CONTENIDO

UNIDAD #1 ECUACIONES DIFERENCIALES

1. Definición
2. Solución de una Ecuación Diferencial
3. Clasificación

UNIDAD #2 ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

1. Definición
2. Ecuaciones Diferenciales de Variables Separables y Reducidas

    (a) Homogéneas
    (b) Lineales (Ecuación de Bernoulli)
    (c) Exactas (Factor de Integración)
    (d) Aplicación de las Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

        (i) Problemas Ortogonales
        (ii) Problemas de Temperatura
        (iii) Problemas de Crecimiento
        (iv) Problemas de Caídas de los Cuerpos
        (v) Problemas de Diluciones Químicas
        (vi) Problemas de Circuitos Eléctricos Simples
        (vii) Otros

3. Ecuación Diferencial No-Resuelta

    (a) Ecuación de Primer Grado y Orden *"n"*
    (b) Ecuación de la Forma $f\left(y, y'\right) = 0$
    (c) Ecuación de la Forma $f\left(x, y'\right) = 0$
    (d) Ecuación de La Grange
    (e) Ecuación de Clairout

UNIDAD #3 ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

1. Definición
2. Clasificación

    (a) Ecuaciones Diferenciales que admiten la reduccion de orden
    (b) Ecuaciones Diferenciales Lineales

        (i) Ecuaciones Diferenciales Lineales con Coeficientes Constantes

            a. Homogéneas $\rightarrow$ Método de Solución
            b. No Homogéneas
                i. Método de los Coeficientes Indeterminados
                ii. Método de Variación de Parámetros o de las Constantes

iii. Método Abreviado
iv. Otros Métodos

(ii) Ecuaciones Diferenciales Lineales con Coeficientes

a. Homogéneas
   i. Ecuación de Euler
   ii. Ecuación Diferencial si se conoce una Solución Particular
   iii. Otras

b. No Homogéneas
   i. Ecuación de Euler
   ii. Ecuación Diferencial si se conoce una Solución Particular
   iii. Otras

(iii) Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales

3. Aplicación de las Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

UNIDAD #4 TRANSFORMACIONES DE LA PLACE

1. Definición
2. Teoremas de La Place
3. Transformaciones Inversas de La place
4. Teoremas de Transformaciones Inversas de La place
5. Solución de una Ecuación Diferencial por Transformadas de La Place

EVALUACION

1º.PARCIAL 30%

Unidades: #1 y #2 *sin aplicaciones*

2º.PARCIAL 20%

Aplicación de las Ecuaciones Diferenciales de 1º orden y *Ecuaciones Diferenciales que Admiten la Reducción del Orden*

3º.PARCIAL 20%

Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden Superior

FINAL 30%

Nota: El 40% de las Preguntas en los exámenes serán del práctico.

BIBLIOGRAFIA

***Ecuaciones Diferenciales* –** Eduardo Espinoza

***Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones* –** Denis Zill

***Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático* –** Deminovich

***Ecuaciones Diferenciales* –** Chungara

***Ecuaciones Diferenciales* –** Rainville

***Ecuaciones Diferenciales* –** Frank Ayres

***Problemas de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* –** Makerenko

Tema Nro. 1
Ecuaciones Diferenciales

Definición: Es una igualdad donde están relacionadas la variable independiente x, la variable dependiente y y sus derivadas.

A una relación en la cual la variable independiente x se relaciona con la variable dependiente y, también llamada "función buscada" y sus derivadas, es una ecuación diferencial.

Ejemplo

$$\text{Si } y = f(x) \rightarrow \text{Ecuación Normal}$$

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)dx;\ \partial^2 y = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)d^2x \rightarrow \text{Ecuacion Diferencial}$$

En forma implícita una ecuación diferencial podemos representarla de la siguiente forma $f\left(x, y, y', y'', y''', ..., y^n\right) = 0$.

Si la función buscada o variable dependiente es de una sola variable independiente entonces la Ecuación Diferencial es Ordinaria.

Si la función buscada o variable dependiente es de dos o más variables independientes, entonces la Ecuación Diferencial es parcial.

Nota: En el presente curso se verán solamente las ecuaciones diferenciales ordinarias.

EJEMPLO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1. $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0 \rightarrow$ Ec. Diferencial ordinaria $\rightarrow$ 3º orden $\rightarrow$ grado 1
2. $y^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + y^2 = 4 \rightarrow$ Ec. Diferencial ordinaria $\rightarrow$ 1º orden $\rightarrow$ grado 2
3. $\left(\frac{\partial^3 w}{\partial u^3}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\right)^4 - uw = 0 \rightarrow$ Ec. Diferencial Ordinaria $\rightarrow$ 3º orden $\rightarrow$ grado 2
4. $L\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + R\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{C} = 0 \rightarrow$ Ec. Diferencial Ordinaria $\rightarrow$ 2º Orden $\rightarrow$ grado1
5. $y''' + xy'' + 2y(y')^2 + xy = 0 \rightarrow$ Ec. Diferencial Ordinaria $\rightarrow$ 3º orden $\rightarrow$ grado 1
6. $e^{y'''} - xy'' + y = 0 \rightarrow$ Ecuacion Diferencial Ordinaria $\rightarrow$ 3º orden $\rightarrow$ no tiene grado
7. $\frac{\partial^2 P}{\partial Q^2} = \sqrt[4]{P + \left(\frac{\partial P}{\partial \theta}\right)^2} \rightarrow$ Ecuacion ordinaria $\rightarrow$ 2º orden $\rightarrow$ grado 4

8. $\frac{\partial z}{\partial x} = z + x\frac{\partial z}{\partial y} \rightarrow$ ecuacion diferencial parcial

9. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^4 + y \rightarrow$ Ecuacion diferencial parcial

10. $\sqrt[4]{(y'')^3} - \sqrt[3]{1+(y')^4} = 0 \rightarrow$ Ecuacion Diferencial Ordinaria $\rightarrow$ 3º Orden $\rightarrow$ Grado 9

ORDEN DE UNA ECUACION DIFERENCIAL:

El *orden* de una Ecuación Diferencial es *el orden de la mayor derivada.*

Ejemplo:

$\frac{\partial y}{\partial x} = 1 \rightarrow$ Ecuacion diferencial de 1º Orden

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 3x \rightarrow$ Ecuacion Diferencial de 2º Orden

GRADO DE UNA ECUACION DIFERENCIAL:

El grado de una ecuación diferencial que puede escribirse como un polinomio respecto a las derivadas, es el grado de la derivada de mayor orden que interviene en ella.

Es decir:

$$\overbrace{a_n x^n + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + ax + a_0 = 0}^{\text{Ecuacion polinomica}}$$
$$\text{donde: } n = 1, \ldots, n;\ n \in \mathbb{N}$$

Esto quiere decir que: "para escribirse como una ecuación polinómica, las derivadas no deben estas elevadas a cualquier otro número que no sea natural"

Ejemplo de expresiones $\not\equiv$ a ecuaciones polinómicas

$x^2 + x^{-1} + 2 = 0$

$\sqrt{x} + 3 = 0$

$\ln x + 3 = 0$

$e^x + x^2 + 5 = 0$

$sen\left(x^2\right) = 0$

SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES:

El problema de las ecuaciones diferenciales consiste esencialmente en encontrar la función llamada "*primitiva*" que dio origen a la ecuación diferencial.

A esta primitiva se le llama "*solución*" como también podemos llamarle, integral de la ecuación diferencial, o función buscada.

Ejemplo

$\frac{\partial y}{\partial x} = 2x \rightarrow$ Hallamos su Primitiva

$\int \partial y = \int 2x dx$

$\boxed{y = x^2 + C} \rightarrow$ Solucion

En otras palabras, resolver una ecuación diferencial de orden *"n"* es hallar una relación entre las variables, conteniendo *"n"* constantes arbitrarias independientes que junto con las derivadas obtenidas de ella *"satisface"* a la ecuación diferencial.

EJEMPLO

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0 \rightarrow \text{Ecuacion Diferencial} \Rightarrow y = Ax^2 + Bx + C \rightarrow \text{Primitiva}$$

¿La primitiva es solución de la ecuación diferencial?

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2A + B; \frac{d^2 y}{dx^2} = 2A \Rightarrow \frac{d^3 y}{dx^3} = 0 \Rightarrow$$

Es solución de la ecuación diferencial *A*, *B* y *C* son constantes arbitrarias o constantes de integración.

SOLUCIÓN GENERAL, SOLUCIÓN PARTICULAR:

La solución general es el conjunto de todas las soluciones (es un conjunto de soluciones), normalmente esta solución se la expresa mediante las constantes de integración. Geométricamente esta solución representa una familia de curvas en el plano.

Ejemplo:

Ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow \text{su solucion es:} \quad y = x^2 + C$$

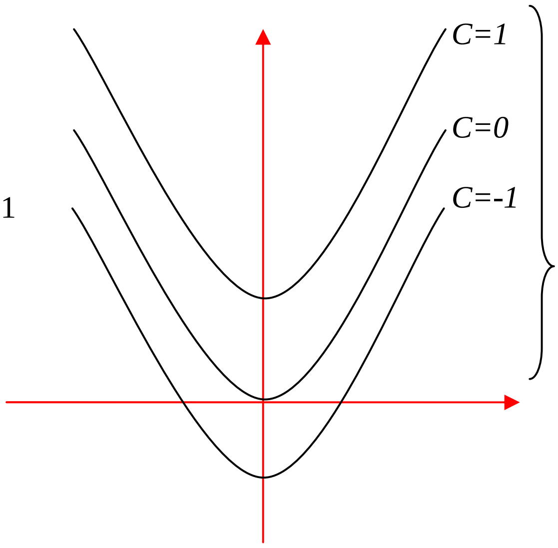
donde: $C =$ constante de integracion

Si:

$C = 0; y = x^2$

$C = 1; y = x^2 + 1$

$C = -1; y = x^2 - 1$



Familia de parábolas es la solución general.

Una solución particular es una solución cualquiera y se obtiene de la solución general dando valores definidos a las constantes arbitrarias.

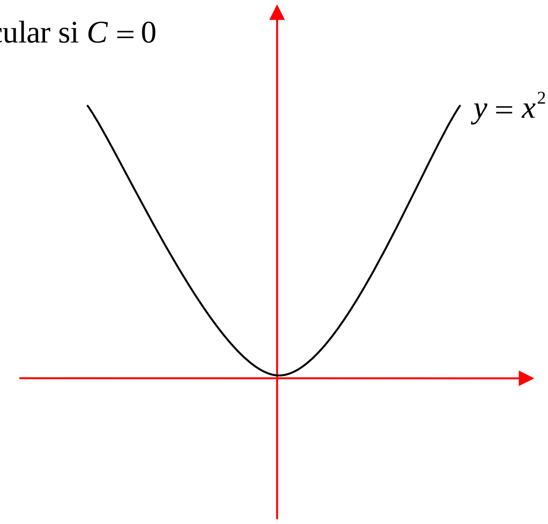
Normalmente una solución particular la anotamos

$$\boxed{f(x,y) = 0} \rightarrow \text{Solucion particular ó } y = f(x)$$

Ejemplo

Si $\frac{dy}{dx} = 2x \rightarrow$ primitiva: $y = x^2 + C$

Solucion particular si $C = 0$



Generalmente la solución particular se obtiene obteniendo el valor de las constantes arbitrarias que dependen de *ciertas condiciones* de un problema en particular.

Ejemplo:

1. Mostrar que: $y = arcSen(xy)$ satisface la ecuación diferencial: $xy' + y = y'\sqrt{1-x^2y^2}$

Ecuación Diferencial: $xy' + y = y'\sqrt{1-x^2y^2}$ Primitiva: $y = arcSen(xy)$

1ro Diferenciamos la primitiva

Hacemos esto para ver si esta satisface a la ecuación diferencial.

$$y = arcSen(xy)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2y^2}}(xy' + y)$$

$$y'\sqrt{1-x^2y^2} = xy' + y$$

$$xy' = y'\sqrt{1-x^2y^2} - y \rightarrow i$$

Reemplazando i en la ecuación diferencial.

$$y'\sqrt{1-x^2y^2} - \cancel{y} + \cancel{y} = y'\sqrt{1-x^2y^2}$$

$$y'\sqrt{1-x^2y^2} = y'\sqrt{1-x^2y^2}$$

$\therefore$ Queda demostrado¡

Podríamos proceder también de esta manera:

$$y = arcSen(xy)$$

$$Sen(y) = xy \rightarrow i$$

$$y'\cos y xy' + y$$

$$xy' - y'\cos y = -y$$

$$y' = -\frac{y}{x - \cos y} \rightarrow ii$$

Reemplazando ii en la ecuación diferencial

$$xy' + y = y'\sqrt{1-x^2y^2}$$

$$-\frac{xy}{x-\cos y} + y = -\frac{xy}{x-\cos y}\sqrt{1-x^2y^2}$$

$$\frac{-\cancel{xy} + \cancel{yx} - y\cos y}{\cancel{x\cos y}} = -\frac{y}{\cancel{x\cos y}}\sqrt{1-x^2y^2}$$

$$-y\cos y = -y\sqrt{1-x^2y^2}$$
$$\Rightarrow \cos y = \sqrt{1-x^2y^2};\ \text{como } i \text{ dice: } sen(y) = xy$$
$$\Rightarrow \cos y = \sqrt{1-sen^2 y}$$
$$\cos y = \sqrt{\cos^2 y}$$
$$\cos y = \cos y \ \therefore \ \text{Queda demostrado}$$

2. Mostrar que la función $y = \dfrac{senx}{x}$ es una solución particular de la siguiente Ecuación Diferencial.

Ecuación Diferencial: $xy' + y = \cos x$ Primitiva: $y = \dfrac{sen(x)}{x}$

$$\Rightarrow \text{Si } y = \frac{sen(x)}{x}$$
$$xy = sen(x)$$
Diferenciando: $xy' + y = \cos x$
$$xy' + y = \cos x - y \rightarrow i$$

Reemplazando i en la ecuación diferencial.
$$\cos x - \cancel{y} + \cancel{y} = \cos x$$
$$\cos x = \cos x$$
$\therefore$ Queda demostrado¡

ORIGEN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES:

Las ecuaciones diferenciales nacen como respuesta a problemas geométricos, problemas físicos o cualquier problema que da respuesta a definiciones utilizadas en ingenieria, economía, etc. también vemos que una ecuación diferencial matemáticamente nace una *primitiva*, así por ejemplo:

Ejemplos:

1. Dada la primitiva, hallar la ecuación diferencial

Primitiva: $y = \dfrac{sen(x)}{x}$ Ecuación Diferencial $dy = \left(\dfrac{x\cos x - senx}{x^2}\right)dx$

$$\Rightarrow dy = \frac{x\cos x - sen(x)}{x^2}dx$$
$$x\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{x}\cos x}{\cancel{x}} - \frac{sen(x)}{x}$$
$$xy' = \cos x - sen(x)$$

Como: $y = \dfrac{sen(x)}{x}$
$$\boxed{xy' = \cos x - y}$$

2. Hallar la ecuación diferencial de la familia de curvas: $y = Ax^2 + Bx + C$ donde: $A, B, C = cttes\ arbitrarias$

- Como la familia de curvas tiene 3 constantes arbitrarias, entonces para encontrar la ecuación diferencial de 3º orden: teniendo en cuanta que al realizar cada derivada, deben eliminarse las constantes de Integración.

$$\Rightarrow y = Ax^2 + Bx + C$$

$$y' = 2A + B \to y'' = 2A \to y''' = 0 \Rightarrow \text{esta es la ecuacion diferencial.}$$

NOTA: Al derivar se deben eliminar las constantes arbitrarias, no así las constantes fijas del problema. El orden de las constantes arbitrarias determina el orden de la ecuación diferencial. Así por ejemplo:

Ejemplo:

Encontrar la ecuación diferencial de la familia de curvas: $x = A\,sen(\omega t + B)$

donde: $\omega =$ es una ctte fija

$A, B =$ ctte arbitraria

Diferenciando: $\boxed{dx = A\cos(\omega t + B)\,\omega dt}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{\sin(\omega t + B)}\cos(\omega t + B)\,\omega$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x\omega}{\tan(\omega t + B)} \Rightarrow \tan(\omega t + B) = \frac{x\omega}{x'}$$

$$\omega t = \tan^{-1}\left(\frac{x\omega}{x'}\right)$$

$$\omega = \frac{\left(\frac{xw}{x'}\right)'}{1 + \left(\frac{x\omega}{x'}\right)^2}$$

$$\omega = \frac{\frac{x'\cdot\omega x' - x\omega x'}{(x')^2}}{\frac{(x')^2 + x^2\omega^2}{(x')^2}}$$

$$\Rightarrow \cancel{\omega(x')^2} + x^2\omega^2 = \cancel{\omega(x')^2} - \cancel{\omega} x''x$$

$\boxed{x\omega^2 + x'' = 0}$ es la Ecuacion Diferencial

CLASIFICACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Las ecuaciones Diferenciales por su orden se clasifican en:

a) Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden
   - a.1) Ecuaciones Diferenciales de Variables Separables y Reducibles a Variables
   - a.2) Ecuaciones Diferenciales Homogéneas y Reducibles a Homogéneas
   - a.3) Ecuaciones Diferenciales Lineales y Reducibles a Lineales
   - a.4) Ecuaciones Diferenciales Exactas y Reducibles a Exactas
   - a.5) Ecuaciones Diferenciales No Resueltas respecto a la Primera Derivada
     - a.5.1) Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden y Grado "n"
     - a.5.2) Ecuaciones Diferenciales de la forma $f(y, y') = 0$ y $f(x, y') = 0$
     - a.5.3) Ecuaciones Diferenciales de La Grange y Clairout

b) Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior