Física teórica
MECÁNICA

Cinemática tensorial

Tema 7

R-espacio vectorial V_L^2

Sinopsis

Tema 7... R-espacio vectorial V-l-2.

Introducción. Vector libre. Vector nulo. Componentes. Grupo abeliano (V-l-0, + vectorial). Estructura (V-l-0, R): espacio vectorial **(página 1).**

R-espacio V-l-1. Estructura (V-l-1, R). Representación geométrica de (V-l-1, R). Bases y dimensión de V-l-1. Cardinalidad de V-l-1. Potencia del continuo. Potencia del numerable. Sistemas generadores infinitos **(página 2).**

Base canónica de (V-l-1, R). (V-l-0, R) es subespacio de (V-l-1, R). R-espacio V-l-2. Rectas ortogonales y heterogonales. Sistemas referenciales ortogonales y heterogonales **(página 3).**

Sistema referencial fundamental (E-2-oxy). Ejes rectilíneos ortogonales. Corrdenadas en E-2-oxy. Sistemas referenciales rectilíneos y curvilíneos. Sistemas referenciales rectilíneos ortogonales y heterogonales. Regla de paralelogramo. Sistema referencial fundamental, E-2-oxy **(página 4).**

Paralelogramo. Regla del paralelogramo en sistemas referenciales curvilíneos altamente enrevesados **(página 5).**

Traslación. Isometría. Transformación isométrica **(página 6).**

Referenciación de E-2-oxy en S-2-Paβ. Giros y traslaciones de los ejes coordenados. Colinealidad. Recta vectorial **(página 7).**

Vectores planarios, fijos, libres, de desplazamiento, de posición, colineales, acolineales, paralelos, oblicuos, iguales y desiguales **(página 8).**

Vectores equipolentes. Traslación planaria. Sistema libre y sistema ligado en (V-l-2. R) **(página 9).**

Paralelismo vectorial. Vector director. Recta vectorial. Rectas paralelas. Vectores paralelos. Vectores directamente paralelos e indirectamente paralelos. Vectores antiparalelos. Relación de equivalencia entre vectores fijos paralelos, clasificación y partición. Haces de vectores fijos paralelos **(páginas 10 y 11).**

Vectores fijos equipolentes y paralelos. Traslación de un vector. Relaciones de paralelismo y equipolencia **(página 12).**

Rectas oblicuos o concurrentes. Vectores fijos oblicuos o concurrentes **(página 13).**

Paralelismo de vectores libres. Haz de vectores libres. Representante canónico de un haz. Vectores libres oblicuos o concurrentes. Teoremas 1 y 2 **(páginas 14 y 15).**

Bases vectoriales planarias. Bases vectoriales de V-l-2. Dimensión de V-l-2 **(página 16).**

Paralelismo, convegencia u oblicuidad, perpendicularidad y ortogonalidad y oblicuidad o convergencia no ortogonal de vectores libres. Vectores ortogonales o perpendiculares, ya fijos o ya libres. Base ortogonal. Base ortonormal. Base canónica. Componentes. Base ortonormal. Versores. Versores ortonormales. Componentes. Componentes escalares y vectoriales **(páginas 17 y 18).**

Relación de perpendicularidad y sus propiedades. Teoremas 3, 4 y 5 **(páginas 19 y 20).**

Componentes de vectores fijos. Equipolencia. Vectores libres. Isomorfismo entre (V-l-2, R) y (R-2, R). Estructura (V-l-2, R). Estructura [(V-l-2, + vectorial), (R, +, ·), · escalovectorial]. Subespacios (V-l-0, R) y (V-l-1, R) de (V-l-2, R) **(página 21).**

Índice.

Introducción (1).

Apartado-1 (1).

Vector libre. Vector nulo. Componentes. Grupo abeliano $(V_L^0; \oplus)$.

Apartado-2 (1)

Estructura (V_L^0, R): espacio vectorial.

R-espacio V_L^1. (2).

Apartado-1 (2).

Estructura (V_L^1, R).

Apartado-2 (2).

Representación geométrica de (V_L^1, R). Bases de V_L^1 y dimensión de V_L^1. Cardinalidad de V_L^1. Potencia del continuo. Potencia del numerable. Sistemas generadores infinitos.

Apartado-3 (3).

Base canónica de (V_L^1, R). (V_L^0, R) es subespacio de (V_L^1, R).

R-espacio V_L^2. (3).

Apartado-1 (3).

Rectas ortogonales y heterogonales. Sistemas referenciales ortogonales y heterogonales.

Apartado-2 (4).

Sistema referencial fundamental (E_2^{Oxy}). Ejes rectilíneos ortogonales. Coordenadas en E_2^{Oxy}. Sistemas referenciales bidimensionales rectilíneos y curvilíneos. Sistemas referenciales rectilíneos ortogonales y heterogonales.

Apartado-3 (4).

Regla del paralelogramo. Sistema referencial fundamental, E_2^{Oxy}.

Apartado-4 (5).

Paralelogramo. Regla del paralelogramo en sistemas referenciales curvilíneos altamente enrevesados.

Apartado-5 (6).

Traslación. Isometría. Transformación isométrica.

Apartado-6 (7).

Referenciación de E_2^{Oxy} en $S_2^{P\alpha\beta}$, y viceversa. Giros y traslaciones de los ejes coordenados.

Colinealidad. (7).

Apartado-1 (7).

Recta vectorial.

Apartado-2 (8).

Vectores planarios, fijos, libres, de desplazamiento, de posición, colineales, acolineales, paralelos, oblicuos, iguales y desiguales.

Apartado-3 (9).

Vectores equipolentes. Traslación planaria.

Apartado-4 (9).

Sistema libre y sistema ligado en (V_L^2, R).

Paralelismo vectorial. (10).

Apartado-1 (10).

Vector director. Recta vectorial. Rectas paralelas. Vectores paralelos. Vectores directamente paralelos e indirectamente paralelos. Vectores antiparalelos. Relación de equivalencia entre vectores fijos paralelos, clasificación y partición. Haces de vectores fijos paralelos.

Apartado-2 (12).

Vectores fijos equipolentes y paralelos. Traslación de un vector. Relaciones de paralelismo y equipolencia.

Apartado-3 (13).

Rectas oblicuas o concurrentes. Vectores fijos oblicuos o concurrentes.

Apartado-4 (14).

Paralelismo de vectores libres. Haz de vectores libres. Representante canónico de un haz. Vectores libres oblicuos o concurrentes. Teoremas 1 y 2.

Bases vectoriales planarias (16).

Apartado-1 (16).

Bases vectoriales de V_L^2. Dimensión de V_L^2.

Apartado-2 (16).

Producto escalar. Producto interior. Invarianza del producto escalar. Ortogonalidad o perpendicularidad de vectores libres y fijos.

Apartado-3 (17).

Paralelismo, convergencia u oblicuidad, perpendicularidad u ortogonalidad y oblicuidad o convergencia no ortogonal de vectores libres.

Vectores ortogonales o perpendiculares, ya fijos o ya libres.

Apartado-4 (17).

Base ortogonal. Base ortonormal. Base canónica.

Componentes. (17).

Apartado-1 (17).

Base ortonormal. Versores. Versores ortonormales. Componentes. Componentes escalares y vectoriales.

Apartado-2 (19).

Relación de perpendicularidad y sus propiedades. Teoremas 3, 4 y 5.

Apartado-3 (21).

Componentes de vectores fijos. Equipolencia. Vectores libres. Isomorfismo entre (V_l^2, R) y (R^2, R).

Estructura (V_l^2, R) (21).

Apartado-1 (21).

Estructura $[(V_l^2, \oplus), (R, +, \cdot), \odot]$.

Apartado-2 (21).

Subespacios (V_l^0, R) y (V_l^1, R) de (V_l^2, R).

Cinemática tensorial.

Tema 7 (R-espacio vectorial V_L^2).

Introducción.

Apartado-1.

Un vector libre $\vec{v} \in V_L^n$, como sabemos, es una clase de equipolencia de $V_\ell^n/\omega = V_L^n$ formada por todos los vectores fijos cuyas componentes coinciden; siendo el vector posición de dicha clase el representante canónico de ese vector libre. El vector nulo $\vec{0} \in V_L^n$ posee componentes nulas y módulo cero (su origen y su extremo se circunscriben a un punto: el origen O de coordenadas de $E_n^{Ox_1 \cdots x_n}$).

Siendo $V_L^0 = \{\vec{0}\}$, es $(V_L^0, \oplus)$ un grupo abeliano, pues cumple las siguientes propiedades:

1).- Clausura: $\forall \vec{0} \in V_L^0 \Rightarrow \vec{0} \oplus \vec{0} = \vec{0} \in V_L^0$.

2).- Asociatividad: $\forall \vec{0} \in V_L^0 \Rightarrow (\vec{0} \oplus \vec{0}) \oplus \vec{0} = \vec{0} \oplus (\vec{0} \oplus \vec{0})$

3).- Neutralidad: $\forall \vec{0} \in V_L^0 \Rightarrow \exists \vec{0} \in V_L^0 \mid \vec{0} \oplus \vec{0} = \vec{0}$.

4).- Simetría: $\forall \vec{0} \in V_L^0 \Rightarrow \exists -\vec{0} = \vec{0} \in V_L^0 \mid \vec{0} \oplus (-\vec{0}) = (-\vec{0}) \oplus \vec{0} = \vec{0}$.

