

Física teórica  
MECÁNICA  
**Cinemática tensorial**

**Tema 6**

**Espacios vectoriales isomorfos**

## Sinopsis

### **Tema 6... Espacios vectoriales isomorfos.**

Aplicaciones. Aplicación. Función. Inyección. Sobreyección. Biyección. Aplicación lineal. Función lineal. Homomorfismo. Morfismo. Transformación lineal. Teorema 1 (**página 1**).

Correspondencia. Preimagen. Imagen. Dominio. Codominio. Correspondencia directa. Correspondencia inversa (**página 2**).

Subespacio trivial. Teoremas 2, 3 y 4 (**páginas 3 y 4**).

Isomorfismo. Isomorfismo químico. Mitscherlich. Estructuras algebraicas isomorfas. Monomorfismo. Epimorfismo. Isomorfismo. automorfismo (**página 5**).

Aplicaciones iguales. Teoremas 5, 6 y 7. Teorema de isomorfía (**página 6**).

Aplicaciones (1).Apartado-1 (1).

Aplicación. Función. Inyección. Sobreyección. Biyección.

Apartado-2 (1).

Aplicación lineal. Función lineal. Homomorfismo. Morfismo. Transformación lineal. Teorema-1.

Apartado-3 (2).

Correspondencia. Preimagen. Imagen. Dominio. Codominio. Correspondencia directa. Correspondencia inversa.

Apartado-4 (3).

Subespacio trivial. Teoremas 2, 3 y 4.

Isomorfismo (5).Apartado-1 (5).

Isomorfismo químico. Mitscherlich. Estructuras algebraicas isomorfas.

Apartado-2 (5).

Monomorfismo. Epimorfismo. Isomorfismo. Automorfismo.

Apartado-3 (6).

Aplicaciones iguales. Teoremas 5, 6 y 7. Teorema de Isomorfía.

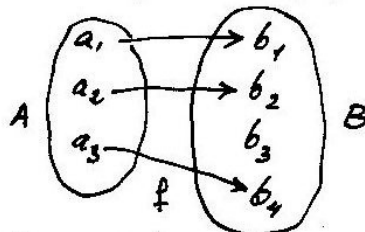
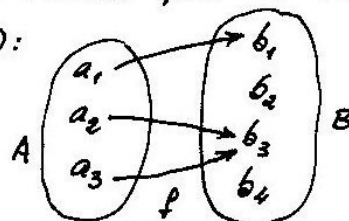
## Tema 6 (Espacios vectoriales isomorfos).

Aplicaciones.Apartado-1

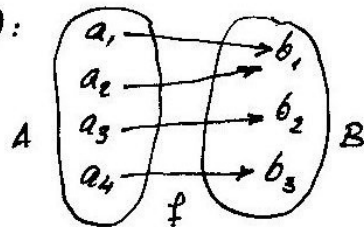
Se llama APLICACIÓN a toda correspondencia  $f: A \rightarrow B$  tal que  $\forall a \in A$  existe al menos un  $b \in B$  tal que  $b = f(a)$ :

Cuando  $A$  y  $B$  son conjuntos numéricos o pseudonuméricos, una aplicación  $f: A \rightarrow B$  también recibe el nombre de FUNCIÓN.

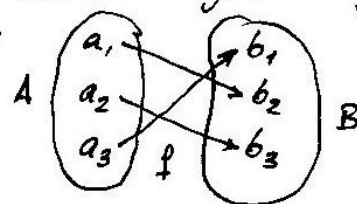
Una aplicación  $f: A \rightarrow B$  se llama INYECCIÓN cuando  $\forall a_1, a_2 \in A$  se tiene que  $f(a_1) \neq f(a_2)$ , por lo que  $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ :



Una aplicación  $f: A \rightarrow B$  se llama SOBREYECCIÓN cuando  $\forall b \in B$  existe al menos un  $a \in A$  tal que  $b = f(a)$ , por lo que  $\text{card}(A) \geq \text{card}(B)$ :



Finalmente, una aplicación  $f: A \rightarrow B$  se llama BIYECCIÓN cuando es simultáneamente inyección y sobreyección, por lo que  $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ :

Apartado-2.

