

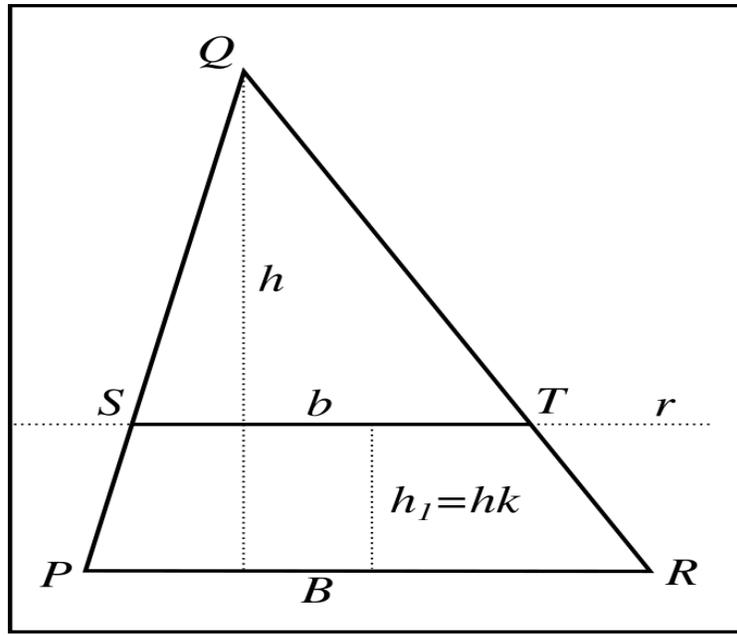
Presentación:

Este trabajo fue desarrollado a partir de la necesidad de resolver un tema práctico geométrico y mecánico, en su transcurso se dedujo que las dimensiones de la Base resultaron irrelevantes puesto que es suficiente conocer las respectivas alturas h . Las implicancias al volcar el razonamiento a cuerpos de más de dos dimensiones se ampliaron por su practicidad para resolver cuestiones que exceden a la geometría elemental hacia campos como la ingeniería, la mecánica y probablemente hasta la matemática n-dimensional.

Sin embargo la intención de los autores es presentar una demostración sencilla como teoremas aplicados a triángulos, conos y pirámides con una conjetura final.

Es por ello que se considera superfluo presentar bibliografía que acredite las fórmulas utilizadas que definen superficies de triángulos, trapecios, volúmenes de conos y pirámides. O propiedades como la “semejanza”, etc. Todos ellos estudiados en geometría básica.

Teorema Escarlón – Primera parte:



Dado un triángulo PQR de altura h , es posible dividirlo en dos partes de igual área con una recta r paralela a su base B trazada a una altura h_1 tal que $h_1 = kh$ siendo k una constante para cualquier triángulo.

Se define: Las áreas del trapecio PSTR y del triángulo SQT son iguales.

$$(B + b) \frac{h_1}{2} = \frac{b(h - h_1)}{2}$$

Y considerando que la suma de ambas áreas debe ser igual a la del triángulo PQR es válida la igualdad: $\frac{Bh}{2} = 2b \frac{(h-h_1)}{2} = 2 \frac{(B+b)h_1}{2}$ de la que tomamos:

$$\frac{Bh}{2} = 2b \frac{(h - h_1)}{2}$$

O sea:

$$Bh = 2b(h - h_1)$$

Despejando B:

$$B = \frac{2b(h - h_1)}{h} \quad (1)$$

Por semejanza de los triángulos PQR y SQT se establece que:

$$\frac{B}{b} = \frac{h}{h - h_1}$$

Despejando B:

$$B = \frac{bh}{h - h_1} \quad (2)$$

Igualamos (1) y (2):

$$\frac{2b(h - h_1)}{h} = \frac{bh}{h - h_1}$$

Eliminamos b de ambos lados de la ecuación y reagrupamos:

$$2(h - h_1)^2 = h^2$$

Aplicamos raíz cuadrada a toda la ecuación:

$$\sqrt{2} (h - h_1) = h$$

Despejamos h_1 :

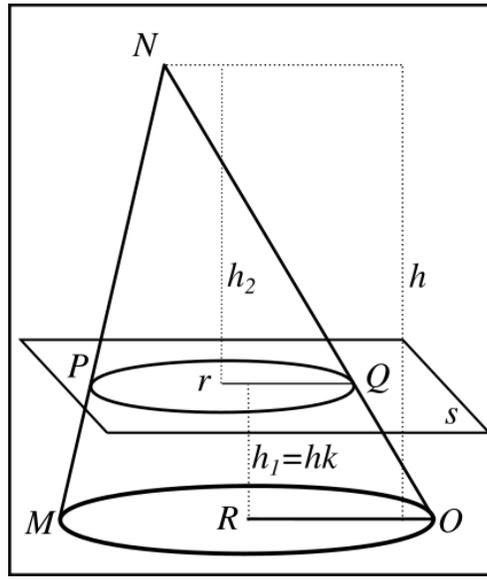
$$h_1 = h - \frac{h}{\sqrt{2}} = h\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Finalmente:

$$h_1 = h\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = hk$$

Donde la constante $k = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ = número irracional aproximadamente igual a: 0.2928932188..., demuestra el Teorema.