5).- Conmutatividad: $\forall \vec{0} \in V_L^0 \Rightarrow \vec{0} \oplus \vec{0} = \vec{0} \oplus \vec{0}$

Apartado-2.

La estructura $(V_L^0, R) \equiv [(V_L^0, \oplus), (R, +, \cdot), \odot]$ es un espacio vectorial, pues cumple las siguientes propiedades:

1).- $(V_L^0, \oplus)$ es un grupo abeliano.

2).- $(R, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo.

3).- $\left.\begin{array}{l} \forall r \in R \\ \forall \vec{0} \in V_L^0 \end{array}\right\} \Rightarrow r \odot \vec{0} = r\vec{0} = \vec{0} \in V_L^0$.

4).- $\left.\begin{array}{l} \forall r, t \in R \\ \forall \vec{0} \in V_L^0 \end{array}\right\} \Rightarrow r(t\vec{0}) = (rt)\vec{0} = \vec{0}$.

5).- $\exists 1 \in R \mid \forall \vec{0} \in V_L^0 \Rightarrow 1\vec{0} = \vec{0}$.

6).- $\left.\begin{array}{l} \forall r, t \in R \\ \forall \vec{0} \in V_L^0 \end{array}\right\} \Rightarrow (r+t)\vec{0} = r\vec{0} \oplus t\vec{0} = \vec{0}$.

7).- $\left.\begin{array}{l} \forall r \in R \\ \forall \vec{0} \in V_L^0 \end{array}\right\} \Rightarrow r(\vec{0} \oplus \vec{0}) = r\vec{0} \oplus r\vec{0} = \vec{0}$.

R-espacio V_L^1.

Apartado-1.

La estructura $(V_L^1, R) \equiv [(V_L^1, \oplus), (R, +, \cdot), \odot]$ es un espacio vectorial, pues cumple las siguientes propiedades:

1).- $(V_L^1, \oplus)$ es un grupo abeliano.

2).- $(R, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo.

3).- $\left.\begin{array}{l} \forall r \in R \\ \forall \vec{v} \in V_L^1 \end{array}\right\} \Rightarrow r \odot \vec{v} = r\vec{v} \in V_L^1.$

4).- $\left.\begin{array}{l} \forall r, t \in R \\ \forall \vec{v} \in V_L^1 \end{array}\right\} \Rightarrow r(t\vec{v}) = (r \cdot t)\vec{v}.$

5).- $\exists 1 \in R \mid \forall \vec{v} \in V_L^1 \Rightarrow 1\vec{v} = \vec{v}.$

6).- $\left.\begin{array}{l} \forall r, t \in R \\ \forall \vec{v} \in V_L^1 \end{array}\right\} \Rightarrow (r+t)\vec{v} = r\vec{v} \oplus t\vec{v}.$

7).- $\left.\begin{array}{l} \forall r \in R \\ \forall \vec{v}, \vec{w} \in V_L^1 \end{array}\right\} \Rightarrow r(\vec{v} \oplus \vec{w}) = r\vec{v} \oplus r\vec{w}.$

Apartado-2.

El espacio vectorial (V_L^1, R) es representable geométricamente en E_1^{0x} (recta cartesiana):

Donde cualquier vector no nulo $\vec{v} \in V_L^1$ puede constituír un sistema generador unitario $S_1 = \{\vec{v}\}$ de V_L^1. Como S_1 es el sistema generador de V_L^1 de menor cardinalidad, es S_1 una base de V_L^1; de donde se sigue que:

$$S_1 = B$$

$$\dim(V_L^1) = \mathrm{card}(B) = 1$$

Como hay infinita cantidad de vectores libres no nulos de V_L^1, evidentemente hay infinita cantidad de bases de V_L^1. Por otra parte, además, cualquier sistema n-ario $S_n = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \subset V_L^1$, tal que $\forall i \in N \Rightarrow \vec{v}_i \neq \vec{0}$, es generador de V_L^1.

La cardinalidad de V_L^1 coincide con la de R, igual a la potencia del continuo (∞_1), que es superior en rango a la potencia del numerable (∞_0) o cardinalidad de N:

$$\mathrm{card}(N) = \infty_0 \ ; \ \mathrm{card}(R) = \mathrm{card}(V_L^1) = \infty_1 \ ; \ \infty_0 < \infty_1$$

De aquí que sería posible teorizar sobre la existencia y propiedades de sistemas generadores S_∞ de V_L^1, con infinita can-

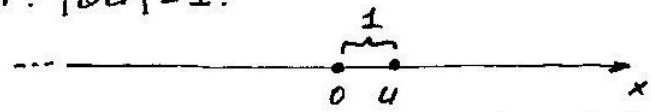
tidad de elementos. Sin embargo, aquí no daremos consideración a sistemas generadores infinitos S_∞, tales que $card(S_\infty) \geq \aleph_0$, pues ello nos llevaría a tener que proveer definiciones previas acerca de combinaciones lineales de elementos de S_∞ con infinita cantidad de sumandos o términos, lo cual podría conducir a su vez a sorpresas algebraicas como, quizás, la pérdida de la conmutatividad en series de infinita cantidad de sumandos.

Apartado-3.

De todas las infinitas bases unitarias que se pueden usar para generar V_L^1, sólo hay una, llamada BASE CANÓNICA de (V_L^1, R) en E_1^{Ox}, que cumple las siguientes 2 propiedades:

1).- Está formada por el vector $\vec{OU} \in V_L^1$, cuyo representante canónico, $\vec{OU}$, está anclado en el origen de E_1^{Ox} (vector posición $\vec{OU}$).

2).- El módulo de $\vec{OU}$ coincide con la unidad de medida OU tomada en E_1^{Ox}; es decir: $|\vec{OU}| = 1$.

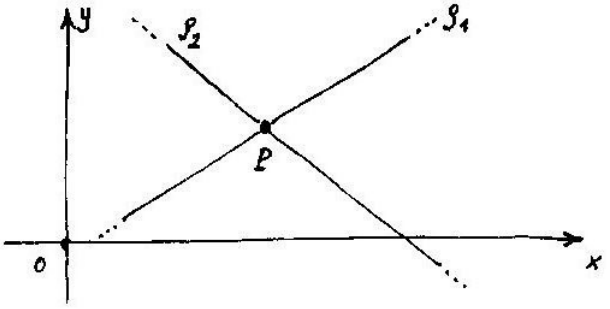


Por otra parte, es obvio que el espacio vectorial trivial (V_L^0, R) es un subespacio vectorial de (V_L^1, R).

R-espacio V_L^2.

Apartado-1.

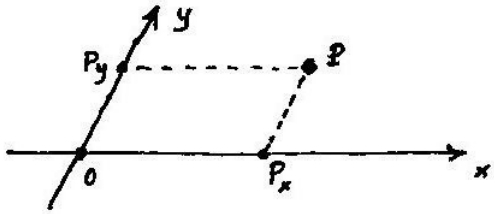
Sea P un punto arbitrario del espacio cartesiano bidimensional E_2^{Oxy} (plano cartesiano), y sean ρ_1 y ρ_2 sendas rectas contenidas en E_2^{Oxy} que se cortan en P:



Las rectas que se cortan pueden ser perpendiculares entre sí o no serlo. Si ambas son perpendiculares entre sí, entonces se dicen RECTAS ORTOGONALES. Si no son perpendiculares entre sí, se dirán RECTAS HETEROGONALES.

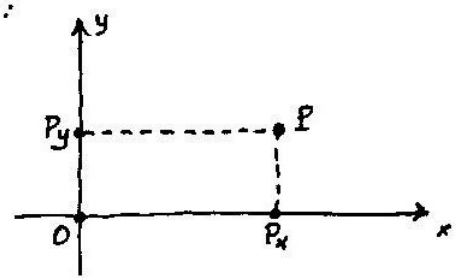
El sistema de referencia bidimensional cartesiano de E_2^{Oxy} es un

SISTEMA REFERENCIAL ORTOGONAL; pero pueden ser consi-
derados otros sistemas referenciales no ortogonales, es decir,
SISTEMAS REFERENCIALES HETEROGONALES:

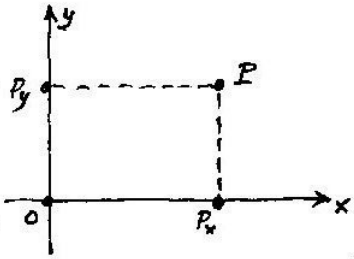


Apartado-2.

