n -ario de V en el espacio vectorial (V, K) , se dirá que S_n es un SISTEMA LIGADO (o Linealmente dependiente) de V en (V, K) cuando $\exists v_k \in S_n$ engendrable o generable por el sistema $S_{n-1} = S_n - \{v_k\} \subset V$.

TEOREMA-3:

Siendo $S_n \subset V$ un sistema n -ario de (V, K) , S_n es ligado si y sólo si cumple una y sólo una de las 2 condiciones siguientes:

1).- $\forall v_i \in S_n \Rightarrow \exists v_k \in S_n \mid v_k = 0$.

2).- $\forall \sum_{i=1}^n r_i v_i = 0 \mid v_i \neq 0 \Rightarrow \exists r_k \neq e$.

Siendo $0 \in V$ el elemento neutro de $(V, \oplus)$ y $e \in K$ el elemento neutro de $(K, *)$.

DEMOSTRACIÓN:

Página 9 del tema-4 (Independencia Lineal).

TEOREMA-4:

En el espacio vectorial (V, K) , si un $v \in V$ es combinación lineal de un sistema libre $S_n \subset V$, dicha combinación lineal

es única.

4.

DEMOSTRACIÓN: Página 10 del tema-4 (independencia lineal).

TEOREMA-5:

Siendo $S_n \subset V$ un sistema de (V, K) y siendo $S_m \subset S_n$, con $m \leq n$, sucede que si S_n es libre entonces S_m es libre.

DEMOSTRACIÓN: Página 10 del tema-4 (independencia lineal).

Base.

Apartado-1.

Siendo $(V, K) \equiv [(V, \oplus), (K, +, \cdot), \odot]$ un espacio vectorial, diremos que un $S_n = B \subset V$ es una BASE de (V, K) si S_n es linealmente independiente y es un sistema generador de V . Entonces, siendo $B = S_n = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, resultará que todo $v \in V$ se podrá escribir como combinación lineal de B y dicha combinación lineal será única (teorema 4 anterior):

$$\forall v \in V \Rightarrow v = \sum_{i=1}^n r_i u_i \quad | r_i \in K; u_i \in B.$$

Cada coeficiente $r_i \in K$ que entra a formar parte de la combinación lineal se le llamará COMPONENTE i -ésima de $v \in V$ en base B .

TEOREMA-6:

Sea $S_p \subset V$ un sistema generador de V en el espacio vectorial (V, K) , con $p \in \mathbb{N}$; y sea L un subconjunto de S_p linealmente independiente. En tales condiciones, existe una base B de (V, K) tal que $L \subset B \subset S_p$.

DEMOSTRACIÓN:

Si suponemos $B \neq S_p$, entonces $\exists v \in (S_p - B)$ tal que $v \in [B]$, por definición de Base. También, por definición de Sistema Ligado, es $S_p = B \cup \{v\}$ un sistema ligado. Si suponemos $L \neq B$, entonces $\exists u \in B$ tal que $u \notin L$; es decir, será $u \in (B - L)$. Por teorema 5 anterior, L es libre. Esto significa que $u \notin [L]$, pues si $u \in [L]$ entonces B sería un sistema ligado, por definición de sistema ligado y contra la definición de B . Por consiguiente, $u \notin [L]$ y $u \in B$ y $u \in V$. Es decir, $[L] \neq V$ y $[L] \subset V$; o sea, L no genera a V . c.q.d.

TEOREMA-7:

5.

Todo espacio vectorial (V, K) con un sistema generador finito (de cardinal finito) y tal que $V \neq \{0\}$, posee al menos una base B ; es decir, un subconjunto finito B tal que $[B]=V$.

DEMOSTRACIÓN:

Corolario del teorema anterior.

Apartado-2.

Se dirá que un espacio vectorial (V, K) es (o está) **FINITAMENTE GENERADO** cuando $\exists S_n \subset V$ tal que $[S_n]=V$ y $n \in \mathbb{N}$, siendo $n = \text{card}(S_n)$ un natural finito.

