Física teórica
MECÁNICA

Cinemática tensorial

Tema 9

R-espacio vectorial V_L^3

Sinopsis

Tema 9... R-espacio vectorial V-l-3.

Introducción. Rectas ortogonales. Rectas heterogonales. Sistema ortogonal de coordenadas tridimensionales. Sistema heterogonal de coordenadas tridimensionales **(página 1).**

Paralelogramo. Paralelepípedo. Paralelepípedo recto. Cubo o exaedro **(página 2).**

Sistema curvilíneo de coordenadas tridimensionales. Regla del paralelepípedo. Sistema de ejes ortonormales **(página 3).**

Traslaciones. Traslación de vector v perteneciente a V-l-3. Figura espacial. Equipolencia y traslación. Conservación de componentes **(página 4).**

Recta vectorial. Vector director. Vectores tridimensionales o espaciales, fijos y libres. Vectores fijos de desplazamiento y posición. Vectores fijos colineales y acolineales. Vectores fijos coplanarios y acoplanarios. Vectores fijos paralelos y convergentes **(página 5).**

Vectores equipolentes. Vectores fijos paralelos. Rectas vectoriales paralelas. Haz de rectas vectoriales paralelas. Vectores libres **(página 6).**

Traslación. Colinealidad. Sistemas ortonormales de coordenadas espaciales tridimensionales. Espacio cartesiano ortonormal ordinario. Sistema ortogonal. Versores básicos. Proespacio vectorial ortonormal ordinario. Cardinalidad **(página 7 y 8).**

Paralelismo y equipolencia en F-circulada-3-oxyz **(página 9).**

Espacio cartesiano ortogonal ordinario. Proespacio vectorial ortogonal ordinario. Teoremas 1 y 2 **(página 10).**

Espacio heteronormal ordinario. Espacio heterogonal ordinario. Teoremas 3 y 4 **(páginas 11 y 12).**

Espacio curvonormal ordinario. Espacio curvogonal ordinario. Sistemas referenciales interruptos. Sistemas referenciales curvilíneos, rectilíneos y ortonormales rectilíneos **(página 13).**

V-f-3 como variable x perteneciente a $\mathcal{E}$. El vector fijo como elemento del producto cartesiano de puntos del espacio tridimensional. Consecuencias **(página 14).**

Independencia lineal. Redefinición de recta vectorial, en V-f-3. Vectores nulos, en V-f-3 **(página 15).**

Conjunto O-f-3 de todos los vectores fijos nulos de V-f-3. Recta vectorial como subconjunto propio de O-f-3. Concurrencia de rectas vectoriales. Inconcurrencia, paralelismo estricto y cruzamiento de rectas vectoriales **(página 16).**

Conjunto RO-f-3. Haz de rectas vectoriales paralelas. Vector director de un haz. Vector director fijo, de una recta vectorial. Vector director libre, de un haz de rectas vectoriales **(página 17).**

Dependencia e independencia lineal, aplicable sólo a vectores libres. Base de V-l-3 y su cardinal. Dimensión 3 de V-l-3 **(página 18).**

Índice.

Introducción (1).

Apartado-1 (1).

Rectas ortogonales. Rectas heterogonales.

Apartado-2 (1).

Sistema ortogonal de coordenadas tridimensionales.

Apartado-3 (1).

Sistema heterogonal de coordenadas tridimensionales.

Apartado-4 (2).

Paralelogramo. Paralelepípedo. Paralelepípedo recto. Cubo o Exaedro.

Apartado-5 (3).

Sistema curvilíneo de coordenadas tridimensionales. Regla del paralelepípedo.

Apartado-6 (3).

Sistema de ejes ortonormales.

Traslaciones (4).

Apartado-1 (4).

Traslación de vector $\vec{v} \in V_L^3$. Figura espacial.

Apartado-2 (4).

Equipolencia y traslación. Conservación de componentes.

Apartado-3 (5).

Recta vectorial. Vector director.

Apartado-4 (5).

Vectores tridimensionales o espaciales, fijos y libres. Vectores fijos de desplazamiento y posición. Vectores fijos colineales y acolineales. Vectores fijos coplanarios y acoplanarios. Vectores fijos paralelos y convergentes.

Apartado-5 (6).

Vectores equipolentes.

Apartado-6. (6).

Vectores fijos paralelos. Rectas vectoriales paralelas.

Apartado-7 (6).

Haz de rectas vectoriales paralelas. Vectores libres.

Apartado-8 (7).

Traslación.

(Colinealidad) (7).

Apartado-1 (7).

Sistemas ortonormales de coordenadas espaciales tridimensionales. Espacio cartesiano ortonormal ordinario. Sistema Ortogonal. Versores básicos. Proespacio vectorial Ortonormal Ordinario. Cardinalidad.

Apartado-2 (9).

Paralelismo y equipolencia en $\mathcal{F}_3^{oxyz}$.

Apartado-3 (10).

Espacio cartesiano ortogonal ordinario. Proespacio vectorial ortogonal ordinario. Teoremas 1 y 2.

Apartado-4 (11).

Espacio heteronormal ordinario. Espacio heterogonal ordinario. Teoremas 3 y 4.

Apartado-5 (13).

Espacio curvonormal ordinario. Espacio curvogonal ordinario. Sistemas referenciales interruptos. Sistemas referenciales curvilíneos, rectilíneos y ortonormales rectilíneos.

Apartado-6 (14).

V_f^3 como variable $x \in E$. El vector fijo como elemento del producto cartesiano de puntos del espacio tridimensional. Consecuencias.

Apartado-7 (15).

Vectores colineales. Paralelismo en V_L^3.

(Independencia Lineal) (15).

Apartado-1 (15).

Redefinición de Recta Vectorial, en V_f^3. Vectores nulos, en V_f^3.

Apartado-2 (16).

Conjunto O_f^3 de todos los vectores fijos nulos de V_f^3. Recta vectorial $\rho_{\vec{v}}$ como subconjunto propio de O_f^3.

Apartado-3 (16).

Concurrencia de rectas vectoriales. Inconcurrencia, paralelismo estricto y cruzamiento de rectas vectoriales.

Apartado-4 (17).

Conjunto RO_f^3. Haz de rectas vectoriales paralelas. Vector director de un Haz.

Apartado-5 (17).

Vector director fijo, de una recta vectorial. Vector director libre, de un Haz de rectas vectoriales.

Apartado-6 (18).

Dependencia e Independencia lineal, aplicable sólo a vectores libres. Base de V_l^3 y su cardinal. Dimensión 3 de V_l^3.

Cinemática tensorial.

Tema 9.

(R-espacio vectorial V_L^3).

Introducción.

Apartado-1.

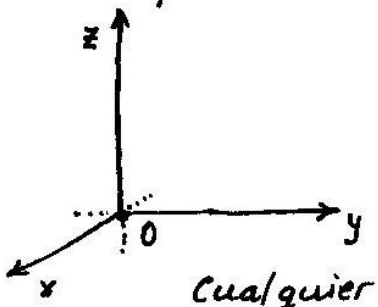
Siendo P un punto cualquiera del Espacio Cartesiano Tridimensional E_3^{Oxyz} y siendo $\rho_1, \rho_2 \subset E_3^{Oxyz}$ sendas rectas que están contenidas en dicho espacio, las cuales se cortan en el punto $P \in E_3^{Oxyz}$, pueden suceder 2 casos mutuamente excluyentes entre sí:

1).- Que ambas rectas sean perpendiculares entre sí, lo cual se denota $\rho_1 \perp \rho_2$, en cuyo caso se dice que ambas rectas son RECTAS ORTOGONALES.

2).- Que ambas rectas sean oblicuas entre sí, lo cual se denota $\rho_1 \angle \rho_2$, en cuyo caso se dice que ambas rectas son RECTAS HETEROGONALES.