Sean 2  $k$ -espacios vectoriales genéricos,  $(V, k) \equiv [(V, \oplus), (k, *, \cdot), \odot]$  y  $(W, k) \equiv [(W, \#), (k, *, \cdot), \boxdot]$ , se llamará APLICACIÓN LINEAL, o FUNCIÓN LINEAL, u HOMOMORFISMO, o MORFISMO o TRANSFORMACIÓN LINEAL, de  $(V, k)$  en  $(W, k)$ , a una aplicación  $f: V \rightarrow W$  que cumple las siguientes propiedades:

$$1). - \forall v_1, v_2 \in V \Rightarrow f(v_1 \oplus v_2) = f(v_1) \# f(v_2) = w_1 \# w_2 \quad \left| \begin{array}{l} w_1 = f(v_1) \\ w_2 = f(v_2) \end{array} \right.$$

$$2). - \left. \begin{array}{l} \forall k_0 \in k \\ \forall v_0 \in V \end{array} \right\} \Rightarrow f(k_0 \odot v_0) = k_0 \boxdot f(v_0) = k_0 \boxdot w_0 \quad \left| \quad w_0 = f(v_0) \right.$$

## TEOREMA-1:

2.

Sean  $(V, \otimes)$  y  $(W, \#)$  sendos espacios vectoriales y sea  $f: V \rightarrow W$  una aplicación lineal de  $V$  sobre  $W$ , tal que  $v_e \in V$  es el elemento neutro de  $(V, \otimes)$  y  $w_e \in W$  es el elemento neutro de  $(W, \#)$ . Entonces se cumple que  $f(v_e) = w_e$ .

DEMOSTRACIÓN:

Por definición,  $\forall v_k \in V \Rightarrow \exists v_e \in V \mid v_k \otimes v_e = v_e \otimes v_k = v_k$ .

Y por el homomorfismo  $f: V \rightarrow W$ , se tiene:

$$f(v_e \otimes v_k) = f(v_k \otimes v_e) = f(v_k).$$

$$f(v_e \otimes v_k) = f(v_e) \# f(v_k) = f(v_k)$$

$$f(v_k \otimes v_e) = f(v_k) \# f(v_e) = f(v_k)$$

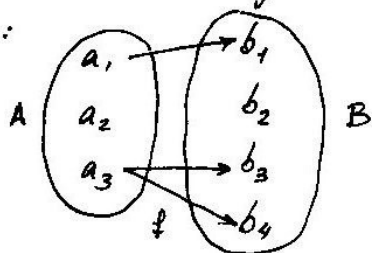
Por tanto:  $\forall f(v_k) \in W \Rightarrow \exists f(v_e) \in W \mid f(v_e) \# f(v_k) = f(v_k) \# f(v_e) = f(v_k)$

De donde, evidentemente:  $f(v_e) = w_e$

Pues, además, por teorema-1 de la página 1 del tema 3 ( $k$ -espacio  $V$ , genérico),  $v_e \in V$  es único y  $w_e \in W$  es único. c.q.d.

### Apartado-3.

Una CORRESPONDENCIA  $f: A \rightarrow B$  es una relación que vincula elementos de un conjunto  $A$  con elementos de un conjunto  $B$ . Por ejemplo:



Todo elemento  $a \in A$  que se relaciona mediante  $f$  con otro elemento  $b \in B$  se denomina PREIMAGEN de  $b \in B$ , mientras que  $b \in B$  se llama IMAGEN de  $a \in A$ . En el ejemplo,  $a_1 \in A$  es preimagen de  $b_1 \in B$  y este último es imagen del primero.

Al subconjunto de  $A$  formado por todas las preimágenes definidas por  $f: A \rightarrow B$  se le llama DOMINIO de  $f$  y se representa por  $\text{dom}(f)$ , en tanto que al subconjunto de  $B$  formado por todas las imágenes de  $f: A \rightarrow B$  se le llama CODOMINIO de  $f$  y se denota por  $\text{cod}(f)$ . En el ejemplo, tenemos:

Al subconjunto de  $A$  formado por todas las preimágenes definidas por  $f: A \rightarrow B$  se le llama DOMINIO de  $f$  y se representa por  $\text{dom}(f)$ , en tanto que al subconjunto de  $B$  formado por todas las imágenes de  $f: A \rightarrow B$  se le llama CODOMINIO de  $f$  y se denota por  $\text{cod}(f)$ . En el ejemplo, tenemos:

$$\text{dom}(f) = \{a_1, a_3\}$$

$$\text{cod}(f) = \{b_1, b_3, b_4\}$$

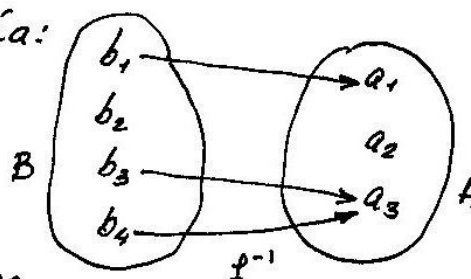
Conviniendo en llamar CORRESPONDENCIA DIRECTA a  $f: A \rightarrow B$ , se denominará CORRESPONDENCIA INVERSA de  $f$  a la correspondencia