TEOREMA-8:

Siendo (V, K) un espacio vectorial finitamente generado, si $\exists S_p \subset V$ tal que S_p es un sistema libre pero $[S_p] \neq V$, entonces se cumple que $\exists S_m \subset V$ tal que $S_p \cup S_m = B$, siendo B una base de (V, K) .

DEMOSTRACIÓN:

Corolario del teorema-6 anterior.

TEOREMA-9:

Siendo S_n un sistema libre del espacio vectorial (V, K) , siendo $w \in V$ tal que $w \notin S_n$ y siendo $S_{n+1} = S_n \cup \{w\}$ un sistema ligado de (V, K) , entonces se cumple que $w \in [S_n]$.

DEMOSTRACIÓN:

Página 11 del tema-4 (independencia lineal), teorema 20.

TEOREMA-10:

Siendo S_n un sistema ligado de (V, K) tal que $[S_n]=V$, entonces $\exists w \in S_n$ tal que $S_{n-1} = S_n - \{w\}$ cumple $[S_{n-1}]=V$.

DEMOSTRACIÓN:

Página 11 del tema 4 (independencia lineal), teorema 19.

TEOREMA-11:

Siendo S_n un sistema de (V, K) tal que $[S_n]=V$, entonces $\exists S_m$ tal que $S_m \subset S_n$ y tal que $[S_m]=V$, siendo S_m libre.

DEMOSTRACIÓN:

Corolario de los teoremas 6, 9 y 10 anteriores.

TEOREMA-12:

Siendo S_n un sistema ligado de (V, K) tal que $[S_n]=V$, entonces es posible extraer una base $B \subset S_n$ y tal que $B \neq S_n$ y tal que $[B]=V$.

DEMOSTRACIÓN:

Corolario del teorema anterior.

TEOREMA-13 (teorema de la Base):

6.

Todas las bases de un mismo espacio vectorial (V, K) , finitamente generado, poseen el mismo cardinal (es decir, tienen la misma cantidad de elementos).

DEMOSTRACIÓN:

Sean A y B sendas bases de (V, K) tales que $A \neq B$, con $\text{card}(A) = n$ y $\text{card}(B) = m$:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$$

El conjunto $A \cup \{b_1\} = A_1$ es un sistema ligado de (V, K) , pues $b_1 \in V$ se puede expresar como combinación lineal de A . Además, $\text{card}(A_1) = n+1$, $b_1 \neq 0$, siendo $0 \in V$ el elemento neutro de $(V, \oplus)$ y $[A_1] = V$. Por el teorema anterior, se puede extraer una base A_2 de A_1 tal que $A_2 \subset A_1$ y $A_2 \neq A_1$, con lo que $\text{card}(A_2) < \text{card}(A_1)$:

$$A_2 = \{b_1, a_1, a_2, \dots, a_p\}$$

Tal que:

$$\text{card}(A_2) < \text{card}(A_1) \Rightarrow p+1 < n+1 \Rightarrow p < n \Rightarrow 1+p \leq n.$$

En virtud del teorema 5 anterior, a partir del sistema ligado $A_2 \cup \{b_2\} = A_3$, tal que $[A_3] = V$, se puede extraer otra base A_4 tal que $A_4 \subset A_3$ y $A_4 \neq A_3$:

$$A_4 = \{b_1, b_2, a_1, a_2, \dots, a_k\}$$

Con:

$$\begin{aligned} \text{card}(A_4) < \text{card}(A_3) &\Rightarrow k+2 < p+2 \Rightarrow k < p \Rightarrow k+1 \leq p \Rightarrow \\ &\Rightarrow k+2 \leq p+1 \Rightarrow k+2 \leq n. \end{aligned}$$

Y se puede conservar $\{b_1, b_2\}$ en A_4 , pues $\{b_1, b_2\}$ es un sistema libre (teorema 5 anterior).

Reiterando este procedimiento m veces, llegamos a la base A_{2m} , tal que:

$$A_{2m} \subset A_{2(m-1)} \cup \{b_m\} = A_{2m-1}$$

Con:

$$A_{2m} = \{b_1, b_2, \dots, b_m, a_1, a_2, \dots, a_h\}$$

Tal que:

$$\text{card}(A_{2m}) < \text{card}(A_{2m-1}) \Rightarrow m+h \leq n \Rightarrow m \leq n$$

además, al ir introduciendo todos los elementos de B en A_i , deben quedar algunos de A en A_{2m-1} ; pues de lo contrario obtendríamos un $A_{2m-1} = B$ ligado, contra la hipótesis de que B es libre.

Finalmente, realizando nuevamente todo este razonamiento con los papeles de A y B invertidos, llegaremos, tras n pasos consecutivos, a una base B_{2n} tal que:

$$\text{card}(B_{2n}) < \text{card}(B_{2n-1}) \Rightarrow n+h \leq m \Rightarrow$$

$\Rightarrow n \leq m$.

7.

Por consiguiente, a partir de $m \leq n$ y $n \leq m$, obtenemos $m = n$. c. q. d.

Dimensión.

Apartado-1.

Siendo (V, K) un espacio vectorial finitamente generado, se llama DIMENSIÓN de (V, K) , y se representa por $\dim(V)$, al cardinal de una cualquiera de sus bases. Así, si B es una base de (V, K) tal que $\text{card}(B) = n$, entonces $\dim(V) = n$.

TEOREMA-14:

Si (V, K) es un espacio vectorial con $\dim(V) = n$ y S_n es un sistema libre de (V, K) tal que $\text{card}(S_n) = n$, entonces S_n es una base de (V, K) .

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que S_n no es una base de (V, K) . Entonces, por teorema 8 anterior, $[S_n] \neq V$ y $\exists S_m \subset V$ tal que $S_n \cup S_m = B$, siendo B una base de (V, K) . Como $\text{card}(B) = n$, entonces $\text{card}(S_n \cup S_m) = n$, lo que implica que $S_m = \emptyset$. En consecuencia $S_n \cup S_m = S_n \cup \emptyset = S_n = B$ es una base de (V, K) , c. q. d.

TEOREMA-15:

Si (V, K) es un espacio vectorial finitamente generado y $W \subset V$ es un sistema libre de (V, K) , entonces $\text{card}(W) \leq \dim(V)$.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que $\text{card}(W) > \dim(V)$. Entonces, por teorema 5 anterior, se puede extraer un sistema libre $S \subset W$ tal que $\text{card}(S) = \dim(V)$. Por teorema anterior, S es una base de (V, K) .

Sea $x \in (W - S)$. Entonces x es combinación lineal de S , lo cual implica que $S \cup \{x\}$ es linealmente dependiente. Pero $(S \cup \{x\}) \subset W$, lo cual obliga a aceptar que W es linealmente dependiente, contra hipótesis, c. q. d.

TEOREMA-16:

Si (V, K) es un espacio vectorial tal que $\dim(V) = n$ y S_n es un sistema de (V, K) tal que $[S_n] = V$ y $\text{card}(S_n) = n$, entonces S_n es

una base de (V, K) .

8.

DEMOSTRACIÓN:

Si S_n es libre, entonces, por teorema 14 anterior, finaliza la demostración. Pero si suponemos que S_n es ligado, entonces, por teorema 12 anterior, es posible extraer una base $B \subset S_n$ tal que $B \neq S_n$ y $[B] = V$. Ahora bien, si $B \subset S_n$ y $B \neq S_n$, entonces $\text{card}(B) < \text{card}(S_n)$, con lo cual obtenemos que $\text{card}(B) < \dim(V)$, contra hipótesis, c. q. d.