Apartado-2

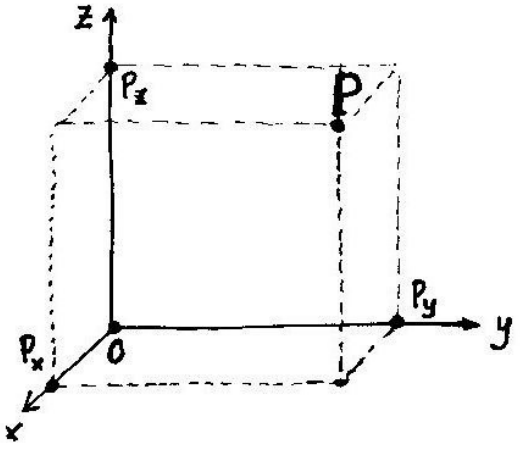
Se llama SISTEMA ORTOGONAL DE COORDENADAS TRIDIMENSIONALES a una terna ordenada (Ox, Oy, Oz) que representa a los 3 ejes o rectas del sistema $Oxyz$, donde cada eje es ortogonal (perpendicular) a los otros dos y donde todos tienen un único punto común, $O \in E_3^{Oxyz}$ (el origen de coordenadas):



$$Ox \perp Oy \; ; \; Ox \perp Oz \; ; \; Oy \perp Oz$$

$$Ox \cap Oy = Ox \cap Oz = Oy \cap Oz = Ox \cap Oy \cap Oz = O.$$

Cualquier punto $P \in E_3^{Oxyz}$ queda perfectamente determinado o referenciado en $(Ox, Oy, Oz) \subset E_3^{Oxyz}$ mediante las coordenadas del mismo:

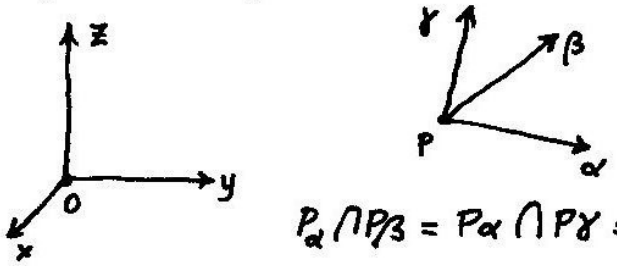


$$\text{coord}(P)_{Oxyz} = (P_x, P_y, P_z) \in R^3.$$

Apartado-3.

Un SISTEMA HETEROGONAL DE COORDENADAS TRIDIMENSIONALES es una terna $(P\alpha, P\beta, P\gamma)$ de 3 ejes o

rectas no ortogonales entre sí (es decir, donde al menos 2 de ellas son heterogonales entre sí) que poseen un, y sólo un, punto común $P \in E_3^{oxyz}$ (origen de coordenadas):



$$P_\alpha \cap P_\beta = P_\alpha \cap P_\gamma = P_\beta \cap P_\gamma = P_\alpha \cap P_\beta \cap P_\gamma = P.$$

Cualquier punto $Q \in E_3^{oxyz}$ puede ser perfectamente referenciado en $(P_\alpha, P_\beta, P_\gamma) \subset E_3^{oxyz}$, pero:

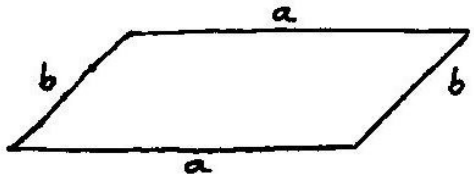
$$coord(Q)_{oxyz} = (Q_x, Q_y, Q_z) \in R^3$$

$$coord(Q)_{P_\alpha P_\beta P_\gamma} = (Q_\alpha, Q_\beta, Q_\gamma) \in R^3$$

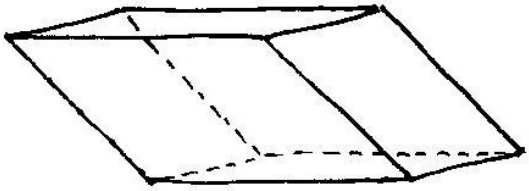
$$(Q_x, Q_y, Q_z) \neq (Q_\alpha, Q_\beta, Q_\gamma)$$

Apartado-4.

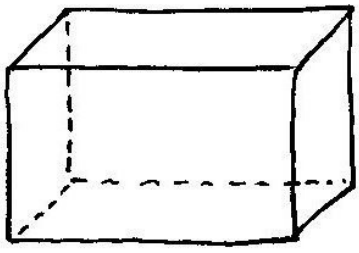
Se llama PARALELOGRAMO a todo cuadrilátero que consta de lados opuestos (es decir, par de lados que carecen de vértices comunes) iguales y paralelos entre sí:



Se llama PARALELEPÍPEDO a todo cuerpo geométrico tridimensional limitado por 6 caras planas que son paralelogramos iguales 2 a 2, tal que las caras opuestas (es decir, par de caras opuestas o sin ningún vértice común) son iguales:

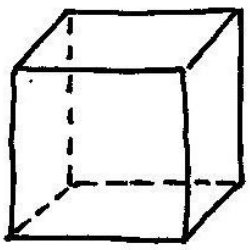


Excepcionalmente, se llama PARALELEPÍPEDO RECTO a todo paralelepípedo cuyos ángulos de los paralelogramos de sus caras son todos rectos:



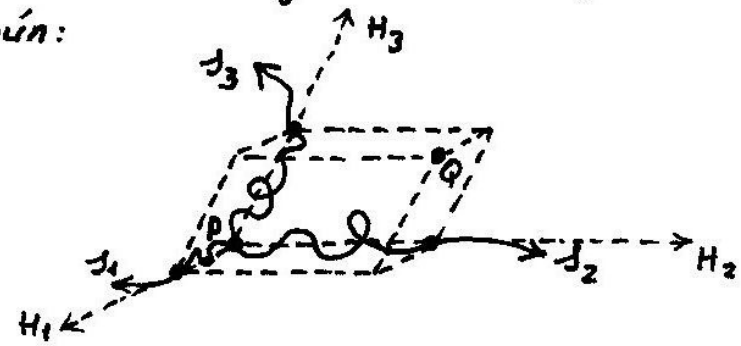
Y, excepcionalmente, se llama CUBO o EXAEDRO a aquel paralelepípedo recto cuyas ca

ras son todas iguales (cuadrados):



Apartado-5.

Es posible proponer un SISTEMA CURVILÍNEO DE COORDENADAS TRIDIMENSIONALES (terna de ejes curvilíneos), con un solo punto $P \in E_3^{oxyz}$ en común:



Donde rige, en este caso, la REGLA DEL PARALELEPÍPEDO para las coordenadas de cualquier punto $Q \in E_3^{oxyz}$. Y llamando $\mathcal{S}$ al sistema (s_1, s_2, s_3) de coordenadas curvilíneas, resulta:

$$\text{coord}(Q)_{oxyz} \neq \text{coord}(Q)_{\mathcal{S}}$$

Sin embargo:

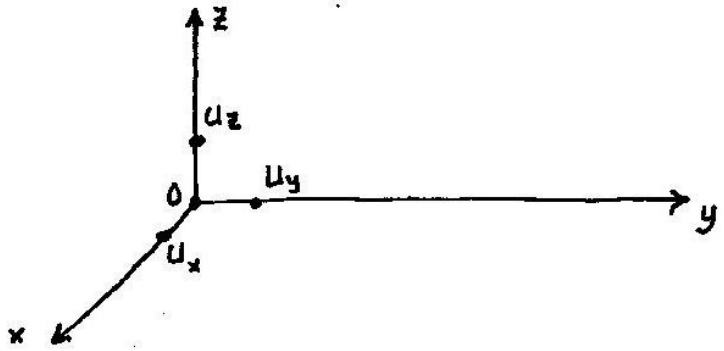
$$\text{coord}(Q)_{\mathcal{S}} = \text{coord}(Q)_H$$

siendo $H = (H_1, H_2, H_3)$ el sistema heterogonal cuyos ejes coordenados contienen a las 3 aristas del paralelepípedo que convergen en el punto $P \in E_3^{oxyz}$ (origen de $\mathcal{S}$).

Apartado-6.

Los Sistemas Ortogonales pueden diferir en la longitud de las unidades de medida que se tomen para cada eje, por lo que se hace necesario contar con un sistema ortogonal cuyas unidades de medida sean idénticas para los 3 ejes; y a un tal sistema se le llama SISTEMA DE EJES ORTONORMALES, donde:

$$\text{Long}(OU_x) = \text{long}(OU_y) = \text{long}(OU_z)$$



Traslaciones.

Apartado-1.

Una traslación $\tau_{\vec{v}}$, de vector $\vec{v} \in V_l^3$ en E_3^{oxyz} o en cualquier sistema heterogonal $S_3^{P\alpha\beta\gamma}$, es una transformación isométrica directa que vincula la figura espacial F_1 (conjunto de puntos del espacio E_3^{oxyz}) con otra figura espacial F_2 idéntica o igual a la F_1:

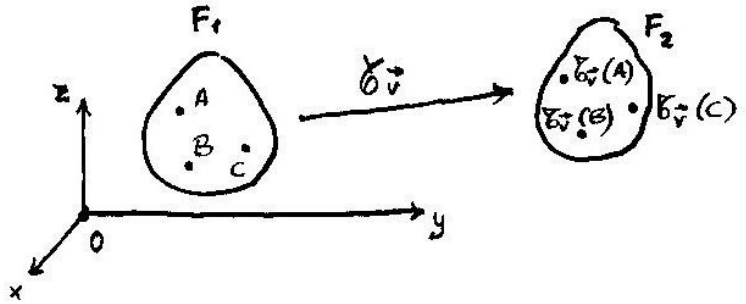
$$\tau_{\vec{v}} : F_1 \rightarrow F_2$$

sucediendo que $\tau_{\vec{v}}$ es una biyección entre conjuntos de puntos de E_3^{oxyz} que conserva las distancias y los ángulos de giro, es decir, que $\forall A,B \in F_1 \Rightarrow dist(A,B) = dist[\tau_{\vec{v}}(A), \tau_{\vec{v}}(B)]$

Tal que: $\tau_{\vec{v}}(A), \tau_{\vec{v}}(B) \in F_2$.

Y para cualesquier $A,B,C \in F_1$ se tiene:

$$ang(A,B,C) = ang[\tau_{\vec{v}}(A), \tau_{\vec{v}}(B), \tau_{\vec{v}}(C)]$$



Apartado-2.

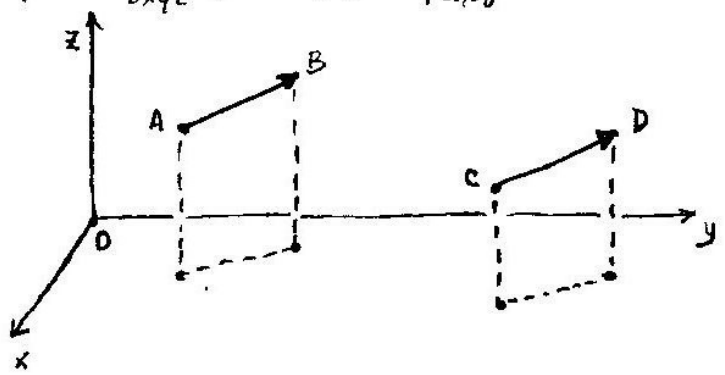
Como la Equipolencia de cualesquier par de vectores $\vec{AB}, \vec{CD} \in V_f^3$ en E_3^{oxyz} equivale a la traslación $\tau_{\vec{v}} : \vec{AB} \rightarrow \vec{CD}$, o viceversa, es decir $\tau_{\vec{v}}^{-1} : \vec{CD} \rightarrow \vec{AB}$, donde se conservan las componentes:

$$\tau_{\vec{v}}(\vec{AB}) = \vec{CD} \quad \Rightarrow \quad comp(\vec{AB}) = comp(\vec{CD})$$

Entonces, por lo dicho en el apartado anterior, tendremos:

$$\tau_{\vec{v}}(\vec{AB}) = \vec{CD} \Rightarrow \begin{cases} comp(\vec{AB})_{oxyz} = comp(\vec{CD})_{oxyz} \\ comp(\vec{AB})_{P\alpha\beta\gamma} = comp(\vec{CD})_{P\alpha\beta\gamma} \end{cases}$$

Tal que: $comp(\vec{AB})_{oxyz} \neq comp(\vec{AB})_{P\alpha\beta\gamma}$

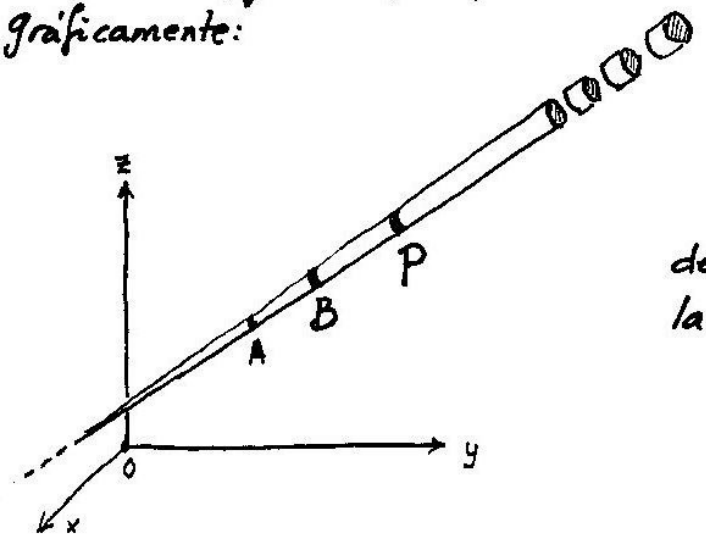


Apartado-3.

Se define la RECTA VECTORIAL de vector fijo $\vec{v}=\vec{AB}\in V_f^3$, en E_3^{oxyz}, como un subconjunto de puntos $\rho_{\vec{v}}\subset E_3^{oxyz}$ que pueden ponerse en biyección con los extremos de los vectores fijos $r\vec{v}\in V_f^3$ tal que $r\in R$:

$$\rho_{\vec{v}}=\{P\in E_3^{oxyz}\,|\,\vec{AP}=r\vec{AB}=r\vec{v}\in V_f^3\,|\,\vec{v}=\vec{AB}\in V_f^3)\,r\in R\}.$$

Gráficamente:



El vector $\vec{v}=\vec{AB}\in V_f^3$ se denomina VECTOR DIRECTOR de la recta vectorial $\rho_{\vec{v}}\subset E_3^{oxyz}$.

Apartado-4.

Los VECTORES TRIDIMENSIONALES o ESPACIALES (representables en E_3^{oxyz}) pueden ser FIJOS (anclados en un punto $P\in E_3^{oxyz}$) o LIBRES (clases de equipolencia de vectores fijos equipolentes entre sí o de iguales componentes). Los vectores fijos en E_3^{oxyz} pueden ser DE DESPLAZAMIENTO (que unen puntos arbitrarios cualesquiera de E_3^{oxyz}) o DE POSICIÓN (que unen el centro de coordenadas $O\in E_3^{oxyz}$ con otro punto cualquiera $P\in E_3^{oxyz}$, siendo $O\in E_3^{oxyz}$ el origen de dicho vector y $P\in E_3^{oxyz}$ su extremo). Los vectores de desplazam. pueden ser COLINEALES (pertenecientes a la misma recta vectorial) o ACOLINEALES (pertenecientes a diferentes rectas vectoriales). Los vectores de posición también pueden ser colineales y acolineales.

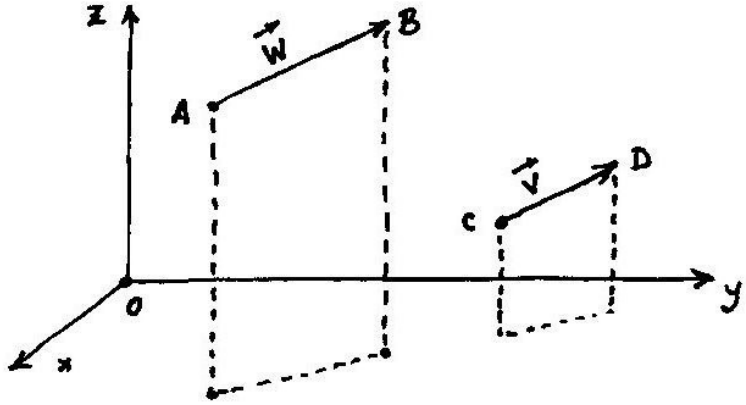
Se dirá que 2 vectores fijos de E_3^{oxyz} son VECTORES COPLANARIOS cuando existe un plano $\pi\subset E_3^{oxyz}$ que contiene a ambos, pero si tal plano no existe entonces dichos vectores se llaman ACOPLANARIOS. Los vectores coplanarios de E_3^{oxyz} pueden ser PARALELOS (cuando sus respectivas rectas vectoriales no tienen ningún punto común, o bien cuando dichas rectas coincidan) o CONVERGENTES (cuando sus respectivas rectas vectoriales posean un único punto común). Evidentemente, los vectores acoplanarios carecen de todo punto común y, sin embargo, no son paralelos (al no ser coplanarios).

Apartado-5.

Dos vectores tridimensionales fijos, paralelos, pueden ser Equipolentes o no. Serán EQUIPOLENTES cuando posean las mismas componentes, esto es, cuando tengan módulos de la misma longitud y del mismo sentido; pero si difieren en alguna de estas dos características (longitud o sentido) no serán Equipolentes.

Apartado-6.

Se dirá que 2 rectas vectoriales $\rho_1, \rho_2 \subset E_3^{OXYZ}$ son PARALELAS cuando son coplanarias y no tienen ningún punto común, o bien cuando $\rho_1 = \rho_2$ (excepcionalmente). Ahora bien, cuando decimos que 2 vectores $\vec{v}, \vec{w} \in V_f^3$ son PARALELOS (en E_3^{OXYZ} ó cualquier S_3^{PQRST}) cuando $\exists r \in R$ tal que $comp(\vec{v}) = comp(r\vec{w})$, entonces también se puede afirmar que 2 rectas vectoriales $\rho_1, \rho_2 \subset E_3^{OXYZ}$ son PARALELAS cuando todo vector fijo de la primera es paralelo a todo vector fijo de la segunda, y viceversa:



Apartado-7.

Las rectas paralelas en E_3^{OXYZ} se pueden clasificar en conjuntos de rectas de E_3^{OXYZ}, denominándose HAZ de rectas paralelas de E_3^{OXYZ} al subconjunto formado por todas aquellas rectas de E_3^{OXYZ} que son paralelas entre sí; y esto induce una Clasificación o Partición en E_3^{OXYZ} mediante la relación de paralelismo de rectas (||), de tal manera que el conjunto cociente $E_3^{OXYZ}/_{||}$ es el conjunto formado por todos los Haces de rectas paralelas del espacio E_3^{OXYZ}.

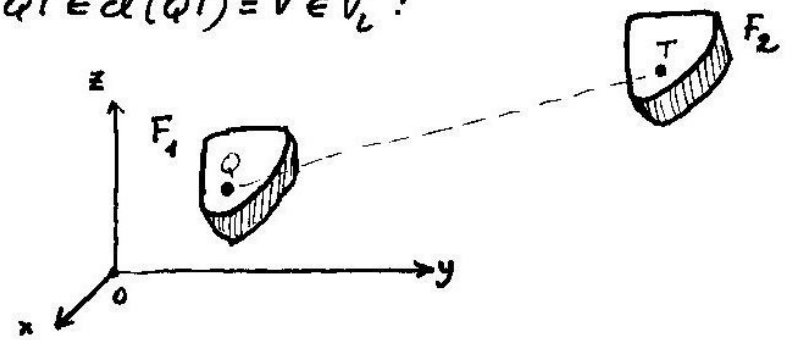
Como los vectores libres de V_L^3 son clases de vectores fijos paralelos, del mismo sentido y con igual longitud del módulo, entonces la relación de equipolencia $\sim$ es más fina que la || en E_3^{OXYZ} para rectas vectoriales, pues $\sim$ establece una sub-clasificación de recto-

res fijos dentro de cada Haz de rectas paralelas. Por tanto:

$$\text{card}\left(E_3^{Oxyz}/_{\parallel}\right) \leq \text{card}\left(V_L^3/_{\sim}\right)$$

Apartado-8.

Dado un cuerpo o figura tridimensional (conjunto de puntos de E_3^{Oxyz}) $F_1 \subset E_3^{Oxyz}$ y un vector $\vec{v} \in V_L^3$, se llama TRASLACIÓN de vector $\vec{v}$ de F_1, denotándose $\tau_{\vec{v}}(F_1)$, a la figura $F_2 \subset E_3^{Oxyz}$ que se obtiene transformando F_1 en F_2 mediante $\tau_{\vec{v}}$, de tal manera que cada punto $Q \in F_1$ tiene su correspondiente biyectivamente en $T \in F_2$, tal que $\vec{QT} \in cl(\vec{QT}) = \vec{v} \in V_L^3$:



Se obtienen los mismos resultados en cualquier sistema heterogonal $S_3^{P\alpha\beta\gamma}$:

$$\left.\begin{array}{l} \tau_{\vec{v}}(F_1)_{Oxyz} = F_2 \\ \tau_{\vec{v}}(F_1)_{P\alpha\beta\gamma} = F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \tau_{\vec{v}}(F_1)_{Oxyz} = \tau_{\vec{v}}(F_1)_{P\alpha\beta\gamma}$$

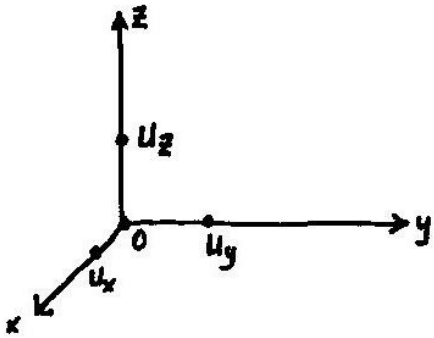
Por lo tanto, se dice que una traslación $\tau_{\vec{v}}$ de un vector fijo $\vec{AB}$ da como resultado una imagen $\tau_{\vec{v}}(\vec{AB})$ equipolente a $\vec{AB}$ en E_3^{Oxyz} y en $S_3^{P\alpha\beta\gamma}$, y se puede definir la Equipolencia como una función traslación del vector posición o representante canónico de una determinada clase de equivalencia de $V_f^3/_{\sim} = V_L^3$, en donde cada elemento de dicha clase sería imagen de dicho vector posición mediante $\tau_{\vec{v}}$.

(Colinealidad).

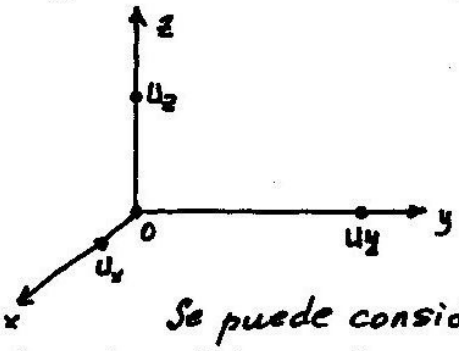
Apartado-1.

Un SISTEMA ORTONORMAL de coordenadas espaciales (o tridimensionales) es un trío de rectas ortogonales (perpendiculares entre sí), que denotaremos $(Oxyz)_n$, incluídas en el espacio euclidiano E_3. Evidentemente $(Oxyz)_n$ es un conjunto de puntos de E_3, es decir, $(Oxyz)_n \subset E_3$. Además, por ser Ortonormal, $(Oxyz)_n$ tiene adjudicada la misma unidad de medida OU para cada uno de los ejes:

$long(OU) = long(OU_x) = long(OU_y) = long(OU_z) = 1$



Así, pues, E_3 (espacio euclidiano ordinario), al ser referenciado (en cada uno de sus puntos) por un subconjunto $(Oxyz)_n$ del mismo, se convierte en $\textcircled{E}_3^{Oxyz}$, esto es, en el ESPACIO CARTESIANO ORTONORMAL ORDINARIO (o Tridimensional). Cuando el sistema de ejes $(Oxyz) \subset E_3$ no es Ortonormal sino sólo ORTOGONAL (porque al menos uno de los ejes tiene diferente unidad de medida que los otros dos, aunque los tres son perpendiculares entre sí), se denota $(Oxyz)_g$; por ejemplo:

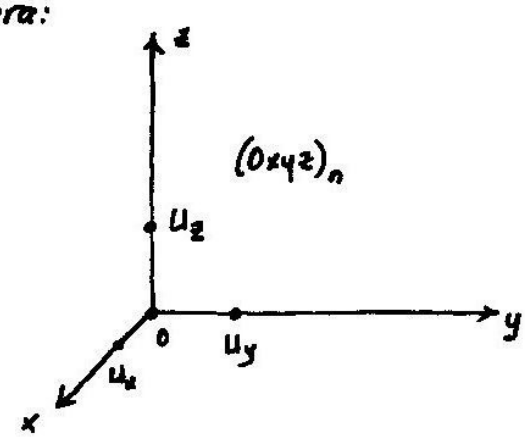


$long(OU_x) \neq long(OU_y) \neq long(OU_z)$

$Long(OU_x) \neq long(OU_z)$

Se puede considerar $(Oxyz)_n$ como un caso particular de $(Oxyz)_g$, tal que hay una misma unidad métrica para todos los ejes.

Esto también se puede expresar vectorialmente, de la siguiente manera:



$|\vec{OU_x}| = |\vec{OU_y}| = |\vec{OU_z}| = 1$

$\vec{OU_x} = \vec{i}$; $\vec{OU_y} = \vec{j}$; $\vec{OU_z} = \vec{k}$

Tal que $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ se llaman VERSORES BÁSICOS y son de signo positivo, en $\textcircled{E}_3^{Oxyz}$. Éstos son vectores fijos, de posición. También son considerados vectores directores de las rectas vectoriales de los ejes coordenados.

Por tanto: $\vec{Ox} = r\vec{i}$; $\vec{Oy} = r\vec{j}$; $\vec{Oz} = r\vec{k}$. $\quad | r \in R$.

O sea, más exactamente:

$$(Ox)_{\vec{i}} = \{ r\vec{i} \mid r \in R \}$$
$$(Oy)_{\vec{j}} = \{ r\vec{j} \mid r \in R \}$$
$$(Oz)_{\vec{k}} = \{ r\vec{k} \mid r \in R \}$$

Los vectores V_f^3 representados en $\mathbb{E}_3^{OXYZ}$ adquieren una identidad más concreta y forman el conjunto $\mathbb{F}_3^{OXYZ}$, es decir, el conjunto de los vectores fijos del espacio ordinario o tridimensional dotado de $(OXYZ)_n$. Pero $\mathbb{F}_3^{OXYZ}$ no es un espacio vectorial ortonormal, pues no se cumple la conmutatividad en la suma de vectores fijos; por lo tanto, $\mathbb{F}_3^{OXYZ}$ se denominará PROESPACIO VECTORIAL ORTONORMAL ORDINARIO (o tridimensional) y todos sus puntos son asimilados a orígenes y/o extremos de vectores fijos.

Para que a partir del proespacio $\mathbb{F}_3^{OXYZ}$ pueda obtenerse un ESPACIO VECTORIAL ORTONORMAL ORDINARIO $\mathbb{L}_3^{OXYZ}$, de vectores libres, es imprescindible introducir la relación de Equipolencia en $\mathbb{F}_3^{OXYZ}$, para que pueda definirse $\mathbb{L}_3^{OXYZ}$ así:

$$\mathbb{F}_3^{OXYZ}/_{\sim} = \mathbb{L}_3^{OXYZ}$$

Por otra parte, hay que tener en cuenta que todo punto $P \in \mathbb{E}_3^{OXYZ}$ corresponde en $\mathbb{F}_3^{OXYZ}$ a un vector fijo nulo, o sea:

$$\vec{p} = \vec{PP} = \vec{0}$$

Y con ello queda establecido que en $\mathbb{F}_3^{OXYZ}$ hay tantos vectores fijos nulos como elementos o puntos tiene $\mathbb{E}_3^{OXYZ}$; pero, además, en $\mathbb{F}_3^{OXYZ}$ hay más elementos, y ésos son todos los vectores fijos no nulos, con lo cual (ver tema siguiente: CARDINALIDAD):

$$card\left[\mathbb{E}_3^{OXYZ}\right] < card\left[\mathbb{F}_3^{OXYZ}\right]$$

Donde:
$$card\left[\mathbb{E}_3^{OXYZ}\right] = card(R) \times card(R) \times card(R) = card(R)^3 = card(R).$$

Pero:
$$card\left[\mathbb{F}_3^{OXYZ}\right] = card(R)^{card(R)} > card(R)$$

ya que cada punto de $\mathbb{E}_3^{OXYZ}$ puede considerarse origen de un vector fijo con extremo en cualquier punto de $\mathbb{E}_3^{OXYZ}$.

<u>Apartado-2.</u>

En el proespacio vectorial ortonormal ordinario $\mathbb{F}_3^{OXYZ}$, siendo $\vec{v}, \vec{w} \in V_f^3$, tendremos (apartado-6, página 6):

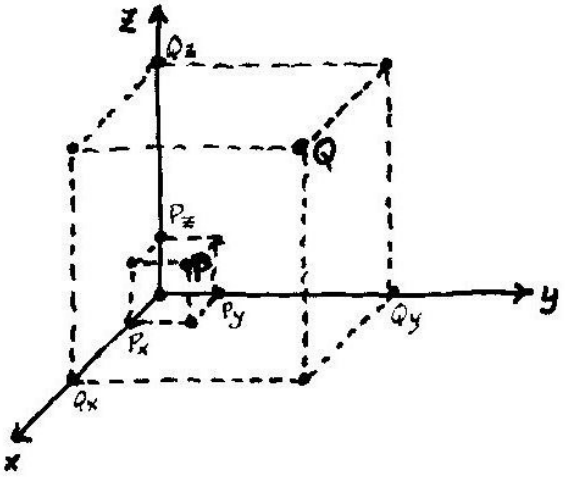
$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{F}_3^{OXYZ}: \ \vec{v} \parallel \vec{w} \iff \exists r \in R \mid comp(\vec{v}) = comp(r\vec{w}).$$

Y serán equipolentes cuando (apartado-5, página 6):

$$comp(\vec{v}) = comp(\vec{w}) = comp(1\vec{w}) = comp(r\vec{w}) \mid r = 1.$$

Apartado-3.

Mientras que $\mathcal{E}_3^{oxyz}$ es el espacio cartesiano ortonormal ordinario o tridimensional (es decir, el espacio euclidiano ordinario E_3 dotado de un sistema referencial ortonormal $(oxyz)_n$), E_3^{oxyz} es el ESPACIO CARTESIANO ORTOGONAL ORDINARIO o TRIDIMENSIONAL (es decir, E_3 dotado de un sistema referencial ortogonal $(oxyz)_g$). De la misma forma, mientras $\mathcal{F}_3^{oxyz}$ es el proespacio vectorial ortonormal ordinario o tridimensional (es decir, $\mathcal{E}_3^{oxyz}$ dotado de los vectores unitarios o versores básicos $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, positivos, donde cada punto es considerado como origen y/o extremo de un vector fijo), F_3^{oxyz} es el PROESPACIO VECTORIAL ORTOGONAL ORDINARIO o TRIDIMENSIONAL (es decir, E_3^{oxyz} dotado de los versores básicos $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, positivos, tales que $\vec{A} = r\vec{i}$, $\vec{B} = s\vec{j}$, $\vec{C} = t\vec{k}$, con $r, s, t \in R$):



$$\vec{i} = \vec{OP_x}, \quad \vec{j} = \vec{OP_y}, \quad \vec{k} = \vec{OP_z}$$

$$\left(|\vec{OP_x}| = |\vec{OP_y}| = |\vec{OP_z}|\right)_{(oxyz)_n}$$

$$\left(|\vec{OQ_x}| = |\vec{OQ_y}| = |\vec{OQ_z}|\right)_{(oxyz)_g}$$

$$\left(\vec{A} = r\vec{i}, \ \vec{B} = s\vec{j}, \ \vec{C} = t\vec{k}\right)_{(oxyz)_n}$$

$$\left(\vec{i} = \frac{1}{r}\vec{A}, \ \vec{j} = \frac{1}{s}\vec{B}, \ \vec{k} = \frac{1}{t}\vec{C}\right)_{(oxyz)_g}$$

$$\vec{A} = \vec{OQ_x}, \quad \vec{B} = \vec{OQ_y}, \quad \vec{C} = \vec{OQ_z}$$

Siendo F_3^{oxyz} un proespacio vectorial ortogonal ordinario, no ortonormal y sean $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{F}_3^{oxyz}$ tal que $\vec{v} \parallel \vec{w}$ (tanto en F_3^{oxyz} como en $\mathcal{F}_3^{oxyz}$), será, por definición, en $\mathcal{F}_3^{oxyz}$:

$$\exists r \in R \mid comp(\vec{v})_n = comp(r\vec{w})_n$$

donde hemos hecho:

$$n = (oxyz)_n \ ; \ g = (oxyz)_g$$

Por lo tanto, cabe preguntarse si la misma definición dada para vectores fijos paralelos en $\mathcal{F}_3^{oxyz}$ es válida para F_3^{oxyz}, esto es, si se cumple lo siguiente:

$$\exists r \in R \mid comp(\vec{v})_g = comp(\vec{w})_g$$

Veamos: $(\vec{v} \parallel \vec{w})_n \Leftrightarrow comp(\vec{v})_n = comp(r\vec{w})_n \ \mid r \in R$

En consecuencia, si:

$$comp(\vec{v})_n = (v_x, v_y, v_z)$$

$$comp(\vec{w})_n = (w_x, w_y, w_z)$$

Será:

$$(v_x, v_y, v_z) = r\,(w_x, w_y, w_z) = (r w_x, r w_y, r w_z)$$

y como: $\left(\vec{i} = \frac{1}{r_x}\vec{A},\ \vec{j} = \frac{1}{r_y}\vec{B},\ \vec{k} = \frac{1}{r_z}\vec{C}\right)_g$

Entonces:

$$(v_x, v_y, v_z)_n = (v_x\, i,\ v_y\, j,\ v_z\, k)_n \quad \left| \begin{array}{l} i = |\vec{i}| = 1 \\ j = |\vec{j}| = 1 \\ k = |\vec{k}| = 1 \end{array} \right.$$

$$(v_x, v_y, v_z)_n = \left(v_x \frac{A}{r_x},\ v_y \frac{B}{r_y},\ v_z \frac{C}{r_z}\right)_g \quad \left| \begin{array}{l} A = |\vec{A}| = 1 \\ B = |\vec{B}| = 1 \\ C = |\vec{C}| = 1 \end{array} \right.$$

$$(w_x, w_y, w_z)_n = \left(\frac{1}{r} v_x, \frac{1}{r} v_y, \frac{1}{r} v_z\right)_n =$$

$$= \frac{1}{r}(v_x, v_y, v_z)_n = \frac{1}{r}\left(v_x \frac{A}{r_x}, v_y \frac{B}{r_y}, v_z \frac{C}{r_z}\right)_g$$

O sea:

$$comp(\vec{v})_g = \frac{1}{r} \cdot comp(\vec{w})_g = comp\left(\frac{1}{r}\vec{w}\right)_g \quad \Big|\ \frac{1}{r} \in R$$

c.q.d.

