Física teórica
MECÁNICA

Cinemática tensorial

Tema 12

R-espacio tensorial

Tema 12... R-espacio tensorial.

Espacio vectorial. Conjunto. Igualdad de conjuntos. Conjunto vacío. Subconjunto. Cardinal. Conjunto infinito. Cardinal infinito. Jerarquía infinita de cardinales infinitos. Alef-cardinales. Familia de conjuntos **(página 1).**

Conjunto producto cartesiano. Propiedades. Relación. Relación binaria. Aplicación **(página 2).**

Aplicación, función o mapeo. Cuantificador existencial unitario. Dominio, conjunto inicial o conjunto de partida. Codominio, conjunto final o conjunto de llegada. Elemento imagen. Conjunto imagen, rango o recorrido. Antiimagen, imagen inversa o preimagen. Ley de composición. Operación. Operación interna. Operación externa. Semigrupo. Conjunto soporte. Semigrupo conmutativo. Clausura. Grupo. Elemento neutro. Elemento simétrico. Grupo abeliano o conmutativo **(páginas 3-4).**

Anillo. Anillo conmutativo. Cuerpo. Cuerpo conmutativo **(página 5).**

Operación externa. Espacio vectorial. Soporte principal. Soporte secundario. K-espacio vectorial. Espacio vectorial V sobre K. R-espacio matricial. Subespacio vectorial. Teorema 1 **(página 6).**

Combinación lineal. Teorema 2. Sistema generador. Base. Teorema 3. Dimensión. Espacios vectoriales de dimensión finita **(página 7).**

Tuplas. Adición o suma de n-tuplas. Producto escalotuplano. R-espacio tuplano. Teoremas 4, 5, 6, 7 y 8 **(páginas 8-9).**

Escalar. Matriz. Componentes. Matriz escalar. Matriz real. Cardinal o dimensión matricial. Orden matricial. Matrices equimorfas. Adición o suma matricial. Matriz nula. Producto escalomatricial. R-espacio matricial. Teoremas 9, 10 y 11. Base matricial canónica. Teoremas 12 y 13 **(páginas 10-12).**

Tupla canónica. Teorema 14. Matriz canónica. Teorema 15 **(página 13).**

R-espacio tensorial. Tensor. Compotentes tensoriales. Tensor real. Cardinal o dimensión de un tensor. Orden distributivo de un tensor. Tensores equimorfos. Adición o suma tensorial. Tensor nulo **(páginas 14-15).**

Producto escalotensorial. R-espacio tensorial. Teoremas 16 y 17. Tensor canónico. Base canónica tensorial. Teoremas 18, 19 y 20 **(página 16).**

Orden indexativo de un tensor, o simplemente "orden de un tensor". Tensores de tercer orden, de segundo orden, de primer orden y de orden cero. Tensor de n-ésimo orden **(páginas 17-18).**

Índice.

Espacio vectorial (1).

Apartado-1 (1).

Conjunto. Igualdad de conjuntos. Conjunto vacío. Subconjunto. Cardinal. Conjunto infinito. Cardinal infinito. Jerarquía infinita de cardinales infinitos. Alef-cardinales. Familia de conjuntos.

Apartado-2 (2).

Conjunto producto cartesiano. Propiedades.

Apartado-3 (2).

Relación. Relación binaria. Aplicación.

Apartado-4 (3).

Aplicación, función o mapeo. Cuantificador existencial unitario. Dominio, conjunto inicial o conjunto de partida. Codominio, conjunto final o conjunto de llegada. Elemento imagen. Conjunto imagen, rango o recorrido. Antiimagen, imagen inversa o preimagen.

Apartado-5 (3).

Ley de composición. Operación. Operación interna. Operación externa. Semigrupo. Conjunto soporte. Semigrupo conmutativo. Clausura. Grupo. Elemento neutro. Elemento simétrico. Grupo abeliano o conmutativo.

Apartado-6 (5).

Anillo. Anillo conmutativo. Cuerpo. Cuerpo conmutativo.

Apartado-7 (6).

Operación externa. Espacio vectorial. Soporte principal. Soporte secundario. K-espacio vectorial. Espacio vectorial V sobre K.

R-espacio matricial (6).

Apartado-1 (6).

Subespacio vectorial. Teorema-1.

Apartado-2 (7).

Combinación lineal. Teorema-2. Sistema generador. Base. Teorema-3. Dimensión. Espacios vectoriales de dimensión finita.

Apartado-3 (8).

Tuplas. Adición o suma de n-tuplas. Producto escalotuplano. R-espacio tuplano. Teoremas 4, 5, 6, 7 y 8.

Apartado-4 (10).

Escalar. Matriz. Componentes. Matriz escalar. Matriz real. Cardinal o dimensión matricial. Orden matricial. Matrices equimorfas. Adición o suma matricial. Matriz nula. Producto escalomatricial. R-espacio matricial. Teoremas 9, 10 y 11. Base matricial canónica. Teoremas 12 y 13.

Apartado-5 (13).

Tupla canónica. Teorema 14. Matriz canónica. Teorema-15.

R-espacio tensorial (14).

Apartado-1 (14).

Tensor. Componentes tensoriales. Tensor real. Cardinal o dimensión de un tensor. Orden distributivo de un tensor. Tensores equimorfos. Adición o suma tensorial. Tensor nulo.

Apartado-2 (16).

Producto escalotensorial. R-espacio tensorial. Teoremas 16 y 17.

Apartado-3 (16).

Tensor canónico. Base canónica tensorial. Teoremas 18, 19 y 20.

Orden Indexativo de un tensor (17).

Apartado-1 (17).

Orden indexativo, o simplemente ORDEN, de un tensor. Tensores de tercer orden, de segundo orden, de primer orden y de orden cero. Tensor de n-ésimo orden.

Tema 12 (R-espacio tensorial).

Espacio vectorial.

Apartado-1.

