

Física teórica
MECÁNICA

Cinemática tensorial

Tema 8

Movimiento de coordenadas en E_2^{Oxy}

Sinopsis

Tema 8... Movimiento de coordenadas en E-2-oxy.

Transformaciones isométricas. Figura geométrica. Figura propia. Figura impropia. Transformación geométrica. Isometría. Transformación isométrica. Isometrías directas. Isometrías inversas **(página 1)**.

Ángulo de giro. Giro horario o negativo. Giro antihorario o positivo. Isometría directa. Isometría inversa (axial) **(página 2)**.

Giro. Simetría central **(página 3)**.

Traslación. Composición de transformaciones. Composición de un giro y una traslación **(página 4)**.

Isometrización directa de coordenadas. Isometrización directa de coordenadas cartesianas ortonormales. Fórmulas o funciones del cambio de coordenadas **(página 5)**.

Paralelismo y convergencia de rectas en E-2-oxy. Paralelismo de rectas transformadas mediante traslación. Teoremas 1 y 2 **(página 6)**.

Ecuaciones o fórmulas del cambio de coordenadas ortonormales debido a traslación de ejes coordenados. Ecuaciones o fórmulas del cambio de coordenadas ortonormales debido a un giro de ejes coordenados **(página 7)**.

Simetrización directa, movimiento directo o movimiento de los ejes coordenados **(página 8)**.

Ecuaciones o fórmulas del movimiento de ejes coordenados. Traslación nula. Giro nulo. Giro por traslación. Traslación por giro. Componentes de un punto en un movimiento de ejes **(página 9)**.

Transformaciones isométricas (1).Apartado-1 (1).

Figura geométrica. Figura propia. Figura impropia. Transformación geométrica. Isometría. Transformación isométrica. Isometrías directas. Isometrías inversas.

Apartado-2 (2).

Ángulo de giro. Giro horario o negativo. Giro antihorario o positivo.

Apartado-3 (2).

Isometría directa. Isometría inversa (axial).

Apartado-4 (3).

Giro. Simetría central.

Apartado-5 (4).

Traslación.

Apartado-6 (4).

Composición de transformaciones. Composición de un giro y una traslación.

Isometrización directa de Coordenadas (5).Apartado-1 (5).

Isometrización directa de coordenadas cartesianas ortonormales. Fórmulas o funciones del cambio de coordenadas.

Apartado-2 (6).

Paralelismo y convergencia de rectas en E_2^{Oxy} . Paralelismo de rectas transformadas mediante traslación. Teoremas 1 y 2.

Apartado-3 (7).

Ecuaciones o fórmulas del cambio de coordenadas ortonormales debido a traslación de ejes coordenados.

Apartado-4 (7).

Ecuaciones o fórmulas del cambio de coordenadas ortonormales debido a giro de ejes coordenados.

Apartado-5 (8).

Simetrización directa, movimiento directo o Movimiento de los ejes coordenados.

Apartado-6 (9).

Ecuaciones o fórmulas del movimiento de ejes coordenados.

Apartado-7 (9).

II.

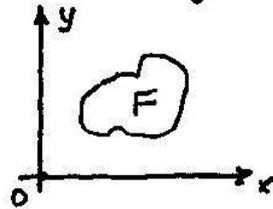
Traslación nula. Giro nulo. Movimiento de ejes. Giro por traslación. Traslación por giro. Componentes de un punto en un movimiento de ejes.

Tema 8.

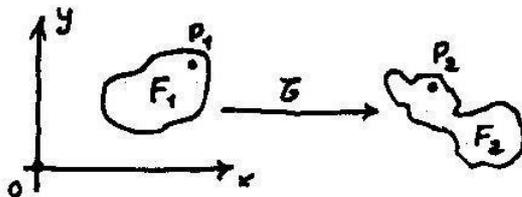
(Movimiento de Coordenadas en E_2^{oxy}).Transformaciones isométricas.Apartado-1.

Se llama FIGURA GEOMÉTRICA plana a todo subconjunto F de puntos del plano cartesiano E_2^{oxy} :

Cuando $F \neq E_2^{oxy}$, se dirá que F es una FIGURA PROPIA de E_2^{oxy} ; pero si $F = E_2^{oxy}$, se dirá que F es una FIGURA IMPROPIA de E_2^{oxy} .



Siendo F_1 una figura de E_2^{oxy} , es posible establecer una biyección $\mathcal{G}: F_1 \rightarrow F_2$; siendo F_2 otra figura de E_2^{oxy} tal que $\forall P_i \in F_1$ existe un único punto $P_2 \in F_2$ tal que $\mathcal{G}(P_1) = P_2$; y viceversa:



Toda biyección de este tipo, \mathcal{G} , recibe el nombre de TRANSFORMACIÓN GEOMÉTRICA en E_2^{oxy} , donde:

$$\mathcal{G}: F_1 \rightarrow F_2 \quad (\text{biyección directa})$$

$$F_2 = \mathcal{G}(F_1)$$

$$\mathcal{G}^{-1}: F_2 \rightarrow F_1 \quad (\text{biyección inversa})$$

$$\mathcal{G}^{-1}(F_2) = F_1$$

Una Transformación geométrica \mathcal{G} en E_2^{oxy} se llamará ISOMETRÍA (o TRANSFORMACIÓN ISOMÉTRICA) en E_2^{oxy} cuando \mathcal{G} conserva las distancias (invarianza de las distancias); es decir, una Transformación $\mathcal{m}: F_1 \rightarrow F_2$ es una ISOMETRÍA cuando $\forall P_1, P_2 \in F_1$ se cumple: $\text{dist}(P_1, P_2) = \text{dist}[\mathcal{m}(P_1), \mathcal{m}(P_2)]$.