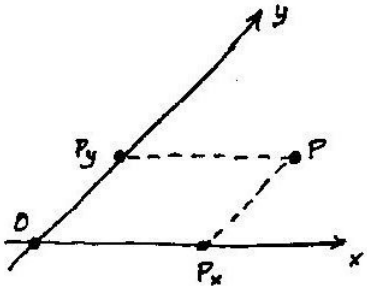
El sistema referencial más fundamental es el E_2^{Oxy}, pues es el trampolín desde donde se puede saltar hacia cualquier otro sistema referencial y todo otro sistema referencial queda sujeto a la posibilidad de ser tratado sólo si se somete al E_2^{Oxy}. Este E_2^{Oxy} es, como sabemos, es un sistema referencial bidimensional de ejes rectilíneos ortogonales (perpendiculares entre sí), donde cualquier punto P del plano cartesiano queda perfectamente determinado por un par ordenado de números reales $(P_x, P_y) \in R^2$ que corresponde a las coordenadas de P en E_2^{Oxy}:



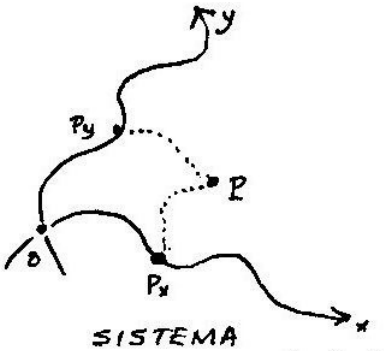
Los sistemas referenciales bidimensionales pueden ser rectilíneos (es decir, de ejes en línea recta) o curvilíneos (de ejes curvos). Los sistemas rectilíneos, a su vez, pueden ser Ortogonales (de ejes perpendiculares entre sí) y heterogonales (de ejes oblicuos o no perpendiculares entre sí):



SISTEMA ORTOGONAL (E_2^{Oxy})



SISTEMA HETEROGONAL (S_2^{Oxy})

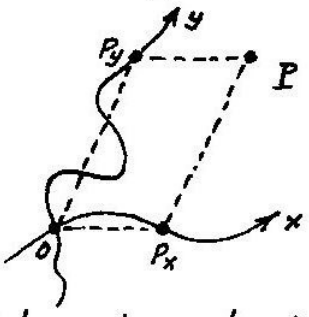


SISTEMA CURVILÍNEO (C_2^{Oxy})

Apartado-3.

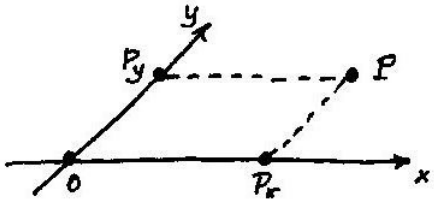
Para hallar las coordenadas de un punto P del plano en un sistema referencial curvilíneo se aplica la REGLA DEL PARALELOGRAMO, la

cual presupone que existe un paralelogramo incógnito (el cual es necesario encontrar), con un vértice en el origen de coordenadas, otro en el punto P y los otros dos en los ejes coordenados Ox y Oy:

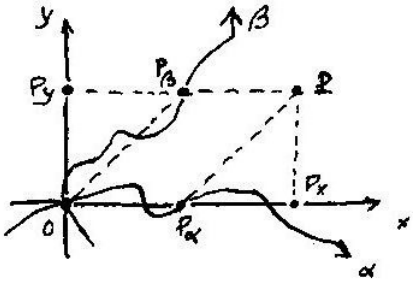


De manera intuitiva, las coordenadas de P en el sistema curvilíneo C_2^{Oxy} se obtienen deslizando el eje Oy sobre el Ox a través del punto O, hasta P_x, lo cual equivale a una traslación del eje Oy de vector $\vec{OP_x}$; y luego una traslación de vector $\vec{OP_y}$ del eje Ox a través de punto O, hasta P_y.

La aplicación de esta Regla del Paralelogramo a ejes rectilíneos es muy sencilla, en comparación con su aplicación a ejes curvilíneos. También, el cálculo de las coordenadas (P_x, P_y) en ejes curvilíneos es harto difícil (eventualmente, cuasi imposible) en comparación con dicho cálculo respecto a ejes rectilíneos:

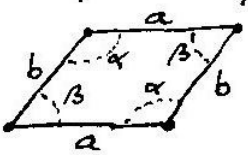


El hecho de que exista la Regla del Paralelogramo para cualquier clase de coordenadas (curvilíneas o rectilíneas) permite referenciar todo sistema de coordenadas en el seno del plano cartesiano E_2^{Oxy}, de ejes rectilíneos ortogonales; con ello, E_2^{Oxy} adopta el feliz protagonismo de SISTEMA REFERENCIAL FUNDAMENTAL, es decir, el sistema referencial básico que sirve para referenciar todo otro sistema de coordenadas:

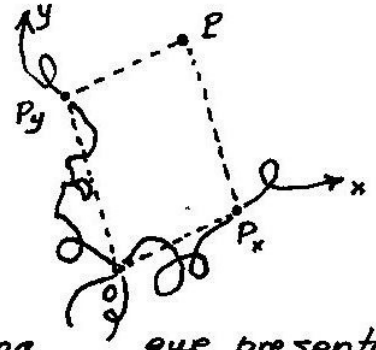


Apartado - 4.

Como sabemos desde la educación primaria, un PARALELOGRAMO es un cuadrilátero plano con sus lados opuestos paralelos e iguales y sus ángulos opuestos iguales:



Por consiguiente, la Regla del Paralelogramo es imprescindible para poder garantizar la existencia de coordenadas bien definidas para cualquier punto P del plano, sin importar cuán enrevesadas sean las características geométricas de los ejes coordenados utilizados. Así, un eje coordenado puede ser cualquier tipo de curva, por irregular que sea:



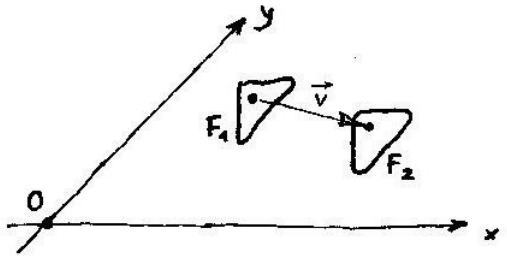
El gran problema que presentan las coordenadas irregulares y altamente enrevesadas es el de calcular o hallar los vértices (salvo el punto origen y el P) correspondientes a P_x y P_y. Dicha problemática es inexistente cuando se utilizan sistemas referenciales rectilíneos.

Apartado-5.

Una traslación $T_{\vec{v}}$ de vector $\vec{v} \in V_L^2$, en E_2^{Oxy}, o en cualquier sistema S_2^{Oxy}, es una Isomená o transformación isométrica (que conserva las distancias relativas o la métrica) que vincula una figura plana (conjunto de puntos del plano) F_1 con otra figura plana F_2 idéntica o igual a la F_1:

$$T_{\vec{v}} : F_1 \to F_2$$

sucediendo que $T_{\vec{v}}$ es una biyección, la cual conserva las distancias y ángulos internos de F_1 al pasar a F_2:



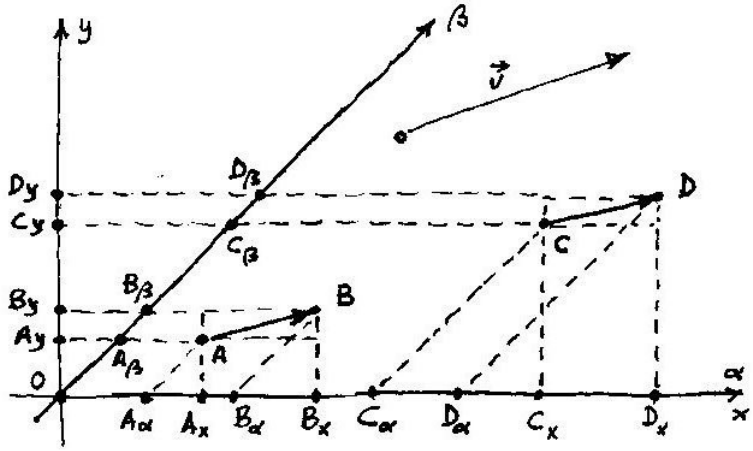
Esto, aplicado a cualesquier vectores fijos del plano, significa que si $\vec{AB}$ es equipolente al $\vec{CD}$ (iguales componentes) en un sistema heterogonal S_2^{Oxy} también tendremos que $\vec{AB}, \vec{CD} \in V_f^2$ son equipolentes en E_2^{Oxy}; y viceversa. Expresando esto en lenguaje algebraico:

$$\forall \vec{AB}, \vec{CD} \in V_f^2 \mid [\vec{AB} \sim \vec{CD}]_{S_2^{O\alpha\beta}} \Leftrightarrow [\vec{AB} \sim \vec{CD}]_{E_2^{Oxy}}$$

Pues: $\forall S_2^{O\alpha\beta}$: $\vec{AB} \sim \vec{CD} \Leftrightarrow comp(\vec{AB}) = comp(\vec{CD}) \Leftrightarrow$

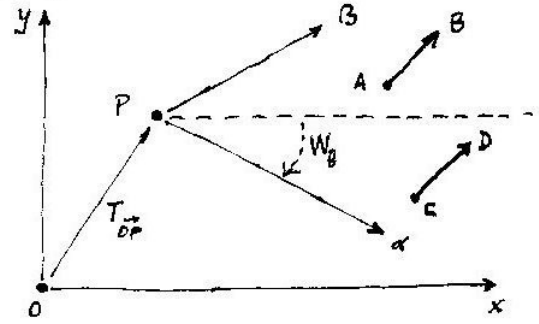
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{CD} = T_{\vec{v}}(\vec{AB}) \\ \vec{AB} = T_{\vec{v}}(\vec{CD}) \end{cases}$$

La siguiente figura puede ayudarnos a comprender intuitivamente lo expuesto:



Apartado-6.

Un sistema referencial heterogonal $S_2^{O\alpha\beta}$ puede tener como centro u origen de coordenadas un punto P del plano cartesiano distinto del origen O de E_2^{Oxy}. Pero en todo caso ambos sistemas referenciales están relacionados entre sí por transformaciones geométricas isométricas (que conservan las distancias y los ángulos de los ejes coordenados a los que se aplican). Dichas isometrías consistirán en 2 transformaciones: un giro W_θ (de ángulo θ) y una traslación $T_{\vec{v}}$ (de vector $\vec{v} \in V_L^2$), o al revés (el orden en que se apliquen estas transformaciones no altera el resultado). Si dos vectores $\vec{AB}, \vec{CD} \in V_f^2$ son equipolentes en E_2^{Oxy}, también lo serán en el sistema $S_2^{P\alpha\beta}$; y viceversa. Ello permite, y hasta aconseja, adoptar sistemáticamente el sistema referencial E_2^{Oxy}, dado que cualquier $S_2^{P\alpha\beta}$ es perfectamente referenciable en E_2^{Oxy}:



$$\forall \vec{AB}, \vec{CD} \in V_f^2: [\vec{AB} \sim \vec{CD}]_{E_2^{Oxy}} \Leftrightarrow [\vec{AB} \sim \vec{CD}]_{S_2^{P\alpha\beta}}$$

Colinealidad.

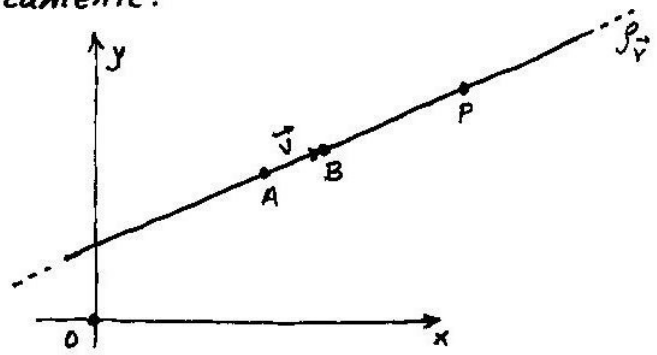
Apartado-1.

En E_2^{Oxy}, se define la RECTA VECTORIAL, de vector fijo $\vec{v} = \vec{AB} \in V_f^2$,

como un subconjunto de puntos $\rho_{\vec{v}}$ de E_2^{Oxy} formado por todos los puntos de E_2^{Oxy} que pueden ponerse en biyección con los extremos de todos los vectores fijos $r\vec{v} \in V_f^2$ tal que $r \in R$:

$$\rho_{\vec{v}} = \{ P \in E_2^{Oxy} \mid \vec{OP} = r\vec{AB} = r\vec{v} \in V_f^2 \mid \vec{v} = \vec{AB} \in V_f^2 \mid r \in R \}.$$

Gráficamente:



Apartado-2.

Los VECTORES PLANARIOS (representables en el plano cartesiano E_2^{Oxy}) pueden ser VECTORES FIJOS (anclados en un punto P de E_2^{Oxy}) o VECTORES LIBRES (clases de equivalencia de vectores fijos equipolentes o de iguales componentes). Los vectores fijos de E_2^{Oxy} pueden ser VECTORES DE DESPLAZAMIENTO (que unen 2 puntos arbitrarios del plano cartesiano) y VECTORES DE POSICIÓN (que unen el centro de coordenadas O de E_2^{Oxy} con un punto arbitrario del plano E_2^{Oxy}). Los vectores de desplazamiento pueden ser VECTORES COLINEALES (se encuentran situados en una misma recta vectorial) o VECTORES ACOLINEALES (se encuentran situados en diferentes rectas vectoriales). Los vectores acolineales pueden ser VECTORES PARALELOS (se encuentran situados en rectas vectoriales paralelas) y VECTORES OBLÍCUOS (se encuentran situados en rectas vectoriales oblícuas). Los vectores de posición pueden ser Colineales y Acolineales (oblícuos o acolineales, conceptos coincidentes en este caso). Finalmente, los vectores libres pueden Paralelos (cuando para el par de vectores $\vec{a}, \vec{b} \in V_L^2$ sucede que $\exists r \in R$ tal que $\vec{a} \sim r\vec{b}$) u Oblícuos (cuando $\nexists r \in R$ tal que $\vec{a} \sim r\vec{b}$); los vectores libres paralelos pueden ser Iguales (de módulos iguales y, por ende, equipolentes) o Desiguales (no equipolentes, de módulos desiguales y/o sentidos diferentes).

Es importante tener constancia de esta clasificación y también poseer una conceptualización clara de la misma, pues se produce fácilmente

una confusión conceptual al respecto que tiene como consecuencia la pérdida de orientación teórica en cuanto a teoremas y demostraciones, así como una notable inexactitud en las aplicaciones prácticas y resolución de problemas:

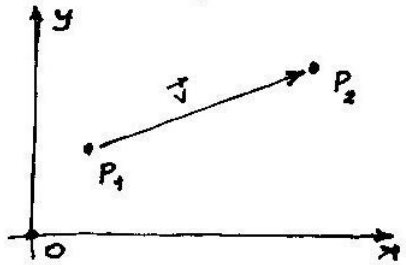
- Vectores planarios
  - Fijos
    - De desplazamiento
      - Colineales
      - Acolineales
        - Paralelos
        - Oblícuos
    - De posición
      - Colineales
      - Acolineales u oblícuos
  - Libres
    - Paralelos
      - Iguales
      - Desiguales
    - Oblícuos

Apartado-3.

Es obvio que la Equipolencia vectorial sólo es definible para vectores fijos colineales (de desplazamiento y de posición) y acolineales paralelos entresí, puesto que 2 vectores fijos $\vec{AB}, \vec{CD} \in V_f^2$ se dicen VECTORES EQUIPOLENTES cuando tienen las mismas componentes:

$$\forall \vec{AB}, \vec{CD} \in V_f^2 : \quad (\vec{AB} \sim \vec{CD}) \Leftrightarrow \left[comp(\vec{AB}) = comp(\vec{CD}) \right].$$

El representante canónico $\vec{OA} \in V_f^2$ de un vector libre $cl(\vec{OA}) = \vec{v} \in V_L^2$ es, evidentemente, un vector de posición (pues $\vec{OA}$ está anclado en el origen O de coordenadas de E_2^{Oxy}). Por su parte, toda recta vectorial $\rho_{\vec{v}}$ implica la existencia de colinealidad para los vectores fijos (de desplazamiento y/o posición) que la determinan.



Una TRASLACIÓN PLANARIA, $T_{\vec{v}}$ (de vector libre $\vec{v} \in V_L^2$; pues no es definible para un vector fijo a causa de su punto inamovible de anclaje), de un punto $P_1 \in E_2^{Oxy}$ hacia otro punto P_2^{Oxy} es una transformación biyectiva $T_{\vec{v}}$ en E_2^{Oxy}:

$$T_{\vec{v}} : P_1 \rightarrow P_2$$

Tal que: $\vec{P_1P_2} \in cl(\vec{P_1P_2}) = \vec{v} \in V_L^2$

Apartado-4.

Como quiera que $(V_f^2, \oplus)$ es grupo no conmutativo, entonces resulta que $(V_f^2, R) \equiv [(V_f^2, \oplus), (R, +, \cdot), \circledast]$ no es espacio vectorial y por lo tanto

las nociones de dependencia e independencia lineales, asociadas a la estructura de espacio vectorial, no proceden para (V_ℓ^2, R). En cambio, la estructura $(V_{\ell/\sim}^2, R) = (V_\ell^2, R)$, tal que $(V_\ell^2, R) \equiv [(V_\ell^2, \oplus), (R, +, \cdot), \odot]$, sí es un espacio vectorial y consecuentemente todo sistema (o subconjunto finito y no vacío) de V_ℓ^2 tendrá necesariamente que ser libre o ligado (una y sólo una de estas dos opciones).

Un sistema $S_n = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset V_\ell^2$, tal que $\forall i$ es $\vec{v}_i \neq \vec{0}$, se dirá SISTEMA LIBRE (o Linealmente independiente) en el espacio (V_ℓ^2, R) cuando cumple la siguiente condición:

$$\begin{matrix} \forall \vec{v}_i \in S_n \\ \forall r_i \in R \end{matrix} \Big| \, i = 1, 2, \dots, n : \bigoplus_{i=1}^{n} r_i \vec{v}_i = \vec{0} \iff \forall i : r_i = 0.$$

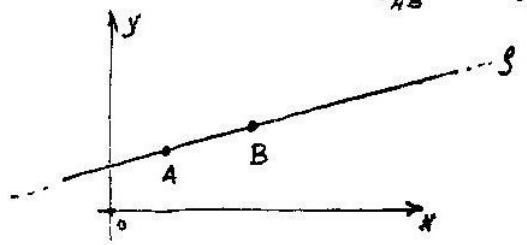
Por otra parte, un sistema $S_m = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\} \subset V_\ell^2$, tal que $\forall i$ es $\vec{u}_i \neq \vec{0}$, se dirá SISTEMA LIGADO (o linealmente dependiente) en (V_ℓ^2, R) cuando cumple la siguiente condición:

$$\begin{matrix} \forall \vec{u}_i \in S_m \\ \forall r_i \in R \end{matrix} \Big| \, i = 1, 2, \dots, m : \bigoplus_{i=1}^{m} r_i \vec{u}_i = \vec{0} \iff \exists r_k \neq 0 \,|\, 1 \leq k \leq m.$$

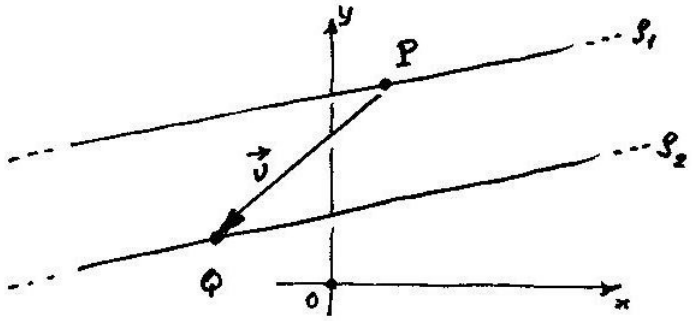
Paralelismo vectorial.