En matemáticas, un CONJUNTO, A, es una colección de elementos $a_1, a_2, \ldots$ considerada en sí misma como un objeto matemático:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\}$$

Se dice que 2 conjuntos A y B son iguales (IGUALDAD DE CONJUNTOS) cuando poseen los mismos elementos:

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A \Rightarrow a \in B \\ \forall b \in B \Rightarrow b \in A \end{cases}$$

Se define la existencia de un conjunto ϕ, llamado CONJUNTO VACÍO, que carece de elementos:

$$\phi = \{\}.$$

Se dice que un conjunto A es un SUBCONJUNTO de otro conjunto B cuando todo elemento de A es elemento de B:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall a \in A \Rightarrow a \in B)$$

De donde se deduce que:

$$\forall A \Rightarrow A \subset A$$
$$\forall A \Rightarrow \phi \subset A$$

Se llama CARDINAL de un conjunto A a la cantidad de elementos del mismo:

$$card(\phi) = 0$$
$$\forall A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \Rightarrow card(A) = n.$$

Pero cuando A es un CONJUNTO INFINITO (con infinita cantidad de elementos), su cardinal es un CARDINAL INFINITO y puede presentar diferentes grados de infinitud en una JERARQUÍA INFINITA DE CARDINALES INFINITOS compuesta por los denominados ALEF-CARDINALES:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots < \aleph_n < \ldots$$

Tal que: $\aleph_0 = card(N)$; $\aleph_1 = 2^{\aleph_0} = card(R)$; $\aleph_n = 2^{\aleph_{n-1}}$

La famosa HIPÓTESIS DEL CONTINUO (indemostrable) afirma que $\nexists A$ tal que $\aleph_0 < card(A) < \aleph_1$; y, en general, que $\nexists A$ tal que $\aleph_n < card(A) < \aleph_{n+1}$.

Se llama COLECCIÓN o FAMILIA DE CONJUNTOS a todo conjunto F cuyos elementos son, a su vez, conjuntos:

$$F = \{A, B, C, \dots\}$$

También puede denotarse por A, cuyos elementos son los conjuntos indexados (afectados de subíndices naturales) $A_1, A_2, A_3, \dots$:

$$A = \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$$

Sucediendo, pues, que A puede ser finito o infinito.

Apartado-2.

Dados 2 conjuntos A y B, se llama CONJUNTO PRODUCTO CARTESIANO de A por B al conjunto $A \times B$ formado por todos los pares ordenados de elementos (a,b) tales que $a \in A$ y $b \in B$:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Por ejemplo, siendo $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{a,b\}$, tendremos:

$$A \times B = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$$

En general, el Producto Cartesiano de una cantidad finita de conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ es el conjunto $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$ formado por todas las n-tuplas ordenadas de elementos $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tales que $a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$$

Cumpliéndose: $\forall A \Rightarrow A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset \times \emptyset = \emptyset$

$$\forall A_1, A_2, \dots A_n \Rightarrow \left(\prod_{i=1}^{n} A_i = \emptyset \iff \exists A_k \mid 1 \le k \in n \mid A_k = \emptyset\right)$$

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \cdot \text{card}(B) = \text{card}(B) \cdot \text{card}(A) = \text{card}(B \times A)$$

$$\text{card}(A \times \emptyset) = \text{card}(A) \cdot \text{card}(\emptyset) = \text{card}(A) \cdot 0 = 0 = \text{card}(\emptyset).$$

Apartado-3.

Se llama RELACIÓN sobre una familia finita de conjuntos $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ a un subconjunto R del conjunto producto cartesiano $\prod_{i=1}^{n} A_i$. Cuando $A = \{A_1, A_2\}$, la relación R se denomina RELACIÓN BINARIA; y más exactamente una relación binaria es un subconjunto R del conjunto $A_1 \times A_2$ tal que $\forall (a_1, a_2) \in R$ existe una propiedad P que vincula a los elementos o componentes de dicho par ordenado, lo cual se denota:

$$R = \{(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2 \mid P(a_1, a_2)\}$$

También se usan las notaciones:

$$a_1 R a_2 \ ; \ (a_1, a_2) \in R$$

Pues bien, se llama APLICACIÓN a todo subconjunto $f \subset A_1 \times A_2$

tal que $\forall a_1 \in A_1$ se cumple que $(a_1, x) \in f$, con $x \in A_2$ un elemento cualquiera de A_2. Por lo tanto, una Aplicación es un tipo especial de relación $R \subset A_1 \times A_2$ (relación binaria). Y suele denotarse:

$$f: A_1 \to A_2$$

Apartado-4.

A partir de la definición de Aplicación, recién dada, se obtienen las definiciones siguientes o clásicas. Dados 2 conjuntos A y B, se llama APLICACIÓN, FUNCIÓN o MAPEO de A en B a una asociación f donde a cada elemento de A se le asigna un único elemento de B:

$$f: A \to B$$

$$\forall a \in A \Rightarrow \exists! \, f(a) = b \mid b \in B$$

(El símbolo $\exists!$ se llama CUANTIFICADOR EXISTENCIAL UNITARIO y se lee: "Existe uno y sólo uno").

Se dice que A es el DOMINIO, CONJUNTO INICIAL o CONJUNTO DE PARTIDA de la aplicación f, y se dice que B es el CODOMINIO, CONJUNTO FINAL o CONJUNTO DE LLEGADA de f.

Dada una aplicación $f: A \to B$, al elemento $b \in B$ que corresponde mediante f a un cierto elemento $a \in A$ se le denomina ELEMENTO IMAGEN de $a \in A$:

$$f(a) = b$$

El conjunto $\beta \subset B$ formado por todos aquellos elementos de B que son imágenes de los elementos de A se denomina CONJUNTO IMAGEN, RANGO o RECORRIDO de f. Por lo tanto, el rango β de f es un subconjunto del codominio B y se denota:

$$\beta = f(A)$$

Se llama ANTIIMAGEN, IMAGEN INVERSA o PREIMAGEN de un elemento $b \in \beta$ al conjunto $\alpha \subset A$ formado por todos los elementos de A que tienen por imagen a $b \in \beta$, y se denota:

$$f^{-1}(b) = \alpha \; ; \quad f(\alpha) = b$$

Si $\alpha \subset A$ es un conjunto unitario, tal que $\alpha = \{a\}$, entonces se escribe:

$$f^{-1}(b) = a.$$

Apartado-5.