$f^{-1}: B \rightarrow A$ , la cual consiste simplemente en una inversión 3.  
de la relación  $f: A \rightarrow B$ , de tal manera que en  $f^{-1}$  se vinculan  
las imágenes con sus preimágenes previamente establecidas  
mediante  $f$ . En nuestro ejemplo, sería:

Por lo tanto, se cumple:

$$\text{dom}(f^{-1}) = \text{cod}(f)$$

$$\text{cod}(f^{-1}) = \text{dom}(f)$$



El hecho de que  $a \in A$  sea preimagen  
de  $b \in B$  en  $f: A \rightarrow B$ , se suele notar  $f(a) = b$ , lo cual es equi-  
valente a la siguiente notación  $f^{-1}(b) = a$ . En el ejemplo que ve-  
nimos considerando, tendremos:  $f(a_1) = b_1 \Leftrightarrow f^{-1}(b_1) = a_1$ ,

y también se suele escribir, a nivel de conjunto:

$$f[\text{dom}(f)] = \text{cod}(f)$$

$$f^{-1}[\text{cod}(f)] = \text{dom}(f)$$

Cuando la correspondencia  $f: A \rightarrow B$  es una aplicación, en-  
tonces es evidente que:

$$\text{dom}(f) = A$$

$$\text{cod}(f) \subseteq B.$$

Sucediendo que será  $\text{cod}(f) = B$  cuando  $f$  sea biyección o so-  
breyección.

#### Apartado - 4.

Tal como se demuestra en el teorema 4 de la página 8 del tema  
2 (espacio vectorial), siendo  $(V, K) \equiv [(V, \oplus), (K, *, \circ), \odot]$  un espacio  
vectorial y  $T = \{0\}$ , con  $0 \in V$  como elemento neutro de  $(V, \oplus)$ , se  
cumple que  $(T, K)$  es un subespacio vectorial de  $(V, K)$ , que se lla-  
ma SUBESPACIO TRIVIAL de  $(V, K)$ .

#### TEOREMA-2:

Siendo  $(W, K)$  subespacio vectorial no trivial de  $(V, K)$ , se tiene  
que  $\text{card}(W) \geq \dim(W) + 1 \geq 2$ .

#### DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que  $\dim(W) = n$  y que  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$   
es una base de  $(W, K)$ , con lo cual  $[B] = W$ , por definición de Base  
(página 5 del tema 5, dimensionalidad). Por consiguiente, tendr-  
mos:

$$\forall \sum_{i=1}^n r_i b_i = v_i \Rightarrow v_i \in W$$

Evidentemente,  $\text{card}(K) \geq 2$ , pues, por definición de 4. cuerpo conmutativo  $(K, *, \circ)$ ,  $\exists e, \varepsilon \in K$  tales que  $e \in K$  es el elemento neutro de  $(K, *)$  y  $\varepsilon \in K$  es el elemento neutro de  $(K^*, \circ)$ , con  $K^* = K - \{e\}$ .

Como  $\forall b_i \in W$  es  $b_i \neq 0$ , con  $0 \in V$  como elemento neutro de  $(V, \oplus)$ , resulta obvio que  $b_i = \varepsilon \oplus b_i = \varepsilon b_i \in W$ ; y también  $0 \in W$ . Además,  $\dim(W) \geq 1$ . c. q. d.

### TEOREMA-3:

Siendo  $(V, K)$  un espacio vectorial y siendo  $W \subset V$ , con  $W \neq \emptyset$ , será  $(W, K)$  subespacio vectorial de  $(V, K)$  si se cumplen las 2 condiciones siguientes:

$$1) - \forall v, w \in W \Rightarrow (v \oplus w) \in W.$$

$$2) - \left. \begin{array}{l} \forall r \in K \\ \forall v \in W \end{array} \right\} \Rightarrow r \odot v = rv \in W.$$

DEMOSTRACIÓN:

Página 7 del tema 2 (espacio vectorial), teorema-3.

### TEOREMA-4:

Siendo  $f: V \rightarrow W$  una aplicación lineal del espacio vectorial  $(V, K)$  sobre el  $(W, K)$ , si  $(S, K)$  es subespacio vectorial de  $(V, K)$  entonces  $[f(S), K]$  es subespacio vectorial de  $(W, K)$ .

DEMOSTRACIÓN:

Si  $(S, K) \equiv (T_v, K)$ , siendo  $(T_v, K)$  el espacio trivial de  $(V, K)$ , entonces, por teorema 1 anterior, es  $f(T_v) = T_w$  y  $(T_w, K)$  es el subespacio trivial de  $(W, K)$ . Pero si  $(S, K) \equiv (T_v, K)$ , entonces sean  $y_1, y_2 \in f(S)$  tales que  $y_1 = f(x_1)$  y  $y_2 = f(x_2)$  y tal que, por teorema 2 anterior,  $\exists x_1, x_2 \in S$ , con  $x_1 \neq x_2$ . Como  $(S, K)$  es subespacio vectorial de  $(V, K)$ , en virtud del teorema 3 anterior:

$$\left. \begin{array}{l} \forall r_1, r_2 \in K \\ \forall x_1, x_2 \in S \end{array} \right\} \Rightarrow r_1 x_1, r_2 x_2 \in S \Rightarrow (r_1 x_1 \oplus r_2 x_2) \in S$$

De donde:

$$f(r_1 x_1 \oplus r_2 x_2) \in f(S)$$

Ahora bien, por ser  $f: V \rightarrow W$  una aplicación lineal, tendremos:

$$f(r_1 x_1 \oplus r_2 x_2) = f(r_1 x_1) \# f(r_2 x_2) = [r_1 \boxtimes f(x_1)] \# [r_2 \boxtimes f(x_2)] = r_1 f(x_1) \# r_2 f(x_2)$$

Esto significa que:

$$1) - \forall f(x_1), f(x_2) \in f(S) \Rightarrow [f(x_1) \# f(x_2)] \in f(S).$$

$$2) - \left. \begin{array}{l} \forall r_1 \in K \\ \forall f(x_1) \in f(S) \end{array} \right\} \Rightarrow r f(x_1) \in f(S)$$

Lo cual, por teorema 3 anterior, implica que  $[f(S), K]$  es un subespacio vectorial de  $(W, K)$ , c.g.d.

5.

### Isomorfismo.

#### Apartado-1.

La observación y el estudio de los fenómenos o manifestaciones de la realidad, tal como nosotros los percibimos, nos llevan a concluir que existen estructuras del mundo físico que funcionan de maneras parecidas o similares, aunque estén formadas por elementos diferentes. Por ejemplo, hay una gran analogía o parecido estructural entre la forma en la que cristaliza el Nitrato Sódico ( $\text{NO}_3\text{Na}$ ) y la que caracteriza al Carbonato Cálcico o Calcita ( $\text{CO}_3\text{Ca}$ ), a pesar de que son sustancias químicas distintas. Esto, y similares acontecimientos químicos, llevó a Mitscherlich en 1819 a acuñar el término ISOMORFISMO (del griego: igual forma) para referirse a los compuestos que presentan un gran parecido cristalino, así como grandes similitudes en fórmulas y propiedades químicas.

Al matematizar el concepto, se dice que dos estructuras algebraicas son ISOMORFAS cuando poseen propiedades equivalentes o iguales pero soportes diferentes. El establecimiento de una biyección entre los soportes (conjuntos soportes) es paso obligado en la definición, así como una similitud en las leyes de composición que afectan a dichos soportes. Para el caso que nos ocupa, es decir, la estructura de espacio vectorial, existe una particular definición de Isomorfismo, la cual se provee a continuación.

#### Apartado-2.

Siendo  $f: V \rightarrow W$  una aplicación lineal definida entre sendos espacios vectoriales  $(V, K)$  y  $(W, K)$ , se dirá que  $f: V \rightarrow W$  es un MONOMORFISMO cuando  $f$  es una inyección; se dirá que  $f: V \rightarrow W$  es un EPIMORFISMO cuando  $f$  es una sobreyección; y se dirá que  $f: V \rightarrow W$  es un ISOMORFISMO cuando  $f$  es una biyección. Además, un isomorfismo  $f: V \rightarrow W$  se llamará AUTOMORFISMO cuando  $V=W$ .

Dos espacios vectoriales isomorfos,  $(V, K)$  y  $(W, K)$ , son algebraicamente indistinguibles. Por lo tanto, desde el punto de vista del Álgebra Abstracta, si  $(V, K)$  y  $(W, K)$  son isomorfos, entonces pueden ser considerados indistintamente como un mismo y único



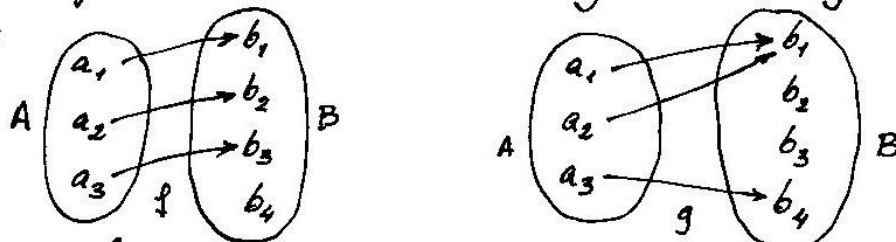
espacio vectorial  $(X, K)$ , tal que  $X = V, W$ .

6.

### Apartado-3.

Sea  $f: A \rightarrow B$  una aplicación de dominio  $A$  y codominio  $f(A) \subset B$ , y sea  $g: A \rightarrow B$  otra aplicación con dominio  $A$  y codominio  $g(A) \subset B$ .

Por ejemplo:



Se dirá que  $f: A \rightarrow B$  y  $g: A \rightarrow B$  son APLICACIONES IGUALES cuando se cumple:

$$\forall x \in A \Rightarrow f(x) = g(x)$$

Lo cual se denota:  $f = g$ .

### TEOREMA-5:

Siendo  $(V, K)$  y  $(W, K)$  sendos espacios vectoriales y siendo  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  una base de  $(V, K)$ , existe una y sólo una aplicación lineal  $f: V \rightarrow W$  tal que  $\forall v_i \in B \Rightarrow f(v_i) = w_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

DEMOSTRACIÓN:

a) Probermos primeramente la existencia de la aplicación lineal  $f: V \rightarrow W$ , para lo cual definimos una aplicación  $g: V \rightarrow W$  haciendo que todo  $x \in V$  sea generado por

$$B: \forall x \in V \Rightarrow x = \bigoplus_{i=1}^n r_i v_i$$

y de tal manera que  $g: V \rightarrow W$  sea definida así:

$$\forall x \in V \Rightarrow \exists y \in W \mid y = g(x) = \bigoplus_{i=1}^n r_i w_i$$

De donde:

$$y = g\left(\bigoplus_{i=1}^n r_i v_i\right) = \bigoplus_{i=1}^n r_i w_i$$

Observándose que se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} 1) - \forall x_1, x_2 \in V &\Rightarrow g(x_1 \oplus x_2) = g\left(\bigoplus_{i=1}^n r_{1i} v_i \oplus \bigoplus_{i=1}^n r_{2i} v_i\right) = \\ &= \bigoplus_{i=1}^n (r_{1i} + r_{2i}) w_i = \bigoplus_{i=1}^n r_{1i} w_i \oplus \bigoplus_{i=1}^n r_{2i} w_i = g(x_1) \oplus g(x_2) = y_1 \oplus y_2 \end{aligned}$$

tal que:

$$y_1 = g(x_1); \quad y_2 = g(x_2).$$

$$2) - \left. \begin{array}{l} \forall r \in K \\ \forall x \in V \end{array} \right\} \Rightarrow g(rx) = g\left(r \bigoplus_{i=1}^n r_i v_i\right) = g\left(\bigoplus_{i=1}^n r r_i v_i\right) = g\left(\bigoplus_{i=1}^n t_i v_i\right) =$$

$$= \bigoplus_{i=1}^n t_i w_i = \bigoplus_{i=1}^n r r_i w_i = r \bigoplus_{i=1}^n r_i w_i = r g(x) = r y \quad 7.$$

tal que:  $t_i = r r_i$ ;  $y = g(x)$ .

Por tanto,  $g: V \rightarrow W$  es aplicación lineal de  $(V, K)$  en  $(W, K)$ .  
Es decir, por ser  $f \equiv g$ ,  $\exists f: V \rightarrow W$  que es aplicación lineal.

b).- Finalmente, probemos la unicidad de la aplicación lineal  $f: V \rightarrow W$ . Para ello, supongamos que existe otra aplicación lineal  $g: V \rightarrow W$  tal que:

$$\forall x \in V \Rightarrow g(x) = g\left(\bigoplus_{i=1}^n r_i v_i\right) = \bigoplus_{i=1}^n r_i g(v_i) = \bigoplus_{i=1}^n r_i w_i = y$$

Pero:  $\forall x \in V \Rightarrow f(x) = \bigoplus_{i=1}^n r_i w_i = y$

Es decir:  $g(x) = f(x) \Rightarrow g = f \quad \text{c.q.d.}$

#### TEOREMA-6 (TEOREMA DE ISOMORFIA).

Una condición necesaria y suficiente para que 2 espacios vectoriales  $(V, K)$  y  $(W, K)$  sean isomorfos es que  $\dim(V) = \dim(W)$ .

DEMOSTRACIÓN:

a).- Se trata de una condición necesaria, pues supongamos que  $(V, K)$  y  $(W, K)$  son isomorfos y que  $B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es una base de  $(V, K)$ , con  $\dim(V) = n = \text{card}(B_V)$ . Entonces, tendremos que  $w_i = f(v_i)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Además,  $\forall x \in V$  se tendrá que:

$$x = \bigoplus_{i=1}^n r_i v_i$$

De donde:  $y = f(x) = f\left(\bigoplus_{i=1}^n r_i v_i\right) = \bigoplus_{i=1}^n r_i w_i$

Como  $f$  es sobreyección, cuando la variable  $x \in V$  recorre por completo  $V$  entonces la variable  $y \in W$  recorre por completo  $W$ , de donde se deduce que el sistema  $S_W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  es un generador de  $W$ , o sea:

$$[S_W] = W$$

Por teorema 6 del tema 5 (dimensionalidad), se puede extraer una base  $B_W \subset S_W$  tal que  $[B_W] = W$ . En consecuencia,  $\text{card}(B_W) \leq \text{card}(S_W)$ , de donde  $\dim(W) \leq \dim(V)$ .

Cambiando los papeles de  $W$  y  $V$  y aplicando todo el razonamiento esgrimido, es fácil comprender que obtendremos  $\dim(V) \leq \dim(W)$ . Por lo tanto, tiene que ser  $\dim(V) = \dim(W)$ , c.q.d.

b).- La condición es también suficiente, pues 8.  
suponiendo que  $\dim(V) = \dim(W)$ , bastaría entonces  
elegir sendas bases tales como:

$$B_V \subset V \mid B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$B_W \subset W \mid B_W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

y, aplicando el teorema anterior, deducimos que existe una y sólo una aplicación lineal  $f: V \rightarrow W$  tal que:

$$\forall v_i \in B_V \Rightarrow f(v_i) = w_i \in B_W.$$

Dicha aplicación asocia el elemento  $x \in V$ , tal que:  $x = \sum_{i=1}^n r_i v_i$

con el elemento  $y \in W$ , tal que:  $y = \sum_{i=1}^n r_i w_i$ ; y viceversa, me-

diante  $f^{-1}$ , que también es una aplicación. Así, pues, si  $f$  y  $f^{-1}$  son aplicaciones, entonces  $f$  es una biyección (ver teorema si-  
guiente). c. q. d.

#### TEOREMA-7:

Si  $f: A \rightarrow B$  es una aplicación y  $f^{-1}: B \rightarrow A$  es una aplicación,  
entonces  $f: A \rightarrow B$  es una biyección.

#### DEMOSTRACIÓN:

Por definición de Biyección,  $f: A \rightarrow B$  tiene que ser una  
inyección y una sobreyección. Como  $f: A \rightarrow B$  es una inyec-  
ción, entonces  $\forall a_1, a_2 \in A \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ . Pero si, a pesar de  
ser inyección, suponemos que  $\exists a_1, a_2 \in A$  tal que  $f(a_1) = f(a_2) = b \in B$ ,  
entonces se tendría que  $f^{-1}(b) = \{a_1, a_2\}$ , contra el supuesto de que  $f^{-1}$   
sea aplicación. Por lo tanto, es inyección.

Como, por otra parte,  $f: A \rightarrow B$  tiene que ser sobreyección, entonces  
 $\forall b \in B \Rightarrow \exists a \in A$  tal que  $b = f(a)$ . Ello es obvio, en vista de que  $f^{-1}: B \rightarrow A$  es aplicación. c. q. d.