¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 100-103, determinar si la afirmación es correcta. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.

100. Si (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) son coordenadas polares de un mismo punto, entonces $|r_1| = |r_2|$.

101. Si (r, θ_1) y (r, θ_2) son coordenadas polares de un mismo punto, entonces $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi n$ para algún entero n.

102. Si $x \geqslant 0$ entonces el punto de coordenadas cartesianas (x, y) puede representarse por las coordenadas polares (r, θ), siendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \operatorname{arctg}(y/x)$.

103. Las ecuaciones en polares $r = \operatorname{sen} 2\theta$ y $r = -\operatorname{sen} 2\theta$ tienen la misma gráfica.

104. ***De corazón a campana*** Usando una calculadora, representar la ecuación

$$r = \cos 5\theta + n \cos \theta$$

para $0 \leqslant \theta < \pi$ y los enteros $n = -5$ a $n = 5$. ¿Qué valores de n producen el «corazón» de la curva? ¿Qué valores de n producen la «campana»? Esta curva, creada por Michael W. Chamberlin, apareció en el número de enero de 1994 de *The College Mathematics Journal*.

9.5 Área y longitud de arco en coordenadas polares

CONTENIDO
- Área de una región en polares
- Puntos de intersección de gráficas en polares
- Longitud de arco en polares
- Área de una superficie de revolución

Área de una región en polares

El proceso que culmina en una fórmula para el área de una región polar es paralelo al del área en coordenadas cartesianas, pero utiliza *sectores* circulares en lugar de rectángulos como elementos básicos. Observemos, en la Figura 9.47, que el área de un sector circular de radio r viene dada por $\frac{1}{2}\theta r^2$, en el supuesto de que θ se mida en radianes.

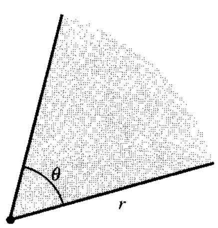

FIGURA 9.47
El área de un sector circular es $A = \frac{1}{2}\theta r^2$.

Consideremos la ecuación $r = f(\theta)$, con f continua y no negativa en el intervalo $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$. La Figura 9.48 muestra la región acotada por la gráfica y por las rectas radiales $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$. Para hallar el área de esta región, dividimos el intervalo $[\alpha, \beta]$ en n subintervalos iguales.

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta$$

Aproximamos el área de la región por la suma de las áreas de los n sectores.

$$\text{Radio del } i\text{-ésimo sector} = f(\theta_i)$$

$$\text{Ángulo central del } i\text{-ésimo sector} = \frac{\beta - \alpha}{n} = \Delta\theta$$

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right) \Delta\theta [f(\theta_i)]^2$$

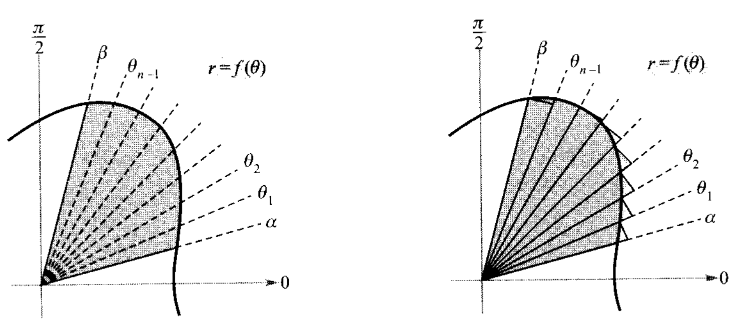

FIGURA 9.48

Tomando el límite cuando $n \to \infty$ se obtiene

$$A = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [f(\theta_i)]^2 \Delta\theta$$
$$= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 \, d\theta$$

lo que lleva a enunciar el siguiente teorema.

TEOREMA 9.13 ÁREA EN COORDENADAS POLARES

Si f es continua y no negativa en el intervalo $[\alpha, \beta]$, el área de la región limitada por la gráfica de $r = f(\theta)$ y las rectas radiales $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ viene dada por

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 \, d\theta$$
$$= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\theta$$

Nota. La misma fórmula sirve para calcular el área de la región acotada por la gráfica de una función continua no positiva. Sin embargo, la fórmula no es necesariamente válida si f toma valores tanto positivos como negativos en el intervalo $[\alpha, \beta]$.