Una LEY DE COMPOSICIÓN u OPERACIÓN es una aplicación del tipo $f: A \times B \to C$ tal que $\forall (a, b) \in A \times B$, con $a \in A$ y $b \in B$, se cumple que

$\exists!\, c \in C$ tal que $f[(a,b)] = c$. Cuando $A=B=C$, la aplicación f recibe el nombre de OPERACIÓN INTERNA, y cuando $B=C$ entonces recibe el nombre de OPERACIÓN EXTERNA:

$f: A \times A \to A$ (operación interna)
$f: A \times B \to B$ (operación externa)

Una Operación Interna $f: A^2 \to A$ se suele denotar con el símbolo $*$:

$$*: A^2 \to A$$

O sea: $\forall a,b \in A \Rightarrow a*b = c \mid c \in A$.

Toda operación interna definida sobre los elementos de un conjunto da lugar a una estructura $(A,*)$ que cumple una serie de propiedades y, según las propiedades que cumpla, así se llamará de maneras diferentes, siendo las más usuales las estructuras de Semigrupo y Grupo.

Un SEMIGRUPO es una estructura $(A,*)$ dotada de un CONJUNTO SOPORTE, A, y de una operación $*$ definida para los elementos de A que cumple las siguientes propiedades:

1).- CLAUSURA (u operación interna):

$$\forall a,b \in A \Rightarrow (a*b) \in A.$$

2).- Asociatividad: $\forall a,b,c \in A \Rightarrow (a*b)*c = a*(b*c)$.

Un SEMIGRUPO CONMUTATIVO es una estructura $(A,*)$, con un soporte A y una operación $*$ que cumple las siguientes propiedades:

1).- Clausura: $\forall a,b \in A \Rightarrow (a*b) \in A$.
2).- Asociatividad: $\forall a,b,c \in A \Rightarrow (a*b)*c = a*(b*c)$.
3).- Conmutatividad: $\forall a,b \in A \Rightarrow a*b = b*a$

Por consiguiente, todo semigrupo conmutativo es también un semigrupo.

Un GRUPO es una estructura $(A,*)$ dotada de un soporte A y de una operación $*$ que cumple:

1).- Clausura: $\forall a,b \in A \Rightarrow (a*b) \in A$.
2).- Asociatividad: $\forall a,b,c, \in A \Rightarrow (a*b)*c = a*(b*c)$
3).- Neutralidad (o existencia de ELEMENTO NEUTRO, $e \in A$):

$$\exists!\, e \in A \mid \forall a \in A \Rightarrow a*e = e*a = a.$$

4).- Simetría (o existencia de ELEMENTO SIMÉTRICO $a' \in A$ de un

$a \in A$): $\forall a \in A \Rightarrow \exists! a' \in A \mid a*a' = a'*a = e$.

Un GRUPO ABELIANO o CONMUTATIVO es una estructura $(A,*)$ dotada de un soporte A y una operación $*$ que cumple:

1).- Clausura: $\forall a,b \in A \Rightarrow (a*b) \in A$.

2).- Asociatividad: $\forall a,b,c \in A \Rightarrow (a*b)*c = a*(b*c)$.

3).- Neutralidad: $\exists! e \in A) \ \forall a \in A \Rightarrow a*e = e*a = a$.

4).- Simetría: $\forall a \in A \Rightarrow \exists! a' \in A \mid a*a' = a'*a = e$.

5).- Conmutatividad: $\forall a,b \in A \Rightarrow a*b = b*a$.

Por consiguiente, todo grupo abeliano también es grupo y semigrupo.

Apartado - 6.

Un ANILLO es una estructura $(A,*,\bullet)$ dotada de un soporte A y dos operaciones, $*$ y $\bullet$, que cumplen las siguientes propiedades:

1).- La estructura $(A,*)$ es un grupo abeliano.

2).- La estructura $(A,\bullet)$ es un semigrupo.

3).- Distributividad (de $\bullet$ respecto a $*$):

$$\forall a,b,c \in A \Rightarrow a\bullet(b*c) = (a\bullet b)*(a\bullet c).$$

Un ANILLO CONMUTATIVO es una estructura $(A,*,\bullet)$ dotada de un soporte A y dos operaciones, $*$ y $\bullet$, que cumple las siguientes propiedades:

1).- La estructura $(A,*)$ es un grupo abeliano.

2).- La estructura $(A,\bullet)$ es un semigrupo conmutativo.

3).- Distributividad (de $\bullet$ respecto a $*$):

$$\forall a,b,c \in A \Rightarrow a\bullet(b*c) = (a\bullet b)*(a\bullet c)$$

Un CUERPO es una estructura $(A,*,\bullet)$ dotado de un soporte A y dos operaciones, $*$ y $\bullet$, que cumplen las siguientes propiedades:

1).- La estructura $(A,*)$ es un grupo abeliano.

2).- La estructura $(A^*,\bullet)$ es un grupo, donde $A^* = A - \{e\}$, siendo $e \in A$ el elemento neutro de $(A,*)$.

3).- Distributividad (de $\bullet$ respecto a $*$):

$$\forall a,b,c \in A \Rightarrow a\bullet(b*c) = (a\bullet b)*(a\bullet c).$$

Un CUERPO CONMUTATIVO es una estructura $(A,*,\bullet)$ dotada de un soporte A y dos operaciones, $*$ y $\bullet$, que cumplen la siguie

tes propiedades:

1).- La estructura $(A,*)$ es un grupo abeliano.

2).- La estructura $(A^*,\cdot)$ es un grupo abeliano.

3).- Distributividad (de $\cdot$ respecto a $*$):

$$\forall a,b,c\in A \Rightarrow a\cdot(b*c)=(a\cdot b)*(a\cdot c)$$

Por lo tanto, la estructura de cuerpo conmutativo supone la existencia previa de cuerpo, anillo conmutativo y anillo.

Apartado-7.

Una OPERACIÓN EXTERNA es una aplicación $f: A\times B\to B$ que suele denotarse por $\odot$:

$$\odot: A\times B\to B$$

Y se define: $\forall(a,b)\in A\times B \Rightarrow a\odot b=c \mid c\in B.$

Se llama ESPACIO VECTORIAL a una estructura dotada de un SOPORTE PRINCIAL o conjunto V y un SOPORTE SECUNDARIO o conjunto K, denotada $[(V,\circledast),(K,*,\cdot),\odot]$, que cumple las siguientes propiedades:

1).- $(V,\circledast)$ es un grupo abeliano.

2).- $(K,*,\cdot)$ es un cuerpo conmutativo.