Las Isometrías Planas pueden ser de 3 tipos: traslaciones, giros y simetrías. A su vez, las Simetrías pueden ser de 2 tipos: centrales (con respecto a un punto) y axiales (con respecto a un eje o recta). Las traslaciones y los giros se consideran ISOMETRÍAS DIRECTAS, en tanto que las simetrías se consideran ISOMETRÍAS INVERSAS, a excepción de las Centrales.

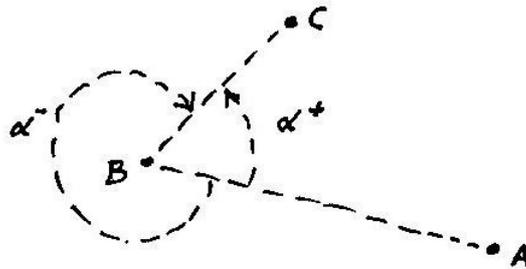
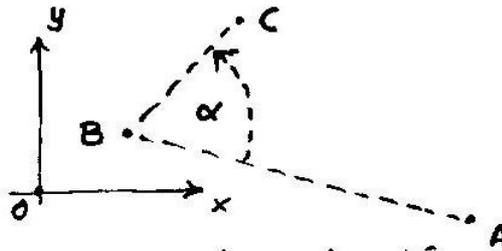
Apartado-2.

2.

Se llama **ÁNGULO DE GIRO**, $\alpha = \text{ang}(A, B, C)$, en E_2^{oxy} , a todo ángulo definido por 3 puntos acolineales $A, B, C \in E_2^{oxy}$ tales que la semirrecta AB define uno de los lados de α y la semirrecta BC define el otro lado de α , con B como vértice de α , siendo positivo o antihorario (contrario al movimiento de las manecillas de un reloj) dicho giro, desde AB hacia BC :

Obviamente, el giro de AB hacia BC puede

tener 2 sentidos diferentes y opuestos, denotándose α^+ al giro positivo o antihorario y α^- al giro negativo u horario:



Respetando la siguiente notación:

$$\alpha = \alpha^+ = |\alpha^+|$$

$$|\alpha^-| = 2\pi - \alpha$$

$$\alpha^- = \alpha - 2\pi = \alpha^+ - 2\pi$$

Se cumple, evidentemente:

$$\alpha = \alpha^+ = \pi \iff \alpha = \alpha^+ = |\alpha^-|$$

$$\alpha = \alpha^+ \neq \pi \iff |\alpha^+| \neq |\alpha^-|$$

Además, tenemos:

$$\text{ang}(A, B, C) = \alpha = \alpha^+ \iff \text{ang}(C, B, A) = \beta = 2\pi - \alpha^+ = -(\alpha^-) = -\alpha^-$$

Apartado-3.

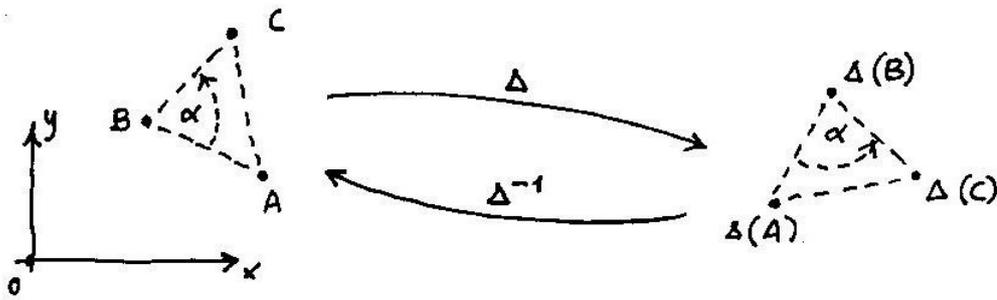
Una Isometría Directa Δ (traslación o giro), conserva las distancias y los ángulos de giro. Por tanto, si $\Delta: F_1 \rightarrow F_2$ es una isometría directa en E_2^{oxy} , entonces:

$$\forall A, B \in F_1 \Rightarrow \text{dist}(A, B) = \text{dist}[\Delta(A), \Delta(B)]$$

$$\forall C, D \in F_2 \Rightarrow \text{dist}(C, D) = \text{dist}[\Delta^{-1}(C), \Delta^{-1}(D)]$$

$$\forall A, B, C \in F_1 \Rightarrow \text{ang}(A, B, C) = \text{ang}[\Delta(A), \Delta(B), \Delta(C)]$$

$$\forall D, E, F \in F_2 \Rightarrow \text{ang}(D, E, F) = \text{ang}[\Delta^{-1}(D), \Delta^{-1}(E), \Delta^{-1}(F)]$$



En cambio, una Isometría Inversa (axial) conserva las distancias pero invierte el ángulo de giro:

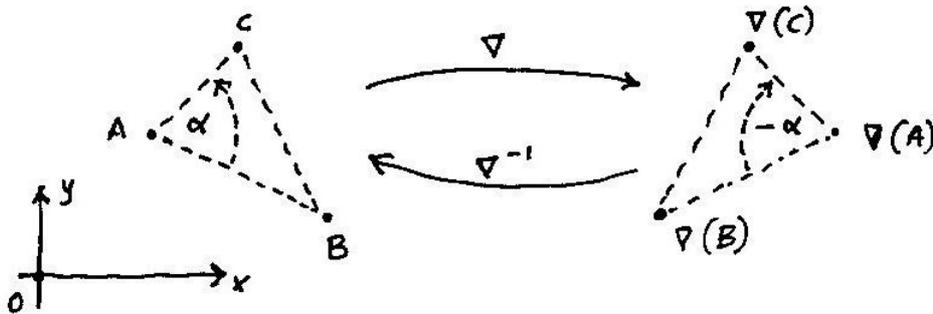
$$\nabla: F_1 \rightarrow F_2$$

$$\forall A, B \in F_1 \Rightarrow \text{dist}(A, B) = \text{dist}[\nabla(A), \nabla(B)]$$

$$\forall C, D \in F_2 \Rightarrow \text{dist}(C, D) = \text{dist}[\nabla^{-1}(C), \nabla^{-1}(D)]$$

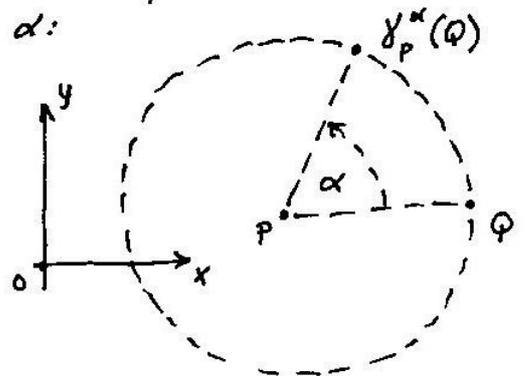
$$\forall A, B, C \in F_1 \Rightarrow \text{ang}(A, B, C) = -\text{ang}[\nabla(A), \nabla(B), \nabla(C)]$$

$$\forall D, E, F \in F_2 \Rightarrow \text{ang}(D, E, F) = -\text{ang}[\nabla^{-1}(D), \nabla^{-1}(E), \nabla^{-1}(F)]$$



Apartado-4.

Siendo F_1 una figura de E_2^{oxy} y siendo P un punto arbitrario de E_2^{oxy} , se llama GIRO de centro P y amplitud α de F_1 , y se denota $\gamma_P^\alpha(F_1)$, a la figura F_2 de E_2^{oxy} que se obtiene transformando F_1 mediante γ_P^α , de tal manera que cada punto de F_2 se obtiene haciendo girar en sentido positivo o antihorario cada punto $Q \in F_1$ un arco de circunferencia de radio PQ y ángulo α :

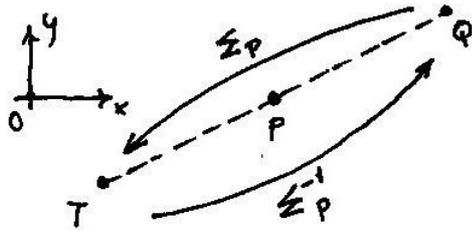


Un caso particular de giro, en el que $\alpha = \pi$, se obtiene aplicando la denominada SIMETRÍA CENTRAL. Así, siendo F_1 una

figura de E_2^{oxy} y siendo P un punto arbitrario de E_2^{oxy} , una Simetría Central de centro P de F_1 , la cual se denota $\xi_P(F_1)$, es una nueva figura F_2 de E_2^{oxy} coincidente con la transformación de F_1 mediante ξ_P , de tal manera que a cada punto Q de F_1 se le hace corresponder el punto T

de F_2 que coincide con el extremo del vector fijo $2Q\vec{QP} = 2\vec{QP} = \vec{QT}$, con $T = \Sigma_P(Q)$:

4.

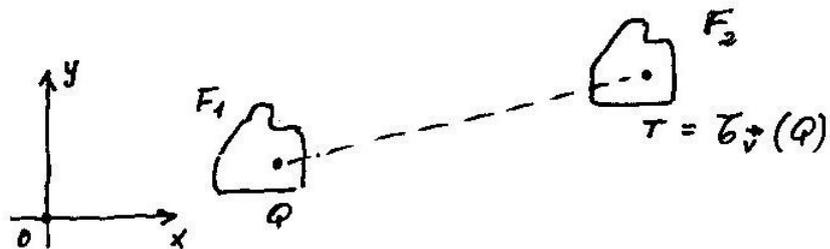


Obviamente: $\Sigma_P(Q) = \gamma_P^\pi(Q) = T$

De donde: $\Sigma_P(F_1) = \gamma_P^\pi(F_1) = F_2$.

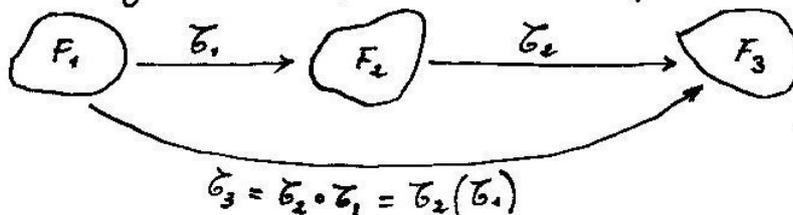
Apartado-5.

Dada una figura F_1 de E_2^{oxy} y un vector libre $\vec{v} \in V_2$, se llama **TRASLACIÓN** de vector \vec{v} de F_1 , y se denota $\tau_{\vec{v}}(F_1)$, a la figura F_2 de E_2^{oxy} que se obtiene transformando F_1 en F_2 mediante $\tau_{\vec{v}}$, de tal manera que a cada punto $Q \in F_1$, se le hace corresponder el punto $T \in F_2$, con la condición de que $\vec{QT} \in \vec{v}$:



Apartado-6.

Dadas 2 transformaciones geométricas cualesquiera, tales que $\tau_1: F_1 \rightarrow F_2$ y $\tau_2: F_2 \rightarrow F_3$, se llama **COMPOSICIÓN** de las transformaciones τ_1 y τ_2 , en el sentido de primero τ_1 y luego τ_2 , a la transformación $\tau_3 = \tau_2(\tau_1) = \tau_2 \circ \tau_1$, que resulta de aplicar τ_1 a F_1 para obtener F_2 y después aplicar τ_2 a F_2 para obtener F_3 :

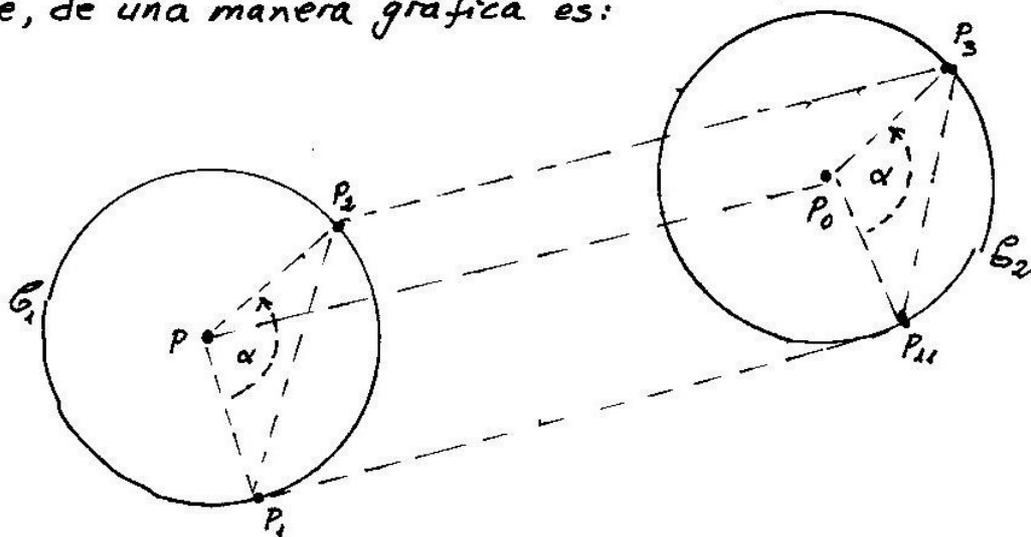


En el caso de la composición de un giro $\gamma_P^\alpha(F_1) = F_2$ y una traslación $\tau_{\vec{v}}(F_2) = F_3$, como γ_P^α y $\tau_{\vec{v}}$ conservan las distancias y los ángulos de giro entonces también lo hace $\tau_{\vec{v}} \circ \gamma_P^\alpha = \tau_{\vec{v}}(\gamma_P^\alpha)$ y además se cumple para todo punto $P_1 \in F_1$, $P_2 \in F_2$ y $P_3 \in F_3$ lo siguiente:

$$P_1 \xrightarrow{\gamma_P^\alpha} P_2 \xrightarrow{\tilde{\mathcal{G}}_V} P_3$$

$$P_1 \xrightarrow{\tilde{\mathcal{G}}_V} P_{11} \xrightarrow{\gamma_{P_0}^\alpha} P_3$$

Puesto que, de una manera gráfica es:



Es decir: $\tilde{\mathcal{G}}_V(G_1) = G_2$

De donde:

$$F_1 \xrightarrow{\gamma_P^\alpha} F_2 \xrightarrow{\tilde{\mathcal{G}}_V} F_3$$

$$F_1 \xrightarrow{\tilde{\mathcal{G}}_V} F_{11} \xrightarrow{\gamma_{P_0}^\alpha} F_3$$

Por lo que: $\tilde{\mathcal{G}}_V \circ \gamma_P^\alpha = \gamma_{P_0}^\alpha \circ \tilde{\mathcal{G}}_V \quad | \quad \vec{PP_0} \in \vec{V}$

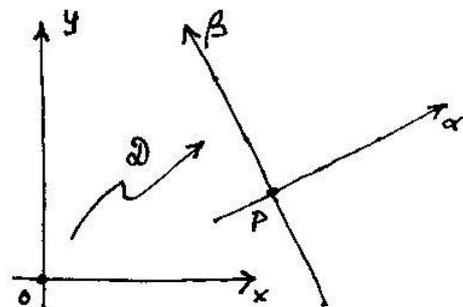
Ya que: $\tilde{\mathcal{G}}_V[\gamma_P^\alpha(P_1)] = P_3 = \gamma_{P_0}^\alpha[\tilde{\mathcal{G}}_V(P_1)] \quad | \quad \vec{PP_0} \in \vec{V}$

O sea: $\tilde{\mathcal{G}}_V[\gamma_P^\alpha(F_1)] = F_3 = \gamma_{P_0}^\alpha[\tilde{\mathcal{G}}_V(F_1)]$

Isometrización directa de coordenadas.

Apartado-1.

En ciertas condiciones, más o menos frecuentes, se hace conveniente utilizar 2 sistemas de coordenadas cartesianas ortonormales (de ejes perpendiculares entre sí y sometidos a una misma unidad



de medida $OU = 1$) Oxy y $P\alpha\beta$, tal que $\mathcal{D}: Oxy \rightarrow P\alpha\beta$, siendo \mathcal{D} una isometrización directa de la figura Oxy de E_2^{oxy} hacia la figura $P\alpha\beta$ de E_2^{oxy} . Por lo dicho anteriormente, $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{G}}_V \circ \gamma_P^\alpha = \gamma_{P_0}^\alpha \circ \tilde{\mathcal{G}}_V$, con $\vec{OP} \in \vec{V}$. Cada punto $Q \in E_2^{oxy}$ posee determinadas coordenadas bajo el sistema

Oxy y otras coordenadas diferentes bajo el sistema $\rho\alpha\beta$. 6.

O sea: $\text{coord}(Q)_{oxy} \neq \text{coord}(Q)_{\rho\alpha\beta}$

Es decir: $\text{coord}(Q)_{oxy} = \text{coord}(Q)_{\rho\alpha\beta} \Leftrightarrow oxy = \rho\alpha\beta$

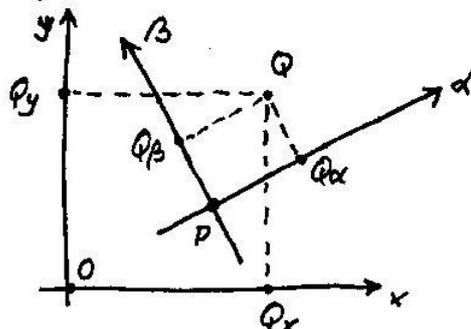
De otra manera expresado:

$$\text{coord}(Q)_{oxy} = (Q_x, Q_y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{coord}(Q)_{\rho\alpha\beta} = (Q_\alpha, Q_\beta) \in \mathbb{R}^2$$

$$(Q_x, Q_y) = (Q_\alpha, Q_\beta) \Leftrightarrow oxy = \rho\alpha\beta$$

$$oxy \neq \rho\alpha\beta \Leftrightarrow (Q_x, Q_y) \neq (Q_\alpha, Q_\beta).$$



Además, es necesario conocer el modo de pasar de $\text{coord}(Q)_{oxy}$ a $\text{coord}(Q)_{\rho\alpha\beta}$ a fin de que un problema planteado en E_2^{oxy} sea traducible a $E_2^{\rho\alpha\beta}$, o viceversa. Por ende, se requiere encontrar los valores numéricos de las fórmulas o funciones:

$$Q_\alpha = f(Q_x, Q_y)$$

$$Q_\beta = g(Q_x, Q_y)$$

y también:

$$Q_x = h(Q_\alpha, Q_\beta)$$

$$Q_y = k(Q_\alpha, Q_\beta)$$

Apartado-2.

Das rectas cualesquiera $\rho_1, \rho_2 \subset E_2^{oxy}$ están necesariamente vinculadas entre sí por una, y sólo una, de las 2 relaciones siguientes:

1).- $\rho_1 \parallel \rho_2$ (igualdad o paralelismo).

2).- $\rho_1 \nparallel \rho_2$ (convergencia en un punto o no paralelismo).

Ahora bien, cualesquiera 2 rectas convergentes $\rho_1, \rho_2 \subset E_2^{oxy}$ están necesariamente vinculadas entre sí por una, y sólo una, de las 2 relaciones siguientes:

1).- $\rho_1 \perp \rho_2$ (ortogonalidad o perpendicularidad).

2).- $\rho_1 \not\perp \rho_2$ (no perpendicularidad u oblicuidad).

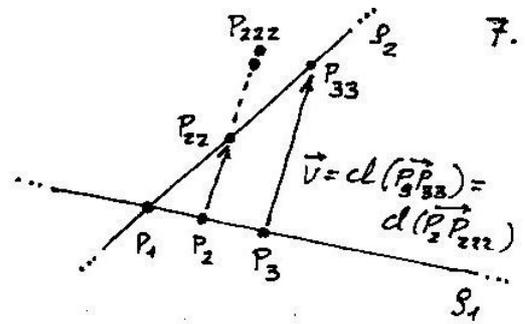
TEOREMA-1:

Toda traslación \vec{v} de una recta $\rho_1 \subset E_2^{oxy}$ da como resultado otra recta $\vec{v}(\rho_1) = \rho_2 \subset E_2^{oxy}$, tal que $\rho_1 \parallel \rho_2$.