EJEMPLO 1 Área de una región en polares

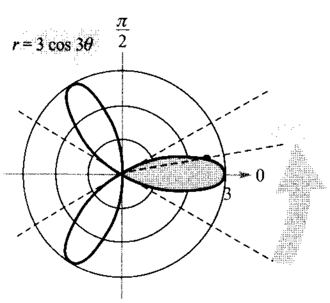

FIGURA 9.49
El área del pétalo de la rosa situado entre las rectas radiales $\theta = -\pi/6$ y $\theta = \pi/6$ es $3\pi/4$.

Hallar el área de un pétalo de la rosa de ecuación $r = 3 \cos 3\theta$.

Solución: En la Figura 9.49 vemos que el pétalo de la derecha se recorre cuando θ crece de $-\pi/6$ a $\pi/6$. Así pues, el área es

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} (3 \cos 3\theta)^2 \, d\theta$$
$$= \frac{9}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{1 + \cos 6\theta}{2} \, d\theta$$
$$= \frac{9}{4} \left[\theta + \frac{\text{sen } 6\theta}{6} \right]_{-\pi/6}^{\pi/6} = \frac{9}{4} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{3\pi}{4} \qquad \square$$

Para hallar el área de la región interior a los tres pétalos de la rosa del Ejemplo 1, no es correcto integrar entre 0 y 2π. Haciéndolo, se obtendría $9\pi/2$, que es el doble del área buscada. Esta duplicación se produce porque la rosa se recorre dos veces cuando θ crece de 0 a 2π.

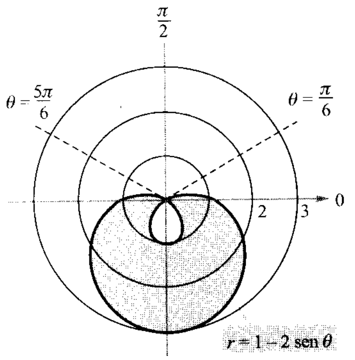

FIGURA 9.50
El área comprendida entre los lazos interior y exterior es aproximadamente 8,34.

EJEMPLO 2 Cálculo del área limitada por una curva

Hallar el área de la región comprendida entre los lazos interior y exterior del caracol $r = 1 - 2 \operatorname{sen} \theta$.

Solución: En la Figura 9.50 observamos que el lazo interior se recorre cuando θ crece de $\pi/6$ a $5\pi/6$. Por tanto, el área limitada por el *lazo interior* es

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 - 2 \operatorname{sen} \theta)^2 \, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 - 4 \operatorname{sen} \theta + 4 \operatorname{sen}^2 \theta) \, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left[1 - 4 \operatorname{sen} \theta + 4\left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) \right] d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (3 - 4 \operatorname{sen} \theta - 2 \cos 2\theta) \, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \Big[3\theta + 4 \cos \theta - \operatorname{sen} 2\theta \Big]_{\pi/6}^{5\pi/6} \\
&= \frac{1}{2} (2\pi - 3\sqrt{3}) = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

De forma similar, integrando de $5\pi/6$ a $13\pi/6$ obtenemos que el área limitada por el *lazo exterior* es $A_2 = 2\pi + (3\sqrt{3}/2)$. El área de la región comprendida entre ambos lazos es la diferencia entre A_2 y A_1.

$$A = A_2 - A_1 = \left(2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) - \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) = \pi + 3\sqrt{3} \approx 8{,}34 \qquad \square$$

Puntos de intersección de gráficas en polares

Dado que cada punto admite diversas representaciones en coordenadas polares, hay que tener cuidado al determinar los puntos de intersección de dos gráficas en polares. Por ejemplo, consideremos los puntos de intersección de las gráficas de

$$r = 1 - 2 \cos \theta \quad \text{y} \quad r = 1$$

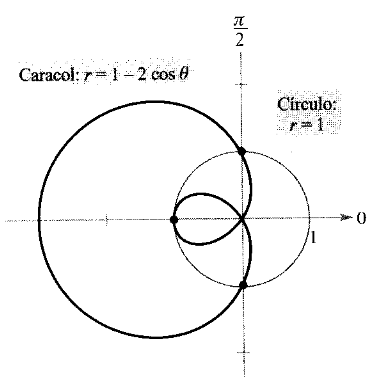

FIGURA 9.51
Tres puntos de intersección: $(1, \pi/2)$, $(-1, 0)$, $(1, 3\pi/2)$.

(Figura 9.51). Si intentáramos, como hacemos con las ecuaciones rectangulares, hallar los puntos de intersección resolviendo las dos ecuaciones simultáneamente, obtendríamos

$r = 1 - 2 \cos \theta$	Primera ecuación
$1 = 1 - 2 \cos \theta$	Sustituir $r = 1$ de la segunda ecuación en la primera
$\cos \theta = 0$	Simplificar
$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$	Despejar θ

PARA MÁS INFORMACIÓN
Sobre el uso de calculadoras en la búsqueda de puntos de intersección puede verse en el artículo «Finding Points of Intersection of Polar-Coordinate Graphs», de Warren W. Esty, en *Mathematics Teacher*, septiembre de 1991.

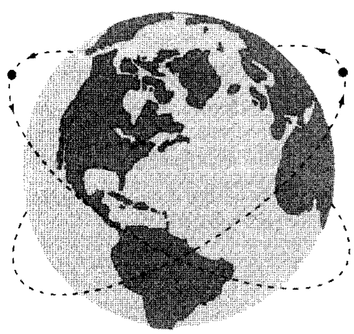

FIGURA 9.52
Las trayectorias de los satélites pueden cortarse sin que se produzcan colisiones.

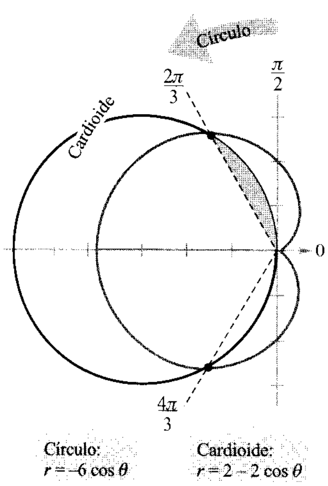

FIGURA 9.53

Nota. Con el fin de comprobar el resultado obtenido en el Ejemplo 3, observemos que el área de la región circular es $\pi r^2 = 9\pi$. Parece, pues, razonable que el área de la región situada dentro de la circunferencia y de la cardioide sea 5π.

Los correspondientes puntos de intersección son $(1, \pi/2)$ y $(1, 3\pi/2)$. Sin embargo, en la Figura 9.51, puede verse que existe un *tercer* punto de intersección que no aparecía al resolver las ecuaciones simultáneamente. (Ésta es una de las razones por las que insistimos en que se esboce una gráfica cuando se trate de hallar el área de una región en polares). El motivo por el que no se encontró el tercer punto es que no aparece con las mismas coordenadas en ambas gráficas. En la gráfica de $r = 1$, corresponde a las coordenadas $(1, \pi)$, mientras que en la de $r = 1 - 2 \cos \theta$, sus coordenadas son $(-1, 0)$.

El problema de determinar los puntos de intersección de dos gráficas en polares puede compararse con el de hallar los puntos de colisión de dos satélites terrestres cuyas órbitas se cortan entre sí, como ilustra la Figura 9.52. Los satélites no chocarán si alcanzan los puntos de intersección en instantes (valores de θ) diferentes. Solamente se producirán colisiones en los puntos de intersección que son «puntos simultáneos» —aquellos que se alcanzan en un mismo instante (valor de θ).

Nota. Como el polo puede representarse por $(0, \theta)$, siendo θ cualquier ángulo, debe analizarse por separado cuando se buscan puntos de intersección.

EJEMPLO 3 Área de la región comprendida entre dos curvas

Hallar el área de la región común a las dos regiones limitadas por las siguientes curvas:

$$r = -6 \cos \theta \qquad \text{Círculo}$$
$$r = 2 - 2 \cos \theta \qquad \text{Cardioide}$$

