Los Números Reales

Karen García Mesa
tartaglia@lab.matcom.uh.cu
Universidad de la Habana

Yanelys Zaldívar
Universidad de la Habana

Celia Gálvez
maria5@lab.matcom.uh.cu
Universidad de la Habana

Avalado por: Dr. Rita Roldán
rroldan@matcom.uh.cu
Universidad de la Habana

Resumen

Se estudian varios métodos para construir los números reales manteniendo los axiomas que definen a los racionales y uno adicional que puede ser cualquiera de los siguientes:

- Propiedad de continuidad
- Principio de intervalos cerrados encajados
- Axioma del supremo
- Cortaduras de Dedekind

Además se demuestra la equivalencia entre cada una de estas construcciones.

Palabras y frases Claves: números reales, cortaduras, conjunto

Clasificación: Análisis Matemático

INTRODUCCIÓN

Nuestro interés por realizar este trabajo se debe a que pensábamos que conocíamos los números reales, pero definitivamente estábamos equivocados, pues no nos imaginábamos ni remotamente su origen. Con nuestro comienzo en la universidad se nos abrieron numerosas puertas al conocimiento matemático, entre ellas está el conocer que $\mathbb{R}$ surge a partir de los huecos de $\mathbb{Q}$ y que existen diferentes manera de definirlo.
Se atribuye a los pitagóricos la expresión "Todo es número". La Escuela Pitagórica fue la primera escuela matemática griega. Antes de ellos se había acumulado una buena cantidad de conocimiento matemático debido a culturas tales como la egipcia y la babilónica; conocimiento con el que entran en contacto los griegos por medio de los viajes de Tales de Mileto y, luego, del propio Pitágoras. Este contacto significa para la matemática de la época un enorme salto conceptual pues, de una matemática dedicada en lo esencial a la solución de problemas de tipo práctico, se pasa a una matemática interesada en los conceptos y las relaciones que ellos ocultan, es decir una matemática teórica. A partir de Tales y Pitágoras, la matemática griega evoluciona por caminos de alta complejidad que, paradójicamente, se estructuran alrededor de una disciplina común: la geometría. Es así como en el siglo $IIIa.C.$, más de doscientos a$\tilde{n}$os después de Tales y Pitágoras, aparece un texto de importancia capital para la historia de la matemática: los "Elementos"de Euclides, esfuerzo totalitario de recolección del saber matemático acumulado hasta la época; dotado de un enorme sentido pedagógico que llevó desde su creación a separarlo en trece volúmenes.
¿Cómo congeniamos estas ideas, aparentemente dispersas, en una sola disciplina conceptual? Podemos dar un ejemplo si retomamos la idea pitagórica original "Todo es número", idea que para los propios pitagóricos tenía un sentido tan profundo que adquiría características sagradas. En este sentido, Pitágoras viene a ser el predecesor original de Leopold Kronecker, el matemático que afirmó que "Dios creó los números enteros, lo demás lo hizo el Hombre", porque cuando un pitagórico hablaba de número lo que tenía en mente específicamente era un número racional.
Esto lo podemos ver claramente en "Los Elementos "de Euclides $Def.VII$,1 y $Def.VII$,2. La primera dice que una unidad es aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay es llamada una y la segunda afirma que un número es una pluralidad compuesta de unidades. Definiciones lo suficientemente restrictivas para separar el concepto de unidad del concepto mismo de número: una unidad no es un número, es el ente que constituye a los números.
La visión pitagórica del número como la sustancia constitutiva del Universo, condujo a otra creencia que juega un papel importante en el desarrollo del tema que nos ocupa: la absoluta conmensurabilidad de los segmentos, es decir, la existencia de una medida común para dos segmentos distintos cualesquiera. También se asigna a los pitagóricos el descubrimiento del teorema que lleva su nombre el cual, entre otras muchas cosas, conduce a una importante proporción: el cuadrado construido sobre la diagonal de un cuadrado es al cuadrado original como 2 es a 1.

Ahora bien, esta proporción trae como consecuencia inmediata una interrogante: ¿Cuál es la proporción que se establece al comparar la diagonal del cuadrado y el lado del mismo?.
La respuesta demolió la convicción pitagórica de la conmensurabilidad de los segmentos: ambos segmentos resultaron ser inconmensurables, no era posible conseguir un segmento medida común para ellos. De esta forma surge la primera noción de irracionalidad y desde entonces el concepto de número ha sufrido una considerable evolución histórica, estableciéndose distintos tipos de números que conforme son más evolucionados permiten resolver distintos tipos de problemas, por ejemplo:

i)El problema de contar, producto del cual se establecen los conocidos axiomas de Peano.(números naturales $\mathbb{N}$)

ii)El problema de la resta (números enteros $\mathbb{Z}$). En el conjunto de los números naturales la ecuación $a + x = b$ no siempre tiene solución (en particular solo cuando $b > a$).Ampliándose de esta forma el conjunto de los números naturales de modo que se puedan representar cantidades negativas.

iii)El problema de la división. En el conjunto de los números enteros la ecuación $a \cdot x = b$ solo tiene solución cuando b es múltiplo de a. Se introduce así un nuevo concepto, el de número fraccionario.

Seducidos en parte por el ritmo y la naturalidad de esta evolución es que surge la idea de realizar este proyecto, en el cual pretendemos profundizar en lo que para nosotros representa un eslabón de esta cadena evolutiva, a través de un breve estudio comparativo entre diferentes maneras de definir el campo de los números reales a partir de los racionales.

NECESIDAD DE LA EXISTENCIA DE NÚMEROS REALES

No todos los puntos de la recta representan números racionales; existen segmentos de medida de un conjunto más amplio. Se atribuye a Pitágoras el notable descubrimiento de la inconmesurable de la diagonal del cuadrado de lado 1, que viene a dar respuesta negativa a la cuestión.
Si en Geometría no se consideran otros números que los naturales y los racionales, pronto se llegaría a contradicciones como se ha visto en el ejemplo anterior.
Ejemplo 1:
Se pueden dibujar todos los cuadrados posibles en la cuadrícula mostrada a continuación, de manera que coincidan los vértices de dichos cuadrados con los puntos representados.
1 unidad
• •
• •
Como se pude ver en una cuadrícula de 9 puntos se deben dibujar cuatro cuadrados de lado i unidad, un cuadrado de lado 2 unidades y un cuadrado de lado $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2} unidades$:
• • •

• • •

• • •
Se pude apreciar que en la ejecución de esta actividad aparece el número $\sqrt{2}$
Conocemos la imposibilidad de los números racionales de representar $\sqrt{2}$ dentro de su conjunto, por lo tanto demostremos $\sqrt{2}$ es no racional.
Demostración: Supongamos $\sqrt{2}$ racional
$\sqrt{2} = p/q$ con p y q primos relativos
$2 = p^2/q^2$
$2q^2 = p^2$ de esta igualdad se deduce que p debe ser par, es decir, $p = 2p'$
Luego $2q^2 = 4p'^2$
$q^2 = 2p'^2$
por lo que q debe ser también par, por lo tanto p y q no son primos entre sí, por lo que llegamos a una contradicción pues al inicio pusimos como hipótesis p y q primos relativos.
Entonces $\sqrt{2}$ no es un número racional.
Sin salir de la aritmética, se encuentran muy diversas cuestiones que obligan a realizar una ampliación del campo numérico.
En primer lugar, en el lenguaje del Álgebra, que existen ecuaciones binómicas como $x^3 = 5$ y $x^2 = 2/5$ sin raíces naturales ni racionales.

Por otra parte, inmediatamente se ve que las ecuaciones del tipo $10^x = 7$ carecen de raíces fraccionarias, pues si fuese $x = n/m$ resultaría $10^n = 7^m$ que es absurdo; otro problema imposible en números racionales y que reclama solución urgente es, por tanto, el de la logaritmación.
Existen, además, multitud de tipos de ecuaciones como, por ejemplo, $x^3 - 7x + 7 = 0$ también sin soluciones en el campo racional.
En resumen, la ampliación de los números racionales tiene su origen, al igual que la ampliación de los números enteros, en una necesidad teórica de solucionar problemas de este tipo.
Con esto surge la necesidad de ampliar el conjunto de dos números a un conjunto numérico maypr con ayuda del cual se pueda expresar la longitud de cualquier segmento del eje numérico.

RELACIONES ENTRE LAS DIFERENTES FORMAS DE DEFINIR LOS NÚMEROS REALES

ORIGEN DE LOS NÚMEROS REALES

Números Racionales:
En este trabajo, más que los métodos usados en la construcción del campo de los números racionales nos interesan sus propiedades, las cuales son conocidas desde la enseñanza primaria; pero las fundamentales serán enumeradas aquí para nuestros objetivos y se resumen en que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo ordenado arquimedeano.

Propiedades de los números racionales:

Propiedad 1-Existencia de un orden:
Para cualquier número x y y se cumple una y solo una de las siguientes relaciones:
-$x < y$
-$x > y$
-$x = y$
Propiedad 2-Transitividad:
Si $x > y$ y $y > z$, entonces $x > z$. Además, si $x = y$ y $y = z$, entonces $x = z$
Propiedad 3-Existencia de una suma:
Para todo x y y está definido de modo único; el número representado por $x + y$
Esta operación posee las propiedades siguientes para todo x, y y z
Propiedad 4-Conmutatividad:
$x + y = y + x$
Propiedad 5-Asociatividad:
$(x + y) + z = x + (y + z)$
Propiedad 6-Existencia y unicidad del elemento nulo:
$x + 0 = x$ para todo x
Propiedad 7-Existencia y unicidad del opuesto:
Para todo x existe un único número, que será $-x$, tal que $x + (-x) = 0$
Propiedad 8-Existencia de la multiplicación:
Existe una regla por medio de la cual x y y se le hace corresponder un número z, que será $z = xy$
Esta operación posee las siguientes propiedades para todo x, y y z
Propiedad 9-Conmutatividad:
$xy = yx$
Propiedad 10-Asociatividad:
$(xy)z = x(yz)$
Propiedad 11-Existencia y Unicidad del elemento unidad:
Existe un número 1 tal que: $1x = x$
Propiedad 12-Existencia y Unicidad del recíproco:
Para todo $x \neq 0$ existe un número que será $1/x$ tal que, $x1/x = 1$

Las operaciones suma y multiplicación están relacionadas por la propiedad siguiente:
Propiedad 13-Distributividad respecto a la suma:
Cualesquiera sean x, y y z se cumple: $(x + y)z = xz + yz$
Relación del orden con la suma y multiplicación:
Propiedad 14-
Si $x > y$, entonces para todo z se cumple: $x + z > y + z$
Propiedad 15-
Si $x > y$ y $z > 0$, entonces $xz > yz$ y si $x > y$ y $z < 0$, entonces $xz < yz$
Propiedad 16- *Propiedad Arquimedeana:*
Para todo x existe un $n \epsilon \mathbb{N}$ tal que $n > x$

-Sobre el campo de los números reales.

A continuación enunciaremos una serie de resultados elementales que nos serán útiles en la ulterior exposición de nuestras ideas.
A pesar de la aparente "bondad" que se describe en las propiedades anteriores, hemos visto que Q tiene huecos. Por ejemplo, analicemos una sucesión que es ampliamente utilizada en la práctica para el calculo de raíces cuadradas $\mathrm{x}_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$.Esta es una sucesión de números racionales, y puede probarse utilizando técnicas del análisis clásico que $\lim x_n = \sqrt{2}$.
Propiedad de continuidad: *Toda sucesión monótona y acotada tiene un límite*

El siguiente resultado caracteriza una forma de construcción de los números reales que comunmente llamamos "Principio de intervalos encajados".
Por la importancia que representa el acercarnos con mayor exactitud a describir la longitud; en general lo hacemos por defecto y por exceso, para conseguir así una mayor exactitud. Precisemos en términos matemáticos esta idea:
Sean a y b dos números tales que $a \leq b$. Se llama intervalo cerrado con extremos a y b a los números x tales que $a \leq x \leq b$ y lo denotaremos por $[a, b]$.
Se dice que los intervalos $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ están encajados uno en los otros si $I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n \supset ....$ Los llamaremos sistema de intervalos encajados.
Si volvemos a la idea de la exactitud utilizando dicho sistema de intervalos encajados cerrados, y la certeza de que estos se acercan a la medición exacta se traduce en la postulación de la existencia de un número que pertenezca a todos los intervalos del sistema, se tiene entonces la siguiente proposición:
Principio de intervalos encajados: *Todo sistema de intervalos encajados $[a_n, b_n]$ tiene al menos un punto común a todos los intervalos del sistema. Si el sistema es infinitesimal, es decir $b_n - a_n \to 0$ entonces dicho punto es único.*

Antes de expresar el siguiente resultado, introduciremos alguna terminología especial.
Sea S una colección de números (reales), a la que se denominara conjunto. Cada número considerado individualmente se llama elemento del conjunto y se dice que pertenece al conjunto. Si existe un número real b tal que $x \leq b$ para cada x del conjunto, b se denominara cota superior de S.
Por ejemplo el conjunto de todos los números negativos es un conjunto acotado superiormente. En efecto, cada número real positivo b es una cota superior de este conjunto. El número 0 es también una cota superior, pero ningún número inferior a 0 tiene esta propiedad. Este hecho se expresa diciendo que 0 es el supremo de este conjunto.
En general, un número b se denomina supremo de S (ínfimo de S) si es la menor (mayor) de las cotas superiores (inferiores) del conjunto, es decir:
$i)$ b es una cota superior de S y
$ii)$ ningún $b_1 < b$ es cota superior de S
El siguiente resultado se refiere a conjuntos no vacíos:
Axioma del supremo: *Sea S un conjunto no vacío de números reales acotado superiormente, existe entonces un número real y solo uno que es el supremo S.*

Comentaremos ahora acerca de otra forma de construir el campo de los números reales, las cortaduras.
La teoría de los números reales en la forma de Dedekind esta basada en la idea de cortar el dominio de los números racionales, es decir dividimos el conjunto de todos los números racionales en dos conjuntos no vacíos A y A' y asumimos que:
$i)$ todo número racional se encuentra en uno y solo uno de los conjuntos A y A'.
$ii)$ todo número del conjunto A es menor que cualquiera del conjunto A'.
El conjunto A es llamado clase baja y el conjunto A' clase alta. El corte puede ser denotado por $A|A'$.
La definición implica que todo número racional más pequeño que el número a de la clase baja se encuentra en esta clase.
Ejemplos:
Definamos A como el conjunto de los números racionales a que
1.) Satisfacen $a < 1$, mientras que el conjunto A' contendrá todos los números a' tales que $a' \geq 1$.
Fácilmente se observa que en efecto hemos obtenido una cortadura el número 1 se encuentra en la clase A' y obviamente es el más pequeño del conjunto, por otro lado 1 no es el número mayor de la clase A puesto que para cada $a \in A$ existe un número racional a_1 ,localizado entre A y la unidad, consecuentemente mayor que a y además perteneciente a la clase A.
2.) La clase baja contendrá todos los números racionales a tales que $a \leq 1$ mientras que la clase alta contendrá todos los racionales a' con $a' < 1$.
Este ejemplo también es una cortadura, y ahora la clase alta no tiene un elemento mínimo sin embargo la clase baja si tiene un elemento máximo.

3.) La clase A contiene a todo número racional tal que $a^2 < 2$, mientras que la clase A contiene a todo número racional que cumple $a'^2 > 2$.
Es fácil ver que este ejemplo también es una cortadura. Ahora la clase A no tiene un número máximo y la clase A' no tiene un número mínimo.
Probaremos por ejemplo la primera afirmación(La segunda se podrá probar de forma análoga).
Sea a un número positivo de la clase A de aquí que $a^2 < 2$. Probaremos que seleccionando un entero positivo n tal que $(a + \frac{1}{n})^2 < 2$ de modo que $a + \frac{1}{n}$ también se encuentra en la clase A. Esta desigualdad es equivalente a:

$$a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2$$
$$\frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - a^2$$

y esta última desigualdad se satiaface también si n es tal que:

$$\frac{2a+1}{n} < 2 - a^2$$

para el cual es suficiente tomar

$$n > \frac{2a+1}{2-a^2}$$

Por otra parte es importante notar que no existirá una cortadura que tenga simultáneamente un número máximo a_0 en la clase baja y un número mínimo a'_0 en la clase alta. En efecto, supongamos que existe tal número y llamemosle c, entonces c está entre a_0 y a'_0 de aquí que no pertenece a la clase baja, pues es mayor que a_0 y tampoco a la clase alta ya que es menor que a'_0 lo cual contradice la definición de corte dada. De esta manera las cortaduras pueden ser de tres tipos, iliustrados en los ejemplos 1, 2, 3. En los dos primeros ejemplos las cortaduras forman el número racional r (que es la frontera entre las clases A y A'). En el tercer caso el número frontera no existe y la cortadura define a un nuevo elemento, un nuḿero irracional. De este modo toda cortadura de la forma 3) define un número irracional α. Este α reemplaza el faltante número frontera, el esta entre todo numero a de la clase A y todo numero a' de la clase A'. En el ejemplo 3) el nuevo elemento creado es $\sqrt{2}$.
Entonces para todo número r existirán dos cortaduras que lo definen, los elementos $a < r$ estarán contenidos en la clase baja y los $a' > r$ en la clase alta.
Podemos entonces definir $\mathbb{R}$ a través del siguiente axioma.
Axioma de Dedekind: *Dados dos conjuntos A y B tales que forman una Cortadura de Dedekind, es decir:*
- Para todo $x \in \mathbb{Q}$ se tiene $x \in A$ ó $x \in B$, siendo $A \bigcap B = 0$
- Para todo $x \in A$, $y \in B$ es $x \leq y$
Existe un único número γ; para todo $x \in A$ y $y \in B$ es $x \leq \gamma \leq y$

-Unicidad en la construcción de $\mathbb{R}$

A partir de nuestra corta experiencia como estudiantes así como por los resultados de entrevistas realizadas a otros compañeros, comentamos cuál o cuáles de las diferentes formas de definir $\mathbb{R}$ nos resultan más sencillas y cómodas para entender el Análisis Matemático, y luego de un estudio sobre el tema obtuvimos diversas opiniones que conllevaron a un gran debate.
El concepto de número real figura entre los conceptos matemáticos fundamentales. Se han definido los números reales en nuestro trabajo utilizando el más lógico y simple de los métodos existentes, el método axiomático, al cual fue necesario agregar un axioma de existencia del número real. Por esta razón para algunos la Propiedad de Continuidad, acerca de la convergencia de toda sucesión monótona acotada, constituye el axioma de existencia que nos permite ver la definicón de número real de forma más natural, siendo muy fácil comprenderlo. El hecho de haber estudiado las sucesiones numéricas fue de gran ayuda pues permitió a los estudiantes irse familiarizando con los conceptos de sucesión acotada, convergente y monótona, preparando condiciones favorables para comprender con mayor facilidad este concepto.
La opinión de muchos estudiantes de matemática coinciden con que el Principio de Intervalos Encajados es el que mejor facilita la comprensión de $\mathbb{R}$ pues no necesita de la utilización del límite para convergencia de sucesiones monótonas y acotadas como en la Propiedad de Continuidad y el Axioma de Supremo con la idea de conjunto acotado, que son temas de gran debate debido al concepto de infinito. Mientras que el principio de Intervalos Encajados viene siendo el más intuitivo, pues todo se basa en una idea geométrica para problemas de representación numérica. No existe idea más sencilla, pues todo se resume a un procedimiento mecánico.
Estudiantes de años avanzados consideran de su preferencia el axioma de Cortaduras, pues posee ideas tan propias del ser humano como lo es agrupar. Este método, que aunque muchos lo consideran abstracto, manifiesta una elegante sencillez poque su trabajo solo consta de la utilización de conjuntos, sin necesidad de llegar a emplear otros entes. Además también se utiliza para definir otros objetos en cualquier cuerpo ordenado K, por eso es considerado un método constructivista. Estas y otras razones hacen ver para algunos el método de Cortaduras como el más eficaz, abstracto y riguroso de todos los que conocemos, para la contruccón de $\mathbb{R}$.
Nos llamó mucho la atanción que el Axioma de Supremo sea un método para la preferencia de pocos, pues a nuestro entender no resulta complicado luego de dominar conceptos como límite, convergencia y monotonía, y es el más práctico para la deducción de las propiedades principales de los números reales.

En el próximo apartado presentaremos el siguiente esquema lógico para demostrar la equivalencia de cada una de nuestras proposiciones anteriores: partiremos de la veracidad del principio de continuidad, el cual emplearemos para demostrar el principio de intervalos encajados; luego, utilizaremos este para probar el axioma del supremo y ya con esta herramienta demostraremos el principio de continuidad. Finalmente demostraremos la equivalencia del Axioma de Supremo y las cortaduras de Dedekind.

Demostración:
i)*Principio de continuidad ⇒ Principio de intervalos encajados:*
Sea el sistema de intervalos cerrados encajados $I_n = [a_n, b_n]$ donde $a_1 < a_2 < ...a_n < a_{n+1} < ... < b_{n+1} < b_n < ... < b_1$
donde la sucesión a_n es creciente y acotada superiormente, entonces por la propiedad de continuidad $\exists a = \lim a_n$; de la misma forma la sucesion b_n, que es creciente y acotada inferiormente tiene limite $b = \lim b_n$.
Si $a = b \;\Rightarrow\; a \in \cap I_n$.
Si $a < b \;\rightarrow\; \frac{a+b}{2} \in \cap I_n$.
Veamos la unicidad; supongamos que existen dos números x, y que se encuentran en la intersección, entonces $a_n \leq x \leq y \leq b_n \;\; \forall n$ pero $\lim a_n = a$ y $\lim b_n = b$ por lo que $a_n - b_n \rightarrow 0 \;\Rightarrow a = b$ de donde $x = y = a$.

ii)*Principio de intervalos encajados ⇒ Axioma del supremo*:
Sea $E \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente tal que $E \neq \emptyset$ y sea b una cota superior de E es decir $x < b$ para toda $x \in E$. Como $E \neq \emptyset$ existe $a \in E$. Luego, el intervalo cerrado $[a, b]$ contiene al menos un punto de E.
Si fuera $a = b$, entonces obviamente sería $a = \sup E$. Sea entonces $a < b$ y sea $I_1 = [a_1, b_1] = [a, b]$, de manera que $b_1 - a_1 = b - a$ y $I_1 \cap E \neq \emptyset$.
Dividimos ese intervalo a la mitad. Si la mitad derecha contiene un punto de E, tomamos a esa mitad como $I_2 = [a_2, b_2]$. En caso contrario $I_2 = [a_2, b_2]$ será la mitad izquierda. Con ello se garantiza que $x \leq b_2$ para toda $x \in E$. Entonces se tiene:

$$I_2 \subset I_1, \qquad b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2}, \qquad I_2 \cap E \neq \emptyset.$$

Si repetimos el proceso obtenemos en el n-ésimo paso el intervalo cerrado $I_n = [a_n, b_n]$ tal que:

$$I_n \subset I_{n-1}, \qquad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}, \qquad I_n \cap E \neq \emptyset$$

Además es $x \leq b$ para toda $x \in E$.
De esta manera se ha obtenido un sistema infitesimal de intervalos cerrados encajados $I_n = [a_n, b_n]$ tal que $I_n \cap E \neq \emptyset$ y $x \leq b$ para toda $x \in E$. Entonces existe un único $S \in \cap_n I_n$ y obviamente se cumple $S \leq b$. Comprobemos que $S = \sup E$.

i)Supongamos que existe $x_0 \in E$ como $b_n - a_n \to 0$, existe $n_0 \in N$ tal que $b_{n_0} - a_{n_0} < x_0 - S$. Entonce es $b_{n_0} < x_0 - (S - a_{n_0} \leq x_0)$ (pues $S - a_{n_0} \geq 0$), lo que contradice el hecho de que $x \leq b_n$ para toda $x \in E$. Luego, S es cota superior de E.
ii)Sea ahora $\epsilon > 0$ y sea $n_0 \in N$, tal que $b_{n_0} - a_{n_0} < \epsilon$. Como $I_n \cap E \neq \emptyset$ para toda n existe un $x_{n_0} \in E$ tal que $x_{n_0} \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$ es decir $x_{n_0} \leq S$. Entonces es $a_{n_0} \leq x_{n_0} \leq S \leq b_{n_0}$, o sea, $S - x_{n_0} \leq b_{n_0} - a_{n_0} < \epsilon$ por lo que $s - \epsilon < x_{n_0} < S$. Entonces $S = \sup E$.

Axioma del supremo $\Rightarrow$ Principio de continuidad:
Como x_n es acotada superiormente, existe $S = supx_n$. Queremos demostrar que $S = limx_n$. Como $S = supx_n$, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $S - \epsilon < x_N < S$. Por otra parte como (x_n) es creciente, esto implica que $S - \epsilon < x_n < S < S + \epsilon$ para todo $n \geq N$, es decir, $\mid x_n - S \mid < \epsilon$ para todo $n \geq N$, que es lo que queríamos demostrar.

Axioma de supremo $\Leftrightarrow$ Cortaduras de Dedekind:
Debemos demostrar que el cuerpo ordenado $\mathbb{R}$ verifica el axioma del supremo si y solo si verifica el axioma de cortadura. Procederemos en dos pasos.
1- Supongamos que $\mathbb{R}$ verifica el axioma del supremo. Sea (A, B) una cortadura de R. Debemos probar que existe un $x \in R$ con $A \leq x \leq B$.Tenemos que A es no vacío. Además, A es acotado superiormente (por cada $b \in B$).
Según el axioma del supremo, existe supremo de A. Lo denominamos x. Entonces $x \geq A$ porque x es una cota superior de A.
Cada $b \in B$ es cota superior de A, luego $x \leq b$ porque x es la menor de las cotas superiores de A.
Acabamos de demostrar $A \leq x \leq b$.
2- Supongamos que $\mathbb{R}$ verifica el axioma de cortadura. Sea C no vacío un subconjunto acotado superiormente, $C \subset \mathbb{R}$. Debemos probar que exite supremo de C. Denotemos por A el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ que son menores o iguales a un $c \in C$ cualquiera:
$A = x \in \mathbb{R} / \exists c \in C \quad c \geqslant x$ Entonces C. Cada cota superior estricta de C es una cota superior estricta de A,e inversamente. (Sea $z > C$. Si $x \in A$, entonces existe $c \in C$ con $x \leq c$. $Dez > C$ se deduce $x \leq c \leq z$, es decir $z > A$).
Llamemos B al conjunto de todas las cotas superiores estrictas de C:

$$B = z \in \mathbb{R} / z > C$$

Entonces $x < z$ para todo $x \in A$, $z \in B$, pues cada $z \in B$ es una cota superior estricta de A. Además, A, B y $A \cap B$ es no vacío.
Veremos que $A \cup B = \mathbb{R}$. Si $y \in \mathbb{R}$ no pertenece a A entonces, no existe un $c \in C$ con $y \leq c$; luego, $y \geq c$ para todo $c \in C$, es decir, $y > C$, o sea, $y \in B$. Resulta que el par (A,B) es una cortadura de Dedekind. Según el axioma de cortadura existe $x \in \mathbb{R}$ con $A \leq x \leq B$. Vamos a demostrar que x es el supremo de C.

En primer lugar, se cumple $x \geq C$ para todo $c \in C$ porque $C \subset A \leq x$.
Supongamos ahora por el absurdo que $x' < x$ es una cota superior de C. Para todo $x_0 = \frac{x+x'}{2} \in \mathbb{R}$ se cumple $x' < x_0 < x$.
Por definición de A existe $c \in C$ con $x_0 \leq c$. Para esta $c \in C$ se tiene $x' \leq x_0 \leq c$, en contradicción con la hipótesis que x' es cota superior de C.
Luego, no existe una cota superior de C menor que x y, por tanto, $x = \sup C$.

Conclusiones:

El estudio de las diferentes formas de definir los números reales nos conduce a concretar diferentes ideas.
En primer lugar se obtiene un nuevo conjunto que contiene a $\mathbb{Q}$ como subconjunto, que mantiene sus propiedades y están en él todos los elementos límites de sucesiones racionales que no pertenecen a $\mathbb{Q}$, o sea, este nuevo conjunto es una ampliación del de los números racionales: "Tapan los huecos de la recta numérica". Hemos observado como se ilumina una cuestión que fue desconsertante para los pitagóricos, que trabajaban solo con los números racionales, y se percataron de que no podían medir segmentos con exactitud.
Como demostramos, el nuevo dominio puede definirse manteniendo los axiomas que definen a los racionales y uno adicional que puede ser cualquiera de los siguientes:
i)Propiedad de continuidad
ii) Principio de intervalos cerrados encajados
iii)Axioma del supremo
iv) Cortaduras de Dedekind
Este último no esta incluido en el curso ordinario de Análisis Matemático I pero resulta de gran importancia teórica.
En segundo se demuestra la equivalencia que existe entre los resultados que permiten la construcción de lo números reales, lo cual evidencia el hecho de que este campo puede ser construido de diferentes maneras sin que resulte ninguna contradicción entre ellas.
Estas ideas, que se espera hayan quedado claras en el trabajo, manifiestan de forma sencilla y transparente la existencia de una madeja de caminos deslumbrantes en el difícil arte de la matemáticas. Al lector el deseo de que el presente se convierta en una invitación a estos caminos.

Bibliografía

1)Fikhtengolts, G.M: The Fundamentals of Mathematical Analysis, Volumen I, Editorial Pergamon Press, 1965.
2)Hinrichsen, Driedrich: Análisis Matemático I Segunda Parte, Editorial Pueblo y Educación, 1973.
3)Rudin, Walter: Principles of Mathematical Analysis, Editorial McGraw-Hill Book, 1953
4)Sánchez, Carlos: Análisis Matemático Tomo I, Editorial Pueblo y Educación, 2001.