DEMOSTRACIÓN:

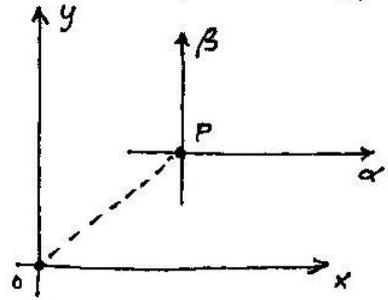
Supongamos que $\rho_1 \nparallel \rho_2$, con lo que, como se muestra en la siguiente figura, existe un punto $P_1 \in E_2^{oxy}$ hacia el que convergen ambas rec-

tas. Por dicha razón, $\vec{v}_v(P_2) \notin \beta_2$, en contra de la propia definición de Traslación. Luego, entonces, no queda más remedio que admitir que β_1 y β_2 no son convergentes, es decir, que es $\beta_1 \parallel \beta_2$, c.q.d.



TEOREMA-2:

Toda traslación \vec{v}_v de los ejes coordenados ortonormales Oxy de E_2^{oxy} da como resultado otro sistema de ejes coordenados ortonormales $P\alpha\beta$ de E_2^{oxy} , tal que $Ox \parallel P\alpha$ y $Oy \parallel P\beta$, con $\vec{v} = dl(\vec{OP})$.



DEMOSTRACIÓN:

Corolario del teorema anterior.

Apartado-3.

En la figura de la derecha, se tiene un punto $Q \in E_2^{oxy}$ y $Q \in E_2^{P\alpha\beta}$, tal que:

$$dl(\vec{OQ}) = dl(\vec{OP}) \oplus dl(\vec{PQ})$$

De donde, en E_2^{oxy} :

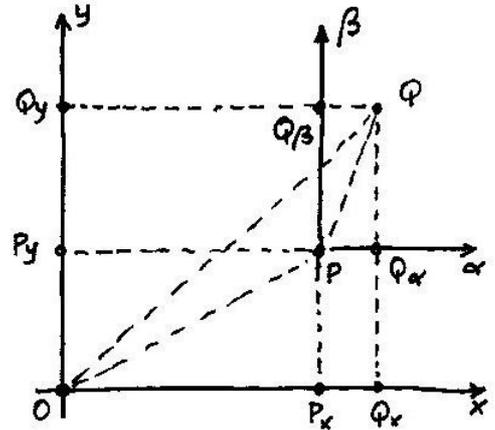
$$comp(\vec{OQ}) = comp(\vec{OP}) \oplus comp(\vec{PQ}).$$

Tal que:

$$comp(\vec{OQ}) = (Q_x, Q_y)$$

$$comp(\vec{OP}) = (P_x, P_y)$$

$$comp(\vec{PQ}) = (Q_x - P_x, Q_y - P_y) = (Q_\alpha, Q_\beta)$$



De donde se obtienen las ecuaciones o fórmulas del cambio de coordenadas ortonormales mediante traslación \vec{v}_v de ejes coordenados, a saber:

$$\begin{cases} Q_\alpha = Q_x - P_x \\ Q_\beta = Q_y - P_y \end{cases}$$

$$\oplus \begin{cases} Q_x = Q_\alpha + P_x \\ Q_y = Q_\beta + P_y \end{cases}$$

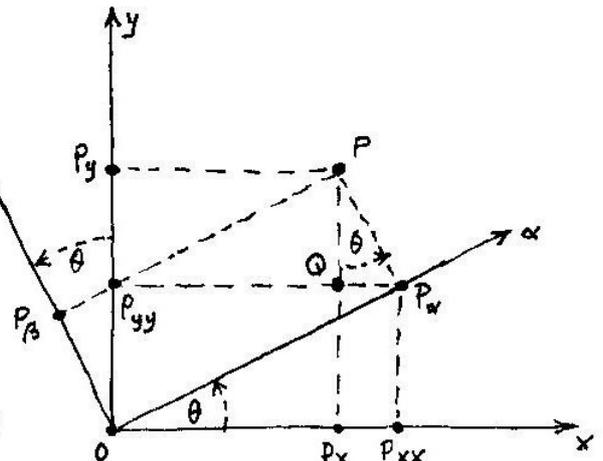
Apartado-4.

En la figura de la derecha, se tiene un punto $P \in E_2^{oxy}$ y $P \in E_2^{O\alpha\beta}$, tal que $O\alpha\beta = \gamma_0^0(Oxy)$; y además:

$$\vec{OP}_x = \vec{OP}_{xx} \oplus \vec{P}_{xx}P_x = \vec{OP}_{xx} \oplus (-\vec{P}_xP_{xx})$$

De donde:

$$comp(\vec{OP}_x) = comp(\vec{OP}_{xx}) \oplus comp(-\vec{P}_xP_{xx}) =$$



$$= (P_{xx}, 0) \oplus (P_x - P_{xx}, 0) = (P_\alpha \cos \theta, 0) \oplus (-\sin \theta |\vec{OP}_\alpha|, 0) = 8.$$

$$= (P_\alpha \cos \theta, 0) \oplus (-P_\beta \sin \theta, 0) = (P_\alpha \cos \theta - P_\beta \sin \theta, 0).$$