Apartado-1.

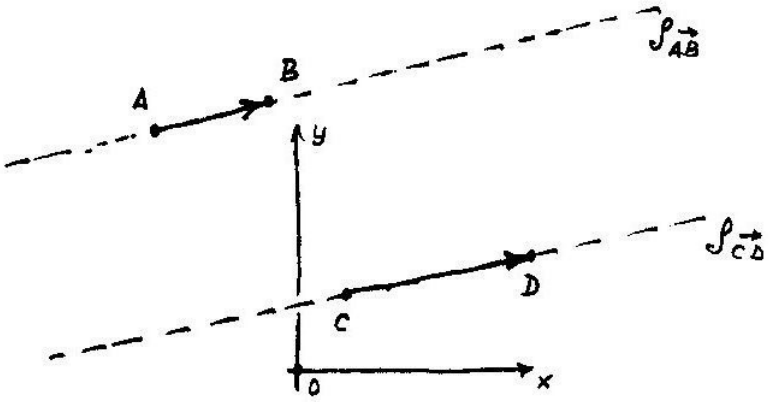
Todo vector fijo no nulo $\vec{AB} \in V_f^2$ genera una recta vectorial $\rho_{\vec{AB}} \subset E_2^{OXY}$, en donde $\vec{AB}$ recibe el nombre de VECTOR DIRECTOR de dicha recta. Cualquier recta $\rho \subset E_2^{OXY}$ se puede poner como recta vectorial de E_2^{OXY} con sólo tomar en ella 2 puntos A y B tales que $\vec{AB}$, o $\vec{BA}$, sea considerado como vector director de la recta $\rho \subset E_2^{OXY}$. En tal caso: $\rho \equiv \rho_{\vec{AB}} \equiv \rho_{\vec{BA}}$



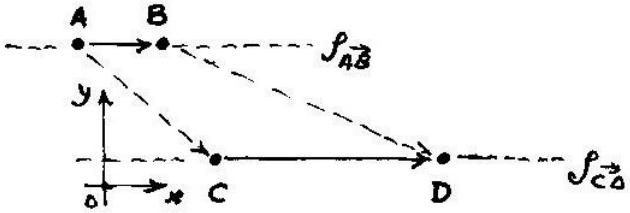
Dos rectas planarias (del mismo plano) $\rho_1, \rho_2 \subset E_2^{OXY}$ se llamarán RECTAS PARALELAS entre sí, en E_2^{OXY}, denotándose $\rho_1 \parallel \rho_2$, cuando una cualquiera de ellas puede ser obtenida a partir de la otra por medio de una traslación $T_{\vec{v}}$ de vector $\vec{v} = cl(\vec{PQ}) \in V_\ell^2$, tal que $\vec{PQ} \in V_f^2$:



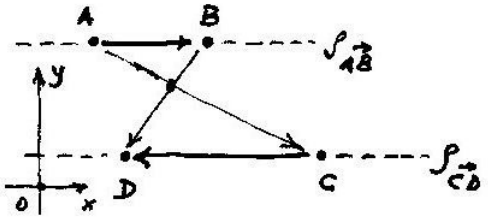
Se dirá que 2 vectores fijos $\vec{AB}, \vec{CD} \in V_f^2$ son VECTORES PARALELOS entre sí cuando la recta vectorial $\rho_{\vec{AB}}$ es paralela a la $\rho_{\vec{CD}}$:



Dos vectores fijos y paralelos entre sí pueden ser directa o inversamente paralelos entre sí, diciéndose que $\vec{AB}, \vec{CD} \in V_f^2$ son DIRECTAMENTE PARALELOS entre sí cuando los vectores fijos $\vec{AC}$ y $\vec{BD}$ no se cortan entre sí:



Y se dirá que $\vec{AB}, \vec{CD} \in V_f^2$ son INVERSAMENTE PARALELOS (o ANTIPARALELOS) entre sí cuando, siendo $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$, los vectores fijos $\vec{AC}$ y $\vec{BD}$ se cortan entre sí:



Como caso particular de paralelismo entre vectores fijos diremos que todos los vectores fijos pertenecientes a una misma recta vectorial ρ se consideran paralelos entre sí, pues se admite que $\rho \parallel \rho$ mediante una traslación $T_{\vec{0}}$ de vector libre $\vec{0} \in V_L^2$. Esto permite, pues, contemplar la relación $\parallel$ de paralelismo entre vec-

tores de V_f^2 como una relación de equivalencia, puesto que cumple las siguientes propiedades:

1).- Reflexividad: $\forall \vec{a} \in V_f^2 \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{a}$

2).- Simetría: $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V_f^2 : \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} \parallel \vec{a}$

3).- Transitividad: $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_f^2 \begin{cases} \vec{a} \parallel \vec{b} \\ \vec{b} \parallel \vec{c} \end{cases} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{c}$

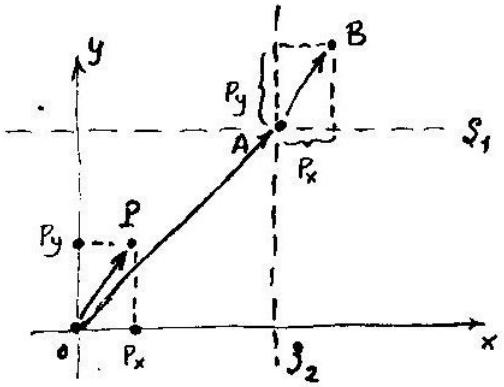
Por lo tanto, V_f^2 queda clasificado o particionado en clases de equivalencia formadas por vectores fijos planarios paralelos entre sí, con $\text{card}\left(V_f^2/_{\parallel}\right) = \infty$. Ahora bien, el conjunto cociente $V_f^2/_{\parallel}$ no coincide con el conjunto cociente $V_f^2/_{\sim} = V_L^2$. No obstante, cabe preguntarse qué relación hay entre $V_f^2/_{\parallel} = H_p^2$ y $V_f^2/_{\sim} = V_L^2$, donde H_p^2 significa HACES DE VECTORES FIJOS paralelos entre sí y denota al conjunto de todos esos haces (infinitos en cantidad, donde cada haz es una clase de equivalencia de H_p^2).

<u>Apartado-2.</u>

Como sabemos, dos vectores fijos son equipolentes cuando sus componentes coinciden:

$$\forall \vec{AB}, \vec{CD} \in V_f^2 : \vec{AB} \sim \vec{CD} \Leftrightarrow \text{comp}(\vec{AB}) = \text{comp}(\vec{CD})$$

En consecuencia, en $cl(\vec{AB}) = cl(\vec{CD})$ existe uno y sólo un vector $\vec{OP} \in V_f^2$ tal que $cl(\vec{AB}) = cl(\vec{OP})$, lo cual hace posible definir una traslación $T_{\vec{v}}$, con $\vec{v} = cl(\vec{OP})$, que cumpla las condiciones esbozadas en la siguiente ilustración:



Como $T_{\vec{v}}$ conserva las distancias, el realizar las transformaciones:

$$T_{\vec{v}} : Ox \to S_1$$

$$T_{\vec{v}} : Oy \to S_2$$

conlleva la conservación de los valores de las componentes vectoriales y las orientaciones de los segmentos trasladados (positivas o negativas). Además, toda traslación $T_{\vec{v}} : \vec{OP} \longrightarrow \vec{AB}$ supone que $\vec{OP} \parallel \vec{AB}$ y de aquí se sigue que:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{OP} \parallel \vec{AB} \\ \vec{OP} \parallel \vec{CD} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{AB} \parallel \vec{CD}$$

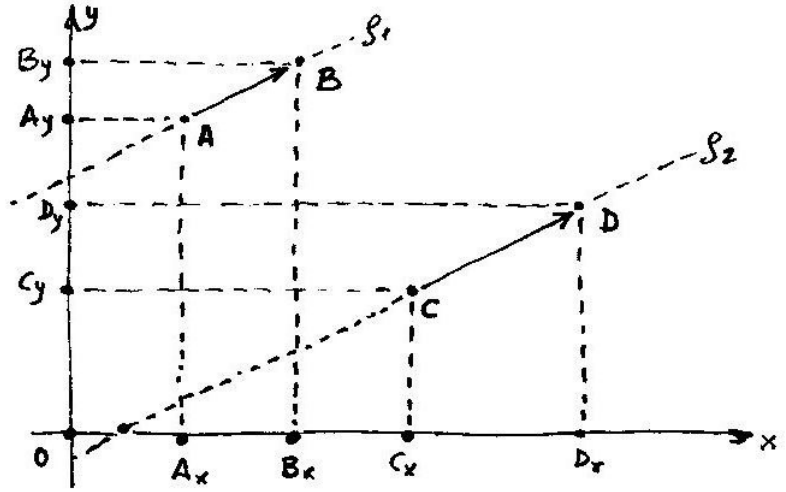
Por consiguiente:

$$\forall \vec{AB}, \vec{CD} \in V_f^2 : \ \vec{AB} \sim \vec{CD} \iff \begin{cases} \vec{AB} \parallel \vec{CD} \\ comp(\vec{AB}) = 1 \cdot comp(\vec{CD}) \end{cases}$$

En cambio, cuando sucede que $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$, se tiene lo siguiente:

$$\forall \vec{AB}, \vec{CD} \in V_f^2 : \ \vec{AB} \parallel \vec{CD} \iff comp(\vec{AB}) = r \cdot comp(\vec{CD})$$

Con $r \in R$:



La relación de equipolencia ($\sim$) es un caso particular (o restricción) de la relación de paralelismo ($\parallel$) en V_f^2:

$$\forall \vec{AB}, \vec{CD} \in V_f^2 : \ \vec{AB} \parallel \vec{CD} \iff comp(\vec{AB}) = r \cdot comp(\vec{CD})$$

Tal que:

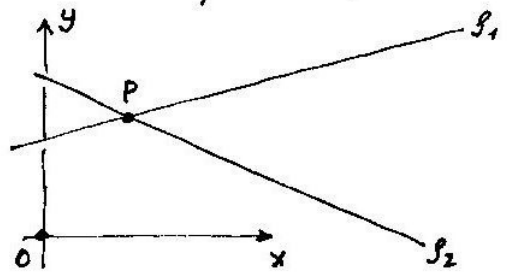
$$comp(\vec{AB}) = (B_x - A_x, B_y - A_y) = r(D_x - C_x, D_y - C_y) =$$
$$= r[(D_x - C_x), r(D_y - C_y)] = r \cdot comp(\vec{CD}).$$

$$\forall \vec{AB}, \vec{CD} \in V_f^2 : \ \vec{AB} \sim \vec{CD} \iff comp(\vec{AB}) = 1 \cdot comp(\vec{CD})$$

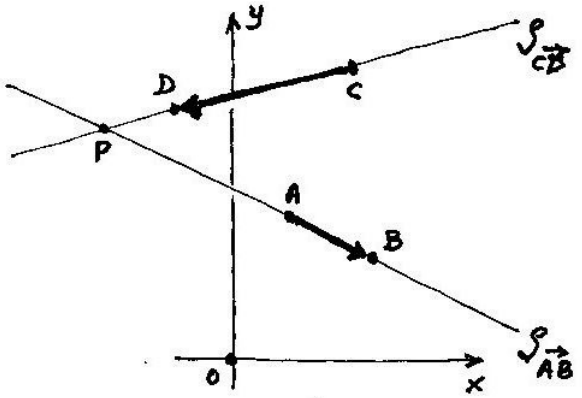
Por ende, cuando $r = 1$ (restricción del valor de $r \in R$) el paralelismo $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ se convierte en la equipolencia $\vec{AB} \sim \vec{CD}$.

<u>Apartado-3.</u>

Adoptando las premisas geométricas euclidianas en el plano cartesiano, se dice que dos rectas $\rho_1, \rho_2 \subset E_2^{Oxy}$ no paralelas son RECTAS OBLICUAS o CONCURRENTES puesto que concurren en un punto común $P \in E_2^{Oxy}$:



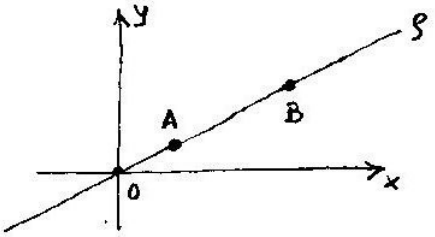
En armonía con esto, se dirá que 2 vectores fijos $\vec{AB}, \vec{CD} \in V_f^2$ son VECTORES OBLICUOS o CONCURRENTES cuando generan (en calidad de vectores directores) sendas rectas vectoriales $\rho_{\vec{AB}}, \rho_{\vec{CD}} \subset E_2^{Oxy}$ que son oblicuas o concurrentes:



Por consiguiente, en E_2^{OXY}, si $\vec{AB}, \vec{CD} \in V_f^2$ no son vectores paralelos, son oblicuos; y viceversa. Ello quiere decir que los conceptos de Oblicuidad y Concurrencia son sinónimos en el plano cartesiano (algo que no ocurre en E_3^{OXYZ}).

Apartado-4.

Si bien el concepto de Equipolencia no es aplicable a los vectores libres (sino sólo a los vectores fijos), la noción más general de Paralelismo sí es aplicable a los vectores libres del plano cartesiano; y así, diremos que dos vectores libres $\vec{a}, \vec{b} \in V_L^2$ son VECTORES PARALELOS, en E_2^{OXY}, cuando sus representantes canónicos $\vec{OA} \in \vec{a}$ y $\vec{OB} \in \vec{b}$ se encuentren situados en una misma recta vectorial ρ (la cual pasará por el origen O de coordenadas de E_2^{OXY}):



El Paralelismo (||) de vectores libres induce una clasificación o partición en V_L^2, puesto que genera una relación de equivalencia || al cumplir:

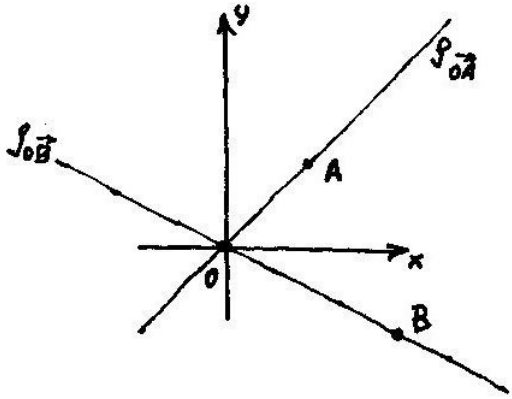
1).- Reflexividad: $\forall \vec{a} \in V_L^2 \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{a}$

2).- Simetría: $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V_L^2$: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} \parallel \vec{a}$

3).- Transitividad: $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_L^2 \mid \vec{a} \parallel \vec{b}, \vec{b} \parallel \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{c}$.

Cada clase de equivalencia del conjunto cociente $V_L^2/\parallel$ se llama HAZ de vectores libres, tomándose como representante canónico de cada clase o haz al vector unitario (de módulo 1), positivo, $\vec{OU}$, perteneciente a la recta vectorial ρ de los representantes canónicos de los vectores libres del haz (dicha recta vectorial pasa, pues, por el origen O de coordenadas).

Dos vectores $\vec{a}, \vec{b} \in V_L^2$ no paralelos entre sí son necesariamente VECTORES LIBRES OBLICUOS o CONCURRENTES en E_2^{Oxy}, puesto que las rectas vectoriales de sus respectivos representantes canónigos $\vec{OA} \in \vec{a}$ y $\vec{OB} \in \vec{b}$ se cortarán en el origen de coordenadas:



TEOREMA-1:

Dos vectores libres $\vec{a}, \vec{b} \in V_L^2$ formarán un sistema binario ligado $S_2 = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ de V_L^2 si y sólo si son paralelos: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

DEMOSTRACIÓN:

a).- Si S_2 es ligado, entonces $\exists \alpha \in R$, con $\alpha \neq 0$, tal que: $\alpha\vec{a} \oplus \beta\vec{b} = \vec{0}$, con $\beta \in R$. De donde:

$$\alpha\vec{a} \oplus \beta\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \beta\vec{b} = (-\alpha)\vec{a} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{b} = \left(\frac{-\alpha}{\beta}\right)\vec{a} \Rightarrow \vec{b} = \gamma\vec{a} \;\Big|\; \gamma = \frac{-\alpha}{\beta} \in R.$$

Ello lleva a que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ pertenezcan al mismo haz, pues $\vec{OA} \in \vec{a}$ y $\vec{OB} \in \vec{b}$ están en la misma recta vectorial: $\vec{OB} = \gamma\vec{OA}$.

b).- Si $\vec{a} \parallel \vec{b}$, entonces $\vec{OA} \parallel \vec{OB}$ y ambos pertenecen a la misma recta vectorial; por tanto, $\exists \gamma \in R$, con $\gamma \neq 0$, tal que:

$$\vec{OB} = \gamma\vec{OA} \Rightarrow \vec{b} = \gamma\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = (-\gamma)\vec{b}$$

De donde: $\gamma\vec{a} \oplus (-\gamma)\vec{b} = \vec{0} \;\Big|\; \gamma \neq 0$ c.q.d.

TEOREMA-2:

Dos vectores libres $\vec{a}, \vec{b} \in V_L^2$ formarán un sistema binario libre $S_2 = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ de V_L^2 si y sólo si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son paralelos entre sí (es decir, si son oblicuos o concurrentes entre sí).

DEMOSTRACIÓN:

a).- Si S_2 es libre, entonces $\alpha\vec{a} \oplus \beta\vec{b} = \vec{0}$ si y sólo si $\alpha = \beta = 0$. Por tanto, $\nexists \gamma \in R$ tal que $\vec{b} = \gamma\vec{a}$. En consecuencia, $\vec{OA} \in \vec{a}$ y $\vec{OB} \in \vec{b}$ no se hallan en la misma recta vectorial, o sea, $\vec{a}, \vec{b} \in V_L^2$ no son paralelos entre sí. Por ende, $\vec{a}, \vec{b} \in V_L^2$ son concurrentes u oblicuos.

b).- Si $\vec{a}, \vec{b} \in V_L^2$ son concurrentes, entonces $\vec{OA} \in \vec{a}$ y $\vec{OB} \in \vec{b}$ no están en la misma recta vectorial, por lo que $\nexists \gamma \in R$ tal que $\vec{b} = \gamma\vec{a}$; así que $\alpha\vec{a} \oplus \beta\vec{b} = \vec{0}$ si y sólo si $\alpha = \beta = 0$. c.q.d.