Solución: Dado que ambas curvas son simétricas respecto al eje x, podemos trabajar en el semiplano superior, como muestra la Figura 9.53. La zona sombreada más oscura está limitada por la circunferencia y la recta radial $\theta = 2\pi/3$. Como la circunferencia tiene coordenadas $(0, \pi/2)$ en el polo, integramos entre $\pi/2$ y $2\pi/3$ para obtener el área de esta región. La zona más oscura está acotada por las rectas radiales $\theta = 2\pi/3$ y $\theta = \pi$ y por la cardioide. Por tanto, podemos calcular su área integrando entre $2\pi/3$ y π. La suma de las dos integrales nos da el área de la región común situada *por encima* de la recta radial $\theta = \pi$

$$\frac{A}{2} = \overbrace{\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{2\pi/3} (-6 \cos \theta)^2\, d\theta}^{\text{Región entre el círculo y la recta radial } \theta = 2\pi/3} + \overbrace{\frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{\pi} (2 - 2\cos\theta)^2\, d\theta}^{\text{Región entre la cardioide y las rectas radiales } \theta = 2\pi/3 \text{ y } \theta = \pi}$$
$$= 18\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \cos^2 \theta\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{\pi} (4 - 8\cos\theta + 4\cos^2\theta)\, d\theta$$
$$= 9\int_{\pi/2}^{2\pi/3} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta + \int_{2\pi/3}^{\pi} (3 - 4\cos\theta + \cos 2\theta)\, d\theta$$
$$= 9\left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_{\pi/2}^{2\pi/3} + \left[3\theta - 4\operatorname{sen}\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_{2\pi/3}^{\pi}$$
$$= 9\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + \left(3\pi - 2\pi + 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$= \frac{5\pi}{2}$$

Finalmente, multiplicando por 2, concluimos que el área total es 5π. □

Para poder apreciar la ventaja del uso de coordenadas polares en el Ejemplo 3, consideremos la integral que da el área en coordenadas cartesianas:

$$\frac{A}{2} = \int_{-4}^{-3/2} \sqrt{2\sqrt{1 - 2x} - x^2 - 2x + 2}\, dx + \int_{-3/2}^{0} \sqrt{-x^2 - 6x}\, dx$$

Con ayuda de un programa de integración, puede probarse que se obtiene el mismo resultado que en el Ejemplo 3.

Nota. Al aplicar la fórmula de la longitud de arco a una curva en polares, uno debe asegurarse de que la curva se recorre sólo una vez en el intervalo de integración. Por ejemplo, la rosa dada por $r = \cos 3\theta$ se recorre una vez en el intervalo $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, pero dos veces en el intervalo $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Longitud de arco en polares

Es posible obtener la fórmula para la longitud de arco en polares a partir de la fórmula de la longitud de arco de una curva descrita mediante ecuaciones paramétricas (véase Ejercicio 58).

TEOREMA 9.14 LONGITUD DE ARCO EN POLARES

Sea f una función cuya derivada es continua en un intervalo $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$. La longitud de la gráfica de $r = f(\theta)$ desde $\theta = \alpha$ hasta $\theta = \beta$ es

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\, d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

EJEMPLO 4 Cálculo de la longitud de una curva en polares

Hallar la longitud del arco desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$ de la cardioide

$$r = f(\theta) = 2 - 2\cos\theta$$

que se muestra en la Figura 9.54.

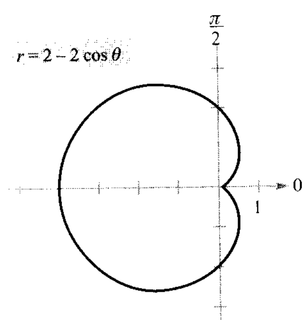

FIGURA 9.54
La longitud de arco de esta cardioide es 16.

Solución: Como $f'(\theta) = 2\,\text{sen}\,\theta$, podemos calcular la longitud de arco como sigue.

$$\begin{aligned}
s &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\, d\theta && \text{Fórmula de la longitud de arco} \\
&= \int_{0}^{2\pi} \sqrt{(2 - 2\cos\theta)^2 + (2\,\text{sen}\,\theta)^2}\, d\theta \\
&= 2\sqrt{2} \int_{0}^{2\pi} \sqrt{1 - \cos\theta}\, d\theta \\
&= 2\sqrt{2} \int_{0}^{2\pi} \sqrt{2\,\text{sen}^2 \frac{\theta}{2}}\, d\theta \\
&= 4 \int_{0}^{2\pi} \text{sen}\, \frac{\theta}{2}\, d\theta && \text{sen}\,\frac{\theta}{2} \geqslant 0 \text{ para } 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\
&= 8\left[-\cos\frac{\theta}{2}\right]_{0}^{2\pi} \\
&= 8(1 + 1) \\
&= 16
\end{aligned}$$