De donde:

$$(P_x, 0) = (P_\alpha \cos \theta - P_\beta \sin \theta, 0)$$

$$P_x = P_\alpha \cos \theta - P_\beta \sin \theta.$$

También:

$$\vec{OP}_y = \vec{OP}_{yy} \oplus P_{yy} \vec{P}_y$$

De donde:

$$\text{comp}(\vec{OP}_y) = \text{comp}(\vec{OP}_{yy}) \oplus \text{comp}(P_{yy} \vec{P}_y) =$$

$$= (0, P_{yy}) \oplus (0, P_y - P_{yy}) = (0, P_\alpha \sin \theta) \oplus (0, \cos \theta |\vec{OP}_\alpha|):$$

$$= (0, P_\alpha \sin \theta) \oplus (0, P_\beta \cos \theta) = (0, P_\alpha \sin \theta + P_\beta \cos \theta)$$

De donde:

$$(0, P_y) = (0, P_\alpha \sin \theta + P_\beta \cos \theta)$$

$$P_y = P_\alpha \sin \theta + P_\beta \cos \theta$$

Y de aquí se obtienen las Ecuaciones del Cambio de Coordenadas Ortonormales causadas por un giro γ_0^θ de los ejes coordenadas Ortonormales:

$$\oplus \begin{cases} P_x = P_\alpha \cos \theta - P_\beta \sin \theta \\ P_y = P_\alpha \sin \theta + P_\beta \cos \theta \end{cases}$$

Por otra parte, tomando como referencia estas ecuaciones \oplus , obtenemos:

$$P_\alpha = P_x \cos(2\pi - \theta) - P_y \sin(2\pi - \theta) = P_x \cos(-\theta) - P_y \sin(-\theta) =$$

$$= P_x \cos \theta - P_y (-\sin \theta) = P_x \cos \theta + P_y \sin \theta.$$

$$P_\beta = P_x \sin(2\pi - \theta) + P_y \cos(2\pi - \theta) = P_x \sin(-\theta) + P_y \cos(-\theta) =$$

$$= P_x (-\sin \theta) + P_y \cos \theta = -P_x \sin \theta + P_y \cos \theta.$$

Es decir:

$$\begin{cases} P_\alpha = P_x \cos \theta + P_y \sin \theta \\ P_\beta = -P_x \sin \theta + P_y \cos \theta \end{cases}$$

Apartado-5.

Una SIMETRIZACIÓN DIRECTA (giro o traslación, o giro y traslación; o viceversa) de los ejes coordenados Ortonormales también recibe el nombre de MOVIMIENTO DIRECTO (o simplemente MOVIMIENTO) DE LOS EJES COORDENADOS, denotándose $\eta(Oxy) = P\alpha\beta$. De acuerdo con el apartado-6 de la página 4:

$$\eta(Oxy) = \vec{\zeta}_v^{\circ} \circ \vec{\zeta}_w^{\circ} \circ \gamma_0^\theta(Oxy) = P\alpha\beta.$$

También:

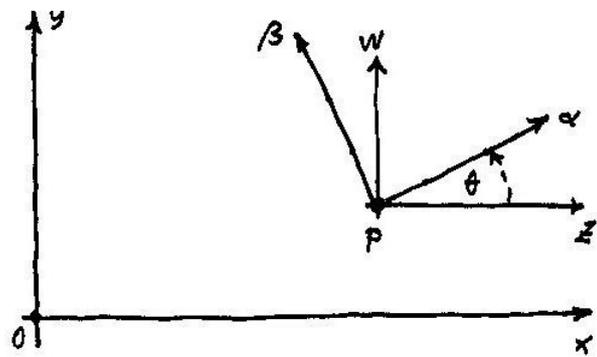
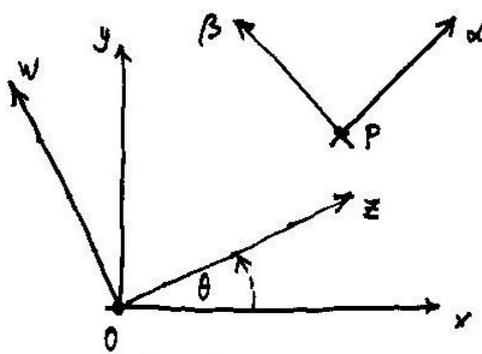
$$\eta(Oxy) = \gamma_p^\theta(P\alpha\beta) \circ \vec{\zeta}_v^{\circ}(Oxy) = P\alpha\beta.$$

De donde:

$$\eta(Oxy) = \vec{\zeta}_v^{\circ}(Ozw) \circ \gamma_0^\theta(Oxy) = \gamma_p^\theta(Pwz) \circ \vec{\zeta}_v^{\circ}(Oxy) = P\alpha\beta.$$

O sea:

$$\eta(Oxy) = \vec{\zeta}_v^{\circ}[\gamma_0^\theta(Oxy)] = \gamma_p^\theta[\vec{\zeta}_v^{\circ}(Oxy)] = P\alpha\beta.$$



9.

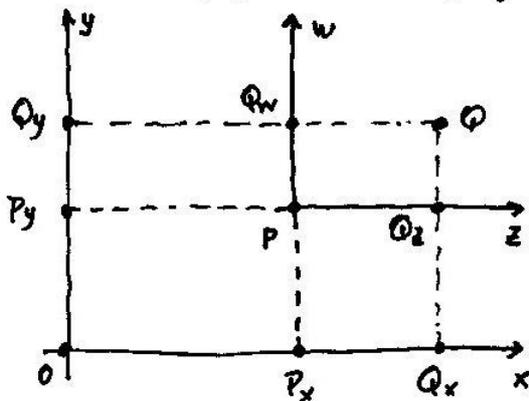
Apartado-6.