TEOREMA-1:

Siendo $\vec{v}, \vec{w} \in V_t^3$ tales que $\vec{v} \parallel \vec{w}$, entonces se cumple que $\exists r \in R$ tal que:

$$comp(\vec{v})_n = comp(r\vec{w})_n$$
$$comp(\vec{v})_g = comp\left(\frac{1}{r}\vec{w}\right)_g$$

DEMOSTRACIÓN: Dada en las líneas precedentes.

TEOREMA-2:

Siendo $\vec{v}, \vec{w} \in V_t^3$ tales que $\vec{v} \sim \vec{w}$, entonces se cumple lo siguiente:

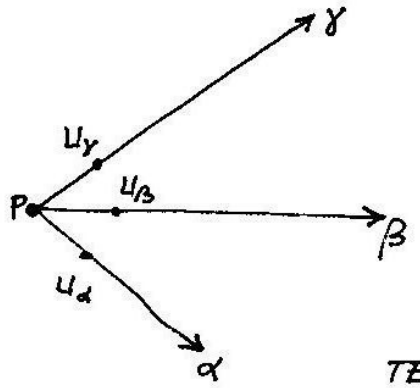
$$comp(\vec{v})_n = comp(\vec{w})_n$$
$$comp(\vec{v})_g = comp(\vec{w})_g$$

DEMOSTRACIÓN: Corolario del teorema anterior, haciendo $r = 1$.

Apartado-4.

Mientras que E_3^{OXYZ} es el espacio cartesiano ortogonal ordinario y $\textcircled{E}_3^{OXYZ}$ es el espacio cartesiano ortonormal ordinario, $\textcircled{S}_3^{P\alpha\beta\gamma}$ es el ESPACIO HETERONORMAL ORDINARIO o TRIDIMENSIONAL (es decir, el espacio euclidiano E_3 dotado de un sistema referencial de 3 ejes rectilíneos heteronormales $(P\alpha\beta\gamma)_n$ o ejes heterogonales con la misma unidad de

medida $\overline{PU}$ para todos ellos):

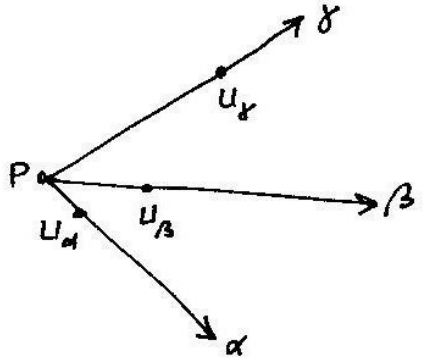


$\overrightarrow{PU}_\alpha = \vec{u}_\alpha$; $\overrightarrow{PU}_\beta = \vec{u}_\beta$; $\overrightarrow{PU}_\gamma = \vec{u}_\gamma$

$long\,(\overline{PU}_\alpha) = long\,(\overline{PU}_\beta) = long\,(\overline{PU}_\gamma)$

$|\vec{u}_\alpha| = |\vec{u}_\beta| = |\vec{u}_\gamma| = 1$

Mientras que $\mathcal{S}_3^{P\alpha\beta\gamma}$ es el espacio heteronormal ordinario, $S_3^{P\alpha\beta\gamma}$ es el ESPACIO HETEROGONAL ORDINARIO o TRIDIMENSIONAL (es decir, E_3 dotado de un sistema referencial de 3 ejes rectilíneos heterogonales $(P\alpha\beta\gamma)_g$ donde al menos 2 de ellos poseen unidades de medida de diferente longitud):



TEOREMA-3:

Siendo $\vec{v}, \vec{w} \in V_f^3$ tales que $\vec{v} \sim \vec{w}$ en $\mathcal{E}_3^{OXYZ}$, entonces se cumple lo siguiente:

$$comp\,(\vec{v})_n = comp\,(\vec{w})_n$$
$$comp\,(\vec{v})_g = comp\,(\vec{w})_g$$

Donde: $g = (P\alpha\beta\gamma)_g$

$n = (P\alpha\beta\gamma)_n$

DEMOSTRACIÓN:

Es engorrosa y sólo la esbozaremos. Para probar este teorema hay que recurrir a traslaciones tridimensionales de paralelepípedos obtenidos a partir de segmentos rectilíneos coincidentes con las componentes de $\vec{v}$ y $\vec{w}$, efectuándose dichas traslaciones (que dejan invariantes a las estructuras paralelepípedas) desde las ubicaciones de $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en $\mathcal{S}_3^{P\alpha\beta\gamma}$ hasta el origen P de $(P\alpha\beta\gamma)_n$ y luego pasar desde $(P\alpha\beta\gamma)_n$ a $(P\alpha\beta\gamma)_g$, y viceversa.

TEOREMA-4:

Siendo $\vec{v}, \vec{w} \in V_f^3$ tales que $\vec{v} \parallel \vec{w}$ en $\mathcal{E}_3^{OXYZ}$, entonces $\exists r \in R$ tal que: $comp\,(\vec{v})_n = comp\,(r\vec{w})_n$; $comp\,(\vec{v})_g = comp\,(\frac{1}{r}\vec{w})_g$

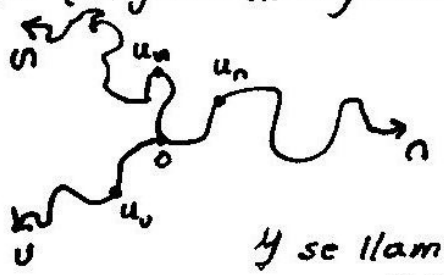
Donde:

$$g = (P\alpha\beta\gamma)_g \quad ; \quad n = (P\alpha\beta\gamma)_n$$

DEMOSTRACIÓN: a partir del teorema anterior, tomando $\vec{v} \sim r\vec{w}$ y $\frac{1}{r}\vec{v} \sim \vec{w}$, así como teniendo en cuenta efectuar traslaciones convenientes de paralelepípedos construídos a partir de las correspondientes componentes.

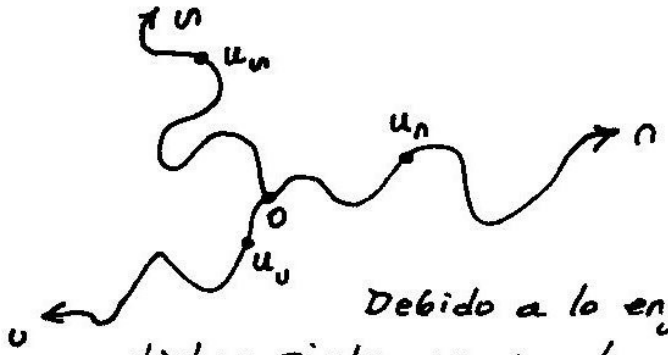
Apartado-5.

Se llama ESPACIO CURVONORMAL ORDINARIO o TRIDIMENSIONAL, $\mathcal{O}_3^{OUNW}$, al espacio euclidiano E_3 dotado de un sistema referencial de 3 ejes curvilíneos $(OUNW)_n$ con la misma unidad de medida $\overline{OU}$ (longitud de segmento curvilíneo) para todos ellos:

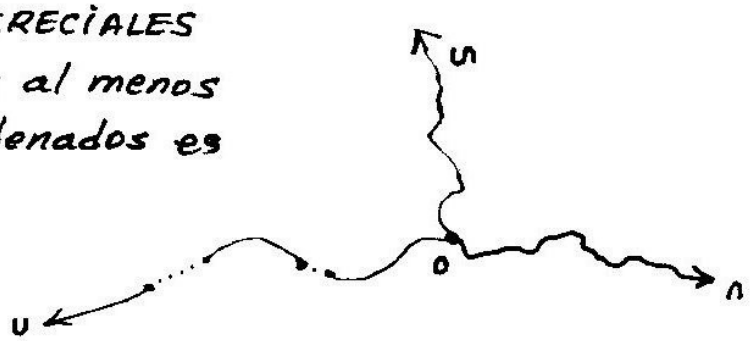


$$long(OU_v) = long(OU_n) = long(OU_w)$$

Y se llama ESPACIO CURVOGONAL ORDINARIO o TRIDIMENSIONAL, C_3^{OUNW}, al espacio E_3 dotado de un sistema referencial de 3 ejes curvilíneos $(OUNW)_g$ con diferentes unidades de medida para 2 de ellos al menos:



Debido a lo engorroso que es utilizar dichos sistemas, por las irregularidades geométricas que presentan, no deben tenerse en cuenta para expresar vectores. Además, a la hora de concebir sistemas referenciales, la cosa se puede complicar mucho más cuando introducimos SISTEMAS REFERECIALES INTERRUPTOS, en donde al menos uno de los ejes coordenados es discontinuo:



Por consiguiente, en principio, para los fines teóricos que tenemos de momento, ignoraremos por completo los sistemas referenciales curvilíneos (curvonormales y curvogonales) y los sistemas interruptos. Sólo usaremos sistemas referenciales rectilíneos (ortogonales y heterogonales), con preferencia por los sistemas ortonormales rectilíneos $(oxyz)_n$.

Apartado-6.

Se puede considerar a V_f^3 como una variable de un conjunto $\mathfrak{E}$ de 4 elementos:

$$\mathfrak{E} = \{\mathcal{E}, \textcircled{\mathcal{E}}, \sigma, \textcircled{\sigma}\}$$

Es decir: $V_f^3 = x \mid x \in \mathfrak{E}$.

Donde:

$$\mathcal{E} = F_3^{oxyz} = VE_3^{oxyz} = E_3^{oxyz} \times E_3^{oxyz} = (E_3^{oxyz})^2.$$
$$\textcircled{\mathcal{E}} = \textcircled{F}_3^{oxyz} = V\textcircled{E}_3^{oxyz} = (\textcircled{E}_3^{oxyz})^2.$$
$$\sigma = VS_3^{P\alpha\beta\gamma} = (S_3^{P\alpha\beta\gamma})^2.$$
$$\textcircled{\sigma} = V\textcircled{S}_3^{P\alpha\beta\gamma} = (\textcircled{S}_3^{P\alpha\beta\gamma})^2.$$

Siendo:

- $(E_3^{oxyz})^2$ el conjunto producto cartesiano $E_3^{oxyz} \times E_3^{oxyz}$, formado por todos los pares ordenados (P,Q) de puntos $P,Q \in E_3^{oxyz}$, que corresponden a los orígenes (P) y extremos (Q) de los vectores fijos $\vec{PQ}$ representados en E_3^{oxyz}.
- $(\textcircled{E}_3^{oxyz})^2$ es similar al anterior, con $P,Q \in \textcircled{E}_3^{oxyz}$.
- $(S_3^{P\alpha\beta\gamma})^2$ es similar, con $P,Q \in S_3^{P\alpha\beta\gamma}$.
- $(\textcircled{S}_3^{P\alpha\beta\gamma})^2$ es similar, con $P,Q \in \textcircled{S}_3^{P\alpha\beta\gamma}$.

Por lo tanto:

- $\forall \vec{x},\vec{y} \in \mathcal{E}: \ \vec{x} \sim \vec{y} \iff comp(\vec{x})_{\mathcal{E}} = comp(\vec{y})_{\mathcal{E}}$.
- $\forall \vec{x},\vec{y} \in \textcircled{\mathcal{E}}: \ \vec{x} \sim \vec{y} \iff comp(\vec{x})_{\textcircled{\mathcal{E}}} = comp(\vec{y})_{\textcircled{\mathcal{E}}}$
- $\forall \vec{x},\vec{y} \in \sigma: \ \vec{x} \sim \vec{y} \iff comp(\vec{x})_{\sigma} = comp(\vec{y})_{\sigma}$
- $\forall x,y \in \textcircled{\sigma}: \ \vec{x} \sim \vec{y} \iff comp(\vec{x})_{\textcircled{\sigma}} = comp(\vec{y})_{\textcircled{\sigma}}$
- Cuando $\vec{x},\vec{y} \in \textcircled{\mathcal{E}}$ es $\vec{x} \sim \vec{y}$ en $\textcircled{\mathcal{E}}$, entonces $\vec{x} \sim \vec{y}$ en $\mathcal{E}$, σ y $\textcircled{\sigma}$.
- Cuando $\vec{x} \sim \vec{y}$ en cualquier $x \in \mathfrak{E}$, entonces $\vec{x} \sim \vec{y}$ en todo $x \in \mathfrak{E}$.

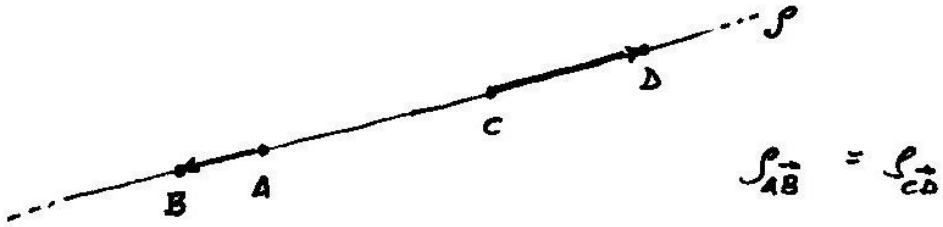
También:

- $\forall \vec{x},\vec{y} \in \textcircled{\mathcal{E}}: \ \vec{x} \parallel \vec{y} \iff \exists r \in R \mid comp(\vec{x})_{\textcircled{\mathcal{E}}} = comp(r\vec{y})_{\textcircled{\mathcal{E}}}$
- Cuando $\vec{x} \parallel \vec{y}$ en cualquier $x \in \mathfrak{E}$, entonces $\vec{x} \parallel \vec{y}$ en todo $x \in \mathfrak{E}$.

  Y se cumple, $\forall x \in \mathfrak{E}: \ \exists r \in R \mid comp(\vec{x})_x = comp(t\vec{y})_x$, con $t \in R$.

Apartado-7.

Se dirá que 2 vectores fijos $\vec{AB}, \vec{CD} \in V_f^3$ son VECTORES COLINEALES cuando existe una recta $\rho \subset E_3$ tal que $A, B, C, D \in \rho$. Por lo tanto, esto equivale a decir que la recta vectorial $\rho_{\vec{AB}}$, de vector director $\vec{AB}$, es igual a la recta vectorial $\rho_{\vec{CD}}$, de vector director $\vec{CD}$ (ver apartado-3, página 5):



La Colinealidad sólo es definible para vectores fijos, no siendo aplicable a vectores libres porque los vectores libres pertenecen a haces de rectas vectoriales paralelas y no a rectas vectoriales aisladas. Además, la colinealidad es un caso particular y excepcional de paralelismo en V_f^3. Colinealidad y Equipolencia sólo se definen en V_f^3, y no en V_L^3. En cambio, el Paralelismo es definible en V_f^3 y en V_L^3, de la siguiente manera en V_L^3:

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in V_L^3: \quad \vec{v} \parallel \vec{w} \iff \exists r \in R \mid \vec{v} = r\vec{w}$$

O sea: $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V_L^3: \ \vec{v} \parallel \vec{w} \iff \exists r \in R \mid comp(\vec{v})_x = comp(r\vec{w})_x$

Donde: $x \in \mathcal{E} = \{\varepsilon, \textcircled{\varepsilon}, \sigma, \textcircled{\sigma}\}$

(ver apartado anterior).

Independencia Lineal.

Apartado-1.

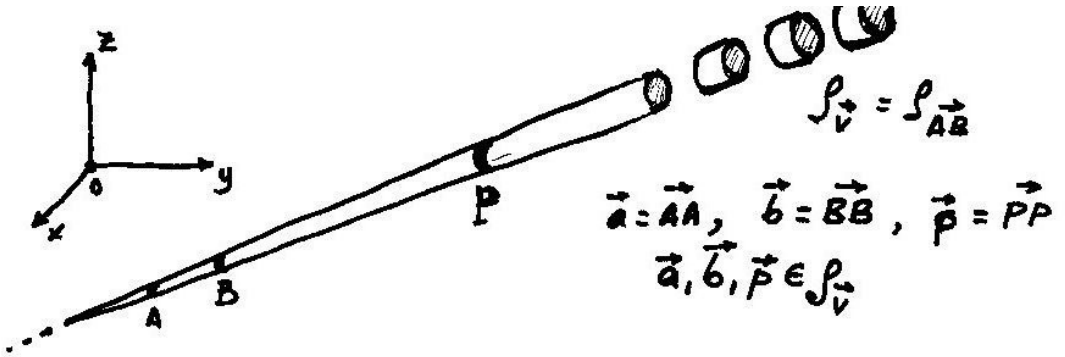
Es necesario precisar o redefinir el concepto de RECTA VECTORIAL en $V_f^3 = x \in \mathcal{E} = \{\varepsilon, \textcircled{\varepsilon}, \sigma, \textcircled{\sigma}\}$, diciendo: Una Recta Vectorial $\rho_{\vec{v}}$, de vector director $\vec{v} \in V_f^3$, es un conjunto de vectores nulos $\vec{p} \in V_f^3$ (equivalentes a los puntos de E_3), con $\vec{p} = \vec{PP}$, donde $P \in E_3$, tal que: $\forall \vec{p} = \vec{PP} \in \rho_{\vec{v}} \mid \vec{v} = \vec{AB} \in V_f^3 \Rightarrow \exists r \in R \mid r\vec{v} = r\vec{AB} = \vec{AP} \in V_f^3$.

O sea, siendo necesariamente concatenados $r\vec{v}$ y $\vec{p}$:

$$\forall \vec{p} \in \rho_{\vec{v}} \Rightarrow \exists r\vec{v} \in V_f^3 \mid r\vec{v} \oplus \vec{p} = r\vec{v} \mid r \in R.$$

También: $\rho_{\vec{v}} = \{ \vec{p} \in V_f^3 \mid \vec{p} = \vec{PP} \mid \exists r \in R \mid r\vec{v} = r\vec{v} \oplus \vec{p} \}$

Gráficamente:



Apartado-2.

Siendo O_f^3 el conjunto de todos los vectores nulos de V_f^3 (es decir, todos los vectores fijos cuyos orígenes y extremos coinciden) tendremos:

$$O_f^3 \subset V_f^3 \mid O_f^3 \neq V_f^3$$

$$O_f^3 = cl(\vec{0}) = cl(\vec{00}) \in V_f^3/_{\sim} = V_L^3 \mid 0 \in E_3 \mid \vec{0} \in V_L^3.$$

Por lo tanto, una recta vectorial cualquiera $\rho_{\vec{v}} \mid \vec{v} \in V_f^3$ es un subconjunto propio de O_f^3:

$$\forall \rho_{\vec{v}} \mid \vec{v} \in V_f^3 \Rightarrow \rho_{\vec{v}} \subset O_f^3 \mid \rho_{\vec{v}} \neq O_f^3.$$

Apartado-3.

En O_f^3 hallamos 2 tipos de relaciones geométricas para todo par de rectas vectoriales de O_f^3, a saber:

1).- La CONCURRENCIA de rectas vectoriales, diciéndose, pues, que $\rho_{\vec{v}}, \rho_{\vec{w}} \subset O_f^3$ son CONCURRENTES cuando poseen un elemento común:

$$\rho_{\vec{v}} \cap \rho_{\vec{w}} = \vec{p} \in O_f^3.$$

2).- La INCONCURRENCIA de rectas vectoriales, diciéndose, pues, que $\rho_{\vec{v}}, \rho_{\vec{w}} \subset O_f^3$ son INCONCURRENTES cuando no poseen ningún elemento común:

$$\rho_{\vec{v}} \cap \rho_{\vec{w}} = \phi.$$

A su vez, las rectas vectoriales inconcurrentes pueden presentar 2 tipos de relaciones geométricas:

1).- El PARALELISMO ESTRICTO, diciéndose, pues que las rectas vectoriales $\rho_{\vec{v}}, \rho_{\vec{w}} \subset O_f^3$ son ESTRICTAMENTE PARALELAS cuando $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \rho_{\vec{v}} \mid \vec{a} \neq \vec{b}$ y $\forall \vec{c}, \vec{d} \in \rho_{\vec{w}} \mid \vec{c} \neq \vec{d}$, con $\vec{a} = \vec{AA}$, $\vec{b} = \vec{BB}$, $\vec{c} = \vec{CC}$, $\vec{d} = \vec{DD}$, se verifica:

$$\exists r \in R \mid comp(\vec{AB}) = comp(r\,\vec{CD}).$$

Con: $\vec{AB}, \vec{CD} \in V_f^3$.

2).- El CRUZAMIENTO, diciéndose, pues, que las rectas vectoriales $\rho_{\vec{v}}, \rho_{\vec{w}} \subset O_f^3$ son CRUZADAS cuando $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \rho_{\vec{v}} \mid \vec{a} \neq \vec{b}$ y $\forall \vec{c}, \vec{d} \in \rho_{\vec{w}} \mid \vec{c} \neq \vec{d}$ se verifica:

$\exists r \in R \mid comp(\vec{AB}) = comp(r\vec{CD})$.

Apartado-4.

De la definición de paralelismo de rectas vectoriales (página anterior) se desprende que, como $\vec{AB} \sim r\vec{CD}$, basta hallar 2 vectores fijos equipolentes $\vec{v} \sim \vec{w}$ para afirmar que las rectas vectoriales $\rho_{\vec{v}}$ y $\rho_{\vec{w}}$ son paralelas en sentido no estricto (que incluye la posibilidad de que sea $\rho_{\vec{v}} = \rho_{\vec{w}}$).

Siendo RO_f^3 el conjunto formado por todas las rectas vectoriales que se pueden construir con los elementos (puntos) de O_f^3, como la relación de paralelismo de rectas vectoriales es una relación de equivalencia en RO_f^3, que clasifica rectas vectoriales (conjuntos rectilíneos de puntos) y establece una partición de conjunto cociente $RO_f^3/_{\parallel}$, entonces, cada clase así definida será llamada HAZ de rectas paralelas (rectas vectoriales paralelas, mejor dicho), denotándose $H_{\vec{u}}$, donde $\vec{u}$ es un versor positivo y vector libre que sirve como VECTOR DIRECTOR de $H_{\vec{u}}$, un vector genérico tal que $\vec{u} = cl(\vec{ou}) \in V_L^3$, con $\vec{ou} \in V_f^3$, siendo $\vec{ou}$ un vector unitario positivo fijo y vector posición que sirve como representante canónico de $\vec{u} \in V_L^3$. De donde, para cada recta de $H_{\vec{u}} \in RO_f^3$ hay un elemento de $\vec{v} = cl(\vec{ou})$ que sirve de vector director de tal recta, y para cada vector fijo de $\vec{u} = cl(\vec{ou})$ hay una recta de $H_{\vec{u}}$ a la que adjudicarle tal vector fijo como vector director, es decir, una biyección entre $H_{\vec{u}}$ y $\vec{u} = cl(\vec{ou})$.

Por otra parte, si bien la relación de paralelismo es completamente factible para rectas vectoriales de RO_f^3, no es posible entre haces de $RO_f^3/_{\parallel}$, puesto que todo haz paralelo a otro haz son realmente iguales. En cambio, la relación de igualdad (o desigualdad) de haces de rectas vectoriales sí es definible en RO_f^3. Por otro lado, es posible establecer una relación de paralelismo entre vectores libres de V_L^3, puesto que 2 vectores libres paralelos entre sí pueden tener módulos difentes (en longitud) o pueden ser antiparalelos (de sentidos distintos).

Apartado-5.

Siendo $H_{\vec{v}}$ un Haz de rectas vectoriales de $RO_f^3/_{\parallel} = H_R^3$, esto es,

$H_{\vec{v}} \in H_R^3$, el vector $\vec{v} \in V_L^3$ se llamará VECTOR DIRECTOR del Haz $H_{\vec{v}}$, puesto que $\forall \rho_{\vec{x}} \in H_{\vec{x}} \in H_R^3$ se puede encontrar un vector fijo $\vec{x} \in cl(\vec{x}) = \vec{v} \in V_L^3$ tal que $\forall \rho_{\vec{y}} \in H_{\vec{x}} \in H_R^3$ existe un $\vec{y} \in cl(\vec{x}) = \vec{v} \in V_L^3$ tal que $\rho_{\vec{x}} \parallel \rho_{\vec{y}}$. Por lo tanto, una recta vectorial $\rho_{\vec{v}}$ viene definida por un vector director fijo $\vec{v} \in V_f^3$ mientras que un Haz de rectas vectoriales $H_{\vec{w}}$ viene definido por un vector director libre $\vec{w} \in V_L^3$.

Apartado-6.

Dado que $(V_f^3, R) \equiv [(V_f^3, \oplus), (R, +, \cdot), \odot]$ no es un espacio vectorial en sentido algebraico, los conceptos de Dependencia e Independencia Lineal no son definibles en dicha estructura; pero sí lo son en la estructura algebraica $(V_L^3, R) \equiv [(V_L^3, \oplus), (R, +, \cdot), \odot]$ porque es espacio vectorial. Y, así, sucede que todo sistema (conjunto finito) de elementos (vectores libres) de V_L^3 de cardinal mayor que 3 es siempre Ligado, pero si dicho cardinal es menor que 4 entonces puede ser Libre o Ligado (uno de ambos); de ahí que toda Base de V_L^3 sea un sistema Ternario (de 3 elementos o vectores libres de V_L^3); por consiguiente, la dimensión de V_L^3 es 3, o sea:

$$\dim(V_L^3) = 3.$$