3).- Los soportes V y K están relacionados entre sí mediante la operación externa $\odot$, tal que:

$$\left.\begin{matrix}\forall q\in K\\ \forall u\in V\end{matrix}\right\} \Rightarrow q\odot u=qu=w\in V.$$

4).- $\left.\begin{matrix}\forall q,s\in K\\ \forall u\in V\end{matrix}\right\} \Rightarrow q(su)=(q\cdot s)u$

5).- $\exists!\, \textcircled{e}\in K^* \mid \forall u\in V \Rightarrow \textcircled{e}u=u$

Donde $\textcircled{e}\in K$ es el elemento neutro de $(K^*,\cdot)$.

6).- $\left.\begin{matrix}\forall q,s\in K\\ \forall u\in V\end{matrix}\right\} \Rightarrow (q*s)u=qu\circledast su$

7).- $\left.\begin{matrix}\forall q\in K\\ \forall u,w\in V\end{matrix}\right\} \Rightarrow q(u\circledast w)=qu\circledast qw$

La estructura $[(V,\circledast),(K,*,\cdot),\odot]$ de espacio vectorial también se denomina K-ESPACIO VECTORIAL, o ESPACIO VECTORIAL V SOBRE K.

(R-espacio matricial.)

Apartado-1.

Siendo $[(V,\circledast),(K,*,\cdot),\odot]$ un espacio vectorial y siendo $W \subset V$, se dirá que W es un SUBESPACIO VECTORIAL de $[(V,\circledast),(K,*,\cdot),\odot]$ si $[(W,\circledast),(K,*,\cdot),\odot]$ tiene estructura de espacio vectorial. Como $V \subset V$, es evidente que todo espacio vectorial es un subespacio vectorial de sí mismo.

TEOREMA-1.

Siendo $[(V,\circledast),(K,*,\cdot),\odot]$ un espacio vectorial y siendo $W \subset V$, será $[(W,\circledast),(K,*,\cdot),\odot]$ un subespacio vectorial de $[(V,\circledast),(K,*,\cdot),\odot]$ si se cumple lo siguiente:

1).- $\forall u_1, u_2 \in W \Rightarrow (u_1 \circledast u_2) \in W$.

2).- $\left.\begin{array}{l}\forall u \in W \\ \forall q \in K\end{array}\right\} \Rightarrow qu \in W$.

DEMOSTRACIÓN. Se omite.

Apartado-2.

Dado un espacio vectorial $(V,K) \equiv [(V,\circledast),(K,*,\cdot),\odot]$ y un subconjunto $S \subset V$ tal que $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, se dirá que un determinado elemento $w \in V$ es COMBINACIÓN LINEAL de S (es decir, de los elementos de S) Si $\exists q_1, q_2, \ldots, q_n \in K$ tal que:

$$W = q_1 u_1 \circledast q_2 u_2 \circledast \ldots \circledast q_n u_n = \overset{n}{\underset{i=1}{\circledast}} q_i u_i$$

TEOREMA-2.

El conjunto $F \subset V$ de todos aquellos elementos de V que se pueden generar mediante todas las posibles combinaciones lineales de los elementos de un $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset V$ tiene estructura $[(F,\circledast),(K,*,\cdot),\odot]$ de subespacio vectorial del espacio vectorial (V,K).

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

Se dirá, en todo caso, que S es un SISTEMA GENERADOR del subespacio vectorial (F,K). Ahora bien, puede suceder que exista un $P \subset S$ (siendo P subconjunto propio de S) tal que P también sea un sistema generador de (F,K); y esto no tiene nada de extraño cuando se considera que si $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es un sistema generador de F también lo es $S \cup \{u_{n+1}\}$, con $u_{n+1} = u_1 \circledast u_2$ y evidentemente $u_{n+1} \in F$. En efecto, pues por el

Teorema-2 anterior es (F,K) subespacio vectorial de (V,K), y, por el teorema-1 anterior, $\forall w \in F$, tal que $W = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} q_i u_i$, es $(W \oplus q_{n+1} u_{n+1}) \in F$, de donde $\overset{n+1}{\underset{i=1}{\oplus}} q_i u_i \in F$. Por otra parte, dado que $V \subset V$, es posible extender la definición de Sistema Generador a un espacio vectorial cualquiera y no sólo al caso de los subespacios vectoriales.

Se llama BASE de un espacio vectorial (V,K) a cualquier sistema generador $B \subset V$ tal que no existe un sistema generador de (V,K) de cardinal menor que $card(B)$.

TEOREMA-3.

Siendo $B_1 \subset V$ y $B_2 \subset V$ sendas bases del espacio vectorial (V,K), se cumple lo siguiente: $card(B_1) = card(B_2)$.

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

Se llama DIMENSIÓN de un espacio vectorial (V,K) al cardinal de una cualquiera de sus bases, y se denota $dim(V)$:

$$dim(V) = card(B).$$

Si bien existen espacios vectoriales de dimensión infinita, aquí no los consideraremos, pues carecen de utilidad para nosotros en este momento. Por lo tanto, en lo sucesivo, a menos que se diga lo contrario, nos ceñiremos exclusivamente al caso de los ESPACIOS VECTORIALES DE DIMENSIÓN FINITA.

Apartado-3.

Siendo R^n el conjunto producto cartesiano $\overset{n}{R \times R \times R \times \dots \times R}$, formado por todas las n-tuplas $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ordenadas de números reales $x_i \in R$, también llamadas genéricamente TUPLAS, se define la ADICIÓN o SUMA de dos n-tuplas así:

$$\forall x,y \in R^n \left| \begin{array}{l} x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{array} \right\} \Rightarrow x \oplus y = (x_1, x_2, \dots, x_n) \oplus (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n) = z \in R^n.$$

Por lo tanto, la estructura $(R^n, \oplus)$ es un grupo abeliano, puesto que cumple las siguientes propiedades (fácilmente demostrables):

1).- Clausura: $\forall x,y \in R^n \Rightarrow x \oplus y = z \in R^n$.

2).- Asociatividad: $\forall x,y,z \in R^n \Rightarrow (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.

3).- Neutralidad: $\exists! \, 0 = (0,0,\dots,0) \in R^n \mid \forall x \in R^n \Rightarrow x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$.