Teorema Escarlón (Parte 2)



Si aplicamos razonamientos similares para volúmenes de conos o pirámides en general (Considerando al cono como una pirámide de infinitos lados) se llegan a conclusiones similares:

En el caso puntual del cono (objeto tridimensional):

HIPOTESIS

PARA CUALQUIER CONO SE VERIFICA QUE SI SE LO CORTA CON UN PLANO PARALELO A SU BASE A UNA ALTURA $h_1 = hk$ QUEDA DIVIDIDO EN DOS VOLUMENES IGUALES, SIENDO k UNA CONSTANTE.

Condición 1: El volumen del cono PQN debe ser igual a la mitad del cono MNO

Condición 2: El cono PQN pertenece al cono MNO

$$\text{O sea. } \frac{\pi R^2 h}{3} = 2 \frac{\pi r^2 h_2}{3}$$

$$\text{Simplificando: } R^2 h = 2r^2 h_2 \quad \mathbf{(1)}$$

$$\text{Por propiedad de semejanza: } \frac{R}{h} = \frac{r}{h_2}, \text{ por lo tanto: } r = \frac{Rh_2}{h} \quad \mathbf{(2)}$$

Reemplazando r de **(2)** en la ecuación **(1)**:

$$R^2 h = 2 \left(\frac{R h_2}{h} \right)^2 h_2$$

$$R^2 h = 2 \frac{R^2 h_2^2}{h^2} h_2$$

Simplificando: $h = 2 \frac{h_2 h_2^2}{h^2}$

Unificando: $h^3 = 2h_2^3$ o sea: $\sqrt[3]{\frac{h^3}{2}} = h_2$ **(3)**

Si tenemos en cuenta que: $h_1 = h - h_2$ y reemplazamos h_2 por el valor en **(3)**:

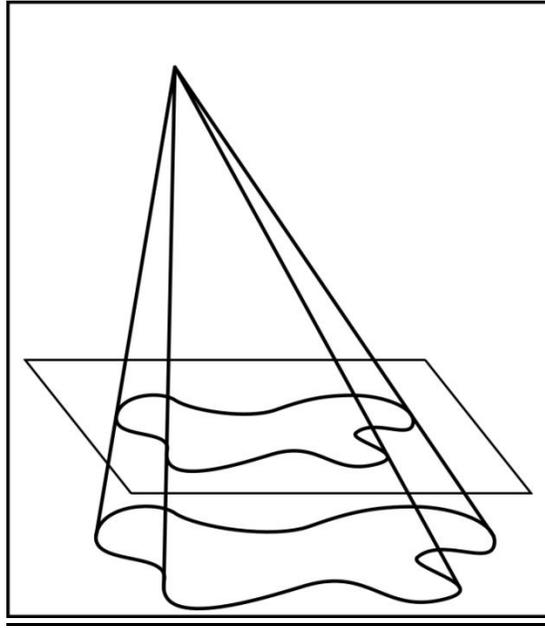
$$h_1 = h - \sqrt[3]{\frac{h^3}{2}} = h \left(1 - \sqrt[3]{\frac{1^3}{2}} \right), \text{ es decir: } h_1 = kh \text{ siendo } k = 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \text{ resulta}$$

k una constante irracional igual a 0.206299474..., que verifica la **HIPOTESIS**.

Teorema Escarlón - Parte 3

Aplicaciones y generalizaciones propuestas:

Para: Física, Mecánica, Ingeniería, Construcciones o Matemáticas n-dimensionales



Si se consideran cuerpos de tres dimensiones con una base que confluyan continuamente a un vértice tales como conos, pirámides u otros de base irregular, es posible aplicar el teorema para cortarlos en dos partes iguales, a condición de que el material del cuerpo sea homogéneo en todo su volumen aplicando:

$h_1 = kh$, Donde:

$$k_3 = 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

Si consideramos una figura de dos dimensiones como el caso de un triángulo,

$$k_2 = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Y el caso extremo de una figura de una dimensión como lo es un segmento vertical:

$$k_1 = 1 - \sqrt[1]{\frac{1}{2}}$$

Se puede apreciar que se cumple la norma $k_n = 1 - \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ Por lo que es dable proponer la siguiente:

Conjetura:

Para cualquier objeto n-dimensional con una Base y que desde ella confluya directamente hacia un punto situado a una altura h , es posible su división en dos partes iguales al cortarlo con un objeto de $n - 1$ dimensiones paralelo a su Base a una altura tal que se cumpla:

$$h_n = h \left(1 - \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \right) = h k_n$$

Siendo k_n constante y n el número de dimensiones del objeto en cuestión.

**Autores: Alcibiades Escarlón, Diego Adrián Escarlón – Noviembre 2016 –
República Argentina**