Siendo Q un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que:

$$\text{comp}(Q)_{Oxy} = (Q_x, Q_y); \quad \text{comp}(Q)_{PzW} = (Q_z, Q_w)$$

$$PzW = \vec{v}(Oxy) \quad | \quad \vec{v} = d(O\vec{P}).$$

Tendremos (apartado-3, página 7, \odot):



$$\begin{cases} Q_x = Q_z + P_x \\ Q_y = Q_w + P_y \end{cases}$$

Por otra parte, para:

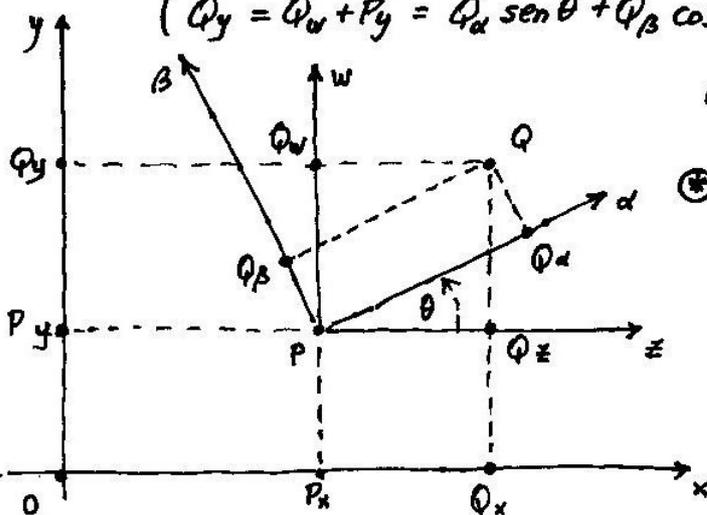
$$P\alpha\beta = \gamma_P^0(PWz)$$

Tendremos (apartado-4, página 8, \odot):

$$\begin{cases} Q_z = Q_\alpha \cos \theta - Q_\beta \sin \theta \\ Q_w = Q_\alpha \sin \theta + Q_\beta \cos \theta \end{cases}$$

De donde:

$$\begin{cases} Q_x = Q_z + P_x = Q_\alpha \cos \theta - Q_\beta \sin \theta + P_x \\ Q_y = Q_w + P_y = Q_\alpha \sin \theta + Q_\beta \cos \theta + P_y \end{cases}$$



O sea:

$$\odot \begin{cases} Q_x = Q_\alpha \cos \theta - Q_\beta \sin \theta + P_x \\ Q_y = Q_\alpha \sin \theta + Q_\beta \cos \theta + P_y \end{cases}$$

Apartado-7.

Se llama TRASLACIÓN NULA, $\gamma_{\vec{0}}$, a la que tiene como vector de traslación el vector nulo $\vec{0} \in V_2^2$. Evidentemente, $\gamma_{\vec{0}}(Oxy) = Oxy$; y se llama GIRO NULO de centro $P \in E_2^{Oxy}$, al giro γ_P^0 que tiene por ángulo de giro $\theta=0$. Evidentemente, pues: $\gamma_P^0(P\alpha\beta) = P\alpha\beta$.

Una Traslación $\tau_{\vec{v}}(Oxy) = P\alpha\beta$ es un movimiento 10.
 $\eta_T(Oxy) = P\alpha\beta$ tal que $\gamma_P^\theta = \gamma_P^\theta$. Es decir:

$$\eta_T(Oxy) = \tau_{\vec{v}} \circ \gamma_P^\theta(Oxy) = \tau_{\vec{v}}(Oxy) = P\alpha\beta.$$

Un giro $\gamma_P^\theta(Oxy) = O\alpha\beta$ es un movimiento $\eta_G(Oxy) = O\alpha\beta$ tal que $\tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{0}}$. O sea:

$$\eta_G(Oxy) = \tau_{\vec{0}} \circ \gamma_P^\theta(Oxy) = \gamma_P^\theta(Oxy) = O\alpha\beta.$$

Por consiguiente, en todo caso un MOVIMIENTO de los Ejes Coor-
denados Oxy siempre es un giro por una traslación (es decir, una
traslación seguida de un giro) o una traslación por un giro (o sea,
un giro seguido de una traslación):

$$\eta(Oxy) = \tau_{\vec{v}}[\gamma_P^\theta(Oxy)] = \gamma_P^\theta[\tau_{\vec{v}}(Oxy)] = P\alpha\beta$$

Notación:

1): Giro por traslación, o composición de traslación seguida
de giro: $\gamma_P^\theta \circ \tau_{\vec{v}}(Oxy) = P\alpha\beta$.

2): Traslación por giro, o composición de un giro seguido de
una traslación: $\tau_{\vec{v}} \circ \gamma_P^\theta(Oxy) = P\alpha\beta$.

Siendo $Q \in E_2^{Oxy}$ y $Q \in E_2^{P\alpha\beta}$, se cumple lo siguiente (de acuerdo
con el apartado-6 de la página anterior; \oplus):

$$\text{comp}(Q)_{Oxy} = (Q_x, Q_y) = (Q_x \cos \theta - Q_y \sin \theta + P_x, Q_x \sin \theta + Q_y \cos \theta + P_y)_{P\alpha\beta}.$$