4).- Simetría: $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \Rightarrow \exists! \, x' = -x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) \in R^n$ tal que $x \oplus (-x) = (-x) \oplus x = 0$.

5).- Conmutatividad: $\forall x, y \in R^n \Rightarrow x \oplus y = y \oplus x$.

También se puede definir, por otra parte, el llamado PRODUCTO ESCALOTUPLANO (operación extrena): $\odot : R \times R^n \to R^n$

Así: $\forall (r, x) \in R \times R^n \left| \begin{matrix} r \in R \\ x \in R^n \end{matrix} \right\} \Rightarrow r \odot x = rx = r(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$

$= (rx_1, rx_2, \ldots, rx_n) \in R^n$.

Por consiguiente, la estructura $[(R^n, \oplus), (R, +, \cdot), \odot] \equiv (R^n, R)$ es un espacio vectorial de R^n sobre R, o R-ESPACIO TUPLANO, ya que cumple:

1).- $(R^n, \oplus)$ es un grupo abeliano.

2).- $(R, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo.

3).- $\left. \begin{matrix} \forall r \in R \\ \forall x \in R^n \end{matrix} \right\} \Rightarrow r \odot x = rx = y \in R^n$.

4).- $\left. \begin{matrix} \forall r_1, r_2 \in R \\ \forall x \in R^n \end{matrix} \right\} \Rightarrow r_1 (r_2 x) = (r_1 r_2) x$.

5).- $\exists! 1 \in R \mid \forall x \in R^n \Rightarrow 1x = x$.

6).- $\left. \begin{matrix} \forall r_1, r_2 \in R \\ \forall x \in R^n \end{matrix} \right\} \Rightarrow (r_1 + r_2) x = r_1 x \oplus r_2 x$.

7).- $\left. \begin{matrix} \forall r \in R \\ \forall x, y \in R^n \end{matrix} \right\} \Rightarrow r(x \oplus y) = rx \oplus ry$.

TEOREMA-4.

Siendo (R^n, R) el R-espacio tuplano, se tiene que $\dim(R^n) = n$.

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

TEOREMA-5.

Siendo B una base cualquiera del espacio vectorial (R^n, R), se cumple que $\text{card}(B) = n$.

DEMOSTRACIÓN: Corolario del teorema anterior.

TEOREMA-6:

Siendo B_c una base del espacio vectorial (R^n, R), llamada BASE CANÓNICA de (R^n, R), tal que $B_c = \{(1,0,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0) \ldots (0,0,0,\ldots,1)\}$. Se cumple que B_c es única (sólo hay una base canónica).

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

TEOREMA-7:

Siendo $\mathcal{B}$ el conjunto de todas las bases del espacio vectorial

(R^n, R), se cumple: $\exists!\ B_c \in \beta$.

DEMOSTRACIÓN: Corolario del teorema anterior.

TEOREMA-8.

Siendo β el conjunto de todas las bases del espacio vectorial (R^n, R), se cumple: $card(\beta) = \aleph_1^n = \aleph_1 = card(R)$.

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

Apartado-4.

En términos matemáticos, se llama ESCALAR (magnitud escalar) a los elementos de un cuerpo $(K, *, \cdot)$, es decir, a todo $x \in K$, donde el soporte K suele ser un conjunto numérico: bien R (números reales), o bien C (números complejos). Por otra parte, se llama MATRIZ a un array (arreglo) bidimensional rectangular de elementos o COMPONENTES ordenados e_{ij}, según fila y columna:

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & \cdots & e_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{m1} & e_{m2} & e_{m3} & \cdots & e_{mn} \end{pmatrix}$$

Se llama MATRIZ ESCALAR a la que tiene por componentes elementos $e_{ij} \in K$ de un cuerpo $(K, *, \cdot)$, y se llama MATRIZ REAL a la que tiene por componentes números reales o escalares pertenecientes al cuerpo $(R, +, \cdot)$. Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 & 4^{5/9} \\ e & 0'\widehat{9} & Ln\,5 & 1 \\ 2^{-14} & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dada una matriz real A, se llama CARDINAL o DIMENSIÓN MATRICIAL de A a la cantidad total de sus componentes, y se denota por $card(A) = dim(A)$. Por lo tanto, si A consta de m filas y n columnas de componentes, entonces:

$$card(A) = dim(A) = m \cdot n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se llama ORDEN MATRICIAL de A, y se denota ord(A), al producto no conmutativo que indica el número de filas por el núme-

ro de columnas de A. Por consiguiente:

$$\left.\begin{array}{l} ord(X) = m \cdot n \\ ord(Y) = n \cdot m \end{array}\right\} \Rightarrow X \neq Y$$

Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} \cdots b_{2m} \\ \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots b_{nm} \end{pmatrix} = B.$$

Donde:

$$Ord(A) = mn \; ; \; Ord(B) = nm \; ; \quad ord(A) \neq ord(B).$$
$$dim(A) = dim(B) = m \cdot n$$

Dos matrices A y B que poseen igual orden se denominan MATRICES EQUIMORFAS, y se denotan: $A \sim B$

Es decir: $A \sim B \Leftrightarrow ord(A) = ord(B)$.

Siendo $\mathcal{M}$ el conjunto de todas las matrices reales y $\mathcal{M}_{mn}$ el subconjunto propio de $\mathcal{M}$ formado por todas las matrices equimorfas de orden mn, es obvio entonces que $\mathcal{M}$ puede ser particionado en clases de equivalencia $\mathcal{M}_{ij}$ $(i,j \in N)$, donde cada clase está formada por infinita cantidad de matrices reales equimorfas entre sí: $\mathcal{M}/_{\sim} = \{\mathcal{M}_{ij} \mid i,j \in N\}$

Donde:

$$(\mathcal{M}_{mn} = \mathcal{M}_{ps}) \Leftrightarrow (m = p \; ; \; n = s)$$

Pues bien, la operación interna de ADICIÓN o SUMA MATRICIAL, $\oplus$, sólo es posible definirla para matrices equimorfas o del mismo orden. Y así, tendemos:

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{mn} \Rightarrow A \oplus B = C \in \mathcal{M}_{mn}$$

Donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots b_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} \cdots b_{mn} \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \cdots c_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} \cdots c_{mn} \end{pmatrix}$$

Tal que:

$$c_{11} = a_{11} + b_{11} \; ; \; c_{12} = a_{12} + b_{12} \; ; \; \cdots \; ; \; c_{23} = a_{23} + b_{23} \; ; \; \cdots \; ; \; c_{mn} = a_{mn} + b_{mn}.$$

En consecuencia, la estructura $(\mathcal{M}_{mn}, \oplus)$ es un grupo abeliano, puesto que cumple las siguientes propiedades (fácilmente demostrables):

1).- Clausura: $\forall A, B \in \mathcal{M}_{mn} \Rightarrow A \oplus B = C \in \mathcal{M}_{mn}$.

2).- Asociatividad: $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{mn} \Rightarrow (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.

3).- Neutralidad: $\exists! 0 \in \mathcal{M}_{mn} \mid \forall A \in \mathcal{M}_{mn} \Rightarrow A \oplus 0 = 0 \oplus A = A.$

Tal que $0 \in \mathcal{M}_{mn}$ se llama MATRIZ NULA, la cual consta de m.n componentes iguales a $0 \in R$:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

4).- Simetría: $\forall A \in \mathcal{M}_{mn} \Rightarrow \exists! A' = -A \in \mathcal{M}_{mn} \mid A \oplus (-A) = (-A) \oplus A = 0.$

Donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

5).- Conmutatividad: $\forall A, B \in \mathcal{M}_{mn} \Rightarrow A \oplus B = B \oplus A.$

Por otra parte, se llama PRODUCTO ESCALOMATRICIAL (operación externa), a la aplicación:

$$\odot : R \times \mathcal{M}_{mn} \longrightarrow \mathcal{M}_{mn}$$

Tal que: $\forall (r, A) \in R \times \mathcal{M}_{mn} \mid \begin{matrix} r \in R \\ A \in \mathcal{M}_{mn} \end{matrix} \Rightarrow r \odot A = rA = B \in \mathcal{M}_{mn}$

Donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

tal que: $b_{11} = r \cdot a_{11}$; $b_{12} = r \cdot a_{12}$; $\dots$; $b_{mn} = r \cdot a_{mn}$

En consecuencia, la estructura $[(\mathcal{M}_{mn}, \oplus), (R, +, \cdot), \odot] \equiv (\mathcal{M}_{mn}, R)$ es un espacio vectorial de $\mathcal{M}_{mn}$ sobre R, o R-ESPACIO MATRICIAL, puesto que cumple:

1).- $(\mathcal{M}_{mn}, \oplus)$ es un grupo abeliano.

2).- $(R, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo.

3).- $\left.\begin{matrix} \forall r \in R \\ \forall A \in \mathcal{M}_{mn} \end{matrix}\right\} \Rightarrow r \odot A = rA = B \in \mathcal{M}_{mn}.$

4).- $\left.\begin{matrix} \forall r_1, r_2 \in R \\ \forall A \in \mathcal{M}_{mn} \end{matrix}\right\} \Rightarrow r_1 (r_2 A) = (r_1 \cdot r_2) A.$

5).- $\exists! \, 1 \in R \mid \forall A \in \mathcal{M}_{mn} \Rightarrow 1A = A.$

6).- $\left.\begin{matrix} \forall r_1, r_2 \in R \\ \forall A \in \mathcal{M}_{mn} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (r_1 + r_2) A = r_1 A \oplus r_2 A.$

7).- $\left.\begin{matrix} \forall r \in R \\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{mn} \end{matrix}\right\} \Rightarrow r (A \oplus B) = rA \oplus rB.$

TEOREMA-9.

En el R-espacio matricial $(\mathcal{M}_{mn}, R)$ se cumple lo siguiente: $\dim(\mathcal{M}_{mn}) = m \cdot n$.

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

TEOREMA-10.

Siendo B una base cualquiera del R-espacio matricial $(\mathcal{M}_{mn}, R)$, se cumple: $\text{card}(B) = \dim(\mathcal{M}_{mn}) = m \cdot n$.

DEMOSTRACIÓN: Corolario del teorema anterior.

TEOREMA-11.

Siendo B_c una base canónica del R-espacio matricial $(\mathcal{M}_{mn}, R)$, llamada BASE CANÓNICA de $(\mathcal{M}_{mn}, R)$, tal que:

$$B_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Se cumple que B_c es única en $(\mathcal{M}_{mn}, R)$.

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

TEOREMA-12.

Siendo β el conjunto de todas las bases del R-espacio matricial $(\mathcal{M}_{mn}, R)$, se cumple: $\exists! B_c \in \beta$.

DEMOSTRACIÓN: Corolario del teorema anterior.

TEOREMA-13.

Siendo β el conjunto de todas las bases del R-espacio matricial $(\mathcal{M}_{mn}, R)$, se cumple:

$$\text{card}(\beta) = \aleph_1^{\dim(\mathcal{M}_{mn})} = \aleph_1^{mn} = \aleph_1 = \text{card}(R).$$

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

Apartado-5.

En un R-espacio tuplano (R^n, R), se llama TUPLA CANÓNICA a toda aquélla tupla $\bar{c}$ cuyas componentes son todas nulas salvo una de ellas, que es $1 \in R$:

$$\bar{c} = (0, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

TEOREMA-14.

En el R-espacio tuplano (R^n, R), todas las tuplas canónicas forman un conjunto B_c que coincide con la base canónica de (R^n, R).

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

En un R-espacio matricial $(\mathcal{M}_{mn}, R)$, se llama MATRIZ CANÓNICA a toda aquella matriz cuyas componentes son todas nulas salvo una de ellas, que es 1∈R:

$$m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \dots & 0 \end{pmatrix}$$

TEOREMA-15.

En el R-espacio matricial $(\mathcal{M}_{mn}, R)$, todas las matrices canónicas forman un conjunto B_c que coincide con la base canónica de $(\mathcal{M}_{mn}, R)$.

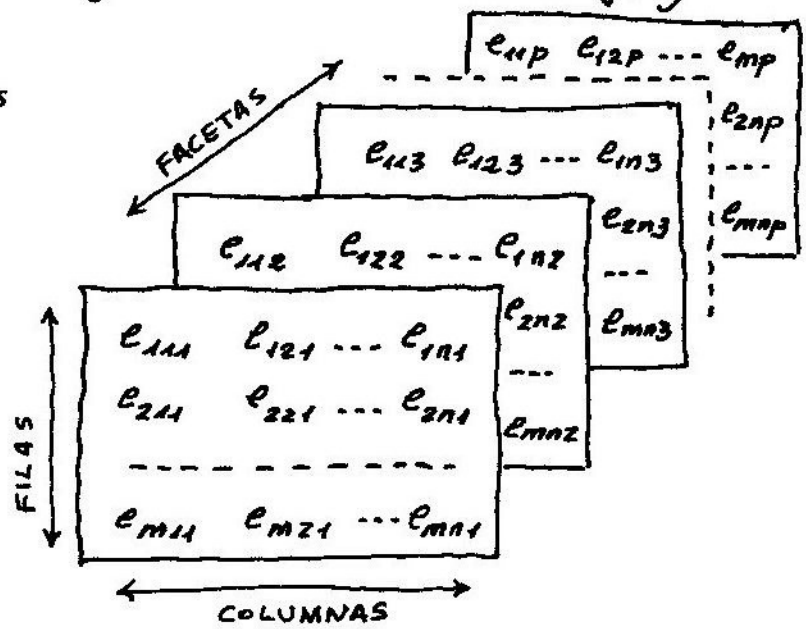
DEMOSTRACIÓN: Se omite.

R-espacio tensorial.

Apartado-1.

Se llama TENSOR a un array (arreglo) en forma de paralelepípedo de elementos o componentes (COMPONENTES TENSORIALES) ordenados según fila (i), columna (j) y faceta (k):

NOTA: Cada "e_{ijk}" es una componente tensorial.



Se llama TENSOR REAL al que tiene por componentes números reales o elementos escalares del cuerpo $(R, +, \cdot)$. Dado un tensor T, se llama CARDINAL o DIMENSIÓN de T a la cantidad total de sus componentes, lo cual se denota: $card(T) = dim(T)$.

Así, si T consta de m filas, n columnas y p facetas, tal que $m, n, p \in N$, entonces:

$$card(T) = dim(T) = m \cdot n \cdot p.$$

Se llama ORDEN DISTRIBUTIVO de un tensor T, y se denota $od(T)$, al producto no conmutativo que indica el número de filas (m) por el número de columnas (n) por el número de facetas (p) de T. Así, siendo $\mathcal{T}$ el conjunto de todos los tensores, tendremos:

$$\forall T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6 \in \mathcal{T} \left| \begin{array}{l} od(T_1) = mnp \\ od(T_2) = mpn \\ od(T_3) = nmp \\ od(T_4) = npm \\ od(T_5) = pnm \\ od(T_6) = pmn \end{array} \right| \begin{array}{l} m \neq n \\ m \neq p \\ n \neq p \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} Od(T_1) \neq od(T_i) & | \; i = 2,3,4,5,6. \\ Od(T_2) \neq od(T_i) & | \; i = 1,3,4,5,6. \\ Od(T_3) \neq Od(T_i) & | \; i = 1,2,4,5,6. \\ Od(T_4) \neq Od(T_i) & | \; i = 1,2,3,5,6. \\ Od(T_5) \neq Od(T_i) & | \; i = 1,2,3,4,6. \\ Od(T_6) \neq Od(T_i) & | \; i = 1,2,3,4,5. \end{array} \right.$$

Dos tensores T_1 y T_2, pertenecientes a $\mathcal{T}$, que posean igual orden distributivo, $od(T_1) = od(T_2)$, se denominan TENSORES EQUIMORFOS, lo cual se denota $T_1 \sim T_2$. Por ende:

$$T_1 \sim T_2 \Leftrightarrow od(T_1) = od(T_2).$$

Siendo $\mathcal{T}_{mnp}$ un subconjunto propio de $\mathcal{T}$ formado por todos los tensores equimorfos de orden distributivo mnp, es obvio que $\mathcal{T}$ puede ser particionado en clases de equivalencia $\mathcal{T}_{ijk}$ (con $i,j,k \in N$), donde cada clase estará formada por una infinita cantidad de tensores reales equimorfos entre sí:

$$\mathcal{T}/_{\sim} = \{\mathcal{T}_{ijk} \mid i,j,k \in N\}$$

Donde: $(\mathcal{T}_{mnp} = \mathcal{T}_{rst}) \Leftrightarrow (m=r, n=s, p=t)$

Pues bien, la operación interna de ADICIÓN o SUMA TENSORIAL, $\oplus$, sólo puede definirse para tensores equimorfos, y esto se hace así: $\forall T_1, T_2 \in \mathcal{T}_{mnp} \Rightarrow T_1 \oplus T_2 = T_3 \in \mathcal{T}_{mnp}$

Tal que: $T_1 = ((a_{ijk}))$; $T_2 = ((b_{ijk}))$; $T_3 = ((c_{ijk}))$

$$c_{ijk} = a_{ijk} + b_{ijk}$$

Donde la notación $((\ldots))$ quiere significar el paralelepípedo constituído por las m filas, n columnas y p facetas correspondientes a la representación tridimensional de las componentes del tensor.

En consecuencia, la estructura $(\mathcal{T}_{mnp}, \oplus)$ es un grupo abeliano, puesto que cumple las siguientes propiedades:

1).- Clausura: $\forall T_1, T_2 \in \mathcal{T}_{mnp} \Rightarrow T_1 \oplus T_2 = T_3 \in \mathcal{T}_{mnp}$.

2).- Asociatividad: $\forall T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{T}_{mnp} \Rightarrow (T_1 \oplus T_2) \oplus T_3 = T_1 \oplus (T_2 \oplus T_3)$.

3).- Neutralidad: $\exists! \, 0 \in \mathcal{T}_{mnp} \mid \forall T \in \mathcal{T}_{mnp} \Rightarrow T \oplus 0 = 0 \oplus T = T$.

Donde $0 \in \mathcal{T}_{mnp}$ se llama TENSOR NULO, el cual consta de $m \cdot n \cdot p$ componentes iguales a $0 \in R$: $0 = ((0))$

4).- Simetría: $\forall T \in \mathcal{T}_{mnp} \Rightarrow \exists! T' = -T \in \mathcal{T}_{mnp} \mid T \oplus (-T) = (-T) \oplus T = 0$.

Donde: $T = ((t_{ijk}))$; $-T = ((-t_{ijk}))$.

5).- Conmutatividad: $\forall T_1, T_2 \in \mathcal{T}_{mnp} \Rightarrow T_1 \oplus T_2 = T_2 \oplus T_1$

Apartado-2.

Se llama PRODUCTO ESCALOTENSORIAL (operación externa) a la aplicación: $\odot : R \times \mathcal{T}_{mnp} \rightarrow \mathcal{T}_{mnp}$

Tal que: $\forall (r, T) \in R \times \mathcal{T}_{mnp} \left| \begin{matrix} r \in R \\ T \in \mathcal{T}_{mnp} \end{matrix} \right\} \Rightarrow r \odot T = rT \in \mathcal{T}_{mnp}$.

Donde: $T = ((t_{ijk}))$; $rT = ((r t_{ijk}))$.

En consecuencia, la estructura $[(\mathcal{T}_{mnp}, \oplus), (R, +, \cdot), \odot] \equiv (\mathcal{T}_{mnp}, R)$ es un espacio vectorial de $\mathcal{T}_{mnp}$ sobre R, o R-ESPACIO TENSORIAL, que cumple las siguientes propiedades:

1).- $(\mathcal{T}_{mnp}, \oplus)$ es un grupo abeliano.

2).- $(R, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo.

3).- $\left. \begin{matrix} \forall r \in R \\ \forall T \in \mathcal{T}_{mnp} \end{matrix} \right\} \Rightarrow r \odot T = rT \in \mathcal{T}_{mnp}$.

4).- $\left. \begin{matrix} \forall r_1, r_2 \in R \\ \forall T \in \mathcal{T}_{mnp} \end{matrix} \right\} \Rightarrow r_1 (r_2 T) = (r_1 r_2) T$.

5).- $\exists! 1 \in R \mid \forall T \in \mathcal{T}_{mnp} \Rightarrow 1T = T$.

6).- $\left. \begin{matrix} \forall r_1, r_2 \in R \\ \forall T \in \mathcal{T}_{mnp} \end{matrix} \right\} \Rightarrow (r_1 + r_2) T = r_1 T \oplus r_2 T$.

7).- $\left. \begin{matrix} \forall r \in R \\ \forall T_1, T_2 \in \mathcal{T}_{mnp} \end{matrix} \right\} \Rightarrow r (T_1 \oplus T_2) = rT_1 \oplus rT_2$.

TEOREMA-16.

En el R-espacio tensorial $(\mathcal{T}_{mnp}, R)$ se cumple lo siguiente: $\dim (\mathcal{T}_{mnp}) = m \cdot n \cdot p$.

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

TEOREMA-17.

Siendo B una base cualquiera del **R**-espacio tensorial $(\mathcal{T}_{mnp}, R)$, se cumple: $\text{card}(B) = \dim (\mathcal{T}_{mnp})$.

DEMOSTRACIÓN: Corolario del teorema anterior.

Apartado-3.

En un R-espacio tensorial $(\mathcal{T}_{mnp}, R)$, se llama TENSOR CANÓNICO

a todo tensor cuyas componentes son todas nulas salvo una de ellas, la cual es igual a $1 \in R$. Se llama BASE CANÓNICA de $(\mathcal{T}_{mnp}, R)$ a una base B_c de $(\mathcal{T}_{mnp}, R)$ formada por todos los tensores canónicos de $\mathcal{T}_{mnp}$ y sólo ellos.

TEOREMA-18.

Siendo B_c una base canónica del R-espacio tensorial $(\mathcal{T}_{mnp}, R)$, se cumple que dicha B_c es única en $(\mathcal{T}_{mnp}, R)$.

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

TEOREMA-19.

Siendo β el conjunto formado por todas las bases del R-espacio tensorial $(\mathcal{T}_{mnp}, R)$, se cumple que $\exists! B_c \in \beta$.

DEMOSTRACIÓN: Corolario del teorema anterior.

TEOREMA-20.

Siendo β el conjunto formado por todas las bases del R-espacio tensorial $(\mathcal{T}_{mnp}, R)$, se cumple:

$$card(\beta) = \aleph_1^{dim(\mathcal{T}_{mnp})} = \aleph_1^{mnp} = \aleph_1 = card(R).$$

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

Orden Indexativo de un Tensor.

Apartado-1.

Se llama ORDEN INDEXATIVO (o simplemente ORDEN) de un Tensor T al número natural $n \in N$ que expresa la cantidad de subíndices de una cualquiera de las componentes de T, y se denota por $oi(T)$. Los tensores que hemos considerado en este tema, hasta ahora, $T \in \mathcal{T}_{mnp}$, con $\mathcal{T}_{mnp} \subset \mathcal{T}$, tal que $T = ((t_{ijk}))$, son de $oi(T) = 3$. Los tensores de este orden, orden 3, suelen denominarse TENSORES DE TERCER ORDEN.

Sin embargo, bajo la denominación de TENSOR se pueden incluir las matrices, las tuplas y los números reales (escalares). Así, diremos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}$, con $\mathcal{M}_{mn} \subset \mathcal{M}$, es un TENSOR DE SEGUNDO ORDEN (dos subíndices para las componentes), $oi(A) = 2$, pues $A = ((a_{ij}))$. Por otra parte, una Tupla $X \in R^n$ es un TENSOR DE PRIMER ORDEN (un subíndice para las componentes), $oi(X) = 1$, pues $X = ((x_i)) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Finalmente, un escalar real $r \in R$ es un TENSOR DE ORDEN CERO (ningún subíndice), $oi(r) = 0$.

Desde este enfoque teórico, pues, un TENSOR DE N-ÉSIMO ORDEN es un constructo irrepresentable con componentes, demasiado abstracto o generalista, el cual universaliza el concepto de Tensor T:

$$T \in \mathcal{T}_{m_1 m_2 \dots m_n} \mid \mathcal{T}_{m_1 m_2 \dots m_n} \subset \mathcal{T} \mid T = ((t_{i_1 i_2 \dots i_n})).$$

No obstante, en cinemática tensorial suelen usarse tensores de segundo orden (matrices) y excepcionalmente, como mucho, tensores de tercer orden. Los tensores de primer orden (tuplas) y de orden cero (escalares, reales) se usan con gran profusión.