Instituto Tecnológico de Oaxaca

Examen de primera oportunidad de la unidad I

Matemáticas V Clave: ACM-0407

GPO EEA Hora: 10:00-11:00

Catedrático: Ing. Gregorio Gutiérrez López

I . En los siguientes problemas, diga si la ecuación diferencial dad es lineal o no lineal, indique el orden y el grado de cada ecuación diferencial.

1. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 2y = senx$

   Resp. La ecuación diferencial es lineal de segundo orden grado 1

2. $(1+y^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = e^x$

   Resp. La ecuación es no lineal de segundo orden de grado 1

3. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$

   Resp. La ecuación es no lineal de segundo orden grado 2

II En lo siguientes problemas verifique que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial dada.

1. $y' + 2xy = 1$; $y = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt + c_1e^{-x^2}$

Derivando a la supuesta solución se obtiene

$$y' = 1 - 2c_1xe^{-x^2} - 2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$$

Y se sustituye la supuesta solución y su derivada nos da una igualdad, por tanto la solución supuesta si es una solución de la ecuación diferencial.

2. $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$; $y_1 = \frac{1}{x^2}$; $y_2 = \frac{\ln x}{x^2}$

Derivando a las soluciones uno y dos

$y_1' = -2x^{-3}$; $y_1'' = 6x^{-4}$

$y_2' = -2x^{-3}lnx + x^{-3}$; $y_2'' = 6x^{-4}lnx - 5x^{-4}$

Al sustituir tanto las derivadas como las soluciones en la ecuación diferencial se comprueban la igualdad, por lo tanto si son soluciones de la ecuación diferencial.

III Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales indicando en cada caso de que tipo de ecuación diferencial se trata, reducir el resultado a su mínima expresión.

1. $(xy' - y)\ arctan\frac{y}{x} = x$ *Ecuación diferencial homogénea*

Se plantea un cambio de variable

$y = ux$; $dy = u\,dx + x\,du$

Al sustituir en la ecuación diferencial y simplificar nos queda:

$arc\tan u\,du = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}}$ *Y al integrar ambos miembros queda:*

$\int arc\tan u\,du = \int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}}$

$u\arctan u - \frac{1}{2}\ln|1 + u^2| = \ln x + \ln c_1$ *Simplificando*

$e^{u\arctan u} = c_1x\sqrt{1 + u^2}$ *Regresando a las variables originales el resultado es:*

Resp. $c\ e^{\frac{2y}{x}\arctan\frac{y}{x}} = x^2 + y^2$

2. $(e^y + e^{-x})dx + (e^y + 2y\ e^{-x})dy = 0$ *Ecuación diferencial no exacta*

Al multiplicar la ecuación diferencial por e^x *nos queda una ecuación exacta*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = e^{y+x}$$

Resp. $x + y^2 + e^{y+x} = c$

3. $xy' + 6y = 3xy^{4/3}$ *Ecuación de Bernoulli*

Dividiendo la ecuación entre $xy^{4/3}$ *nos queda* $y^{-4/3}y' + \frac{6}{x}y^{-1/3} = 3$

Haciendo un cambio de variable y multiplicando -1 a la ecuación. $w = y^{-1/3}$; $-w' = \frac{1}{3}y^{-4/3}y'$

$3w' - \frac{6}{x}w = 3$ *al dividir entre 3* $w' - \frac{2}{x}w = 1$

Para resolver la ecuación diferencial $w' - \frac{2}{x}w = 1$ *se obtiene el factor integrante*

$\mu = e^{-\int\frac{2}{x}dx} = x^{-2}$ *Al multiplicar la ecuación por el factor queda*

$d(wx^{-2}) = x^{-2}dx$ *Al integrar*

$wx^{-2} = \frac{1}{x} + c$ o $w = x + cx^2$

Como $w = y^{-1/3}$ $y^{-1/3} = x + cx^2$

Resp. $y = (\mathrm{x} + \mathrm{cx}^2)^{-3}$

4. $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2$; $s(x) = \frac{2}{x}$ *Ecuación de Ricatti*

Haciendo un cambio de variable y simplificando

$y = z + \frac{2}{x}$ $y' = z' - \frac{2}{x^2}$

Nos queda una ecuación de bernoulli

$z' - \frac{3}{x}z = z^2$

Haciendo otro cambio de variable y simplificando

$w = z^{-1}$; $w' = -z^{-2}z'$

Nos queda una ecuación lineal no homogénea

$w' + \frac{3}{x}w = -1$ *Que al resolverla nos da la solución*

$w = -\frac{x}{4} + \frac{c}{x^3}$ *Como* $w = z^{-1}$; $\frac{1}{z} = -\frac{x}{4} + \frac{c}{x^3}$

Ó $z = \frac{4x^3}{4c - x^4}$

Finalmente

$$y = z + \frac{2}{x} = \frac{4x^3}{4c - x^4} + \frac{2}{x} = \frac{2x^4 + 8c}{x(4c - x^4)}$$

Nombre del estudiante que elaboro**: Ramírez Hernández Josué**

Carrera. Ing. electrónica

Correo: y.11010@hotmail.com y.11010@yahoo.com y.11010new@gmail.com para quejas, sugerencias, comentarios, reclamos o demás