Bases vectoriales planarias.

Apartado-1.

Una Base Vectorial B de V_L^2 es un sistema libre de V_L^2 cuyo cardinal es el menor de entre los cardinales de todos los sistemas generadores de V_L^2. Ello se cumple para $card(B)=2$ y, teniendo en cuenta en este caso el teorema-2 anterior, los elementos de B no pueden ser vectores nulos ni paralelos entre sí, podemos expresar lo siguiente:

$$\forall \vec{a},\vec{b}\in V_L^2 \,|\, \vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0} \,|\, B=\{\vec{a},\vec{b}\}: \quad [B]=V_L^2 \Leftrightarrow \vec{a}\nparallel\vec{b}$$

Por lo tanto, también:

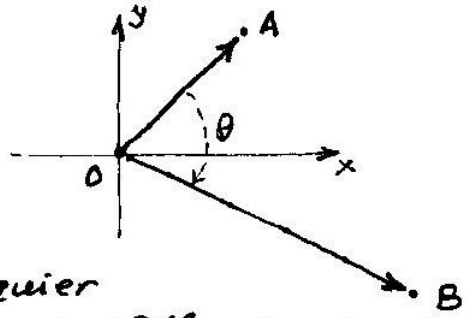
$$\dim(V_L^2)=card(B)=2.$$

Apartado-2.

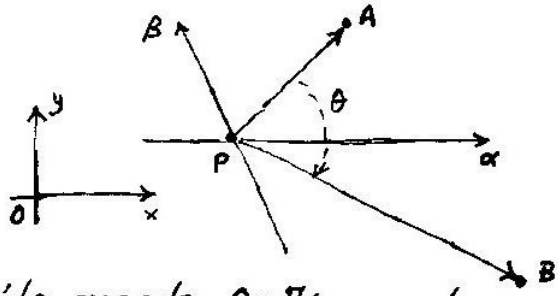
Para cualquier par de vectores $\vec{a},\vec{b}\in V_L^2$, se llama PRODUCTO ESCALAR o PRODUCTO INTERIOR de $\vec{a}$ por $\vec{b}$, y se denota $\vec{a}\cdot\vec{b}$, al escalar $r\in R$ que resulta de multiplicar los módulos o normas de ambos vectores por el coseno del ángulo de giro θ que va desde $\vec{a}$ hacia $\vec{b}$ y que posee la amplitud más pequeña (de entre las 2 posibles):

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta=r$$

El cálculo de $\vec{a}\cdot\vec{b}$ se realiza sobre los vectores fijos de posición $\overrightarrow{OA}\in\vec{a}$ y $\overrightarrow{OB}\in\vec{b}$, es decir, sobre los representantes canónicos pertinentes:



Por lo tanto, en cualquier sistema referencial lineal $S_2^{P\alpha\beta}$, el valor de $\vec{a}\cdot\vec{b}=r\in R$ permanece invariante (no varía o cambia de valor), además de en E_2^{Oxy}:



Para $\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$ y $\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$, será $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ cuando, y sólo cuando, $\theta=\pi/2$, puesto que debe ser $0\leq\theta\leq\pi$. Además, cuando $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ se tiene que $\vec{a}$ es ortogonal o perpendicular a $\vec{b}$, o sea: $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Apartado-3.

$\forall a,b \in V_L^2$ caben 2 y sólo 2 posibilidades, mutuamente excluyentes entre sí:

1).- $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (paralelismo)

2).- $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ (convergencia u oblicuidad).

Por su parte, $\forall \vec{a},\vec{b} \in V_L^2$ tal que $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ caben 2 y sólo 2 posibilidades, mutuamente excluyentes entre sí:

1).- $\vec{a} \perp \vec{b}$ (perpendicularidad u ortogonalidad).

2).- $\vec{a} \angle \vec{b}$ (oblicuidad o convergencia no ortogonal).

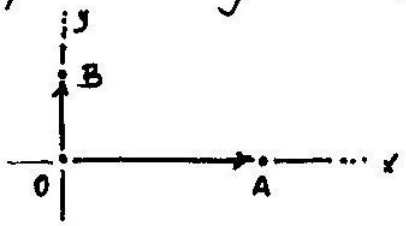
Dos vectores (fijos o libres) se dicen VECTORES ORTOGONALES o PERPENDICULARES entre sí cuando sus respectivas rectas vectoriales son perpendiculares entre sí:

$\forall \vec{a},\vec{b} \in V_L^2 \mid \vec{OA} \in \vec{a},\ \vec{OB} \in \vec{b}: \quad \vec{a} \perp \vec{b} \iff \rho_{\vec{OA}} \perp \rho_{\vec{OB}}$

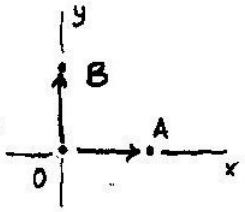
También: $\forall \vec{a},\vec{b} \in V_L^2 \mid \vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0}: \quad \vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

Apartado-4.

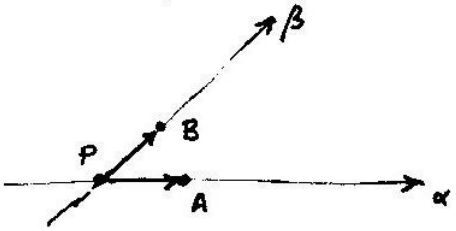
En E_2^{Oxy} toda base $B=\{\vec{a},\vec{b}\} \subset V_L^2$ se dirá BASE ORTOGONAL, puesto que $\vec{OA} \perp \vec{OB}$ tal que $\vec{OA} \in \vec{a}$ y $\vec{OB} \in \vec{b}$, y $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$:



Una Base Ortogonal $B=\{\vec{a},\vec{b}\} \subset V_L^2$ se llamará BASE ORTONORMAL cuando $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$:



Una Base $B=\{\vec{a},\vec{b}\} \subset V_L^2$ se denominará BASE CANÓNICA cuando $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$



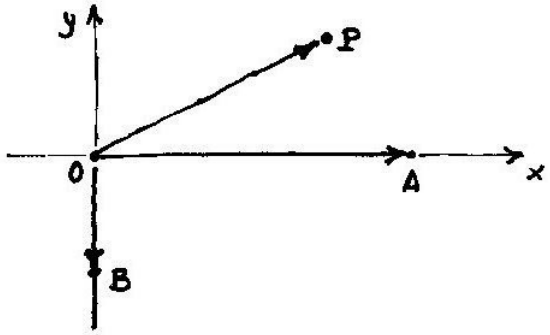
Por tanto, una base ortogonal canónica es una base ortonormal.

Componentes.

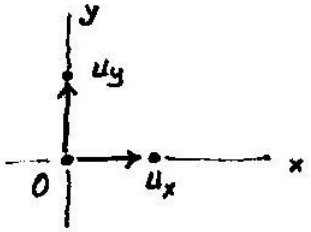
Apartado-1.

Cuando queremos expresar un vector $\vec{v} \in V_L^2$ en E_2^{Oxy}, podemos

elegir una base ortogonal cualquiera $B_{OG} = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ donde $\vec{a}, \vec{b} \in V_L^2$ pueden ser positivos o negativos y de módulos diferentes o dispares, pero esta elección no facilita el cálculo vectorial a un grado máximo:



Un vector $\vec{v} = cl(\vec{OP}) \in V_L^2$ no es del todo fácil de expresar en una base ortogonal engorrosa $B_{OG} = \{\vec{a}, \vec{b}\} = \{cl(\vec{OA}), cl(\vec{OB})\}$. Por esa razón, en el interés de facilitar el cálculo al máximo, se ha introducido el concepto de BASE ORTONORMAL de V_L^2, la cual es única, $B_{ON} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$, tal que $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$ y tal que $\vec{i}, \vec{j} \in V_L^2$ son vectores positivos, cuyos representantes canónicos son $\vec{OU_x} \in \vec{i}$ y $\vec{OU_y} \in \vec{j}$:

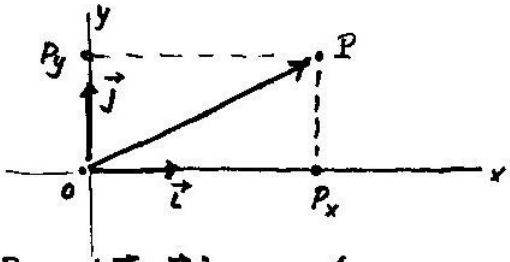


Los vectores unitarios (positivos o negativos) se denominan VERSORES, siendo $\vec{i}, \vec{j} \in V_L^2$ los llamados VERSORES ORTONORMALES de E_2^{oxy} y V_L^2, los cuales son únicos. Aunque $\vec{i}, \vec{j} \in V_L^2$ y son, por tanto, vectores libres, suelen confundirse (sin mayores efectos perniciosos secundarios) con sus representantes canónicos, a saber, $\vec{OU_x}, \vec{OU_y} \in V_f^2$, que son vectores fijos. Esta confusión deliberada, que considera los conceptos de vector fijo y su clase de equipolencia (vector libre) como sinónimos, debe ser tenida en cuenta en determinados momentos en los que hay que actuar con extrema minuciosidad. De todas formas, la experiencia muestra que los inconvenientes suelen ser cuasi nulos, y así cualquier vector libre $\vec{v} \in V_L^2$, tal que $\vec{v} = cl(\vec{OP}) \in V_L^2$, con $\vec{OP} \in V_f^2$, es expresable sin mayores problemas mediante una combinación lineal de los elementos de $B_{ON} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$:

$$\vec{OP} = P_x \vec{i} \oplus P_y \vec{j} = \vec{OP_x} \oplus \vec{OP_y}$$

O sea:

$$\vec{v} = cl(\vec{OP}) = cl(\vec{OP_x} \oplus \vec{OP_y}).$$



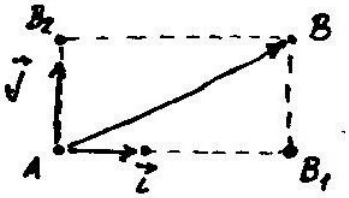
Esto nos lleva a establecer la existencia de 2 tipos de componentes para un vector libre $\vec{v} \in V_L^2$ cualquiera, en E_2^{oxy} y bajo la base $B_{ON} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$, a saber:

1).- COMPONENTES VECTORIALES de $\vec{v} \in V_L^2$, que son las siguientes:

$$\vec{OP_x} = P_x \vec{i}$$
$$\vec{OP_y} = P_y \vec{j}.$$

2).- COMPONENTES ESCALARES (o simplemente COMPONENTES) de $\vec{v} \in V_L^2$, que coinciden con las coordenadas del punto $P \in E_2^{oxy}$ bajo B_{ON}: $comp(\vec{v}) = coord(P) = (P_x, P_y) \in R^2$.

Los vectores fijos $\vec{AB} \in V_F^2$ también admiten ser expresados en función de sus componentes vectoriales o escalares, si todos éstos tienen origen común evidentemente:



$$\vec{AB} = \vec{AB_1} \oplus \vec{AB_2} = AB_1 \vec{i} \oplus AB_2 \vec{j}$$
$$comp(\vec{AB}) = (AB_1, AB_2) \in R^2.$$

<u>Apartado-2.</u>

Cualquier par de vectores libres $\vec{a}, \vec{b} \in V_L^2$ están relacionados entre por la Perpendicularidad ($\perp$) o por la No-perpendicularidad ($\not\perp$), y si sucede que $\vec{a} \not\perp \vec{b}$ entonces será $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ó $\vec{a} \nparallel \vec{b}$; si $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ entonces es $\vec{a} \perp \vec{b}$ (dado que se ha supuesto que $\vec{a} \not\perp \vec{b}$). La RELACIÓN DE PERPENDICULARIDAD se define en este caso a partir del Producto Escalar, diciéndose que $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V_L^2$ tal que $\vec{a} \perp \vec{b}$ entonces se cumple que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ y si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ entonces se cumple que $\vec{a} \perp \vec{b}$, pudiendo ocurrir 4 casos:

1).- $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V_L^2 \mid \vec{a} = \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

2).- $\forall a, b \in V_L^2 \mid \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

3).- $\forall a, b \in V_L^2 \mid \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

4).- $\forall a, b \in V_L^2 \mid \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} : \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, considerando arbitrariamente que $\vec{0} \in V_L^2$ es perpendicular a sí mismo y a todo otro $\vec{v} \in V_L^2$, la definición de PERPENDICULARIDAD ($\perp$) en V_L^2 se extiende a todo $\vec{v} \in V_L^2$ así:

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in V_L^2: \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Dicha relación cumple las siguientes propiedades en V_L^2:

1).- Antirreflexividad (ver teorema-3 siguiente):

$$\forall \vec{a} \in V_L^2 \not\Rightarrow \vec{a} \perp \vec{a}$$

2).- Simetría (ver teorema-4 siguiente):

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in V_L^2: \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} \perp \vec{a}$$

3).- Antitransitividad (ver teorema-5 siguiente):

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_L^2 \mid \vec{a} \perp \vec{b}, \ \vec{b} \perp \vec{c} \not\Rightarrow \vec{a} \perp \vec{c}$$

TEOREMA-3:

$$\forall \vec{a} \in V_L^2 \not\Rightarrow \vec{a} \perp \vec{a}$$

DEMOSTRACIÓN:

Para $\vec{a} \neq \vec{0}$ se tiene:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}|^2 \neq 0 \Rightarrow \vec{a} \not\perp \vec{a}.$$

TEOREMA-4:

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in V_L^2: \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} \perp \vec{a}$$

DEMOSTRACIÓN:

a).- Para $\vec{a} = \vec{0}$ ó $\vec{b} = \vec{0}$ es $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

b).- Para $\vec{a} \neq \vec{0}$ y $\vec{b} \neq \vec{0}$ se tiene:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{a} = 0$$

c).- Para $\vec{a} \neq \vec{0}$ y $\vec{b} \neq \vec{0}$, también se tiene:

$$\vec{b} \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

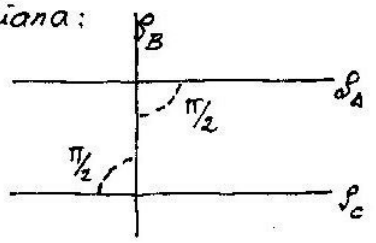
c.q.d.

TEOREMA-5:

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_L^2 \mid \vec{a} \perp \vec{b}, \ \vec{b} \perp \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{c}$$

DEMOSTRACIÓN: $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \theta = ang(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$

donde la expresión $ang(\vec{a}, \vec{b})$ significa ángulo de giro de menor amplitud que va desde $\vec{a}$ hacia $\vec{b}$. Por geometría euclidiana:



$$ang(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2} = ang(\vec{b}, \vec{c}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ang(\vec{a}, \vec{c}) = 0 \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

c.q.d.

Apartado-3.

Las Componentes (sobreentiéndase, componentes escalares) de cualquier vector fijo $\vec{AB} \in V_f^2$ permiten establecer una relación de Equipolencia ($\sim$) en V_f^2 mediante la igualdad de componentes de distintos vectores fijos. Además, las componentes se pueden tomar como pares ordenados de R^2:

$$\forall \vec{AB}, \vec{CD} \in V_f^2 : \quad \vec{AB} \sim \vec{CD} \iff comp(\vec{AB}) = comp(\vec{CD})$$

El conjunto cociente $V_f^2/_{\sim} = V_l^2$ que se obtiene mediante dicha Equipolencia es el de los Vectores Libres bidimensionales. Y, dado que $(V_l^2, R) \equiv [(V_l^2, \oplus), (R, +, \cdot), \odot]$ y $(R^2, R) \equiv [(R^2, \oplus), (R, +, \cdot), \odot]$ son sendos espacios vectoriales tales que $dim(V_l^2) = dim(R^2) = 2$, es posible definir un Isomorfismo entre (V_l^2, R) y (R^2, R), tal como se explica en el Tema 6 (espacios vectoriales isomorfos), página 7, Teorema de isomorfia.

Estructura (V_l^2, R).

Apartado-1.

La estructura $(V_l^2, R) \equiv [(V_l^2, \oplus), (R, +, \cdot), \odot]$ es espacio vectorial, pues cumple las siguientes propiedades:

1).- $(V_l^2, \oplus)$ es un grupo abeliano.

2).- $(R, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo.

3).- $\left.\begin{array}{l} \forall r \in R \\ \forall \vec{v} \in V_l^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad r \odot \vec{v} = r\vec{v} = \vec{w} \in V_l^2.$

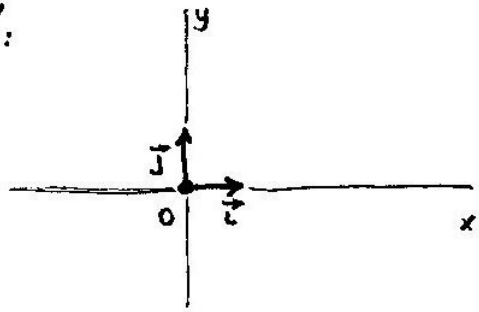
4).- $\left.\begin{array}{l} \forall r, t \in R \\ \forall \vec{v} \in V_l^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad r(t\vec{v}) = (r \cdot t)\vec{v}.$

5).- $\exists 1 \in R \mid \forall \vec{v} \in V_l^2 \quad \Rightarrow \quad 1\vec{v} = \vec{v}.$

6).- $\left.\begin{array}{l} \forall r, t \in R \\ \forall \vec{v} \in V_l^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (r+t)\vec{v} = r\vec{v} \oplus t\vec{v}.$

7).- $\left.\begin{array}{l} \forall r \in R \\ \forall \vec{v}, \vec{w} \in V_l^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad r(\vec{v} \oplus w) = r\vec{v} \oplus r\vec{w}.$

Apartado-2.

Los espacios vectoriales (V_l^0, R) y (V_l^1, R) son sendos subespacios vectoriales de (V_l^2, R). En la representación geométrica de los elementos de V_l^2, en coordinadas canónicas para E_2^{Oxy}, se tiene que V_l^0 corresponde al punto O que es el origen de coordenadas, V_l^1 corresponde a la recta vectorial o eje Ox y V_l^2 corresponde a todo el

plano cartesiano E_2^{oxy}: