

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS**

**FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS E INGENIERÍA**

*PRINCIPIOS FÍSICOS Y MATEMÁTICOS  
PARA EL ANÁLISIS DE SISTEMAS  
DINÁMICOS. INTRODUCCIÓN AL  
CONTROL*

*Trabajo de  
desarrollo  
profesional  
por etapas*

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
INGENIERO ELÉCTRICO

P R E S E N T A:  
ARCENIO BRITO HERNÁNDEZ

CUERNAVACA, MORELOS. MAYO 2007

# Trabajo de desarrollo profesional por etapas

PRINCIPIOS FÍSICOS Y MATEMÁTICOS  
PARA EL ANÁLISIS DE SISTEMAS  
DINÁMICOS. INTRODUCCIÓN AL  
CONTROL

*PRESENTA:*  
ARCENIO BRITO HERNÁNDEZ

*REVISORES:*  
IE. IGNACIO ÁVALOS SALINAS  
IE. GONZALO MARÍN SHERAD

## **Prefacio**

El presente trabajo tiene por objeto presentar los fundamentos matemáticos y físicos que permitan el análisis de sistemas físicos dinámicos. Se repasan las técnicas de notación y transformación matemática más comunes y se presentan las características de los bloques funcionales que componen los sistemas físicos complejos. Se emplea la función de transferencia por transformada de Laplace en dominio complejo, y el espacio de estados para la representación de ecuaciones diferenciales lineales que resultan del análisis de un sistema físico. Se modelan sistemas que involucran diferentes tipos de energía y se hacen notar las analogías naturales de sus modelos. Se presenta una introducción teórica a los sistemas de control y finalmente se estudian algunos dispositivos de medición y corrección de los sistemas de control.

## **Convención de notación**

Las **cantidades variables** se denotan por letras minúsculas ( $x, v, a, f, \dots$ ). Las **constantes** por mayúsculas ( $G, M, R, \dots$ ). Los **vectores** indistintamente por negritas ( $\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{a}, \mathbf{f}, \dots$ ) o bien letras con flecha superior ( $\vec{x}, \vec{v}, \vec{a}, \vec{f}, \dots$ ). Los **vectores unitarios** con *circunflejo* superior ( $\hat{r}, \hat{n}$ ). Los **escalares** por letras minúsculas ( $x, v, a, f, \dots$ ), los **módulos de vectores** como escalares o empleando símbolos de absoluto ( $|\vec{x}|, |\vec{v}|, |\vec{a}|, |\vec{f}|, \dots$ ), los **números complejos** por letras mayúsculas negritas ( $\mathbf{Z}, \mathbf{Y}$ ), o con circunflejo ( $\hat{Z}, \hat{Y}$ ), los **fasores** con *tilde* superior ( $\tilde{V}, \tilde{I}$ ), las **matrices** por negritas ( $\mathbf{M}, \mathbf{X}$ ).

*Agradecimientos:*

*A Dios por ser alguien que esta libre de errores y observarnos sin indiferencia. A mis padres ABR., GJM por su presencia y apoyo natural. A quienes producen, transmiten y transforman el conocimiento que nos hace libres y nos aleja de la incertidumbre.*

*Arcenio Brito Hernández.*

© Derechos reservados (2007). Ninguna parte del presente trabajo deberá ser reproducida, almacenada en sistema de recuperación, o transmitida en forma alguna, por ningún medio electrónico, mecánico, óptico, de grabación, u otra forma, sin el consentimiento y permiso expreso del autor.  
Arcenio Brito Hdz ([arce\\_brito@hotmail.com](mailto:arce_brito@hotmail.com))

# Tabla de contenido

<b>I. MÉTODOS MATEMÁTICOS DE TRANSFORMACIÓN</b> .....	<b>I-1</b>
NOTACIÓN SIGMA, INDUCCIÓN MATEMÁTICA .....	I-3
<i>Notación sigma</i> .....	I-4
NOTACIÓN REAL Y COMPLEJA .....	I-6
NOTACIÓN DE RAZONES DE CAMBIO Y SUMAS INFINITESIMALES .....	I-14
NOTACIÓN INTEGRODIFERENCIAL .....	I-21
<i>Ecuaciones integrodiferenciales</i> .....	I-21
<i>ED de primer orden y primer grado</i> .....	I-21
<i>ED de primer orden y grado superior</i> .....	I-23
<i>ED lineal de orden superior</i> .....	I-23
NOTACIÓN MATRICIAL Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES .....	I-25
NOTACIÓN VECTORIAL.....	I-36
<i>Algebra vectorial</i> .....	I-36
<i>Geometría vectorial</i> .....	I-37
<i>Cálculo vectorial</i> .....	I-38
<i>Electromagnetismo y las ecuaciones de Maxwell</i> .....	I-43
TRANSFORMACIÓN DE SISTEMAS COORDENADOS .....	I-46
TRANSFORMACIÓN FASORIAL .....	I-48
<i>Transformación fasorial en circuitos eléctricos de corriente alterna</i> .....	I-51
<i>Transformación de fuentes de ca</i> .....	I-56
<i>Transformación delta y estrella</i> .....	I-58
TRANSFORMACIÓN UNIDAD .....	I-64
TRANSFORMACIÓN EN COMPONENTES SIMÉTRICAS.....	I-66
TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE .....	I-70
<i>Transformación de funciones</i> .....	I-72
<i>Transformación inversa de Laplace</i> .....	I-73
<i>Transformación de ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo</i> .....	I-75
TRANSFORMACIÓN EN SERIES DE POTENCIAS .....	I-78
<i>Convergencia uniforme</i> .....	I-80
<i>Series de potencias de convergencia uniforme</i> .....	I-81
<i>Solución de ecuaciones diferenciales por series de potencias</i> .....	I-84
TRANSFORMACIÓN DE FOURIER .....	I-87
<i>Serie de Fourier</i> .....	I-88
<i>La transformación de Fourier</i> .....	I-91
TRANSFORMACIÓN ZETA .....	I-95
<b>II. BLOQUES FUNCIONALES DE SISTEMAS FÍSICOS</b> .....	<b>II-1</b>
INTRODUCCIÓN.....	II-3
<i>Sistema General de Unidades de Medida</i> .....	II-3
SISTEMAS MECÁNICOS .....	II-9
<i>Fundamentos de cinemática y dinámica traslacional</i> .....	II-9
<i>Bloques funcionales de sistemas mecánicos con movimientos traslacionales</i> .....	II-12
<i>Fundamentos de cinemática y dinámica rotacional</i> .....	II-13
<i>Bloques funcionales de sistemas mecánicos con movimientos rotacionales</i> .....	II-16
SISTEMAS ELÉCTRICOS.....	II-18
<i>Fundamentos de electrostática y electrodinámica</i> .....	II-19
<i>Bloques funcionales de sistemas eléctricos</i> .....	II-20
SISTEMAS FLUÍDICOS.....	II-22
<i>Fundamentos de hidrostática e hidrodinámica</i> .....	II-22
<i>Bloques funcionales de sistemas fluidicos hidráulicos</i> .....	II-24

<i>Fundamentos de fisicoquímica y termodinámica</i> .....	II-26
<i>Bloques funcionales de sistemas fluidicos neumáticos</i> .....	II-30
SISTEMAS TÉRMICOS .....	II-32
<i>Fundamentos de transferencia de calor y calorimetría</i> .....	II-32
<i>Bloques funcionales de sistemas térmicos</i> .....	II-34
RELACIONES ANALOGÍAS DE BLOQUES FUNCIONALES DE SISTEMAS FÍSICOS .....	II-35
<b>III. MODELADO DE SISTEMAS DINÁMICOS</b> .....	<b>III-1</b>
MODELADO DE SISTEMAS DINÁMICOS .....	III-3
<i>Modelado mediante función de transferencia</i> .....	III-4
<i>Representación del sistema mediante diagramas de bloques</i> .....	III-5
<i>Modelado mediante espacio de estados</i> .....	III-7
<i>Relación entre funciones de transferencia y espacio de estados</i> .....	III-10
SISTEMAS MECÁNICOS .....	III-11
SISTEMAS ELÉCTRICOS .....	III-13
SISTEMAS FLUÍDICOS .....	III-17
SISTEMAS TÉRMICOS .....	III-19
SISTEMAS ELECTROMECAÑICOS .....	III-20
<b>IV. SISTEMAS DE CONTROL</b> .....	<b>IV-1</b>
CONTROL AUTOMÁTICO .....	IV-3
<i>Sistema de lazo abierto</i> .....	IV-3
<i>Sistema de lazo cerrado</i> .....	IV-4
<i>Control de un proceso industrial</i> .....	IV-6
COMPONENTES DE UN SISTEMA DE CONTROL .....	IV-8
<i>Sensores y transmisores</i> .....	IV-8
<i>Válvulas de control</i> .....	IV-9
<i>Controladores</i> .....	IV-12
CONTROLADORES LÓGICOS PROGRAMABLES .....	IV-17
<i>Componentes del PLC</i> .....	IV-18
<i>Operación del PLC</i> .....	IV-19
<b>V. INSTRUMENTOS DE CONTROL</b> .....	<b>V-1</b>
INSTRUMENTOS DE CONTROL INDUSTRIAL .....	V-3
<i>Instrumentos de medición</i> .....	V-3
<i>Instrumentos de corrección</i> .....	V-13
CLASIFICACIÓN DE INSTRUMENTOS DE MEDICIÓN .....	V-18
<i>Instrumentos que miden cantidades mecánicas o termodinámicas</i> .....	V-19
<i>Instrumentos que miden cantidades eléctricas</i> .....	V-23

# Capítulo 1

## Métodos matemáticos de transformación

---

Con el objeto de tener una sólida base matemática que nos permita el correcto análisis de los sistemas físicos dinámicos, en este capítulo se presentan los siguientes temas de notación y transformación matemática:

- Notación *sigma*, inducción matemática
- Notación *real* y *compleja*
- Notación de *razones de cambio* y *sumas infinitesimales*
- Notación *integro-diferencial*
- Notación *matricial* y *sistemas de ecuaciones lineales*
- Notación *vectorial* y *campos vectoriales*
- Transformación de *sistemas coordenados*
- Transformación *fasorial*
- Transformación *unidad*
- Transformación en *componentes simétricas*
- Transformación de *Laplace*
- Transformación en *series de potencias*
- Transformación de *Fourier*
- Transformación *zeta*



## Notación sigma, inducción matemática

**Número entero.** El conjunto de números enteros es  $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ , el conjunto de enteros positivos es  $Z^+ = \{1, 2, 3, \dots\} = \{Z\} | Z > 0$ ; el conjunto de enteros negativos es  $Z^- = \{\dots, -3, -2, -1\} = \{Z\} | Z < 0$ . El conjunto de números enteros no negativos es:  $Z^{0+} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \{Z\} \cup \{0\}$ . El factorial de un número (véase función Gamma)  $n | n \in Z^+$  se define por  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n \cdot (n-1)!$ , sus propiedades son: (1)  $0! = 1$ ; (2)  $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ , en general el factorial es una operación recursiva:

$$n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot (1) = \frac{(n+1)!}{n+1} \quad (1)$$

**Número booleano.** El algebra booleana fue desarrollada por George Boole en 1854 (publicado en *An Investigation of the Laws of Thought*). Sea  $x$  un número booleano tal que  $x \in B$  y  $B = \{0, 1\}$ , se definen 3 operaciones: complemento de  $x$  ( $x'$ ), producto y suma y obedecen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} x \in \{0, 1\} \quad & x' = 1 \Leftrightarrow x = 0; x' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ x + 0 = x \quad & x + 1 = 1 \quad x + x = x \quad x + x' = 1 \\ x \cdot 0 = x \quad & x \cdot 1 = x \quad x \cdot x = x \quad x \cdot x' = 0 \\ x + y = y + x \quad & x + (y + z) = (x + y) + z \quad x(y + z) = xy + xz \\ x \cdot y = y \cdot x \quad & x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z) \\ (x + y)' = x' y' \quad & (x')' = x \quad (xy)' = x' + y' \end{aligned} \quad (2)$$

**Principios de conteo.** La regla de la suma establece que: “sean  $A$  y  $B$  dos tareas que pueden ser realizadas de  $m$  y  $n$  maneras respectivamente y no pueden ocurrir simultáneamente; entonces la ejecución de una tarea cualquiera puede ser acompañada por una de las  $m+n$  maneras”. La regla del producto establece que: “si un procedimiento puede ser descompuesto en dos etapas  $A$  y  $B$  de manera que para  $m$  formas de  $A$  existan  $n$  formas de  $B$ ; entonces el procedimiento total puede ser efectuado en  $m \times n$  formas”. De los principios de conteo expuestos se deducen los conceptos de permutación, arreglo, combinación y combinación con repetición:

Orden relevante	Repeticiones	Tipo	Fórmula
Si	No	Permutación	$P(n, r) = n! / (n-r)!$
Si	Si	Arreglo	$n^r$
No	No	Combinación	$C(n, r) = \binom{n}{r} = n! / [r!(n-r)!]$
No	Si	Combinación c/repetición	$\binom{n+r-1}{r}$

(3)

### Notación sigma

De todas las operaciones existentes, la suma es la operación lineal más elemental y sobre la cual se pueden desarrollar cualesquiera otras (inclusive el producto). De manera ordinaria la suma finita se representa por  $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ ; mientras que la suma infinita se expresa como  $S = S_\infty = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ . Existe una manera reducida conocida como notación sigma y se representa por:

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n, \quad S = S_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_n + \dots \tag{4}$$

Las propiedades fundamentales de la notación sigma son:

- (1)  $\sum_{k=0}^n (a_k \pm a_k) = \sum_{k=0}^n a_k \pm \sum_{k=0}^n b_k \leftarrow$  Linealidad
- (2)  $\sum_{k=0}^n c a_k = c \sum_{k=0}^n a_k$
- (3)  $\sum_{k=0}^n c = n \cdot c \leftarrow$  El producto como suma

(5)

Con frecuencia es necesario realizar *corrimiento de índices* con el propósito de que se pueda aplicar la propiedad (1), como se muestra a continuación:

$$S = S_1 + S_2 = \sum_{k=2}^{\infty} 6k C_k X^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} 6C_k X^{k+1}, \quad \begin{matrix} \text{si } i = k - 1 \text{ en } S_1 \rightarrow k = i + 1 \\ \text{si } i = k + 1 \text{ en } S_2 \rightarrow k = i - 1 \end{matrix}$$

$$S = \sum_{i+1=2 \rightarrow i=1}^{\infty} 2(i+1)C_{i+1} X^i + \sum_{i-1=0 \rightarrow i=1}^{\infty} 6C_{(i-1)} X^i = \sum_{i=1}^{\infty} [2(i+1)C_{i+1} + 6C_{(i-1)}] X^i \tag{6}$$

En general si aumenta en  $k$  el índice de la sumatoria, disminuyen en  $k$  los límites de la sumatoria:

$$\sum_{i=A}^N x(i) = \sum_{i=A-k}^{N-k} x(i+k) \tag{7}$$

**Principio de identidad para sumas.** Si  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$  entonces  $a_k = b_k$  para toda  $k \geq 0$ ; en particular si  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$  entonces  $a_k = 0$ .

**Principio de inducción matemática**

Sea  $S(n)$  una expresión matemática que involucre una o más ocurrencias de la variable  $n | n \in \mathbb{Z}^+$ , si  $S(1)$  es cierta y  $S(k)$  es cierta siendo  $k | k \in \mathbb{Z}^+$ ; entonces  $S(n)$  es cierta para toda  $n \in \mathbb{Z}^+$ . El principio de inducción tiene su aplicación en la deducción de formulas y demostración de teoremas.

 **Ejemplo 1.1.** Demostrar por inducción matemática que:  $\sum_{i=1}^n i = n(n+1)/2$ .

**Solución.** La aplicación del principio de inducción se realiza como sigue: (1) se muestra la certeza de  $S(1)$ ; (2) se plantea una hipótesis para  $S(k)$ , y se demuestra que  $S(k+1)$  es cierto, entonces (3)  $S(n)$  queda demostrado:

$$S(n) = \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2$$

$$(1) \quad S(1) = \sum_{i=1}^1 i = 1 \Leftrightarrow 1(1+1)/2 = 2/2 = 1$$

(2) Sea  $S(k)$  cierto por hipótesis, entonces  $S(k+1)$  también debe ser cierto, basta con demostrar que:

$$S(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\begin{aligned} S(k+1) &= \sum_{i=1}^{k+1} i = 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \sum_{i=1}^k i + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \therefore S(n) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \clubsuit$$

 **Ejemplo 1.2.** Demostrar por inducción matemática que:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$

**Solución.** Se aplican los pasos (1) a (3) y se tiene que:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$

$$S(n) = \sum_{k=1}^n k^2 = 1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$

$$(1) \quad S(1) = \sum_{k=1}^1 k^2 = 1 \Leftrightarrow 1(1+1)(2+1)/6 = 6/6 = 1$$

(2) Sea S(k) cierto por hipótesis, entonces S(k+1) también debe ser cierto, basta con demostrar que :

$$S(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\begin{aligned} S(k+1) &= \sum_{i=1}^{k+1} i^2 = 1 + 4 + 9 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \sum_{i=1}^k i^2 + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{[k(2k+1) + 6(k+1)](k+1)}{6} \\ &= \frac{[2k^2 + 7k + 6](k+1)}{6} = \frac{(k+2)(2k+3)(k+1)}{6} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \therefore S(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \square$$

Se han desarrollado *formulas para sumatorias de uso frecuente* cuya demostración se lleva a cabo mediante inducción matemática:

**Tabla 1.1** Formulas de sumatorias frecuentes

$\sum_{k=1}^n x^k = \frac{x-x^{n+1}}{1-x}$	$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}$
$\sum_{k=a}^b k = \frac{(a+b)(b-a+1)}{2}$	$\sum_{k=1}^{\infty} r^k = \frac{r}{1-r}, \quad  r  < 1$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log(2)$
$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$
$\sum_{k=a}^b k^2 = \frac{(b^2+b)(2b+1) - (a^2-a)(2a-1)}{6}$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^4} = \frac{7\pi^4}{720}$

## Notación real y compleja

**Número real.** Un *intervalo abierto* I, se representa por (a,b), un *intervalo cerrado* por [a,b], siendo a, b puntos en la recta, el plano o el espacio. El conjunto  $\{x \mid x \in \mathfrak{R}\}$  de los *números reales* o *escalares* ( $\mathfrak{R}$ ) que incluye los *enteros*  $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  y *naturales*  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ , se clasifica en *racionales*  $Q = \{p/q \mid p, q \in Z, q \neq 0\}$  e *irracionales* ( $\pi, \sqrt{2}, e$ ), según puedan o no expresarse como un cociente de 2 enteros. *Geométricamente* el conjunto de escalares  $\mathfrak{R}$  representa la *recta*,  $\mathfrak{R}^2$  el *plano* y  $\mathfrak{R}^3$  el *espacio*. Dados  $a, b \in R$  se efectúan dos *operaciones algebraicas fundamentales suma* ( $c=a+b$ ) y *producto* ( $d=a*b$ ) y cumplen con las *propiedades: cerradura* ( $c, d \in R$ ), *conmutativa* ( $a*b=b*a$ ), *asociativa* ( $a+b+c=a+(b+c)$ ), *identidad* ( $a+0=a, a*1=a$ ), *aditiva inversa* ( $a-a=0$ ), *multiplicativa inversa* ( $a*(1/a)=1$ ), *distributiva* ( $a*(b+c)=a*b+a*c$ ).

**Límites.** Un *valor límite* es el valor al que se *acercas infinitesimalmente* una expresión cuando una de sus *variables* tiende a un *valor constante*:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} c/x = \infty & \quad \lim_{x \rightarrow \infty} cx = \infty & \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x/c = \infty & \quad \lim_{x \rightarrow \infty} c/x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} c^x = 1, & \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} c^x = 0, & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} c^x = \infty, & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty, |c| < 1} c^x = 0, & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{aligned} \quad (8)$$

Los siguientes son los *teoremas fundamentales de los límites*:

Si  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = B$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} w(x) = C$  entonces:

- (1)  $\lim_{x \rightarrow a} (u \pm v \pm w) = A \pm B \pm C$
- (2)  $\lim_{x \rightarrow a} (uvw) = ABC$
- (3)  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{A}{B}$

(9)

Si  $f(x)$  no está definida para  $x=a$ , pero  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$ , entonces  $f(x)$  será continua para  $x=a$ , si se toma como valor de  $f(x)$  para  $x=a$  el valor B:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2 \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 2+2 = 4 \quad (10)$$

**Algebra.** Cualquier *binomio* elevado *potencia entera n*, puede desarrollarse mediante la regla del *binomio de Newton*, donde los coeficientes se obtienen por *combinación*, en símbolos:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} na^{n-2}b^2 + \dots + nab^{n-1} + b^n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \leftarrow \text{combinación de } n \text{ objetos tomados } k \text{ a la vez} \quad (11)$$

Fórmulas de *productos notables* y *factorización*:

$$\begin{aligned} (a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 & (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \\ a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) & a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) & a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \end{aligned} \quad (12)$$

Propiedades de *exponentes* y *radicales*:

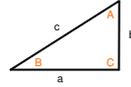
$$\begin{aligned} b^n b^m &= b^{n+m} & (b^n)^m &= b^{nm} & (ab)^n &= a^n b^n & \left( \frac{a}{b} \right)^n &= \frac{a^n}{b^n} & \frac{b^n}{b^m} &= b^{n-m} \\ \sqrt[n]{a} &= a^{\frac{1}{n}} & \sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} & \sqrt[n]{a/b} &= \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b} \end{aligned} \quad (13)$$

Propiedades de los *logaritmos*:

$$\begin{aligned} \log_b b &= 0 & \log_b 1 &= 0 & \log_b rs &= \log_b r + \log_b s \\ \log_b \frac{r}{s} &= \log_b r - \log_b s & \log_b r^p &= p \log_b r \end{aligned} \quad (14)$$

**Trigonometría.** Una *circunferencia* es una curva cerrada cuyos puntos equidistan a uno fijo llamado *centro C*, su *longitud* es  $2\pi r$ , siendo  $r$  su *radio*; la relación entre la *longitud del arco s*, el *ángulo subtendido  $\theta$* , y el *radio r*, esta dado por  $s=r\theta$ , donde  $\theta$  se expresa en *radianes* ( $\pi \text{ rad}=180^\circ$ ). Un *triángulo* (equilátero, isósceles o escaleno) de *lados a, b, c* y *ángulos A, B, C* de *área S*, obedece a la *ley de senos y cosenos*; si es un *triángulo rectángulo* obedece al *teorema de Pitágoras*  $c^2 = a^2 + b^2$  (el cual se deduce de la ley de cosenos ya que  $\cos(90^\circ)=0$  :

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{t(t-a)(t-b)(t-c)} \leftarrow t = (a+b+c)/2 \\ \frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, & c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned} \quad (15)$$



Para un *triángulo rectángulo* se definen las siguientes *razones de sus lados*:

$$\begin{aligned} \sin B &= b/c, & \cos B &= a/c, & \tan B &= \sin B / \cos B = b/a, & \cot B &= \cos B / \sin B = a/b \\ \sec B &= 1/\cos B = c/a, & \csc B &= 1/\sin B = c/b \\ \sin^2 B + \cos^2 B &= 1, & 1 + \tan^2 B &= \sec^2 B, & 1 + \cot^2 B &= \csc^2 B, & \lim_{B \rightarrow \pm\pi/2} \tan B &= \infty \end{aligned} \quad (16)$$

Una *línea recta* es una *figura que solo tiene extensión*, si se sitúa el *plano cartesiano XY*, y forma un *ángulo  $\theta$*  con el *eje X* y pasa a través de dos *puntos*  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ , se define su *pendiente* como  $m = \tan \theta = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$ , se denomina *abscisa* a la *coordenada x*, y *ordenada* a la *coordenada y*; las siguientes son *ecuaciones de la recta*:

$$\begin{aligned} \text{Ecuación: } & y - y_1 = m(x - x_1), & y &= mx + y_0, & \frac{y - y_1}{x - x_1} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, & \frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} &= 1 \\ \text{Datos: } & m, (x_1, y_1), & m, (0, y_0), & (x_1, y_1), (x_2, y_2), & (x_0, 0), (0, y_0) \end{aligned} \quad (17)$$

**Función.** Una *función, transformación o aplicación escalar de una variable*  $y=f(x)$  es una *regla de correspondencia* que asigna a cada  $x \in X$  un elemento específico  $y \in Y$ , el *conjunto X* se llama *dominio*, y al *conjunto Y* *contradominio*. El conjunto  $\{f(x) | x \in X\}$  se denomina *rango* de  $f$ , y es un *subconjunto del contradominio*, en símbolos se escribe como:  $f: X \rightarrow Y$ . Una *función escalar f, de 3 variables* con *dominio U*, y *valores escalares*  $f=f(x,y,z)$  se denota por:  $f: U \subset R^3 \rightarrow R$ , y *asigna un escalar a cada punto del espacio*  $(x,y,z)$ . Una *función vectorial f, de 3 variables* con

dominio  $U$ , y valores vectoriales  $\mathbf{C}=\mathbf{C}(x,y,z)$  se denota por  $f:U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , y asigna un vector a cada punto del espacio  $(x,y,z)$ .

En la notación  $y=f(x)$ ,  $x$  se denomina *variable dependiente* e  $y$  *variable independiente*. Una función es *inyectiva* si a elementos distintos del rango le corresponden elementos distintos del dominio  $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ , es *surjectiva* si para cada  $y$  del rango existe una  $x$  del dominio tal que  $y=f(x)$ . Si la función es inyectiva y surjectiva entonces es *bijectiva*, *biunívoca* o *función uno a uno*. Una *función par* cumple que  $f(-x)=f(x)$  (ejemplos:  $f(x)=x^2$ ,  $f(x)=\cos(x)$ ); de lo contrario es *función impar*  $f(-x)=-f(x)$ . En general, las funciones pueden ser: *algebraicas* (*polinomial*, *racional*) o *trascendentales* (*exponencial*, *logarítmica*, *trigonométrica*).

$$\begin{aligned} \text{algebraica} \left\{ \begin{array}{l} f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Leftrightarrow g \text{ y } h \text{ son polinomios} \\ f(x) = b^x, \quad f(x) = \log_b x, \quad f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos x, \quad f(x) = \tan x \end{array} \right. \quad (18) \end{aligned}$$

El *recíproco* de una función  $f(x)$  es  $1/f(x)$ . La *inversa* de una función *bijectiva*  $y=f(x)$  se denota por  $x=f^{-1}(y)$ , la función y su inversa satisfacen que  $x = f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x))$ . La inversa se obtiene por dos pasos: (1) despejar  $x$  de  $y=f(x)$ , (2) renombrar  $x$  por  $y$ , la función resultante es  $f^{-1}(x)$ . La función *logaritmo* y *exponencial* son inversas  $y = b^x \rightarrow x = \log_b y$ .

Una función  $f(x)$  es *continua* (sin rupturas ni saltos) en  $c \in [a,b]$  si cumple las siguientes tres condiciones: (1)  $f(c)$  existe; (2)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  existe; (3)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ . Una función  $f(t)$  es *periódica* y de *periodo*  $p$ , si se satisface que  $f(t) = f(t+np) \rightarrow p \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{Z}^+$ , (las funciones seno y coseno son periódicas con  $p=2\pi$ ).

**Numero complejo.** Un *número imaginario puro* tiene la forma  $jb$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $j = i = \sqrt{-1}$ , la constante  $i$  (introducida por Euler; en ingeniería eléctrica se prefiere usar  $j$ , por representar  $i$  la corriente eléctrica) tiene la propiedad de que  $i^2 = -1$ . Un *número complejo*  $\mathbf{A} = a + jb$ , se compone de dos partes una *real*  $\mathbf{Re}[\mathbf{A}] = a$  y otra *imaginaria*  $\mathbf{Im}[\mathbf{A}] = b$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), separadas mediante el *símbolo imaginario*; el conjunto de los números complejos se representa por  $\mathbb{C} = \{a + jb \mid a, b \in \mathbb{R}, j^2 = -1\}$ . Puede ser expresado en cualquiera de las siguientes formas (*rectangular*, *exponencial*, *polar* (abreviación de la forma exponencial), *trigonométrica* y en el *plano complejo*):

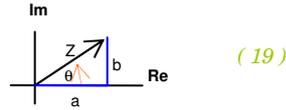
$$\hat{A} = a + jb = |\hat{A}|e^{j\theta} = |\hat{A}|\angle\theta = |\hat{A}|\cos(\theta) + j|\hat{A}|\sin(\theta)$$

$$\theta = \arctan(b/a) \leftarrow \text{argumento o ángulo de } \hat{A}$$

$$|\hat{A}| = \sqrt{a^2 + b^2} \leftarrow \text{módulo, valor absoluto o magnitud de } \hat{A}$$

$$\hat{A}^* = a - jb \leftarrow \text{conjugado de } \hat{A}$$

$$|\hat{A}^*| = |\hat{A}|$$



El ángulo  $\theta$  apropiado se elige basado en el cuadrante dado por (a, b) siendo el ángulo positivo (+) en sentido horario y negativo (-) en sentido antihorario; en ingeniería eléctrica se expresa en grados en física en radianes distinguiéndose uno del otro por el uso de  $^\circ$  o múltiplos de  $\pi$ . La *notación rectangular* es idónea para la *suma y resta* (partes reales se suman con partes reales, partes imaginarias con partes imaginarias), mientras que la *polar* es idónea para la *multiplicación y división* (por cumplir con las leyes de los exponentes), sean **A** y **B** dos números complejos, entonces:

$$\hat{A} = a + jb = |\hat{A}|\angle\theta_A \quad \hat{B} = c + jd = |\hat{B}|\angle\theta_B$$

$$\hat{A} + \hat{B} = (a + c) + j(b + d) \quad \hat{A} - \hat{B} = (a - c) + j(b - d) \quad (20)$$

$$\hat{A} * \hat{B} = |\hat{A}||\hat{B}|\angle(\theta_A + \theta_B) \quad \frac{\hat{A}}{\hat{B}} = \frac{|\hat{A}|}{|\hat{B}|}\angle(\theta_A - \theta_B)$$

Las siguientes identidades son de gran importancia:

$$1 = e^{j0} = 1\angle 0$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \arctan(1/\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \arctan(+\infty) = \pi/2 \quad \text{y} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \arctan(-1/\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \arctan(-\infty) = -\pi/2 \quad (21)$$

$$j = 0 + j = 1\angle \arctan(1/0) = 1\angle \arctan(+\infty) = 1\angle(\pi/2) = 1\angle 90^\circ$$

$$-j = 0 - j = 1\angle \arctan(-1/0) = 1\angle \arctan(-\infty) = 1\angle(-\pi/2) = 1\angle -90^\circ$$

$$j^2 = \sqrt{-1}^2 = -1$$

$$\frac{1}{j} = \frac{1\angle 0}{j \ 1\angle(\pi/2)} = e^{0-\pi/2} = e^{-\pi/2} = 1\angle(-\pi/2) = -j \quad (22)$$

$$(j^1, j^2, j^3, j^4 \dots j^9, j^{10}, j^{11}, j^{12} \dots) = (j, -1, -j, 1 \dots j, -1, -j, 1 \dots)$$

De lo anterior se concluyen la siguiente regla para el *producto unitario complejo*: “el producto de un número complejo por la constante imaginaria (j) ocasiona un incremento de  $90^\circ$  ( $\pi/2$  rad) en el ángulo de del número complejo”, es decir:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= |\hat{A}|\angle\phi \\ j\hat{A} &= |\hat{A}|\angle(\phi + \pi/2) \\ -j\hat{A} &= |\hat{A}|\angle(\phi - \pi/2) \end{aligned} \quad (23)$$

Sea  $r \in \mathfrak{R}$ , entonces  $r$  puede representarse como un número complejo en forma polar como:  $r = r \angle 0$ . Sea  $Z = a + jb$ ,  $Z \in \mathbb{C}$ , su *inverso*  $Y \in \mathbb{C}$ , es igual a su *recíproco* y está dado por:  $Y = 1/Z = (1/\sqrt{a^2 + b^2}) \angle (-\tan^{-1} b/a)$ .

La siguiente identidad se conoce como *teorema de Demoivre* :

$$Z e^{jn\theta} = Z(e^{jn\theta})^n \rightarrow Z(\cos n\theta + j \sin n\theta) = Z(\cos \theta + j \sin \theta)^n \quad (24)$$

**Función polinomial.** Es una función algebraica cuyos términos son monomios; un *monomio* es una agrupación de variables cuyos exponentes son enteros ( $xy^3$ ,  $xy^2z$ ). Sea  $P(x)=0$  un *polinomio en x*, de *grado n*, el *teorema fundamental del algebra* (demostrado por Gauss) afirma que un *polinomio de grado n* tiene exactamente *n raíces* no necesariamente distintas, que pueden ser *reales* o *complejas*, obtenidas por *factorización*, *división sintética* o mediante *aproximaciones numéricas*. Para  $n=2$  se emplea la *fórmula cuadrática*.

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (25)$$

Un *polinomio*  $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-2}x + a_{n-1}$ , de *grado n*, para el cual  $n \in \mathbb{Z}^+$  puede representarse como un *producto de binomios* de la forma  $(x-r_1)^{m_1} \dots (x-r_n)^{m_n} = 0$ ,  $m_i \in \mathbb{Z}^+$ , los valores  $r_i$  se denominan *raíces del polinomio* y son números reales o complejos. Sea  $k \in \mathbb{Z}$ , el *teorema del residuo* afirma que si  $P(x)$  es divisible entre  $(x-k)$ , el residuo es  $P(k)$ ; el *teorema del factor* afirma que si  $P(k)=0$ , entonces  $(x-k)$  es un factor de  $P(x)$ . El *método de división sintética*, permite obtener sistemáticamente el *cociente*  $C(x)$  y el *residuo*  $R(x)$  de un polinomio  $P(x)$  de *grado n*, dividido por un *factor* de la forma  $(x-k)$ , siempre que  $k \in \mathbb{Z}$ ;  $P(x)/(x-k)$ :

$$\begin{array}{cccccccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & & & \\ \downarrow & kb_0 & kb_1 & \dots & kb_{n-3} & kb_{n-2} & & & +k \\ \hline b_0 = a_0 & b_1 = a_1 + kb_0 & b_2 = a_2 + kb_1 & \dots & b_{n-2} = a_{n-2} + kb_{n-3} & b_{n-1} = a_{n-1} + kb_{n-2} & & & \end{array} \quad (26)$$

$$C(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \dots + b_{n-2} \quad R(x) = b_{n-1}/(x-k)$$

Un *método numérico eficiente para el cálculo de raíces* es el de *Newton*, que requiere un *valor inicial para x* (método abierto) y cuya *ecuación de recurrencia* esta dada por:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad |f(x_i)| < \varepsilon \tag{27}$$

**Función racional.** Es aquella que tiene la forma  $F(s) = P(s)/Q(s)$ . Siendo P y Q *polinomios* de  $s | s \in \mathfrak{R} \vee C$ . F es una *fracción propia* si el grado de Q es mayor que el grado de P, es *fracción impropia* en caso contrario. Las *fracciones racionales* a menudo se representan por conveniencia como una suma finita de *fracciones parciales*  $F_i(x)$ , (como ocurre en algunos casos de *integración* y en la determinación de la *transformada inversa de Laplace*) esto es:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_n(s) \quad \leftrightarrow \quad \text{Grado}(Q) > \text{Grado}(P) \tag{28}$$

La expresión anterior puede escribirse como:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s-\alpha)^n R(s)} = \left( \frac{a_0}{(s-\alpha)^n} + \frac{a_1}{(s-\alpha)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{(s-\alpha)} \right) + (\dots) \tag{29}$$

Donde  $a_k$  son *coeficientes*,  $a_k \in \mathfrak{R} \vee C$  y las elipses representan la expansión en fracciones parciales de las raíces de R(s); *las raíces del denominador se denominan polos* (s-α), *las raíces del numerador se denominan ceros*. Los coeficientes están dado por:

$$a_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k}{ds^k} \left( \frac{P(s)}{R(s)} \right) \right|_{s=\alpha} \tag{30}$$

En el empleo de esta ecuación considérese que es necesario derivar solo en el caso de existir *raíces repetidas* ya que  $D^0 F(s) = F(s)$ . Observe que en la evaluación α cambia su signo.

**Ejemplo 1.3.** Descomponer en fracciones parciales la siguiente *función racional* que involucra *polos distintos*:  $F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$

**Solución.** Aplicando la *descomposición en fracciones parciales* se tiene:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{a_0}{s+1} + \frac{b_0}{s+2}$$

$$a_0 = \frac{1}{0!} \frac{d^0}{ds^0} \left( \frac{s+3}{s+2} \right) \Big|_{s=-1} = \left( \frac{s+3}{s+2} \right) \Big|_{s=-1} = \frac{-1+3}{-1+2} = 2$$

$$b_0 = \frac{1}{0!} \frac{d^0}{ds^0} \left( \frac{s+3}{s+1} \right) \Big|_{s=-2} = \left( \frac{s+3}{s+1} \right) \Big|_{s=-2} = \frac{-2+3}{-2+1} = -1$$

$$\therefore F(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{-1}{s+2} \quad \clubsuit$$

 **Ejemplo 1.4.** Descomponer en fracciones parciales la siguiente *función racional* que involucra *polos complejos conjugados*:  $F(s) = \frac{2s+12}{s^2+2s+5}$

**Solución.** Aplicando la *descomposición en fracciones parciales* se tiene:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{2s+12}{s^2+2s+5} = \frac{2s+12}{[s+(1+j2)][s+(1-j2)]} = \frac{a_0}{[s+(1+j2)]} + \frac{a_1}{[s+(1-j2)]}$$

$$a_0 = \frac{1}{0!} \frac{d^0}{ds^0} \left( \frac{2s+12}{s+(1-j2)} \right) \Big|_{s=-1-j2} = \left( \frac{2s+12}{s+(1-j2)} \right) \Big|_{s=-1-j2} = \frac{-2-j4+12}{-1-j2+1-j2} = 1+j2.5$$

$$b_0 = \frac{1}{0!} \frac{d^0}{ds^0} \left( \frac{2s+12}{s+(1+j2)} \right) \Big|_{s=-1+j2} = \left( \frac{2s+12}{s+(1+j2)} \right) \Big|_{s=-1+j2} = \frac{-2+j4+12}{-1+j2+1+j2} = 1-j2.5$$

$$\therefore F(s) = \frac{1+j2.5}{[s+(1+j2)]} + \frac{1-j2.5}{[s+(1-j2)]} = \frac{2.693\angle 68.18}{[s+(2.236\angle 63.34)]} + \frac{2.693\angle -68.18}{[s+(2.236\angle -63.34)]} \quad \clubsuit$$

 **Ejemplo 1.5.** Descomponer en fracciones parciales la siguiente *función racional* que involucra *polos múltiples*:  $F(s) = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}$

**Solución.** Aplicando la *descomposición en fracciones parciales* se tiene:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3} = \frac{a_0}{(s+1)^3} + \frac{a_1}{(s+1)^2} + \frac{a_2}{(s+1)}$$

$$a_0 = \frac{1}{0!} \frac{d^0}{ds^0} (s^2+2s+3) \Big|_{s=-1} = (s^2+2s+3) \Big|_{s=-1} = 1-2+3 = 2$$

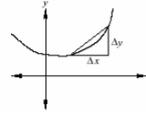
$$a_1 = \frac{1}{1!} \frac{d^1}{ds^1} (s^2+2s+3) \Big|_{s=-1} = (2s+2) \Big|_{s=-1} = -2+2 = 0$$

$$a_2 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} (s^2+2s+3) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{2} (2) \Big|_{s=-1} = 1$$

$$\therefore F(s) = \frac{2}{(s+1)^3} + \frac{0}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)} = \frac{2}{(s+1)^3} + \frac{1}{(s+1)} \quad \clubsuit$$

## Notación de razones de cambio y sumas infinitesimales

**Derivada.** La derivada de una función  $y=f(x)$  es la *razón de cambio de la variable dependiente (y) cuando la variable independiente (x) cambia infinitesimalmente*. Sea  $P(a,f(a))$  un punto a lo largo de la *gráfica, curva, imagen o traza* de  $y=f(x)$ , la derivada es la *pendiente de la línea recta tangente a la curva* en tal punto, se simboliza y define por:



$$y' = \dot{y} = y^{(1)} = Dy = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{31}$$

El *teorema de Rolle* afirma que si una función  $f(x)$  es continua en  $[a,b]$  y diferenciable en  $(a,b)$  y  $f(a)=f(b)$ , entonces existe un punto  $c$  en  $(a,b)$  tal que  $f'(c)=0$ . Una consecuencia es el *teorema del valor medio para la derivada* y establece que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{32}$$

Sea  $f(x)$  una función continua en  $(a,b)$ ;  $f(x)$  es *creciente* donde  $f'(x)>0$ , es *decreciente* donde  $f'(x)<0$  y *estacionaria* donde  $f'(x)=0$  (si es  $f(x)$  creciente o decreciente en  $[a,b]$  es *monótona* en  $[a,b]$ ). Los *puntos críticos*  $(x_c)$  de  $f(x)$  son aquellos *valores de x para los cuales la pendiente es igual a cero*  $f'(x_c)=0$ , es un *máximo* si  $f'(x_c)$  cambia de  $+ a -$  o bien si  $f''(x_c)<0$ ; es un *mínimo* si  $f'(x_c)$  cambia de  $- a +$  o bien si  $f''(x_c)>0$ . Una función  $f(x)$  puede ser aproximada en  $x=a$  por un *polinomio de grado n*, mediante la *serie de Taylor*:

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x - a)^n}{n!} f^n(a) + \dots = \sum_{k=0}^n \frac{(x - a)^k}{k!} f^k(a) \tag{33}$$

En  $a=0$  la función se aproxima a un polinomio cuyos coeficientes están dados por la siguiente, conocida como *serie de Maclaurin*:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^n(0)\frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{k=0}^n f^k(0)\frac{x^k}{k!} \tag{34}$$

Sea  $f(x)$  y  $g(x)$  funciones diferenciables y  $a, b$  constantes entonces se tienen las siguientes *propiedades de diferenciación*:

$$\begin{aligned}
 u &= u(x), & v &= v(x) & a, b &= \text{constantes} \\
 \frac{d}{dx} a &= 0, & \frac{dx}{dx} &= 1, & \frac{d(au)}{dx} &= a \frac{du}{dx}, \\
 \frac{d}{dx} (au + bv) &= a \frac{du}{dx} + b \frac{dv}{dx} \leftarrow \text{Linealidad} \\
 \frac{d}{dx} (uv) &= \frac{du}{dx} v + u \frac{dv}{dx} \leftarrow \text{Regla del producto} \\
 \frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) &= \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} \leftarrow \text{Regla del cociente} \\
 \frac{d}{dx} (u^a) &= a u^{a-1} \frac{du}{dx} \leftarrow \text{Regla de la potencia} \\
 \frac{d}{dx} u(f(x)) &= \frac{du}{dv} * \frac{dv}{dx} \leftarrow \text{Regla de la cadena}
 \end{aligned} \tag{35}$$

Aplicando las *propiedades de diferenciación* y la *definición de derivada* se han desarrollado *fórmulas de derivación* para las principales funciones, como las mostradas en la **tabla 1.2**:

**Tabla 1.2** Derivadas de funciones elementales

$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \arcsin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} \log u = \frac{\log e}{u} \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \arctan u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \cot u = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} u^v = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$	$\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \sec u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$
	$\frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \csc u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$

Si  $y=f(x)$  una *función continua* y *diferenciable* en  $[a,b]$  entonces la *derivada de la función inversa*  $x=f^{-1}(y)$  esta dada por,  $1/f'(x)$ , en símbolos:

si  $y = f(x)$  tiene como inversa  $x = f^{-1}(y)$  entonces :

$$D(f^{-1}) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)} \tag{36}$$

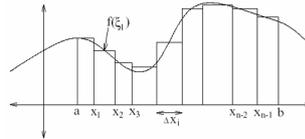
Una *función explícita* tiene la forma  $y=f(x)$ , una *función implícita* tiene la forma  $f(x,y)=0$ , cuando no es posible expresar explícitamente una función se *deriva implícitamente* y luego se factoriza para  $f'(x)$  si es posible.

Un *límite indeterminado* tiene la forma  $0/0$  o bien  $\infty/\infty$ , la *regla de L'Hospital* (debidamente a J. Bernoulli) se emplea para el *cálculo de límites de formas indeterminadas* y establece que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{37}$$

**Integral.** La *operación inversa de la derivada es la antiderivada o integral* y consiste en hallar la *primitiva  $f(x)$*  dada su derivada  $f'(x)$  o *diferencial  $f'(x)dx$*  y se denota por  $\int f'(x)dx$ . La *integral indefinida* de  $f'(x)dx$  es  $\int f'(x)dx = f(x) + C$ ,  $C$  es la *constante de integración*, cuyo origen es cualquier constante anulada al ser derivada en la primitiva  $D_x(C)=0$ .

Sea  $y=f(x)$  una función continua en el intervalo  $[a,b]$ , entonces la *integral definida*  $A = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx$  *representa el área  $A$ , bajo la curva*



*engendrada por  $f(x)$  y el eje de las  $x$  desde  $x=a$  hasta  $x=b$ , geoméricamente es la suma (conocida como suma de Riemann) de rectángulos de anchura infinitesimal  $dx$  y altura  $f(\xi_i)$  desde  $x=a$  hasta  $x=b$ ,  $\xi_i \in x_i, x_{i+1}$ , en símbolos:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x \tag{38}$$

La *integral es una suma infinitesimal*, la *suma es una operación lineal*, por lo tanto la *integral es una operación lineal*, una integral definida es la suma de integrales definidas en *rangos o límites de integración*, cambiando el límite de integración cambia el *signo de la integral*, la integral de  $x=a$  hasta  $x=a$  es cero:

$$\begin{aligned} a, b, c, d \in R \\ \int_a^b (cf(x) + dg(x))dx &= c \int_a^b f(x)dx + d \int_a^b g(x)dx \\ \int_a^b f(x)dx &= c \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \Leftrightarrow a < c < b \\ \int_a^b f(x)dx &= -\int_b^a f(x)dx, \quad \int_a^a f(x)dx = 0 \end{aligned} \tag{39}$$

Sea  $f(x)$  una función continua en  $[a,b]$ , consideremos que  $x \in [a,b]$ , llamemos  $m = \min[f(x)]$  y llamemos  $M = \max[f(x)]$  entonces, el *teorema del valor medio para la integral* establece que, existe un valor  $c$  en el intervalo  $[a,b]$  para el cual:

$$\begin{aligned} a, b &\in \mathbb{R} \\ (b-a)m &\leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a)M \\ c &\in [a, b] \\ \int_a^b f(x) dx &= (b-a)f(c) \rightarrow f(c) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \end{aligned} \quad (40)$$

Sea  $F(x)$  la *antiderivada* de  $f(x)$ , es decir  $F'(x) = f(x)$ , entonces el *teorema fundamental del cálculo* (el cual reúne la noción de derivada con la noción de integral) establece que:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \Leftrightarrow F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F(x) = \int f(x) dx \quad (41)$$

La *longitud del arco*  $s$ , engendrado por la gráfica de una función  $y=f(x)$ , de  $x_1$  hasta  $x_2$ , está dado por:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} [1 + (y')^2]^{1/2} dx = \int_{y_1}^{y_2} [1 + (x')^2]^{1/2} dy \quad (42)$$

**Cálculo de integrales.** Para simplificar el *cálculo de integrales* se han desarrollado extensas tablas cuyas fórmulas se deducen del *teorema fundamental del cálculo* (las *integrales de funciones elementales* se muestran en la **tabla 1.3**). Cuando la función no tiene semejanza con una ninguna integral de la tabla se emplean *artificios de integración* entre cuales figuran los siguientes:

1. **Integración por partes:** Dada la función a evaluar  $f(x)$  descompóngase de manera tal que sea posible aplicar la siguiente *fórmula de integración por partes*:  $\int u dv = uv - \int v du$ : 1) descomponer  $f(x)$  en  $u$  y  $dv$ , 2) integrar  $dv$ , 3) derivar  $u$ , 4) evaluar  $\int u dv = uv - \int v du$ . Se emplea en los casos de diferenciales que contienen: (a) productos; (b) logaritmos; (c) funciones trigonométricas inversas.

 **Ejemplo 1.6.** Aplicar integración por partes para (a) integrar  $\int x \cos x dx$ , (b) demostrar que  $\int \sec^3 z dz = \frac{1}{2} \sec z \tan z + \frac{1}{2} \ln(\sec z + \tan z) + C$

**Solución.** Se aplican los tres pasos antes numerados y se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad u = x \rightarrow du = dx \quad dv = \cos x dx \rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x \\
 \int u dv = uv - \int v du = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C \\
 \text{(b)} \quad u = \sec z \rightarrow du = \sec z \tan z dz \quad dv = \sec^2 z dz \rightarrow v = \int \sec^2 z dz = \tan z \\
 \int u dv = uv - \int v du = \sec z \tan z - \int \tan z \cdot \sec z \tan z dz \\
 \int \tan^2 z \cdot \sec z dz = \int (\sec^2 z - 1) \cdot \sec z dz = \int \sec^3 z dz - \int \sec z dz \\
 \rightarrow \int \sec^3 z dz = \sec z \tan z - \int \sec^3 z dz + \int \sec z dz \\
 \rightarrow \int \sec^3 z dz = \frac{1}{2} \sec z \tan z + \frac{1}{2} \ln|\sec z + \tan z| + C \quad \clubsuit
 \end{aligned}$$

2. **Descomposición en fracciones parciales:** Para una *función racional propia* es posible la descomposición en fracciones parciales y la integración separada de cada fracción resultante.

3. **Sustitución conveniente:** Ciertas integrales requieren de emplear identidades o sustituciones que conduzcan a formas integrables elementales; la **tabla 1.4** muestra un conjunto de integrales de este tipo.

4. **Formas variadas:** A veces es necesario reexpresar la integral de manera que resulte una forma conocida o fácilmente integrable:

 **Ejemplo 1.7.** Integrar  $\int \sec x dx$ .

**Solución.** Multiplicando y dividiendo por  $\sec x + \tan x$  resulta:

$$\int \sec x dx = \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x dx}{\sec x + \tan x} = \ln|\sec x + \tan x| + C \quad \clubsuit$$

Tabla 1.3 Integrales de funciones elementales

$\int u dv = uv - \int v du$	$\int \sin u du = -\cos u + C$	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$
$\int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$	$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$
$\int \frac{du}{u} = \ln u  + C$	$\int \tan u du = \ln \sec u  + C$	$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{u+a}{u-a} \right  + C$
$\int e^u du = e^u + C$	$\int \cot u du = \ln \sin u  + C$	$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arccsc} \left  \frac{u}{a} \right  + C$
$\int b^u du = \frac{b^u}{\ln b} + C$	$\int \sec u du = \ln \sec u + \tan u  + C$	$\int \arcsin u du = u \arcsin u + \sqrt{1-u^2} + C$
$\int u e^{au} du = \frac{e^{au}}{a^2} (au - 1) + C$	$\int \csc u du = \ln \csc u - \cot u  + C$	$\int \arccos u du = u \arccos u - \sqrt{1-u^2} + C$
$\int u^n e^{au} du = \frac{u^n e^{au}}{a} - \frac{n}{a} \int u^{n-1} e^{au} du + C$	$\int \sec u \tan u du = \sec u + C$	$\int \arctan u du = u \arctan u - \ln \sqrt{1+u^2} + C$
$\int \ln u du = u \ln u - u + C$	$\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$	$\int \operatorname{arccot} u du = u \operatorname{arccot} u + \ln \sqrt{1+u^2} + C$
$\int u^n \ln u du = u^{n+1} \left[ \frac{\ln u}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] + C$	$\int \sec^2 u du = \tan u + C$	$\int \sec^{-1} u du = u \sec^{-1} u - \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) + C$
$\int e^{au} \ln u du = \frac{1}{a} e^{au} \ln u - \frac{1}{a} \int \frac{e^{au}}{u} du$	$\int \csc^2 u du = -\cot u + C$	$\int \csc^{-1} u du = u \csc^{-1} u + \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) + C$
$\int \frac{du}{u \ln u} = \ln(\ln u) + C$		

**Tabla 1.4** Sustituciones convenientes para integración de funciones

Forma	condición	sustitución	integral resultante
$\int \sin^m u \cos^n u du$	$m \in \{Z^+ \% 2 \neq 0\}$	$\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$	$\int [\cos^n u (1 - \cos^2 u)^{m-1}] \sin u du$
$\int \sin^m u \cos^n u du$	$n \in \{Z^+ \% 2 \neq 0\}$	$\cos^2 u = 1 - \sin^2 u$	$\int [\sin^m u (1 - \sin^2 u)^{n-1}] \cos u du$
$\int \sin^m u \cos^n u du$	$m, n \in \{Z^+ \% 2 = 0\}$	$\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u$ $\sin^2 u = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2u$ $\cos^2 u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2u$	varias formas elementales
$\int \sin mu \cos n u du$ $\int \sin mu \sin n u du$ $\int \cos mu \cos n u du$	$m, n \in \{Z^+\}$ $m \neq n$	$\sin mu \cos nu = \frac{1}{2} \sin(m+n)u$ $\quad + \frac{1}{2} \sin(m-n)u$ $I_1 = \frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)}$ $I_2 = \frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)}$	$\int \sin mu \cos n u du = -I_1 - I_2 + C$ $\int \sin mu \sin n u du = -I_1 + I_2 + C$ $\int \cos mu \cos n u du = I_1 + I_2 + C$
$\int \tan^n u du$	$n \in \{Z^+\}$	$\tan^n u = \tan^{n-2} u \tan^2 u$ $\tan^2 u = (\sec^2 u - 1)$	$\int \tan^{n-2} u (\sec^2 u - 1) du$
$\int \cot^n u du$	$n \in \{Z^+\}$	$\cot^n u = \cot^{n-2} u \cot^2 u$ $\cot^2 u = (\csc^2 u - 1)$	$\int \cot^{n-2} u (\csc^2 u - 1) du$
$\int \tan^m u \sec^n u du$	$n \in \{Z^+ \% 2 = 0\}$	$\sec^2 u = \tan^2 u + 1$	$\int [\tan^m u (\tan^2 u - 1)^{n-2}] \sec^2 u du$
$\int \tan^m u \sec^n u du$	$m \in \{Z^+ \% 2 \neq 0\}$	$\tan^m u = \tan u \tan^{m-1} u$ $\tan^2 u = \sec^2 u - 1$	$\int [\sec^{n-1} u (\sec^2 u - 1)^{m-3}] \sec u \tan u du$
$\int (\sqrt{a^2 - u^2})^k du$	$k \in \{Q \subseteq \mathfrak{R}\}$	$u = a \sin z \rightarrow du = a \cos z dz$ $\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos z$	$\int (a \cos z)^k a \cos z dz$
$\int (\sqrt{a^2 + u^2})^k du$	$k \in \{Q \subseteq \mathfrak{R}\}$	$u = a \tan z \rightarrow du = a \sec^2 z dz$ $\sqrt{a^2 + u^2} = a \sec z$	$\int (a \sec z)^k a \sec^2 z dz$
$\int (\sqrt{u^2 - a^2})^k du$	$k \in \{Q \subseteq \mathfrak{R}\}$	$u = a \sec z$ $du = a \sec z \tan z dz$ $\sqrt{u^2 - a^2} = a \tan z$	$\int (a \tan z)^k a \sec z \tan z dz$

El operador modulo se designa por % y devuelve el residuo de una división entera:  $1=5\%2$ .

## Notación integrodiferencial

Un *sistema físico* es un ente con características propias que se aísla para su estudio basado en las *leyes experimentales de la física*. Los principios del álgebra básica son suficientes para la modelación de *sistemas estáticos*. Sin embargo las máquinas y procesos naturales o artificiales son en alto grado dinámicos, tales *sistemas dinámicos* se modelan mediante *ecuaciones integrodiferenciales*.

## Ecuaciones integrodiferenciales

Una *ecuación* es una igualdad que se cumple para ciertos valores de la variable o función que interviene en ella. Una *ecuación diferencial* (ED) involucra una *función*, sus *derivadas* y las *variables independientes*. Una *ecuación integrodiferencial* (EID) incluye además *integrales* de la función, de sus derivadas o de las variables independientes. El *orden* (O) se determina por la derivada mayor, el *grado* (G) se determina por el exponente de la *derivada de mayor orden*. La ED puede ser *ordinaria* (EDO) o *parcial* (EDP) según incluya *derivadas ordinarias o parciales*. La ED es *lineal* (grado 1) si lo es en la variable dependiente y todas sus derivadas, es *homogénea* ( $y'' + xy' + y = 0$ ) si no hay términos que sean funciones sólo de la variable independiente. La *primitiva* o *solución* es la función que satisface la ED y puede ser *implícita* o *explícita*. La *solución general* de la ED de *orden n* tendrá *n constantes arbitrarias*, la *solución particular* es la determinación de los valores de las *n constantes arbitrarias* y se obtiene de *n+1 condiciones iniciales* de la función y sus *n derivadas*.

## ED de primer orden y primer grado

La ED de grado y orden 1 tiene la forma  $F(x, y, y') = 0$ , donde  $y = y(x)$  y su solución es  $f(x, y, C) = 0 \Leftrightarrow f(x, y) = C$ . Los métodos de solución depende de su forma, los siguientes son los más comunes: *formas integrables* (*variables separables*, *ecuaciones exactas*, *ecuaciones homogéneas*), *ecuaciones lineales*.

**Formas integrables**

\* Una ED de *variables separables*, de la forma  $P(x)+Q(y)y'=0$  se resuelve separando variables dependientes e independientes e integrando:

$$P(x)+Q(y)y'=0 \rightarrow \int P(x)dx + \int Q(y)dy = C \tag{43}$$

\* Una ED de la forma  $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ , es *exacta* si  $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ . Siendo  $P(x,y) = \partial f(x,y)/\partial x$  y  $Q(x,y) = \partial f(x,y)/\partial y$ . Entonces su primitiva es  $f(x,y)=C$  y se obtiene sistemáticamente por *integración parcial*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} dx = Pdx &\longrightarrow f(x,y) = \int^x Pdx + \phi(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int^x Pdx + \frac{d\phi}{dy} = Q &\longrightarrow \phi = \int \left\{ Q - \frac{\partial}{\partial y} \int^x Pdx \right\} dy \\ \therefore f = \int^x Pdx + \int^y \left( Q - \frac{\partial}{\partial y} \int^x Pdx \right) dy \end{aligned} \tag{44}$$

\* Una ecuación de la forma  $f(x,y)$  se dice que es *homogénea y de grado n* si al sustituir  $x$  por  $\lambda x$  e  $y$  por  $\lambda y$  se cumple que  $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$ . Una ED de la forma  $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$  es *homogénea, si tanto P como Q son homogéneas y del mismo grado*. La *transformación*  $y = vx \rightarrow dy = vdx + xdv$ , reduce la ED homogénea a la forma:

$$P(x,v)dx + Q(x,v)dv = 0 \tag{45}$$

Y se resuelve por *separación de variables*. Después de integrar se sustituye  $v$  por  $y/x$  para recobrar las variables originales.

**Ecuación lineal**

Una ecuación lineal de grado 1 de la forma  $y'+yP(x)=Q(x)$  se resuelve considerando el *factor integrante*  $\mu = e^{\int Pdx}$  y su primitiva es:

$$ye^{\int Pdx} = \int Q(x) e^{\int Pdx} \rightarrow y = e^{-\int Pdx} \int Q(x) e^{\int Pdx} + Ce^{\int Pdx} = y_p + y_h \tag{46}$$

$y_p$  se denomina *solución particular* o *respuesta en estado estable*,  $y_h$  *solución homogénea* o *respuesta transitoria* (proviene de la ED homogénea asociada  $y'+yP(x)=0$ ).

Una ecuación de la forma  $y^l + yP(x) = y^n Q(x)$  se conoce como *ecuación de Bernoulli* y se reduce a lineal mediante la transformación  $v = y^{1-n}$ :

$$\begin{aligned} v &= y^{1-n} = y^{-n+1} \\ \frac{dv}{dx} &= (-n+1)y^{-n} \frac{dy}{dx} \rightarrow y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} \frac{dv}{dx} \\ \frac{dy}{dx} + yP(x) &= y^n Q(x) \rightarrow y^{-n} \frac{dy}{dx} + y^{-n+1} P(x) = Q(x) \\ \frac{1}{1-n} \frac{dv}{dx} + vP(x) &= Q(x) \rightarrow \frac{dv}{dx} + v\{(1-n)P(x)\} = (1-n)Q(x) \end{aligned} \quad (47)$$

## ED de primer orden y grado superior

La EDO de *orden 1* y *grado n*, tiene la forma:  $y^n + P_1(x,y)y^{n-1} + \dots + P_{n-1}(x,y)y' + P_n(x,y) = 0$ . Si expresamos  $p = y'$ , entonces una ED orden 1 y grado n puede escribirse como un polinomio de p:

$$p^n + P_1(x,y)p^{n-1} + \dots + P_{n-1}(x,y)p + P_n(x,y) = 0 \quad (48)$$

ED que se pueden resolver respecto a p. Considerar la ED como un polinomio de p, factorizar  $(p-F_1)(p-F_2)\dots(p-F_n)=0$  y resolver cada ED resultante de primer grado  $y'=F_k(x,y)$  cuya solución es  $f_k(x,y,C)=0$ , entonces la solución general se expresa como el producto de las soluciones particulares:

$$f_1(x,y,C) \cdot f_2(x,y,C) \dots f_n(x,y,C) = 0 \quad (49)$$

Otros casos especiales de poca aplicación práctica incluyen solución respecto x e y. La ED de Clairaut es  $y = rx + f(r)$  y su solución es  $y = Cx + f(C)$ .

## ED lineal de orden superior

La ED lineal de orden superior tiene la forma  $P_0 y^n + P_1 y^{n-1} + \dots + P_{n-1} y' + P_n y = Q$ , donde  $y^k$  es la *k-ésima derivada* (de grado 1), los *coeficientes*  $P_k$  son *funciones de la variable independiente*  $P_k(x)$ , o *constantes* y el *término independiente*  $Q$  una *función*  $Q(x)$ , una *constante* o *cero*. Una EDO lineal de coeficientes constantes de grado n se puede tratar como un *polinomio en la derivada de grado n* y resolver por varios

métodos, tal ecuación se denomina *invariante en el tiempo* y tiene gran aplicación en los sistemas de control y en general en la descripción física de gran variedad de fenómenos naturales.

La ED lineal de coeficientes constantes de orden  $n$ , se resuelve por varios métodos bien definidos: *coeficientes indeterminados, variación de parámetros, método del operador  $D$  y transformada de Laplace*. Los primeros dos son de ensayo y error, la transformada de Laplace es una formalización de los métodos de operador y es directo y es el método tradicional para el estudio de los sistemas de control. A continuación se muestra la ED lineal invariante de orden superior así como su *solución general* que consta de la suma de  $n$  soluciones linealmente independientes:

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_0 y^{(0)} &= 0 \\ y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x} \end{aligned} \quad (50)$$

A manera de ejemplo se expondrá la solución de la ED de orden 2:

$$a_2 y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_0 y^{(0)} = 0 \quad (51)$$

La *ecuación característica* o *auxiliar* asociada se puede resolver por la fórmula cuadrática y se tienen 3 casos según sus raíces sean reales o complejas:

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0 \quad (52)$$

Caso I - **raíces reales distintas**  $r_1 \neq r_2$ :

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \quad (53)$$

Caso II - **raíces reales e iguales**  $r_1 = r_2$ :

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x} \quad (54)$$

Caso III - **raíces complejas conjugadas**  $r_1 = a + jb$ ,  $r_2 = a - jb$ :

$$y = c_1 e^{(a+jb)x} + c_2 e^{(a-jb)x} = e^{ax} (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx) \quad (55)$$

## Notación matricial y sistemas de ecuaciones lineales

Una matriz bidimensional es un arreglo rectangular  $m \times n$  de celdas dispuestas en  $m$  filas y  $n$  columnas. Sea  $\mathbf{A}$  una matriz  $m \times n$ , sea  $i$  el índice de fila y  $j$  el índice de columna, se denota por  $a_{ij}$  cualquier elemento de la matriz y la matriz por  $(a_{ij})$ . La traspuesta de una matriz se forma cambiando las filas por las columnas y se denota por  $\mathbf{A}^T$  o  $\mathbf{A}^t$ , es decir:  $(a_{ij})^T = (a_{ji})$ . Las matrices de escalares se clasifican en:  $n$ -cuadrada, de orden  $n$ ,  $n$ -matriz,  $n \times n$  o  $n^2$ ; identidad  $\mathbf{I}$  unos en su diagonal principal (DP) ceros en otra parte; triangular superior MTS o triangular inferior MTI según tenga ceros debajo o sobre la DP; diagonal, ceros en cualquier parte que no sea la DP; simétrica si  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ ; antisimétrica si  $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ ; ortogonal si  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ , donde  $\mathbf{A}^{-1}$  es la matriz inversa de  $\mathbf{A}$  y cumple que  $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ ; normal aquella que conmuta con su traspuesta  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$  (ejemplos: simétrica, antisimétrica y ortogonal). Sean  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  dos matrices  $m \times n$  y  $p \times q$ . La suma y resta solo está definida para matrices de igual dimensión  $m=p$  y  $n=q$ , se definen por  $(a_{ij}) + (b_{ij})$  y  $(a_{ij}) - (b_{ij})$ ; el producto por un escalar  $k$ , se define por  $k(a_{ij})$ . Un vector fila  $(\mathbf{a}_i)$ , es una matriz  $n \times 1$ , un vector columna  $(\mathbf{b}_j)$ , es una matriz  $1 \times m$  y se define su producto escalar cuando  $n=m$  por  $(\mathbf{a}_i) \cdot (\mathbf{b}_j) = (a_i) + (b_j)$ . La multiplicación solo está definida si el número de columnas de  $\mathbf{A}$  es igual al número de filas de  $\mathbf{B}$ , es decir  $n=p$ , la matriz resultante  $\mathbf{C}$  será  $m \times q$ , y se efectúa como el producto escalar de cada vector fila de  $\mathbf{A}$  denotado por  $[\mathbf{A}_i]$  por cada vector columna de  $\mathbf{B}$  denotado por  $[\mathbf{B}_j]$ , es decir  $(c_{ij}) = [\mathbf{A}_i] \cdot [\mathbf{B}_j]$ . La división de  $\mathbf{A}$  entre  $\mathbf{B}$  se define por  $\mathbf{A}/\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$ .

El determinante de una matriz  $n$ -cuadrada  $\mathbf{A}$ , se denota por  $\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \Delta_G$ , es un escalar (no un valor absoluto) y se obtiene por recursividad. A cada elemento  $a_{ij}$  de la  $n$ -matriz le corresponde un signo dado por  $(-1)^{i+j}$  es decir:  $(+ - + \dots)$ ; la submatriz de  $a_{ij}$  es aquella  $n$ -matriz que se obtiene eliminando la  $i$ -ésima fila y la  $j$ -ésima columna; el menor  $M_{ij}$  de  $a_{ij}$  es el determinante de su submatriz  $M_{ij} = |a_{ij}|$ ; el cofactor o adjunto de  $a_{ij}$  se define por  $(-1)^{i+j} M_{ij}$ . El determinante de una  $n$ -matriz es la suma de

los productos de los elementos de cualquier fila o columna por sus correspondientes cofactores, en símbolos:

$$K \in \{1 \dots n\}$$

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} * (-1)^{i+j} * |a_{ij}| \quad \Leftrightarrow \quad |A| = \sum_{j=K}^n a_{ij} * (-1)^{i+j} * |a_{ij}| \quad (56)$$

$$\text{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} * |a_{ij}| \leftarrow \text{cofactor. Ejemplo: } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Otra forma de expresar recursivamente el determinante es como sigue: Si **A** es una n-matriz, sea **A<sub>ij</sub>** la (n-1)-matriz obtenida a partir de **A** suprimiendo su *i*-ésimo renglón y su *j*-ésima columna. Entonces el determinante **|A|** a lo largo de su *i*-ésimo renglón está dado por:

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} * (-1)^{i+j} * |A_{ij}| \quad (\text{i fija}) \quad (57)$$

Para una *matriz de 3x3* existe un método conocido como *regla de Sarrus* y consiste en duplicar las filas 1 y 2 en la parte inferior de la matriz, el determinante es la suma de los *productos de los elementos diagonales*, hacia abajo son positivos y hacia arriba son negativos, es decir:

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \quad (58)$$

Si una n-matriz **A** tiene como *inversa* **A<sup>-1</sup>** se dice que es *regular* o *invertible* (de lo contrario será *singular* o no invertible) y satisface que **AA<sup>-1</sup>=A<sup>-1</sup>A=I**, y se obtiene por *transformaciones elementales de renglón TER (método de Gauss-Jordan)* sobre la *matriz aumentada* de **A** con la matriz identidad **I**, **A:I**, de manera tal que se obtenga **I:A<sup>-1</sup>**, o bien por determinantes. Sea *a ≠ 0* un *escalar* y *k* un *índice* {1...n}, las TER son: (1) **[A<sub>i</sub>]=[A<sub>k</sub>]**, **[A<sub>j</sub>]=[A<sub>k</sub>]**; (2) *a***[A<sub>i</sub>]**, *a***[A<sub>j</sub>]**; (3) *a***[A<sub>i</sub>±[A<sub>i+k</sub>]**, *a***[A<sub>j</sub>±[A<sub>j+k</sub>]**; en general este procedimiento es *iterativo*. Empleando determinantes la inversa de **A** esta dada por:

$$A^{-1} = \frac{(\text{cof}(a_{ij}))^T}{|A|} = \frac{\text{adj} A}{|A|} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \quad (59)$$

Para una *matriz* de 2-cuadrada se tiene que:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}, \quad \text{cof } A = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}, \\ \text{adj } A = (\text{cof } A)^T = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\det A} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \quad (60)$$

**Ejemplo 1.8.** Determinar la inversa de **A**, empleando determinantes.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Solución.** (1) Se determina el determinante de **A**; (2) se encuentra la matriz de cofactores y la matriz adjunta; (3) se aplica la fórmula:

$$(1) \quad \det A = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2(-2 - 3) = 2 - 2(-5) = 12 \neq 0 \quad \therefore \text{tiene inversa}$$

(2) Los cofactores de cada elemento  $a_{ij}$  son los determinantes de las submatrices obtenidas al eliminar la fila y columna  $ij$ :

$$\text{Cof } A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \text{adj } A = (\text{Cof } A)^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 5 & 2 & -2 \\ -3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 5 & 2 & -2 \\ -3 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad *$$

Un **sistemas de n ecuaciones lineales** en el que los *coeficientes* se denotan por  $a_{ij}$ , las variables por  $x_{ij}$  y los *términos independientes* por  $Y_i$ , puede transformarse matricialmente en: una *matriz de coeficientes n-cuadrada* **A**, un *vector columna de n-incógnitas* **X** y un *vector columna de n-términos independientes* **Y**; cuya relación entre sí es: **AX=Y**, la *matriz aumentada del sistema* MAS se representa por **A:Y**.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n &= y_3 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n &= y_n \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \rightarrow AX = Y \quad (61)$$

La solución **X**, en forma matricial esta dada por **X=A<sup>-1</sup>Y**. A si mismo *para hallar la j-ésima incógnita  $x_j$*  se emplea la *regla de Cramer* que consiste en sustituir

la  $j$ -ésima columna de la matriz de coeficientes (cuyo determinante es  $\Delta_G$ ) por el vector columna de términos independientes y hallar su determinante denotado por  $\Delta_j$ , de manera que  $x_j = \Delta_j / \Delta_G$ .

Los métodos recursivos expuestos, son útiles para sistemas pequeños; sin embargo para grandes sistemas (como las matrices de admitancias de una red eléctrica) se emplean métodos cuya base son las TER y son en esencia iterativos. El método de Gauss MG consiste en tomar la MAS, aplicar TER y formar una MTS y realizar sustitución regresiva. El método de Gauss-Jordan consiste en tomar la MAS, aplicar TER y formar una matriz identidad, entonces el vector de aumento tendrá los valores de las incógnitas.

**Ejemplo 1.9.** Resolver el sistema de ecuaciones lineales por transformaciones elementales de renglón.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

**Solución.** Aplicando las TER a la matriz aumentada del sistema, se tiene que:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 7 & -4 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{12}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & 7 \\ 5 & 7 & -4 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-2R_1+R_2 \\ -5R_1+R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & 1 & 14 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & -3 & 1 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow{3R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{55}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{2}{11}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{-2R_3+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{4R_3+R_1 \\ -\frac{3}{2}R_3+R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \clubsuit \end{aligned}$$

Los métodos de aproximaciones como Jacobi y Gauss-Seidel consideran ecuaciones de recurrencia para cada  $x_i$ , cuya aproximación  $x_k$  se satisface cuando la diferencia entre valores inmediatos es un infinitésimo  $\epsilon$ .

$$\begin{aligned}
 y_k &= a_{k1}x_1 + a_{k2}y_k + \dots + a_{kk}x_k + \dots + a_{kn}x_n, & \left| \frac{x_k(i+1) - x_k(i)}{x_k} \right| < \varepsilon \\
 x_k(i+1) &= \frac{1}{a_{kk}} \left[ y_k - \sum_{r=1}^{k-1} a_{kr}x_r(i) - \sum_{r=k+1}^n a_{kr}x_r(i) \right] \leftarrow \text{Jacobi} \\
 x_k(i+1) &= \frac{1}{a_{kk}} \left[ y_k - \sum_{r=1}^{k-1} a_{kr}x_r(i+1) - \sum_{r=k+1}^n a_{kr}x_r(i) \right] \leftarrow \text{Gauss - Seidel}
 \end{aligned} \tag{62}$$

### Valores y vectores característicos de matrices cuadradas

Se dice que un número  $\lambda | \lambda \in \mathfrak{R} \vee \mathfrak{C}$ , es un *valor propio*, *valor característico* o *eigenvalor* de una *matriz*  $n$ -cuadrada  $\mathbf{A}$ , si existe un *n-vector propio*, *n-vector característico* o *n-eigenvector*  $\mathbf{K}$  correspondiente al valor propio  $\lambda$  y satisfacen que:  $\mathbf{AK} = \lambda \mathbf{K}$ . Esta expresión se representa comúnmente por:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{K} = 0 \tag{63}$$

Siendo  $\mathbf{I}$ , la *n-matriz identidad*. En forma extendida la ecuación anterior se expresa por:

$$\begin{aligned}
 (a_{11} - \lambda)k_1 + a_{12}k_2 + \dots + a_{1n}k_n &= 0 \\
 a_{21}k_1 + (a_{22} - \lambda)k_2 + \dots + a_{2n}k_n &= 0 \\
 \dots &= \vdots \\
 a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)k_n &= 0
 \end{aligned} \tag{64}$$

Un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas tiene una solución no trivial si y sólo si el determinante de la matriz de coeficientes es igual a cero. Este principio requiere que:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \tag{65}$$

El desarrollo de este determinante produce un polinomio de grado  $n$ , en  $\lambda$ , conocido como *ecuación característica*, las raíces del polinomio son los valores propios; y la sustitución de un valor particular de  $\lambda$  en el sistema  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{K} = 0$ , permite hallar el vector característico; por solución del *sistema singular resultante*, lo cual requiere la asignación de un valor arbitrario para un componente del vector característico por ejemplo  $v_n = k$ .

 **Ejemplo 1.10.** Determinar los valores y vectores característicos de  $\mathbf{A}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

**Solución.** (1) Se determina el polinomio característico y sus raíces; (2) se emplean los valores característicos y se resuelve el sistema singular para hallar cada vector característico, es decir:

$$(1) \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + 12\lambda = -\lambda(\lambda + 4)(\lambda - 3) = 0 \rightarrow \lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\text{Para } \lambda = 0 : (A - 0I | 0) = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{-6R_1+R_2 \\ R_1+R_3}]{\substack{-6R_1+R_2 \\ R_1+R_3}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{13}R_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{-2R_2+R_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} k_2 + \frac{6}{13}k_3 = 0 \\ k_1 + \frac{1}{13}k_3 = 0 \end{array} \quad \text{si } k_3 = -13 \longrightarrow \begin{array}{l} k_2 = 6 \\ k_1 = 1 \end{array} \quad \therefore \quad K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{bmatrix}$$

$$\text{Para } \lambda = -4 : (A + 4I | 0) = \left[ \begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{operaciones elementales de renglon}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{si } k_3 = -13 \quad K_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Para } \lambda = 3 : (A - 3I | 0) = \left[ \begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{operaciones elementales de renglon}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{si } k_3 = -2 \quad K_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \clubsuit$$

Clases en C++ para el manejo de *vectores*, *matrices* y *determinantes* con las operaciones elementales.

```

% Clase para el manejo de vectores.
arce_brito@hotmail.com [Ms Vc++ 6]
% Archivo de declaración: Vector.h

class Vector
{
public:
    Vector ();
    Vector (const Vector& rVector);
    explicit Vector (int iSize);

    virtual ~Vector ();

    Vector& operator= (const Vector& rVector);
    Vector& operator+= (const Vector& rVector);
    Vector& operator-= (const Vector& rVector);

    Vector& operator+= (double dNum);
    Vector& operator-= (double dNum);
    Vector& operator*= (double dNum);
    Vector& operator/= (double dNum);

    bool operator== (const Vector& rVector);
    bool operator!= (const Vector& rVector);

    Vector operator- () const;
    Vector operator+ (const Vector& rVector) const;
    Vector operator- (const Vector& rVector) const;
    double operator* (const Vector& rVector) const;

    friend Vector operator+ (const Vector& rVector, double dNum);
    friend Vector operator+ (double dNum, const Vector& rVector);
    friend Vector operator- (const Vector& rVector, double dNum);
    friend Vector operator- (double dNum, const Vector& rVector);
    friend Vector operator* (const Vector& rVector, double dNum);
    friend Vector operator* (double dNum, const Vector& rVector);
    friend Vector operator/ (const Vector& rVector, double dNum);

    double operator[] (int iIndex) const;
    double& operator[] (int iIndex);
    int GetSize (void) const { return _iSize; }

private:
    int _iSize;
    double* _pdArray;
};

% Clase para el manejo de matrices, basado en la clase Vector.
arce_brito@hotmail.com [Ms Vc++ 6]
% Archivo de declaración: Matrix.h

#include "Vector.h"

class Matrix
{
public:
    Matrix ();
    Matrix (const Matrix& rMatrix);
    Matrix (int iRows, int iColumns);

    virtual ~Matrix ();

    Matrix& operator= (const Matrix& rMatrix);
    Matrix& operator+= (const Matrix& rMatrix);
    Matrix& operator-= (const Matrix& rMatrix);
    Matrix& operator*= (const Matrix& rMatrix);

    bool operator== (const Matrix& rMatrix);
    bool operator!= (const Matrix& rMatrix);

    Matrix operator+ (const Matrix& rMatrix) const;
    friend Matrix operator+ (const Matrix& rMatrix, double dNum);
    friend Matrix operator+ (double dNum, const Matrix& rMatrix);

    Matrix operator- () const;
    Matrix operator- (const Matrix& rMatrix) const;
    friend Matrix operator- (const Matrix& rMatrix, double dNum);
    friend Matrix operator- (double dNum, const Matrix& rMatrix);

    Matrix operator* (const Matrix& rMatrix) const;
    friend Matrix operator* (const Matrix& rMatrix, double dNum);
    friend Matrix operator* (double dNum, const Matrix& rMatrix);

    friend Matrix operator/ (const Matrix& rMatrix, double dNum);

    double operator! ();
    Matrix operator~ ();

    Vector operator[] (int iIndex) const;
    Vector& operator[] (int iIndex);

    void Print(void);

    Vector GetRow (int iIndex) const;
    Vector GetColumn (int iIndex) const;

    int GetRows (void) const { return _iRows; }
    int GetColumns (void) const { return _iColumns; }

    void RemoveRow (int iIndex);
    void RemoveColumn (int iIndex);

private:
    bool ValidateSizes (const Matrix& rMatrix) const;

    int _iRows;
    int _iColumns;

    Vector* _pVector;
};

```

```

% Clase para el manejo de vectores.
arce_brito@hotmail.com [Ms Vc++ 6]
% Archivo de implementación: Vector.cpp

#include "Vector.h"

Vector::Vector() :
    _iSize(0),
    _pdArray(0)
{
}

Vector::Vector(const Vector& rVector) :
    _iSize(rVector._iSize),
    _pdArray(0)
{
    _pdArray = new double[_iSize];
    memcpy(_pdArray,
        rVector._pdArray, _iSize*sizeof(double));
}

Vector::Vector(int iSize) :
    _iSize(iSize),
    _pdArray(0)
{
    _pdArray = new double[iSize];
    memset(_pdArray, 0, iSize*sizeof(double));
}

Vector::~Vector()
{
    if (0 != _pdArray)
    {
        delete[] _pdArray;
        _pdArray = 0;
    }
}

Vector& Vector::operator=(const Vector& rVector)
{
    if (this != &rVector)
    {
        if (0 != _pdArray)
        {
            delete[] _pdArray;
            _pdArray = 0;
        }
        _iSize = rVector._iSize;
        _pdArray = new double[_iSize];
        memcpy(_pdArray,
            rVector._pdArray, _iSize*sizeof(double));
    }
    return *this;
}

Vector& Vector::operator+=(const Vector& rVector)
{
    *this = *this + rVector;
    return *this;
}

Vector& Vector::operator-=(const Vector& rVector)
{
    *this = *this - rVector;
    return *this;
}

Vector& Vector::operator+=(double dNum)
{
    *this = *this + dNum;
    return *this;
}

Vector& Vector::operator-=(double dNum)
{
    *this = *this - dNum;
    return *this;
}

Vector& Vector::operator*(double dNum)
{
    *this = *this * dNum;
    return *this;
}

Vector& Vector::operator/=(double dNum)
{
    *this = *this / dNum;
    return *this;
}

bool Vector::operator==(const Vector& rVector)
{
    bool bEqual = false;
    if (rVector._iSize != _iSize)
    {
        // THROW EXCEPTION
    }
    if (0 == memcmp(_pdArray,
        rVector._pdArray, _iSize*sizeof(double)))
    {
        bEqual = true;
    }
    return bEqual;
}

bool Vector::operator!=(const Vector& rVector)
{
    return !operator==(rVector);
}

Vector Vector::operator-() const
{
    Vector vector(_iSize);
    for (int i = 0; i < _iSize; i++)
    {
        vector._pdArray[i] = -_pdArray[i];
    }
}

```

1

```

}
return vector;
}

Vector Vector::operator+(const Vector& rVector) const
{
    Vector vector(_iSize);
    for (int i = 0; i < _iSize; i++)
    {
        vector._pdArray[i] = _pdArray[i] + rVector._pdArray[i];
    }
    return vector;
}

Vector Vector::operator-(const Vector& rVector) const
{
    return operator+(-rVector);
}

double Vector::operator*(const Vector& rVector) const
{
    double dMag = 0;
    if (_iSize != rVector._iSize)
    {
        // THROW EXCEPTION
    }
    for (int i = 0; i < _iSize; i++)
    {
        dMag += _pdArray[i] * rVector._pdArray[i];
    }
    return dMag;
}

Vector operator+(const Vector& rVector, double dNum)
{
    Vector vector(rVector._iSize);
    for (int i = 0; i < rVector._iSize; i++)
    {
        vector._pdArray[i] = rVector._pdArray[i] + dNum;
    }
    return vector;
}

Vector operator+(double dNum, const Vector& rVector)
{
    return operator+(rVector, dNum);
}

Vector operator-(const Vector& rVector, double dNum)
{
    Vector vector(rVector._iSize);
    for (int i = 0; i < rVector._iSize; i++)
    {
        vector._pdArray[i] = rVector._pdArray[i] - dNum;
    }
    return vector;
}

Vector operator-(double dNum, const Vector& rVector)
{
    return -operator-(rVector, dNum);
}

Vector operator*(const Vector& rVector, double dNum)
{
    Vector vector(rVector._iSize);
    for (int i = 0; i < rVector._iSize; i++)
    {
        vector._pdArray[i] = rVector._pdArray[i] * dNum;
    }
    return vector;
}

Vector operator*(double dNum, const Vector& rVector)
{
    return operator*(rVector, dNum);
}

Vector operator/(const Vector& rVector, double dNum)
{
    return operator*(rVector, 1/dNum);
}

double Vector::operator[](int iIndex) const
{
    if ((iIndex >= _iSize) || (iIndex < 0))
    {
        // THROW EXCEPTION
    }
    return _pdArray[iIndex];
}

double& Vector::operator[](int iIndex)
{
    if ((iIndex >= _iSize) || (iIndex < 0))
    {
        // THROW EXCEPTION
    }
    return _pdArray[iIndex];
}

```

2

```

1
% Clase para el manejo de matrices.
arce_brito@hotmail.com [Ms Vc++ 6]
% Archivo de implementación: Matrix.cpp

#include "Matrix.h"
Matrix::Matrix() :
    _iRows(0),
    _iColumns(0),
    _pVector(0)
{
}
Matrix::Matrix(const Matrix& rMatrix) :
    _iRows(rMatrix._iRows),
    _iColumns(rMatrix._iColumns),
    _pVector(0)
{
    _pVector = new Vector[_iRows];
    for (int i = 0; i < _iRows; i++)
    {
        _pVector[i] = rMatrix._pVector[i];
    }
}
Matrix::Matrix(int iRows, int iColumns) :
    _iRows(iRows),
    _iColumns(iColumns),
    _pVector(0)
{
    Vector vector(_iColumns);
    _pVector = new Vector[_iRows];
    for (int i = 0; i < _iRows; i++)
    {
        _pVector[i] = vector;
    }
}
Matrix::~Matrix()
{
    if (0 != _pVector)
    {
        delete[] _pVector;
        _pVector = 0;
    }
}
Matrix& Matrix::operator=(const Matrix& rMatrix)
{
    if (this != &rMatrix)
    {
        if (0 != _pVector)
        {
            delete[] _pVector;
            _pVector = 0;
        }
        _iRows = rMatrix._iRows;
        _iColumns = rMatrix._iColumns;
        _pVector = new Vector[_iRows];
        for (int i = 0; i < _iRows; i++)
        {
            _pVector[i] = rMatrix._pVector[i];
        }
    }
    return *this;
}
Matrix& Matrix::operator+=(const Matrix& rMatrix)
{
    *this = *this + rMatrix;
    return *this;
}
Matrix& Matrix::operator-=(const Matrix& rMatrix)
{
    *this = *this - rMatrix;
    return *this;
}
Matrix& Matrix::operator*(const Matrix& rMatrix)
{
    *this = *this * rMatrix;
    return *this;
}
bool Matrix::operator==(const Matrix& rMatrix)
{
    bool bEqual = true;
    for (int i = 0; i < _iRows; i++)
    {
        if (_pVector[i] != rMatrix._pVector[i])
        {
            bEqual = false;
            break;
        }
    }
    return bEqual;
}
bool Matrix::operator!=(const Matrix& rMatrix)
{
    return !operator==(rMatrix);
}
Matrix Matrix::operator+(const Matrix& rMatrix) const
{
    Matrix matrix(_iRows, _iColumns);
    ValidateSizes(rMatrix);
    for (int i = 0; i < _iRows; i++)
    {
        matrix._pVector[i] = _pVector[i] + rMatrix._pVector[i];
    }
    return matrix;
}
Matrix operator+(const Matrix& rMatrix, double dNum)
{
    Matrix matrix(rMatrix._iRows, rMatrix._iColumns);

```

```

2
    matrix.ValidateSizes(rMatrix);
    for (int i = 0; i < matrix._iRows; i++)
    {
        matrix._pVector[i] = dNum + rMatrix._pVector[i];
    }
    return matrix;
}
Matrix operator+(double dNum, const Matrix& rMatrix)
{
    return operator+(rMatrix, dNum);
}
Matrix Matrix::operator-() const
{
    Matrix matrix(*this);
    for (int i = 0; i < _iRows; i++)
    {
        matrix._pVector[i] = -_pVector[i];
    }
    return matrix;
}
Matrix Matrix::operator-(const Matrix& rMatrix) const
{
    return *this + (-rMatrix);
}
Matrix operator-(const Matrix& rMatrix, double dNum)
{
    return operator+(rMatrix, -dNum);
}
Matrix operator-(double dNum, const Matrix& rMatrix)
{
    return -operator-(dNum, rMatrix);
}
Matrix Matrix::operator*(const Matrix& rMatrix) const
{
    Matrix matrix(_iRows, rMatrix._iColumns);
    if (_iColumns != rMatrix._iRows)
    {
        // THROW EXCEPTION
    }
    for (int i = 0; i < _iRows; i++)
    {
        for (int j = 0; j < rMatrix._iColumns; j++)
        {
            matrix[i][j] = _pVector[i] * rMatrix.GetColumn(j);
        }
    }
    return matrix;
}
Matrix operator*(const Matrix& rMatrix, double dNum)
{
    Matrix matrix(rMatrix._iRows, rMatrix._iColumns);
    matrix.ValidateSizes(rMatrix);
    for (int i = 0; i < matrix._iRows; i++)
    {
        matrix._pVector[i] = rMatrix._pVector[i] * dNum;
    }
    return matrix;
}
Matrix operator*(double dNum, const Matrix& rMatrix)
{
    return operator*(rMatrix, dNum);
}
Matrix operator/(const Matrix& rMatrix, double dNum)
{
    return operator*(rMatrix, 1/dNum);
}
double Matrix::operator!()
{
    double dDet = 0;
    int iSign = 0;
    if ((_iRows != _iColumns) || (_iRows == 0))
    {
        // THROW EXCEPTION
    }
    if (_iRows == 1)
    {
        dDet = _pVector[0][0];
    }
    else
    {
        Matrix matrixSub;
        for (int j = 0; j < _iColumns; j++)
        {
            matrixSub = *this;
            matrixSub.RemoveRow(0);
            matrixSub.RemoveColumn(j);
            iSign = (j % 2 == 0) ? 1 : -1;
            dDet += iSign * _pVector[0][j] * !matrixSub;
        }
    }
    return dDet;
}
Matrix Matrix::operator~()
{
    Matrix matrix(_iColumns, _iRows);
    for (int i = 0; i < _iRows; i++)
    {
        for (int j = 0; j < _iColumns; j++)
        {
            matrix[j][i] = _pVector[i][j];
        }
    }
    return matrix;
}
Vector Matrix::operator[](int iIndex) const

```

```
{
    if (0 == _pVector)
    {
        // TROW EXCEPTION
    }
    if (iIndex >= _iRows)
    {
        // TROW EXCEPTION
    }
    return _pVector[iIndex];
}

Vector& Matrix::operator[](int iIndex)
{
    if (0 == _pVector)
    {
        // TROW EXCEPTION
    }
    if (iIndex >= _iRows)
    {
        // TROW EXCEPTION
    }
    return _pVector[iIndex];
}

Vector Matrix::GetRow(int iIndex) const
{
    if (0 == _pVector)
    {
        // TROW EXCEPTION
    }

    if (iIndex >= _iRows)
    {
        // TROW EXCEPTION
    }
    return _pVector[iIndex];
}

Vector Matrix::GetColumn(int iIndex) const
{
    Vector vector(_iRows);
    for (int i = 0; i < _iRows; i++)
    {
        vector[i] = _pVector[i][iIndex];
    }

    return vector;
}

bool Matrix::ValidateSizes(const Matrix& rMatrix) const
{
    if (_iRows != rMatrix._iRows)
    {
        // THROW EXCEPTION
    }
    if (_iColumns != rMatrix._iColumns)
    {
        // THROW EXCEPTION
    }
    return true;
}

void Matrix::RemoveRow(int iIndex)
{
    Matrix matrixCopy(_iRows-1, _iColumns);
    for (int i = 0, j = 0; i < _iRows; i++)
    {
        if (iIndex == i)
        {
            continue;
        }
        matrixCopy[j++] = _pVector[i];
    }
    operator=(matrixCopy);
}

void Matrix::RemoveColumn(int iIndex)
{
    Matrix matrixCopy(~(*this));
    matrixCopy.RemoveRow(iIndex);
    operator=(~matrixCopy);
}
}
```

```

% Transformación de una matriz cuadrada en triangular superior. arce_brito@hotmail.com [Matlab 5]
% Método de Gauss. Archivo mTransfTS.m
% Entrada.: matriz mA Y (NxN+1)
% Salida.: la matriz transformada en Triangular Superior: mTS
% Uso.....: mTransfTS(mAY)

function [mTS] = mTransfTS(mAY)
mTS=mAY; N=size(mAY,1);
if size(mAY,2)~=N+1 then
disp('Error! la matriz mAY debe ser NxN+1.')
return;
end
%eliminación del triangulo superior
for c=1:N-1
for f=c+1:N
%Nota mTS(f,:) hace referencia a la fila completa f de mTS
mTS(f,:)=mTS(f,:)-mTS(c,:)*mTS(f,c)/mTS(c,c)
end
end
return;

```

```

% Solución del sistema de ecuaciones por sustitución hacia atrás. arce_brito@hotmail.com [Matlab 5]
% Archivo: mSolveTS.m
% Entrada.: matriz triangular superior mTS (NxN+1)
% Salida.: un vector solución vS(N)
% Uso.....: mSolveTS(mTS)

function [vS] = mSolveTS(mTS)
N=size(mTS,1);
vS=zeros(N,1);
if size(mTS,2)~=N+1 then
disp('Error! la matriz mTS debe ser (NxN+1)')
return;
end
%substitución hacia atras
f=N;
for k=1:N
c=N; sAcumulado=0;
for m=1:N-f
sAcumulado = sAcumulado + mTS(f,c)*vS(c);
c=c-1;
end
vS(f)=(mTS(f,N+1)-sAcumulado) / mTS(f,f);
f=f-1;
end
return;

```

```

% Solución del sistema de ecuaciones por método iterativo de Jacobi. arce_brito@hotmail.com [Matlab 5]
% Archivo: mJacobi.m
% Entrada.: matriz de coeficientes mA Y (NxN),
% vector de términos independientes vY (Nx1)
% Salida.: un vector solución vS(N)
% Uso.....: mJacobi(mA Y)

function [Xs] = mJacobi(mA, vY)
N=size(mA,1);
if size(vY)~=N then
disp('Error! la matriz mTS debe ser (NxN+1)')
return;
end
%la matrices tienen unos como valores iniciales
Xs=ones(N,1);
XsOld=ones(N,1);
%numero máximo de iteraciones
MAXITER=100
%Error máximo permitido
MaxErr=0.0001
deltaE=0;
%formación de la matriz D
D=zeros(N,N);
vdiagA=diag(mA);
for k=1:N
D(k,k)=vdiagA(k);
end
M=inv(D)*(D-mA);
cuentaX=0;
h=0;
while cuentaX<N
cuentaX=0;
%obtiene los valores incognitas iterativamente
Xs=M*XsOld + inv(D)*vY;
for k=1:N
deltaE=abs(Xs(k)-XsOld(k))/XsOld(k);
if deltaE<=MaxErr
cuentaX=cuentaX+1;
end
end
XsOld=Xs;
h=h+1;
if h>=MAXITER
disp('Error! El método no converge');
break;
end
end
return;

```

## Notación vectorial

En la *física clásica* (Newtoniana, en la que  $v \ll c$ ) *todo evento en el espacio* puede ser descrito por una *4-tupla*  $(x,y,z,t)$ ; el *espacio*  $(x,y,z)$  no se deforma con la *velocidad*  $(\mathbf{v})$  y el *tiempo*  $(t)$  es independiente del *marco de referencia* elegido. En el *espacio* un *punto* es una *triada ordenada de escalares*  $P(x,y,z)$ , un *escalar* es cualquier número real, geoméricamente un *vector* es un *segmento de recta dirigido* que une dos puntos  $\mathbf{r} = \overline{PQ}$ , que tiene como *propiedades: magnitud y dirección* y se puede escribir como una *triada ordenada*  $\mathbf{E}=(E_1,E_2,E_3)$ , siendo  $(E_1,E_2,E_3)$  sus *componentes escalares* a lo largo de ejes mutuamente perpendiculares  $x,y,z$  en un *sistema coordenado ortogonal cartesiano (rectangular)*. La *longitud, magnitud, valor absoluto, norma o módulo* del vector es  $E = |\mathbf{E}| = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2}$ , su *dirección* está dada por el *vector normalizado o unitario* (de longitud unidad)  $\hat{E} = \mathbf{E}/|\mathbf{E}|$ , sus *ángulos directores* respecto a los ejes  $x, y, z$  son  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  y se relacionan con sus componentes por  $E_1 = E \cos \theta_x, E_2 = E \cos \theta_y, E_3 = E \cos \theta_z$ . Se utilizan *vectores ortonormales o de la base canónica (unitarios a lo largo de los ejes coordenados)*  $\mathbf{i}=(1,0,0)$ ,  $\mathbf{j}=(0,1,0)$ ,  $\mathbf{k}=(0,0,1)$  para representar un vector como  $\mathbf{E}=E_1\mathbf{i}+E_2\mathbf{j}+E_3\mathbf{k}$ . “Un punto  $P(x,y,z)$  puede ser descrito por un vector de posición  $\mathbf{r}=\mathbf{r}(x,y,z)$  fijo o ligado al origen  $O(0,0,0)$  y se expresa como  $P(\mathbf{r})$ ”, dados dos puntos  $P$  y  $Q$  el vector que va de  $P$  a  $Q$  es  $\overline{PQ} = \mathbf{Q} - \mathbf{P}$ , siendo su magnitud la *distancia*  $|\overline{PQ}|$ . Un *vector libre* puede ser trasladado en el *espacio* conservando su magnitud y dirección, en virtud de lo cual los vectores con sus mismas propiedades se dice que son *equipolentes*.

## Algebra vectorial

Sean  $\mathbf{A}(A_1,A_2,A_3)$  y  $\mathbf{B}(B_1,B_2,B_3)$  dos vectores; su *suma* es  $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ , el *producto por un escalar*  $k$  es  $k\mathbf{B}$ , el *negativo o vector de sentido opuesto* es  $-\mathbf{B}$ , su *diferencia* es  $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ , el *producto escalar, producto interno o producto punto* se define por  $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ , el *producto vectorial, producto externo o producto cruz* se define por  $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$  (el vector resultante es *perpendicular, ortogonal o normal* al plano  $AB$ , su dirección se determina por la **regla de la mano derecha**: cierre la mano derecha en dirección de  $\mathbf{A}$  hacia  $\mathbf{B}$  y el pulgar indicara la dirección de  $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ ). Sea un

vector  $\mathbf{C}(C_1, C_2, C_3)$ , se define el *triple producto escalar* como  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  y el *triple producto vectorial* por  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ , es decir:

$$\begin{aligned}
 \vec{A} &= (A_1, A_2, A_3), \quad \vec{B} = (B_1, B_2, B_3) \\
 \vec{A} + \vec{B} &= (A_1 + B_1, A_2 + B_2, A_3 + B_3) \\
 k\vec{B} &= (kB_1, kB_2, kB_3) \\
 -\vec{B} &= (-B_1, -B_2, -B_3) \\
 \vec{A} - \vec{B} &= \vec{A} + (-\vec{B}) = (A_1 - B_1, A_2 - B_2, A_3 - B_3) \\
 \vec{A} \cdot \vec{B} &= \vec{B} \cdot \vec{A} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta_{AB} \\
 \vec{A} \times \vec{B} &= -\vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = (|\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta_{AB}) \hat{n} \quad \text{el vector } \hat{n} \text{ es normal al plano AB hacia fuera} \\
 \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \quad (66) \\
 \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}
 \end{aligned}$$

La *magnitud* de  $\mathbf{A}$  puede determinarse a partir del *producto punto*, la *componente de A sobre B*  $\text{comp}_B \mathbf{A}$  es un escalar, la *proyección de A sobre B*  $\text{proy}_B \mathbf{A}$  es un vector (cuya magnitud es la componente de  $\mathbf{A}$  sobre  $\mathbf{B}$  y cuya dirección es la de  $\mathbf{B}$ ).

$$\begin{aligned}
 A &= |\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \\
 \text{comp}_B A &= \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} = |\vec{A}| \cos \theta_{AB} \quad (67) \\
 \text{proy}_B A &= (\text{comp}_B A) \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = (\text{comp}_B A) \hat{B} = \left( \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|^2} \right) \vec{B}
 \end{aligned}$$

## Geometría vectorial

La *ecuación de la recta*  $\Gamma = \vec{A} + t\vec{M}$  queda determinada por un vector  $\mathbf{A}(A_1, A_2, A_3)$  cuya punta toca la recta y otro vector  $\mathbf{M}(M_1, M_2, M_3)$  en la dirección de la misma, siendo  $t$  un escalar; o bien por dos puntos  $P(P_1, P_2, P_3)$ ,  $Q(Q_1, Q_2, Q_3)$  a lo largo de la misma.

$$\begin{aligned} \vec{A} &= (A_1, A_2, A_3), \quad \vec{M} = (M_1, M_2, M_3), \quad \vec{I} = (x, y, z) \\ &\quad x = A_1 + M_1 t \\ \vec{I} = \vec{A} + t\vec{M} &\longrightarrow y = A_2 + M_2 t \\ &\quad z = A_3 + M_3 t \end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned} P &= (P_1, P_2, P_3), \quad Q = (Q_1, Q_2, Q_3) \\ &\quad x = P_1 + (Q_1 - P_1)t \\ \vec{I} = \vec{P} + t(\vec{Q} - \vec{P}) &\longrightarrow y = P_2 + (Q_2 - P_2)t \\ &\quad z = P_3 + (Q_3 - P_3)t \end{aligned}$$

La ecuación del plano  $n_1x + n_2y + n_3z + k = 0$  queda completamente determinada por un punto  $P(P_1, P_2, P_3)$  y un vector normal al plano  $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$ ; o bien por tres puntos A, B, C no *colineales* (colineal = a lo largo de la misma línea). La *distancia* del punto  $Q(Q_1, Q_2, Q_3)$  al plano  $n_1x + n_2y + n_3z + k = 0$ , se denota por  $d$ .

$$\begin{aligned} P &= (P_1, P_2, P_3), \quad \vec{n} = (n_1, n_2, n_3) \\ n_1x + n_2y + n_3z + k &= 0 \\ k &= -n_1P_1 - n_2P_2 - n_3P_3 \end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned} A &= (A_1, A_2, A_3), \quad B = (B_1, B_2, A_3), \quad C = (C_1, C_2, C_3) \\ \vec{n} = \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{CA} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 - B_1 & A_2 - B_2 & A_2 - B_2 \\ A_1 - C_1 & A_2 - C_2 & A_3 - C_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$d = \frac{|n_1Q_1 + n_2Q_2 + n_3Q_3 + k|}{|\vec{n}|} = \frac{|n_1Q_1 + n_2Q_2 + n_3Q_3 + k|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

### Cálculo vectorial

**Curvas, superficies, sólidos y regiones.** La *gráfica* de una función  $y=f(x)$ , es el conjunto de todos los *puntos en el plano* (x,y) y engendra una *curva*, y para su análisis completo basta el *cálculo de una variable*. La *gráfica* de una función  $z=f(x,y)$  es el conjunto de los *puntos en el espacio* (x,y,z) y engendra una *superficie*, y para su análisis completo se requiere el *cálculo multivariable*. Un *sólido* es un cuerpo que ser generado haciendo *girar una curva en torno a un eje fijo* o bien *desplazando linealmente una superficie normal a un plano*. Una *región* en la *recta* es un *segmento*, en el *plano* es un *área* y en el *espacio* es un *volumen*.

**Función escalar multivariable y vectorial.** Una *función escalar multivariable* es aquella que consta de 2 o más *variables independientes*, por ejemplo:  $z=f(x,y)$  o

$u=f(x,y,z)$  y se denota por  $f:U \subset R^3 \rightarrow R^1$ . Una *función vectorial*  $\mathbf{E}=\mathbf{E}(x,y,z)$  asigna vectores a cada punto del espacio, es decir es un vector cuyas componentes  $(E_1, E_2, E_3)$  son funciones escalares de  $x,y,z$ :  $E_1=f(x,y,z)$ ,  $E_2=g(x,y,z)$ ,  $E_3=h(x,y,z)$ , se denota por  $f:U \subset R^3 \rightarrow R^3$ . En general una función  $f$  de dominio  $U$ , se define por  $f:U \subset R^n \rightarrow R^m$ , y será función de valores escalares si  $m=1$  y función de valores vectoriales si  $m>1$ .

**Derivada parcial.** La derivada parcial da la *razón de cambio de una función en una dirección*. Consideremos la función  $f(x,y,z)$ , continua (en el intervalo  $I$ ) y diferenciable, se define la *derivada parcial*  $\partial f/\partial x$  de la función respecto de  $x$  (considerando las otras variables  $y,z$  como constantes al derivar), la *derivada parcial sucesiva de orden  $k$*  ( $k \in N$ ) tiene la forma  $\partial^k f/\partial x^k$ , la *derivada parcial iterada (o mixta) de orden 3* es  $\partial^3 f/\partial x \partial y \partial z$  (el orden de derivación  $x,y,z$  es irrelevante), la *diferencial total* de  $f$  es  $df$ , en símbolos:

$$\begin{aligned} f &= f(x, y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= f_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \leftarrow \text{Derivada parcial} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right) \leftarrow \text{Derivada parcial sucesiva de orden 3} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x y z} &= \frac{\partial^3 f}{\partial y z x} = \frac{\partial^3 f}{\partial z y x} \dots = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right) \leftarrow \text{Derivada parcial iterada de orden 3} \\ df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \leftarrow \text{Diferencial total} \end{aligned} \quad (70)$$

**Regla de la cadena.** Se aplica al derivar funciones de funciones. Sea una función  $g(x,y,z)$ , se tienen 2 casos: (1) que  $(x,y,z)$  sean funciones de  $(t_1, t_2, t_3)$  o bien, (2) que  $(x,y,z)$  sean funciones del mismo parámetro  $t$ , entonces:

$$\begin{aligned} g &= g(x,y,z), \quad x = x(t_1), \quad y = y(t_2), \quad z = z(t_3) \\ \frac{\partial g}{\partial t_1} &= \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t_1} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t_1}, \quad \frac{\partial g}{\partial t_2} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t_2} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t_2}, \quad \frac{\partial g}{\partial t_3} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t_3} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t_3} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t_3} \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} g &= g(x,y,z), \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \\ \frac{dg}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{dz}{dt} \end{aligned}$$

**Derivada vectorial.** Si  $u=u(t)$  es un función escalar y  $\mathbf{A}=\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{B}=\mathbf{B}(t)$  son funciones vectoriales, cuyas *componentes son funciones del parámetro  $t$* , entonces:

$$\begin{aligned}
 \vec{A} &= (A_1(t), A_2(t), A_3(t)) & \vec{B} &= (B_1(t), B_2(t), B_3(t)) & u &= u(t) \\
 D_t(\vec{A} + \vec{B}) &= D_t(\vec{B}) + D_t(\vec{A}) \\
 D_t(u\vec{A}) &= uD_t(\vec{A}) + D_t(u)\vec{A} \\
 D_t(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \vec{A} \cdot D_t(\vec{B}) + D_t(\vec{A}) \cdot \vec{B} \\
 D_t(\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{A} \times D_t(\vec{B}) + D_t(\vec{A}) \times \vec{B}
 \end{aligned}
 \tag{72}$$

$$D_t(\vec{A}) = (D_t A_1, D_t A_2, D_t A_3) \rightarrow d\vec{A} = \dot{A}_1 d\vec{e}_1 + \dot{A}_2 d\vec{e}_2 + \dot{A}_3 d\vec{e}_3$$

**Campo escalar y vectorial.** Un *campo* es una *región* (porción o parte) del espacio que se puede describir por una función escalar o vectorial en cada uno de sus puntos. Sea  $\mathbf{r}=\mathbf{r}(x,y,z)$  un *vector de posición* que define cada punto del espacio en el que actúa un campo. Un *campo escalar* o *campo potencial*  $\Phi = \Phi(\vec{r})$  asigna un escalar a cada punto del espacio (*campos escalares: temperatura, densidad*), las superficies con  $\Phi = cte$ , se denominan *equipotenciales*. Un *campo vectorial*  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\vec{r})$  asigna un vector a cada punto del espacio (*campos vectoriales: campo eléctrico, campo magnético, campo gravitacional*), gráficamente los vectores que salen de la *fuerza campo* se representan como *líneas de flujo* con magnitud proporcional y dirección igual al vector en ese punto. Un campo vectorial  $\mathbf{E}$  en el espacio ( $\mathbb{R}^3$ ), tiene tres componentes  $(E_1, E_2, E_3)$ , si cada componente es una función de  $k$  variables, se dice que el campo es de clase  $C^k$ . Por ejemplo  $\mathbf{E}(x,y,z)$  es un *campo* cuyas componentes son funciones de 3 variables  $x,y,z$  y es de *clase 3* ( $C^3$ );  $\mathbf{E}(t)$  es un *campo* cuyas componentes son funciones de 1 variable  $t$ , y es de *clase 1* ( $C^1$ ).

**Gradiente, derivada direccional, divergencia, laplaciano y rotacional.** Se define al *operador nabla* o del  $\nabla$  como un *vector de derivadas parciales*  $\nabla = (\partial / \partial x, \partial / \partial y, \partial / \partial z)$ . Sea  $\mathbf{r}=\mathbf{r}(x,y,z)$  un *vector de posición*, y  $\Phi = \Phi(\vec{r})$  un *campo escalar* y  $\mathbf{E}=\mathbf{E}(\mathbf{r})$  un *campo vectorial*. El *gradiente*  $\text{grad}\Phi = \nabla\Phi$  es el *producto del operador nabla con la función escalar* y genera un vector cuyas componentes son las derivadas parciales de  $\Phi$ , el *gradiente de un campo escalar*, es un vector que representa tanto la magnitud como la dirección de la máxima rapidez de incremento del campo. La *derivada direccional* de  $\Phi$  en dirección del vector unitario de  $\mathbf{E}$ , es  $D_{\hat{E}}\Phi = \nabla\Phi \cdot \hat{E}$ . La *divergencia* es el *producto punto del operador nabla con una función vectorial*  $\text{div}\mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E}$ , la *divergencia de un campo vectorial* en un punto dado puede considerarse como una medida del grado en que el campo diverge o emana de tal punto. El *laplaciano* de un campo escalar  $\Phi$ , es la *divergencia del gradiente* de  $\Phi$ :  $\nabla^2\Phi = \nabla \cdot \nabla\Phi$  y es un escalar. El *rotacional* es el *producto cruz del operador nabla con una función*

*vectorial*  $\text{rot}\vec{E} = \nabla \times \vec{E}$ , el *rotacional de un campo vectorial* en un punto dado puede considerarse como el grado en que el campo gira alrededor de tal punto. En símbolos:

$$\text{del} = \nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z) = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Phi = \Phi(\vec{r}) = \Phi(x, y, z) \quad \leftarrow \text{campo escalar}$$

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) = E(x, y, z) \quad \leftarrow \text{campo vectorial}$$

$$\text{grad}\Phi = \nabla\Phi = \hat{i} \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad \leftarrow \text{gradiente}$$

$$D_{\vec{E}}\Phi = \nabla\Phi \cdot \vec{E} \quad \leftarrow \text{derivada direccional}$$

$$\text{div}\vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z) \cdot (E_1, E_2, E_3) = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z} \quad \leftarrow \text{divergencia}$$

$$\nabla^2\Phi = \nabla \cdot \nabla\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \quad \leftarrow \text{laplaciano}$$

$$\text{rot}\vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{vmatrix} \quad \leftarrow \text{rotacional}$$

(73)

Algunas identidades básicas del análisis vectorial se listan a continuación:

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g \quad \nabla cf = c\nabla f \quad \nabla(f * g) = f\nabla g + g\nabla f \quad \nabla(f / g) = (g\nabla f - f\nabla g) / g^2$$

$$\text{div}(\vec{F} + \vec{G}) = \text{div}(\vec{F}) + \text{div}(\vec{G}) \quad \text{rot}(\vec{F} + \vec{G}) = \text{rot}(\vec{F}) + \text{rot}(\vec{G})$$

$$\text{div}(f * \vec{G}) = f * \text{div}(\vec{G}) + \vec{G} \cdot \nabla f \quad \text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \text{rot}\vec{F} - \vec{F} \cdot \text{rot}\vec{G} \quad \text{div}(\text{rot}\vec{F}) = 0$$

$$\text{rot}(f * \vec{F}) = f * \text{rot}\vec{F} + \nabla f \times \vec{F} \quad \text{rot}(\nabla f) = 0$$

$$\nabla^2 f(f * g) = f * \nabla^2 g + g * \nabla^2 f + 2(\nabla f \cdot \nabla g) \quad \text{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$$

$$\text{div}(f * \nabla g - g * \nabla f) = f * \nabla^2 g - g * \nabla^2 f$$

(74)

**Integrales dobles y triples.** Sea  $z=f(x,y)$  una *superficie* elevada sobre el plano XY hacia el eje  $Z^+$ ;  $S$  una *región en el plano XY, limitada por dos rectas paralelas al eje Y*:  $x=x_1, x=x_2$  tales que  $x_2 > x_1 \forall x$ , y *limitada por dos curvas*  $\phi_1(x), \phi_2(x)$  tales que  $\phi_2(x) > \phi_1(x) \forall x$ , entonces la *integral doble* de  $f$  sobre la *región S* representa el *volumen V del sólido*, cuya *altura* es  $z$  y su *base* es  $S$ , si  $f(x,y)=1$  se obtiene el *área A* de la *región S*:

$$V = \iint_R f(x, y) dA = \int_{x_1}^{x_2} \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

$$A = \iint_R dA = \int_{x_1}^{x_2} \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \right] dx$$

(75)

Consideremos una *región*  $W$  en el espacio, cuya *densidad* este dada por una función  $f(x,y,z)$ , entonces el *volumen*  $V$  y la *masa*  $m$  de tal región están dadas por la *integral triple de  $f$  en la región  $S$* , en símbolos:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_W dx dy dz \\ m &= \iiint_W f(x, y, z) dx dy dz \end{aligned} \quad (76)$$

En general las *integrales múltiples* son *integrales iteradas* y cada integral es una *integral parcial*, no importando el orden de integración siempre que se tomen los límites apropiadamente.

**Elementos diferenciales vectoriales de longitud, área y volumen.** Un *desplazamiento diferencial* es el espacio es un vector cuyos componentes son desplazamientos diferenciales a lo largo de los ejes coordenados  $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ . El *área normal diferencial* es un vector perpendicular al plano de dos elementos diferenciales de longitud  $d\vec{S} = (dydz, 0, 0) = (0, dydz, 0) = (0, 0, dx dz) = dS\hat{n}$ . El *volumen diferencial* es un escalar  $dv = dx dy dz$ .

**Integral de trayectoria, línea y superficie.** Las integrales que involucran la suma de contribuciones que un campo escalar o vectorial provoca a lo largo de una curva, a través de una superficie o en el interior de un volumen tienen aplicaciones físicas importantes. Una *línea* es el *contorno* de una *curva abierta* (alisada o alisada por partes) o *cerrada* (simple o no simple con nodos). Consideremos dos puntos P y Q a lo largo de una curva C y un *campo escalar*  $f=f(x(t),y(t),z(t))$  y un *campo vectorial*  $\mathbf{E}=\mathbf{E}(E_1,E_2,E_3)$  en el espacio donde se sitúa tal curva (la línea podría ser una *espira de alambre* inmersa en un *campo magnético* emitido por dos *magnetos permanentes*). Se define la *integral de trayectoria* como la suma de las contribuciones del campo escalar  $f$  a lo largo de la curva C. Se define la *integral de línea* como la *suma de los componentes del campo a lo largo de la curva*  $\sum \vec{E} \cdot d\vec{r}$  desde P hasta Q. Si la curva es cerrada se denota la integral por el símbolo  $\oint$  y se denomina *circulación del campo*. La *integral de superficie* de un campo vectorial que pasa a través de una

superficie  $S$ , es la cantidad neta de fluido que fluye a través de la superficie por unidad de tiempo, es decir, la razón de flujo:  $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ .

**Teoremas del cálculo vectorial.** El *teorema de divergencia* o de *Gauss-Ostrogradsky*, establece que: *el flujo neto del campo vectorial  $\mathbf{E}$  que sale de la superficie cerrada  $S$  es igual a la integral de volumen de la divergencia del campo  $\mathbf{E}$ :*

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV \quad (77)$$

El *teorema de rotacional* o *teorema de Stokes* establece que: *la circulación del campo vectorial  $\mathbf{E}$  alrededor de un contorno cerrado  $C$  es igual a la integral del rotacional de  $\mathbf{E}$  sobre la superficie abierta  $S$  limitada por el contorno  $C$ :*

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (78)$$

## Electromagnetismo y las ecuaciones de Maxwell

Gran parte de la formalización matemática del cálculo vectorial proviene de los estudios que *Maxwell* hizo en la electricidad y el magnetismo para formular la *teoría electromagnética*. Sus resultados se simplifican en 4 ecuaciones a continuación expuestas:

$$\begin{aligned} (a) \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \leftarrow \text{Ley de Faraday} \\ (b) \quad \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \leftarrow \text{Ley de Ampere} \\ (c) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \Leftrightarrow \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \leftarrow \text{Ley de Gauss Campo Magnético} \\ (d) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \Leftrightarrow \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV \leftarrow \text{Ley de Gauss Campo Eléctrico} \end{aligned} \quad (79)$$

Donde:

- $\mathbf{E}$  es la intensidad decampo eléctrico (V/m)
- $\mathbf{H}$  es la intensidad de campo magnético (A/m)
- $\mathbf{B}$  es la densidad de flujo magnético (T=Wb/m<sup>2</sup>)
- $\mathbf{D}$  es la densidad de flujo eléctrico (C/m<sup>2</sup>)
- $\mathbf{J}$  es la densidad de corriente (A/m<sup>2</sup>)
- $\rho$  es la densidad de carga (C/m<sup>3</sup>)

En (a) y (b)  $S$  es la superficie abierta limitada por el contorno cerrado  $C$ .  
En (c) y (d)  $V$  es el volumen limitado por la superficie cerrada  $S$ .

Las ecuaciones de Maxwell junto con la ecuación de conservación de la carga y la ecuación de fuerza de Lorentz brindan una descripción completa de todas las interacciones electromagnéticas clásicas:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} && \leftarrow \text{conservación de la carga} \\ \vec{\mathbf{F}} &= q[\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}] && \leftarrow \text{fuerza de Lorentz} \end{aligned} \tag{80}$$

Las densidades de flujo eléctrico  $\mathbf{D}$  y magnético  $\mathbf{B}$  se relacionan con las intensidades de campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y magnético  $\mathbf{H}$  mediante la permitividad  $\epsilon$  y la permeabilidad  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{D}} &= \epsilon \vec{\mathbf{E}} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} && \leftarrow \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \approx \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ (F/m)} \\ \vec{\mathbf{B}} &= \mu \vec{\mathbf{H}} = \mu_r \mu_0 \vec{\mathbf{H}} && \leftarrow \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ (H/m)} \end{aligned} \tag{81}$$

donde :  $\epsilon_r$  ← constante dieléctrica,  $\mu_r$  ← permeabilidad relativa  
 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \times \mu_0}$  ← constante de la luz

La ecuación (a) es un caso especial de la ley de inducción de Faraday, y representa la fuerza electromotriz inducida (fem) en una espira cerrada estacionaria debida a una tasa de cambio de la densidad de flujo magnético respecto al tiempo y se conoce como fem de transformación. Si un conductor se mueve a una velocidad  $v$  en un campo magnético  $\mathbf{B}$ , se induce una fem conocida como fem movimiento. La fem total inducida de una espira que se mueve en un campo magnético, es la suma de la fem de transformación y la fem de movimiento.

$$e = e_t + e_m = -\int_S \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{S}} + \int_C (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) \cdot d\vec{\mathbf{l}} \tag{82}$$

En términos del flujo magnético total que pasa a través de la espira  $\phi$ , la ecuación anterior se escribe en forma compacta como:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad \leftrightarrow \quad \phi = \int_S \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \tag{83}$$

**Ejemplo 1.11.** Una espira cuadrada (figura 1.1) con lados de 10 cm (0.1 m) de longitud está en un campo magnético con variación senoidal de intensidad 100 A/m y frecuencia de 50 MHz. El plano de la espira es perpendicular a la dirección del campo magnético. Si

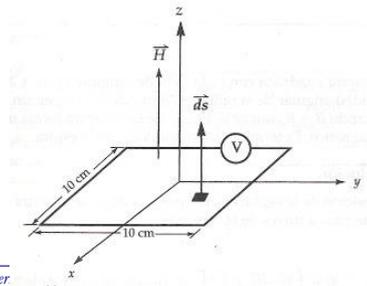


Figura 1.1 Espira inmersa en un campo magnético con variación senoidal  $\mathbf{B}$

se conecta un *voltímetro* en serie con la espira, ¿cuál es su lectura?

**Solución.** Puesto que la espira es estacionaria, la fem inducida se debe a la *fem de transformación*, considerando la *permeabilidad del espacio libre*  $\mu_0$  y sabiendo que la lectura del voltímetro será un valor *rms* se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= 100 \sin \omega t \hat{z} \text{ [A/m]} \rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H} = 100 \mu_0 \sin \omega t \hat{z} \text{ [T]} \\ \omega &= 2\pi f, \quad f = 50 \times 10^6 \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 100 \mu_0 \omega \cos \omega t \hat{z} = 100 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 2\pi \times 50 \times 10^6 \cos \omega t \hat{z} \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 39,478.4 \cos \omega t \hat{z} \\ d\vec{S} &= dx dy \hat{z} \\ e &= -39,478.4 \cos \omega t \int_{-0.05}^{0.05} dx \int_{-0.05}^{0.05} dy \\ e &= -39,478.4 \cos \omega t \times [0.05 + 0.05] \times [0.05 + 0.05] = -394.784 \cos \omega t \\ \rightarrow V_{rms} &= \frac{394.784}{\sqrt{2}} = 279.15 \text{ [V]} \quad \clubsuit \end{aligned}$$

La ecuación (b) es la definición matemática de la **ley de Ampere**. Establece que *la integral de línea de la intensidad de campo magnético alrededor de un ciclo cerrado es igual a la corriente total encerrada*. La *corriente total* es la suma de la *corriente de conducción*  $I_c$  y la *corriente de desplazamiento*  $I_d$ . En un conductor por el que fluye corriente a bajas frecuencias, la corriente de desplazamiento es mínima.

$$I = I_c + I_d = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (84)$$

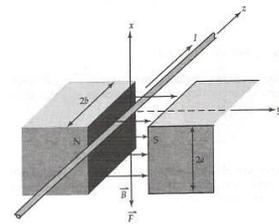
La **ley de fuerza de Ampere** establece que *un conductor por el que circula una corriente  $I$  inmerso en un campo magnético  $\vec{B}$ , recibe una fuerza dada por:*

$$\vec{F} = \int_C I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (85)$$

De esta manera para el trozo de conductor de longitud  $2b$  mostrado en la **figura 1.2**, portador de una corriente  $I$ , situado en un campo magnético  $\vec{B}$ , siente una fuerza en la dirección  $-x$  y esta dada por:

$$\vec{F} = \int_C I d\vec{l} \times \vec{B} = \int_{-b}^b IB dz (\hat{z} \times \hat{a}_y) = IB[b + b](-\hat{a}_x) = -2IBb\hat{a}_x \text{ [N]} \quad (86)$$

**Figura 1.2** Fuerza en un conductor que conduce una corriente  $I$  en un campo magnético uniforme  $\vec{B}$



Consideremos la espira de alambre mostrada en la **figura 1.3**, con 2 lados de longitud  $L$  (paralelos al eje  $X$ ) y dos lados de longitud  $W$ , y teniendo capacidad para girar libremente, inmersa en un *campo magnético constante*  $\mathbf{B}$  en dirección  $Z$ ; sea  $\mathbf{a}_n$  el vector unitario normal a su superficie; sea  $\mathbf{I}$  la corriente que circula en su interior. Cuando  $\theta$  es el ángulo que forma  $\mathbf{a}_n$  con el vector de campo  $\mathbf{B}$ , la fuerza que sienten los lados  $L_1$  y  $L_2$  de la espira esta dada por:

$$\vec{F}_a = \vec{F}_b = -BIL\hat{a}_x, \tag{87}$$

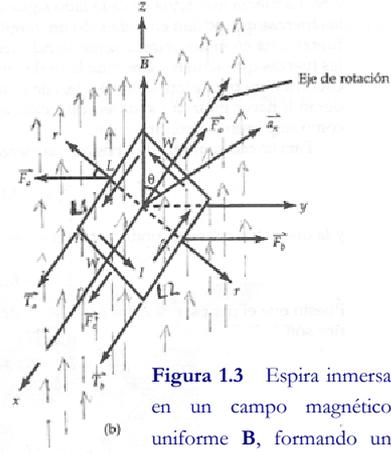
De esta manera los pares  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  ejercidos sobre los conductores  $L_1$  y  $L_2$  generan un par total en la espira que está dada por:

$$\vec{T}_a = \vec{T}_b = BIL(W/2)\sin\theta\hat{a}_x, \quad \vec{T} = BIA\sin\theta\hat{a}_x \quad \Leftrightarrow \quad A = LW \tag{88}$$

La anterior es la *ecuación fundamental que rige el desarrollo del par en todas las máquinas eléctricas*, para  $N$  espiras se tiene:  $T = BIAN \sin\theta\hat{a}_x$ .

### Transformación de sistemas coordenados

Las coordenadas de un *punto*  $P$ , en los tres *sistemas ortogonales* de mayor uso en la ingeniería son: *rectangular* (R)  $P(x,y,z)$ , *cilíndrico* (C)  $P(\rho,\theta,z)$  y *esférico* (E)  $P(r,\phi,\theta)$ . Los *vectores unitarios*  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ , de los 3 sistemas son: *rectangular*  $(\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z)$ , *cilíndrico*  $(\mathbf{a}_\rho, \mathbf{a}_\theta, \mathbf{a}_z)$  y *esférico*  $(\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\phi, \mathbf{a}_\theta)$ , tienen magnitud unitaria, y su dirección es la de los ejes coordenados positivos del sistema; mediante estos el vector  $\mathbf{A}$  con origen  $O(0,0,0)$  de componentes  $(A_1, A_2, A_3)$ , se representa por:  $\mathbf{A} = A_1\mathbf{a}_1 + A_2\mathbf{a}_2 + A_3\mathbf{a}_3$ .



**Figura 1.3** Espira inmersa en un campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$ , formando un ángulo  $\theta$

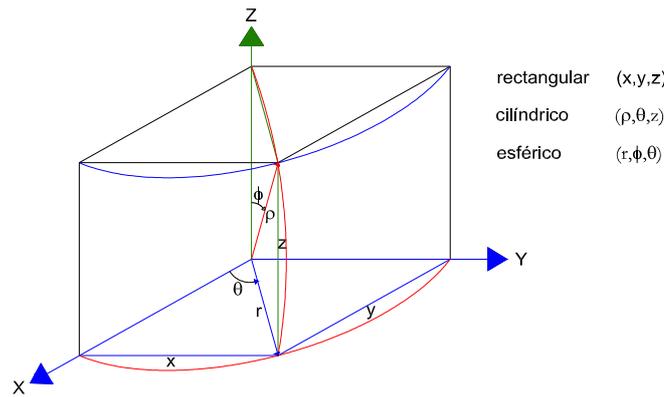


Figura 3.4 Sistemas coordenados ortogonales (rectangular, cilíndrico y esférico)

Las relaciones entre las coordenadas de los sistemas se obtienen directamente de la **figura 1.4** aplicando las *funciones trigonométricas* correspondientes y el *teorema de Pitágoras*. Por ejemplo:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leftrightarrow \tan \theta = \frac{y}{x} \rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \leftrightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \leftrightarrow \cos \phi = \frac{z}{r} \rightarrow \phi = \cos^{-1} \frac{z}{r} \quad (89)$$

Las componentes de **A** en el *sistema coordinado de vectores unitarios*  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$  se pueden hallar mediante la siguiente *relación de transformación*:

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \cdot a_1 & b_2 \cdot a_1 & b_3 \cdot a_1 \\ b_1 \cdot a_2 & b_2 \cdot a_2 & b_3 \cdot a_2 \\ b_1 \cdot a_3 & b_2 \cdot a_3 & b_3 \cdot a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (90)$$

La ecuación de transformación anterior puede escribirse matricialmente como  $\mathbf{B} = \mathbf{M}\mathbf{A}$ , siendo **A** y **B** *vectores columna de las componentes*, y **M** la *matriz de los productos escalares de los vectores unitarios*, obsérvese que  $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}$ . El listado siguiente proporciona las *ecuaciones matriciales de transformación coordinada* para la conversión entre los 3 sistemas expuestos.

$$C \leftarrow R \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$R \leftarrow C \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$E \leftarrow R \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \\ -\cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta & -\sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$R \leftarrow E \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_\theta \end{bmatrix}$$

$$E \leftarrow C \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \phi & 0 & \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ \cos \theta & -\sin \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$C \leftarrow E \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \phi & -\sin \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_\theta \end{bmatrix} \quad (91)$$

### Transformación fasorial

La *transformación fasorial* se aplica únicamente a ondas *sinusoidales* (*coseno* o *seno*) y da como resultado una *notación de variable compleja*, fácilmente manejable mediante algebra lineal. La *transformación fasorial* se emplea ampliamente en sistemas eléctricos debido a que la energía eléctrica se genera y transmite en forma de onda *sinusoidal*, la frecuencia típica en México es de  $f=60$  Hz ( $\omega=2\pi f=2\pi*60 \approx 377$  rad/s).

La transformación fasorial se basa en la *identidad de Euler*, obtenida por observación de *series de Maclaurin* de las *funciones seno, coseno* y *exponencial*:

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} \\
\sin(\theta) &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
j \sin(\theta) &= j\theta - j \frac{\theta^3}{3!} + j \frac{\theta^5}{5!} - j \frac{\theta^7}{7!} + \dots = j \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
e^{\theta} &= 1 + \theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \\
e^{j\theta} &= 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots
\end{aligned} \tag{92}$$

La observación de que la función  $e^{j\theta}$  equivale a la suma de las funciones  $\cos(\theta)$  y  $j \sin \theta$ , condujo a Euler a la siguiente relación conocida como *identidad de Euler*:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \leftrightarrow e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta \tag{93}$$

De las relaciones anteriores se obtiene la forma exponencial compleja para las funciones seno y coseno:

$$\begin{aligned}
e^{j\theta} &= \cos \theta + j \sin \theta & e^{j\theta} &= \cos \theta + j \sin \theta \\
+ e^{-j\theta} &= \cos \theta - j \sin \theta & -e^{-j\theta} &= -\cos \theta + j \sin \theta \\
\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} &= \cos \theta & \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} &= \sin \theta \\
\Rightarrow \cos \theta &= \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) & \Rightarrow \sin \theta &= \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})
\end{aligned}$$

### Valor medio cuadrático de la función senoidal

Una *función senoidal* (seno o coseno) de *frecuencia angular*  $\omega = 2\pi/T$  y de *periodo*  $T = 2\pi/\omega$ , alterna su sentido cada  $T/2$  segundos (con  $f = 60 \text{ Hz}$ ,  $T = 1/f \approx 16.67 \text{ ms}$ ); puesto que la función es simétrica, el *valor promedio* de la función es cero. Una alternativa al valor promedio de la función senoidal, es el *valor medio cuadrático rms* (*root mean square*) o *valor eficaz*, definido por:

$$\begin{aligned}
i(t) &= I_{\max} \cos(\omega t + \phi) \\
I_{\text{rms}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [I_{\max} \cos(\omega t + \phi)]^2 dt} \tag{94}
\end{aligned}$$

La evaluación de la integral resulta fácil empleando *identidades trigonométricas*:

$$\cos^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\omega t + 2\phi)]$$

$$\text{sen}(n\pi + \phi) = \text{sen}(\phi) \quad n \in \{\mathbb{Z}^+\}$$

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{I_{max}^2}{2} [1 + \cos(2\omega t + 2\phi)] dt} = \sqrt{\frac{I_{max}^2}{2\pi/\omega} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/\omega} [1 + \cos(2\omega t + 2\phi)] dt}$$

$$I_{rms} = \frac{I_{max}}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} [1 + \cos(2\omega t + 2\phi)] dt} = \frac{I_{max}}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\pi} \left[ t + \frac{1}{2\omega} \text{sen}(2\omega t + 2\phi) \right]_0^{2\pi/\omega}}$$

$$I_{rms} = \frac{I_{max}}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\pi} \left[ \frac{2\pi}{\omega} + \frac{1}{2\omega} (\text{sen}(4\pi + 2\phi) - \text{sen}(2\phi)) \right]} = \frac{I_{max}}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\pi} \frac{2\pi}{\omega}} = \frac{I_{max}}{2} \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2} I_{max}}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \approx 0.707 I_{max}$$

**Transformación fasorial**

La transformación fasorial consiste en representar una función cosenoidal en el dominio del tiempo  $i(t)$ , de amplitud  $I_{max}$ , periodo  $T$ , ángulo de fase  $\phi$ , y frecuencia angular  $\omega = 2\pi/T$ , como un número complejo en su forma polar  $I(\omega)$ , el cual se dice que esta en dominio de la frecuencia. Es decir, la transformación fasorial transforma una función senoidal en una función exponencial compleja (cuya base es la identidad de Euler):

$$i(t) = I_{max} \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow \tilde{I} = I_{rms} \angle \phi$$

$$I_{rms} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \approx 0.707 I_{max} \tag{95}$$

La transformación fasorial inversa consiste en dado un fasor de frecuencia angular  $\omega$ , valor efectivo o valor medio cuadrático  $I_{rms}$ , ángulo de fase  $\phi$  expresarlo en el dominio del tiempo  $i(t)$ , como una función cosenoidal:

$$\tilde{I} = I_{rms} \angle \phi \Rightarrow i(t) = I_{max} \cos(\omega t + \phi)$$

$$I_{max} = \sqrt{2} I_{rms} \approx 1.414 I_{rms} \tag{96}$$

Si la función esta expresada en términos de la función senoidal es fácil convertirla en función cosenoidal, recordando las siguientes identidades trigonométricas:

$$\begin{array}{llll} \sin(-\theta) = -\sin(\theta) & \sin(\pi/2 \pm \theta) = \cos(\theta) & \text{y} & \cos(-\theta) = \cos(\theta) \quad \cos(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta) \\ \sin(\theta + \pi/2) = \cos(\theta) & \sin(\theta - \pi/2) = -\cos(\theta) & & \cos(\theta - \pi/2) = \sin(\theta) \quad \cos(\pi/2 + \theta) = -\sin(\theta) \\ \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta) & \sin(\theta - \pi) = -\sin(\theta) & & \cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta) \quad \cos(\theta - \pi) = -\cos(\theta) \end{array}$$

Una vez transformado en fasor, el número complejo resultante obedece a todas las leyes y principios de números complejos ordinarios. Por lo antes dicho es fácil obtener la representación fasorial para la derivada e integral de la función cosenoidal, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 i &= I_{\max} \cos(\omega t + \phi) \rightarrow \tilde{I} = I_{\text{rms}} \angle \phi = I_{\text{rms}} e^{j(\alpha + \phi)} \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{d(I_{\text{rms}} e^{j(\alpha + \phi)})}{dt} = j\omega I_{\text{rms}} e^{j(\alpha + \phi)} \rightarrow j\omega I_{\text{rms}} \angle \phi = \omega I_{\text{rms}} \angle \phi + 90^\circ \\
 \int i dt &= \int I_{\text{rms}} e^{j(\alpha + \phi)} dt = \frac{I_{\text{rms}} e^{j(\alpha + \phi)}}{j\omega} \rightarrow \frac{1}{j\omega} I_{\text{rms}} \angle \phi = -j \frac{1}{\omega} I_{\text{rms}} \angle \phi = \frac{1}{\omega} I_{\text{rms}} \angle \phi - 90^\circ
 \end{aligned} \tag{97}$$

## Transformación fasorial en circuitos eléctricos de corriente alterna

La aplicación más extendida de los fasores es en circuitos eléctricos sujetos a funciones de excitación senoidales, conocidos como circuitos de corriente alterna **ca**. Considérese el circuito RLC serie, mostrado en la **figura 1.5**. Hallar el modelo del circuito y obtener su solución.

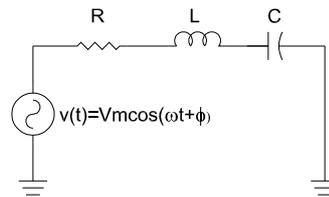


Figura 3.5 Circuito RLC serie

Aplicando la LVK a la malla y la convención pasiva de los signos se tiene la siguiente ecuación diferencial, cuya primitiva  $i(t)$ , es su solución:

$$-V_m \cos(\omega t + \alpha) + Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 0$$

Considerando que la función de excitación es senoidal  $v(t)$ , y el circuito es lineal, entonces se espera una respuesta  $i(t)$  senoidal, de esta forma aplicando *transformación fasorial* a la *ecuación diferencial* obtenida, resulta en:

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt + Ri = V_m \cos(\omega t + \alpha) \rightarrow j\omega L I_{rms} \angle \beta + \frac{1}{j\omega C} I_{rms} \angle \beta + R I_{rms} \angle \beta = V_{rms} \angle \alpha$$

$$I_{rms} \angle \beta * (j(\omega L - 1/\omega C) + R) = V_{rms} \angle \alpha \rightarrow I_{rms} \angle \beta = \frac{1}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} V_{rms} \angle \alpha$$

$$I_{rms} \angle \beta = \frac{1}{K \angle \theta} V_{rms} \angle \alpha = \frac{V_{rms}}{K} \angle (\alpha - \theta)$$

donde :

$$K = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

$$\theta = \arctan[(\omega L - 1/\omega C) / R]$$

Aplicando la *transformación fasorial inversa*, resulta:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}}{K} V_{rms} \cos(\omega t + \alpha - \theta)$$

Al aplicar la transformación fasorial a los circuitos eléctricos con fuentes de excitación senoidal (*corriente alterna senoidal*), el análisis se simplifica del manejo de ecuaciones integrodiferenciales al manejo de expresiones con números complejos. El trabajo se simplifica aún más al aplicar la *ley de ohm fasorial*, a los bloques funcionales eléctricos pasivos (*resistor, inductor y capacitor*) sometidos a voltajes y corrientes fasoriales:

$$\tilde{V} = V_{rms} \angle \alpha, \quad \tilde{I} = I_{rms} \angle \beta$$

$$v = Ri \Rightarrow \tilde{V} = R\tilde{I} \rightarrow \tilde{I} = \frac{1}{R} \tilde{V}$$

$$v = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \tilde{V} = j\omega L \tilde{I} \rightarrow \tilde{I} = -j \frac{1}{\omega L} \tilde{V} = \frac{1}{\omega L} V_{rms} \angle (\alpha - \pi/2) \quad (98)$$

$$v = \frac{1}{C} \int idt \Rightarrow \tilde{V} = \frac{1}{j\omega C} \tilde{I} = -j \frac{1}{\omega C} \tilde{I} \rightarrow \tilde{I} = j\omega C \tilde{V} = \omega C V_{rms} \angle (\alpha + \pi/2)$$

De las ecuaciones anteriores se tiene para los *elementos pasivos* que: en el **resistor**, la corriente y voltaje están en fase; en el **inductor** la corriente está  $90^\circ$  ( $\pi/2$  rad) atrasada respecto al voltaje; en el **capacitor** la corriente está  $90^\circ$  ( $\pi/2$  rad) adelantada respecto al voltaje.

En términos fasoriales, se denomina impedancia (**Z**) a la razón del voltaje fasorial (**V**) a la corriente fasorial (**I**), es un numero complejo cuya parte real es la *resistencia* (R) y cuya parte imaginaria es la *reactancia* (X), que puede ser *reactancia inductiva* ( $X_L$ ) o *reactancia capacitiva* ( $X_C$ ). El inverso de la impedancia

se denomina *admitancia* ( $\mathbf{Y}$ ), su parte real es la *conductancia* ( $G$ ) y su parte compleja la *susceptancia* ( $B$ ). Tanto la impedancia, como la admitancia no son fasores, son números complejos puros:

$$\begin{aligned} \hat{V} &= \hat{Z}\hat{I} \rightarrow \hat{Z} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} \\ \hat{Z} &= R + jX, \quad X_L = \omega L = 2\pi fL, \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC} \\ \hat{I} &= \hat{Y}\hat{V} \rightarrow \hat{Y} = \frac{\hat{I}}{\hat{V}}, \\ \hat{Y} &= G + jB = \frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{1 \angle 0}{\sqrt{R^2 + X^2} \angle (\tan^{-1} b/a)} = \left( \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}} \right) \angle (-\tan^{-1} b/a) \end{aligned} \quad (99)$$

Para efectos de cálculo, la *reactancia inductiva* y la *reactancia capacitiva* pueden transformarse en *impedancias complejas* de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \hat{Z}_L &= jX_L = j\omega L = j2\pi fL = \omega L \angle 90^\circ \\ \hat{Z}_C &= -jX_C = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ \end{aligned} \quad (100)$$

El equivalente de  $n$  impedancias conectadas en serie está dado por:

$$\hat{Z}_{eq} = \sum_{k=1}^n \hat{Z}_k = \sum_{k=1}^n R_k + j \sum_{k=1}^n X_k \quad (101)$$

El equivalente de  $n$  admitancias conectadas en paralelo está dado por:

$$\hat{Y}_{eq} = \sum_{k=1}^n \hat{Y}_k = \sum_{k=1}^n G_k + j \sum_{k=1}^n B_k \quad (102)$$

### **Resonancia**

Se dice que un circuito de ca RLC en serie o en paralelo, está en *resonancia* a una *frecuencia de resonancia*  $f_R$ , cuando la *reactancia inductiva* ( $X_L$ ) es igual a la *reactancia capacitiva* ( $X_C$ ). En resonancia la *amplitud* de la corriente es máxima y se define  $\alpha$  como la *frecuencia neperiana* o *coeficiente de amortiguamiento exponencial*.

$$X_L = X_C \rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \omega^2 LC = 1 \rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow f_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad \alpha = \frac{1}{2RC} \quad (103)$$

**Potencia y factor de potencia**

La *potencia compleja* ( $S$ ) de un elemento en circuito de ca, es el producto del *voltaje fasorial de sus terminales* ( $V$ ), por el conjugado complejo de la *corriente fasorial* ( $I^*$ ) que circula por el elemento. Su parte real se llama *potencia promedio* o *potencia real* ( $P$ ), se mide en *watts* ( $W$ ), su parte imaginaria se llama *potencia reactiva* ( $Q$ ), se mide en *volts amperes reactivos* (VAR), la magnitud de la potencia compleja se denomina *potencia aparente* ( $S$ ), se mide en *volts amperes* (VA). El coseno del ángulo entre el fasor de voltaje y corriente se denomina *factor de potencia*  $FP = \cos(\theta)$ .

$$\begin{aligned} \text{Sea } V &= V_{rms} \angle \alpha, & I &= I_{rms} \angle \beta \\ \hat{S} &= \overline{VI^*} = V_{rms} \angle \alpha * I_{rms} \angle -\beta = V_{rms} I_{rms} \angle (\alpha - \beta) \\ \hat{S} &= P + jQ = |\hat{S}| \cos(\theta) + j|\hat{S}| \sin(\theta) & (104) \\ P &= |\hat{S}| \cos(\theta), & Q &= |\hat{S}| \sin(\theta) \rightarrow |\hat{S}| = V_{rms} I_{rms} = \sqrt{P^2 + Q^2} \\ \text{Si } \theta &= \alpha - \beta \\ FP &= \cos(\theta) = \cos(\alpha - \beta) = \frac{P}{|\hat{S}|} \rightarrow |\hat{S}| = \frac{P}{FP} \leftrightarrow \theta = \arccos(FP) \\ \therefore \hat{S} &= |\hat{S}| \angle \theta = \frac{P}{FP} \angle \arccos(FP) \end{aligned}$$

Cuando el fasor corriente adelanta el voltaje ( $\beta > \alpha$ ) se dice que el *factor de potencia esta adelantado*, en caso contrario ( $\beta < \alpha$ ), se dice que el *factor de potencia esta atrasado*. Cualquier decremento en el FP aumenta la corriente para la misma potencia activa, esto provoca mayores *pérdidas por efecto Joule* en los conductores eléctricos.

Por el *principio de conservación de energía* se puede establecer el *principio de las potencias parciales*: “la *potencia compleja entregada a varias cargas interconectadas es la suma de las potencias complejas entregadas a cada una de las cargas individuales, independientemente de cómo estén conectadas (serie o paralelo)*”.

**Corrección del factor de potencia**

Para evitar *pérdidas por efecto Joule* (disipación de calor en los resistores) el factor de potencia debe ser cercano a la unidad. El *Reglamento para el Suministro de Energía Eléctrica*, establece que el *consumidor esta obligado a mantener un factor de*

potencia tan cercano a la unidad como sea posible. Existe una multa por factor de potencia menor a 0.85, los valores deseables son de 0.90 y 0.95. Como se puede prever el factor de potencia se corrige conectando capacitores en paralelo con la carga inductiva, con la intención de que el voltaje de la carga no varíe.

La corrección del FP se puede plantear como sigue: se tiene una carga inductivo-resistiva conectada a la línea de voltaje  $V$ , consumiendo una potencia activa  $P$ , trabajando a un factor de potencia  $FP_1$ , se desea aumentar el factor de potencia hasta  $FP_2$ , conectando una carga capacitiva en paralelo. Determinar la potencia reactiva del capacitor ( $Q_C$ ) y su capacitancia ( $C$ ).

La solución se obtiene del siguiente razonamiento: el incremento del factor de potencia desde  $FP_1$  hasta  $FP_2$  mediante la conexión en paralelo de una carga capacitiva de capacitancia  $C$ , provocará que la potencia reactiva disminuya desde  $Q_1$  hasta  $Q_2$ , reduciendo el ángulo de fase desde  $\theta_1$  hasta  $\theta_2$ , sin alterar el voltaje de línea  $V$  y la potencia activa  $P$  consumida por la parte resistiva de la carga:

$$\begin{aligned}
 FP &= \cos \theta, & S &= \frac{P}{\cos \theta} = \frac{Q}{\sin \theta} \rightarrow Q = P \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = P \tan \theta \\
 \theta_1 &= \arccos(FP_1), & Q_1 &= P \tan(\theta_1), & S_1 &= \frac{P}{FP_1} \\
 \theta_2 &= \arccos(FP_2), & Q_2 &= P \tan(\theta_2), & S_2 &= \frac{P}{FP_2} \\
 Q_C &= Q_1 - Q_2 = P [\tan(\cos^{-1}(FP_1)) - \tan(\cos^{-1}(FP_2))] \\
 Q_C &= \frac{V^2}{X_C} \rightarrow X_C = \frac{V^2}{Q_C} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \\
 C &= \frac{Q_C}{2\pi f V^2} \quad \text{para } f = 60\text{Hz} \rightarrow C = \frac{Q_C}{377V^2} = \frac{P [\tan(\cos^{-1}(FP_1)) - \tan(\cos^{-1}(FP_2))]}{377V^2}
 \end{aligned} \tag{105}$$

**Ejemplo 1.12.** Cierta carga toma una corriente de 10 A con un factor de potencia de 0.5 en atraso desde una fuente de 120 V y 60 Hz. Calcule el tamaño del capacitor para corregir el factor de potencia hasta 0.8.

**Solución.** Primero se calcula la potencia activa consumida a partir de la corriente y el voltaje, después se sustituyen los valores en la fórmula antes obtenida:

$$\begin{aligned}
 P &= VI \cos \theta = VI \times FP = 120 \times 10 \times 0.5 = 600W \\
 C &= \frac{P [\tan(\cos^{-1}(FP_1)) - \tan(\cos^{-1}(FP_2))]}{377V^2} \\
 &= \frac{600 [\tan(\cos^{-1}(0.5)) - \tan(\cos^{-1}(0.8))]}{377 \times 120^2} = 1.0853 \times 10^{-4} F = 108.53 \mu F \quad \clubsuit
 \end{aligned}$$

## Transformación de fuentes de ca

**Leyes de circuitos.** Una *red eléctrica* de cualquier complejidad operando en *estado estacionario sinusoidal* (ca) a bajas frecuencias, se puede representar *fasorialmente* por un conjunto de *elementos activos* (*fuentes de voltaje y corriente*) y *elementos pasivos* (*impedancias*). Los puntos donde 2 o más elementos tienen una *conexión común* de denominan *nodos, barras o buses*. Un *lazo* es una *trayectoria cerrada*, una *mall*a es un lazo que no aloja ningún otro lazo. El *análisis de circuitos eléctricos lineales* se sustenta en *dos leyes de conservación* (LVK, LCK), *el principio de superposición* (PS) y *dos teoremas de transformación* (TT, TN). **Ley de voltajes de Kirchhoff** (LVK): “*en una malla la suma de voltajes es igual a cero*”. **Ley de corrientes de Kirchhoff** (LCK): “*en un nodo la suma de corrientes es igual a cero*”; estas leyes expresan la *conservación de la energía* y la *conservación de la carga* respectivamente. La *polaridad de voltaje y circulación de corriente* en los elementos de circuito se basa en la *convención pasiva de los signos* (en las fuentes de voltaje la corriente circula de - a +, en las impedancias de + a -). Se dice que una *red está muerta o en estado pasivo* cuando no actúa ninguna fuente de voltaje o corriente; es decir, las *fuentes de corriente se reemplazan por circuito abierto*, y las *fuentes de voltaje por cortocircuito*.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \hat{V}_k &= 0 \leftarrow \text{Ley de voltajes de Kirchhoff} \\
 \sum_{k=1}^n \hat{I}_k &= 0 \leftarrow \text{Ley de corrientes de Kirchhoff} \quad (106)
 \end{aligned}$$

**Principio de superposición y transformación de fuentes.** En estado estable es posible aplicar el *principio de superposición* (PS), donde las *funciones de excitación* son las *fuentes de corriente y voltaje*, actuando una a la vez; la *respuesta total*, es la *suma de las respuestas parciales*. Una *impedancia Z*, se transforma en una *admitancia Y=1/Z*, e inversamente *Z=1/Y*. Una *fente de voltaje V*, en serie con una *impedancia Z*, se transforma en una *fente de corriente I=V/Z*, en paralelo con la misma

impedancia. Una fuente de corriente  $\mathbf{I}$ , en paralelo con una impedancia  $\mathbf{Z}$ , se transforma en una fuente de voltaje  $\mathbf{V}=\mathbf{ZI}$ , en serie con la misma impedancia.

**Teoremas de circuitos.** Cuando solamente interesa conocer la respuesta en un elemento del circuito, se reemplaza el circuito de poco interés por un equivalente, esto se sustenta en dos teoremas: **teorema de Thévenin (TT)**: “toda red activa lineal de dos terminales a-b, equivale a la conexión en serie de una fuente de voltaje y una impedancia; la fuente de voltaje suministra un voltaje igual al existente entre las terminales de la red original en circuito abierto y la impedancia, es la impedancia equivalente de la red muerta vista desde las terminales a-b”; **teorema de Norton (TN)**: “toda red activa lineal de dos terminales a-b, equivale a la conexión en paralelo de una fuente de corriente y una impedancia; la fuente de corriente suministra la corriente igual a la corriente que suministraría la red original cuando las terminales a-b están en cortocircuito, la impedancia, es la impedancia equivalente de la red muerta vista desde las terminales a-b ”.

$$\sum_{k=1}^n \hat{V}_k = \hat{V}_T \leftarrow \text{Principio de superposición}$$

$$\sum_{k=1}^n \hat{I}_k = 0 \leftarrow \text{Ley de corrientes de Kirchhoff} \quad (107)$$

**División de voltaje.** Consideremos un conjunto de  $n$  impedancias conectadas en serie cuyo voltaje total en sus terminales es  $\mathbf{V}_T$ , y cuya impedancia equivalente es  $\mathbf{Z}_T$ , entonces el voltaje en la  $k$ -ésima impedancia  $\mathbf{Z}_k$ , es una fracción del voltaje total:

$$\hat{V}_k = (\hat{Z}_k / \hat{Z}_T) \cdot \hat{V}_T \quad (108)$$

**División de corriente.** Supongamos que una corriente  $\mathbf{I}_T$  alimenta un nodo al que se conectan  $n$  admitancias en paralelo, cuya admitancia equivalente es  $\mathbf{Y}_T$  entonces la corriente que fluye por la rama que contiene la  $k$ -ésima admitancia  $\mathbf{Y}_k$  es una fracción de la corriente total:

$$\hat{I}_k = (\hat{Y}_k / \hat{Y}_T) \cdot \hat{I}_T \quad (109)$$

**Análisis de nodos.** Considere un circuito de ca con  $n$  nodos operando en estado estable, con fuentes de tensión expresadas fasorialmente  $\mathbf{E}_i$  e impedancias  $\mathbf{Z}_i$ . El análisis sistemático de nodos consiste en hallar los voltajes en cada nodo respecto de un nodo de referencia (designado comúnmente como tierra) y se realiza como sigue:

(1) Tomar un nodo de referencia y asignarle 0, numerar los nodos, entonces el voltaje fasorial del  $i$ -ésimo nodo respecto al nodo de referencia es  $\mathbf{V}_i$ . (2) Transformar las fuentes de voltaje en serie con una impedancia, en fuente de corriente  $\mathbf{I}_i$  en paralelo con una impedancia, transformar todas las impedancias en *admitancias*  $\mathbf{Y}_i$ . (3) Escribir las *ecuaciones nodales matriciales de la red* de la forma  $(\mathbf{Y}_{ij})_{n \times n}(\mathbf{V}_i)_n = (\mathbf{I}_i)_n$ ; donde  $(\mathbf{Y}_{ij})$  es la matriz de admitancias nodal, y sus términos de la *diagonal principal*  $\mathbf{Y}_{kk}$  (*autoadmitancia o admitancia de excitación*) son la *suma de las admitancias conectadas al nodo  $k$* , los demás términos  $\mathbf{Y}_{ij}$  (*admitancia mutua o de transferencia*) son el *negativo de las admitancias conectadas entre los nodos  $i$  y  $j$  ( $i \neq j$ )*. Puesto que  $\mathbf{Y}_{ij} = \mathbf{Y}_{ji}$ , la *matriz de admitancias es simétrica*. (3) Entonces el vector de voltajes nodales está dado por:  $(\mathbf{V}_i) = (\mathbf{Y}_{ij})^{-1}(\mathbf{I}_i)$

**Análisis de mallas.** Es el dual del análisis de nodos y sistema matricial formado tiene la forma  $(\mathbf{Z}_{ij})_{n \times n}(\mathbf{I}_i)_n = (\mathbf{V}_i)_n$ , las impedancias  $\mathbf{Z}_{kk}$  son la suma de las impedancias alrededor de la malla  $k$ , mientras que  $\mathbf{Z}_{ij}$  es la impedancia entre las mallas  $i$  y  $j$ . El *vector de corrientes de malla* está dado por:  $(\mathbf{I}_i) = (\mathbf{Z}_{ij})^{-1}(\mathbf{V}_i)$ .

## Transformación delta y estrella

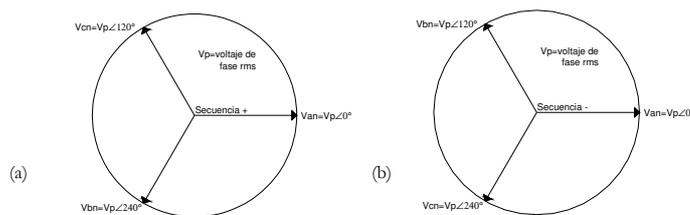
Cuando los voltajes y corrientes se expresan fasorialmente se supone que implícitamente la magnitud que acompaña al fasor es un *valor medio cuadrático* o *valor efectivo*, como se ha expuesto; es decir:

$$V_{ax} = V \angle \theta \Leftrightarrow V = V_{rms} = V_{max} / \sqrt{2} \quad (110)$$

### Circuitos trifásicos

Los *circuitos eléctricos* pueden ser *monofásicos* o *polifásicos* (*bifásicos, trifásicos, tetrafásicos* etc.) según tengan una o más de una fase. Las *fuentes polifásicas* se forman conectando *fuentes simples* en configuraciones especiales, el *número de fases es igual al número de fuentes*. Son de especial interés por su amplio uso los *circuitos trifásicos* que constan de *fuentes trifásicas* y *cargas trifásicas* en configuración *estrella* (Y) o *delta* ( $\Delta$ ) existiendo las siguientes posibilidades *fuentes-carga*: Y-Y, Y- $\Delta$ ,  $\Delta$ -Y,  $\Delta$ - $\Delta$ .

**Fuentes y cargas trifásicas.** Una *fente trifásica* es la conexión de 3 fuentes que cumplen dos condiciones: **a)** el voltaje eficaz  $V$  ( $V=V_{\text{rms}}=V_{\text{max}}/\sqrt{2}$ ) de cada fuente es el mismo; **b)** el voltaje en cada fuente está  $120^\circ$  fuera de fase respecto a las otras dos. La conexión trifásica puede realizarse en Y o  $\Delta$ . Cada fuente se designa como una *fase* y se representa por una letra  $a$ ,  $b$  o  $c$ ; el voltaje medido entre la terminal positiva de cada fuente y el neutro, se denomina *voltaje de fase*; el voltaje medido entre dos fases se denomina *voltaje de línea*; la corriente que fluye a través de una fuente se denomina *corriente de fase* y la corriente que fluye por una línea se llama *corriente de línea*. Se tienen dos *secuencias de fase*: *positiva* o  $abc$  y *negativa* o  $cba$ . La *secuencia positiva* (figura 1.6a) se distingue por que el voltaje de la *fase a* adelanta  $120^\circ$  el de la *fase b* y este a su vez adelanta  $120^\circ$  el de la *fase c*; es decir:  $\angle v_a > \angle v_b > \angle v_c$ . La *secuencia negativa* (figura 1.6b) se distingue por que el voltaje de la *fase a* se atrasa en  $120^\circ$  respecto al de la *fase b* y este a su vez se atrasa en  $120^\circ$  respecto al de la *fase c*; es decir:  $\angle v_c > \angle v_b > \angle v_a$ ; en ambas secuencias los ángulos medidos en sentido horario son positivos y en sentido antihorario negativos. En lo sucesivo se trabajara con la secuencia de fases positiva.



**Figura 3.6** Fasores trifásicos de voltaje con secuencia de fases (a) positiva y (b) negativa

En la *configuración estrella* el *punto común* se designa por  $n$  (*neutro*) y generalmente se *aterrija* (*conexión a potencial 0*); los *voltajes de fase* o *voltajes al neutro* se designan por  $v_{an}$ ,  $v_{bn}$  y  $v_{cn}$  o simplemente  $v_a$ ,  $v_b$  y  $v_c$ ; en la *conexión Y* el *voltaje de línea* adelanta en  $30^\circ$  el *voltaje de fase* y lo *multiplica por  $\sqrt{3}$* ; es decir:

$$V_l = \sqrt{3} \cdot V \quad \leftarrow \quad \text{Magnitud del voltaje de línea}$$

$$\tilde{V}_{an} = V \angle 0 \quad \tilde{V}_{bn} = V \angle -120 \quad \tilde{V}_{cn} = V \angle 120$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{ab} &= \tilde{V}_{an} - \tilde{V}_{bn} = \sqrt{3}V \angle 30 = V_l \angle 30 & (111) \\ \tilde{V}_{bc} &= \tilde{V}_{bn} - \tilde{V}_{cn} = \sqrt{3}V \angle -90 = V_l \angle -90 \\ \tilde{V}_{ca} &= \tilde{V}_{cn} - \tilde{V}_{an} = \sqrt{3}V \angle 150 = V_l \angle 150 \end{aligned}$$

$$\tilde{I}_{na} = \tilde{I}_{aA} \quad \tilde{I}_{nb} = \tilde{I}_{bB} \quad \tilde{I}_{nc} = \tilde{I}_{cC} \quad \leftarrow \quad \tilde{I}_{na} + \tilde{I}_{nb} + \tilde{I}_{nc} = 0$$

En la *configuración delta* no existe punto común a las tres fases y tampoco hay presencia de neutro; *en la conexión Δ la corriente de línea se atrasa en 30° respecto a la de fase y la multiplica por √3*; es decir:

$$\tilde{V}_{ab} = V \angle 0 \quad \tilde{V}_{bc} = V \angle -120 \quad \tilde{V}_{ca} = V \angle 120 \quad \leftarrow \quad \tilde{V}_{ab} + \tilde{V}_{bc} + \tilde{V}_{ca} = 0$$

$$I_l = \sqrt{3} \cdot I \quad \leftarrow \quad \text{Magnitud de la corriente de línea}$$

$$\tilde{I}_{ba} = I_l \angle \phi = \sqrt{3} \cdot I \angle \phi \leftarrow \text{Corriente de la fase 'ba'} \quad (112)$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{aA} &= \tilde{I}_{ba} - \tilde{I}_{ac} = \sqrt{3}I_l \angle -30 = \sqrt{3}I_l \angle (\phi - 30) = I_l \angle (\phi - 30) \\ \tilde{I}_{bB} &= I_l \angle (\phi - 150) \\ \tilde{I}_{cC} &= I_l \angle (\phi + 90) \end{aligned}$$

Las *cargas trifásicas (motores, transformadores...)* pueden conectarse en Δ o Y, resulta conveniente balancear las cargas trifásicas y mantener impedancias de igual magnitud por fase con el objeto de utilizar conductores de igual calibre para las líneas de transmisión, subtransmisión, distribución o utilización.

**Análisis de circuitos trifásicos.** El análisis de circuitos trifásicos con cargas balanceadas en configuración Y-Y, con neutros unidos se lleva a cabo por fase (**figura 1.7**), la unión de los neutros mediante un hilo conductor de impedancia cero no afecta el circuito. En el circuito Y-Y es suficiente el análisis de la *fase a*, de manera que las fases b y c se deducen de los resultados de esta. Sea  $Z_s$  el equivalente serie de las impedancias de línea y carga, entonces:

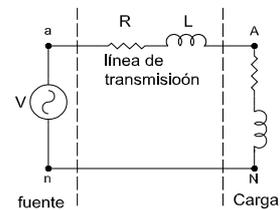


Figura 1.7 Circuito por fase

$$\hat{Z}_s = \hat{Z}_{\text{carga}} + \hat{Z}_{\text{linea}} \quad \hat{Y}_{aA} = \frac{\hat{V}_a}{\hat{Z}_s} \quad \hat{V}_{\text{linea}} = \hat{Z}_{\text{linea}} \hat{Y}_{aA} \quad \hat{V}_{\text{carga}} = \hat{Z}_{\text{carga}} \hat{Y}_{aA} \quad (113)$$

Para las configuraciones que involucran  $\Delta$  en el lado de la fuente o de la carga es necesario realizar transformaciones iniciales para el cálculo de las corrientes de línea; después se lleva el circuito a su forma original y se calculan los voltajes, las potencias y corrientes necesarias. Fuentes y cargas balanceadas pueden transformarse de  $\Delta$  a Y y viceversa mediante:

$$\begin{aligned} \hat{V}_Y &= \frac{\hat{V}_\Delta}{\sqrt{3}} \leftrightarrow \hat{V}_\Delta = \sqrt{3} \hat{V}_Y \\ \hat{Z}_Y &= \frac{\hat{Z}_\Delta}{3} \leftrightarrow \hat{Z}_\Delta = 3 \hat{Z}_Y \end{aligned} \quad (114)$$

**Ejemplo 1.13.** Una fuente trifásica balanceada (figura 1.8) de 707 V y 60Hz, conectada en Y, alimenta a una carga equilibrada conectada en  $\Delta$  por medio de una línea de transmisión de 3 hilos de 100 km de longitud, la impedancia de cada hilo de la línea de transmisión es de  $1+j2\Omega$ . La impedancia de la carga por fase es  $177-j246\Omega$ . Si la secuencia de fases es positiva, determinar las corrientes de línea y de fase, la potencia absorbida por la carga y la potencia disipada por la línea de transmisión.  $V_{AB}$

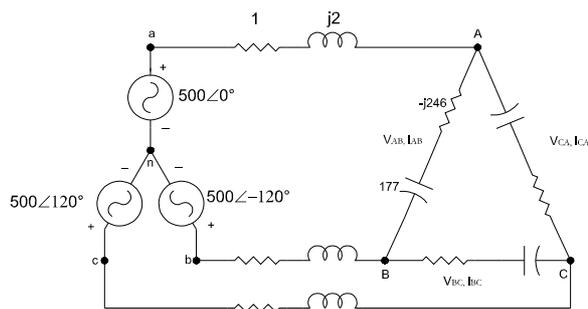


Figura 3.8 Circuito trifásico en conexión Y- $\Delta$

**Solución.** Primero se expresa el *voltaje de cada fuente como fasor*, luego se *transforma la carga  $\Delta$  en carga Y*, se procede a calcular la *impedancia total*, suma de la *impedancia de la línea* y la *impedancia de carga*, entonces se calcula la *corriente de línea para el sistema monofásico resultante de la fase a* y se determinan las restantes corrientes. Luego se determina la corriente de fase en  $\Delta$  a partir de la corriente de línea mediante  $\tilde{I}_{AB} = \tilde{I}_{na} \times (1/\sqrt{3}) \angle 30$ , así mismo los voltajes de fase. La potencia disipada por fase es la potencia real y la potencia total de la carga es 3 veces la de una fase; de igual forma se calcula la potencia disipada en la línea, en símbolos:

$$\tilde{V}_a = \frac{707}{\sqrt{2}} \angle 0 = 500 \angle 0 \quad \leftarrow \text{Voltaje de fase rms}$$

$$\tilde{Z}_Y = \frac{\tilde{Z}_\Delta}{3} = \frac{177 - j246}{3} = 59 - j82 \quad \leftarrow \text{Conversión carga } \Delta \text{ a Y}$$

$$\tilde{Z}_T = \tilde{Z}_L + \tilde{Z}_Y = (1 + j2) + (59 - j82) = 60 - j80 = 100 \angle -53.13$$

$$fp = \cos(\theta_Z) = \cos(-53.13) = 0.6 \text{ (adelantado)}$$

$$\tilde{I}_l = \frac{\tilde{V}_a}{\tilde{Z}_T} = \frac{500 \angle 0}{100 \angle -53.13} = 5 \angle 53.13 \quad \leftarrow \text{Corriente de línea en Y fase a}$$

$$\tilde{I}_{na} = 5 \angle 53.13$$

$$\tilde{I}_{nb} = 5 \angle (53.13 - 120) = 5 \angle -66.87$$

$$\tilde{I}_{nc} = 5 \angle (-66.87 - 120) = 5 \angle -186.87 = 5 \angle 173.13$$

$$\tilde{I}_{AB} = \frac{\tilde{I}_{na} \angle 30}{\sqrt{3}} = \frac{5 \angle 53.13 \angle 30}{\sqrt{3}} = 2.887 \angle 83.13 \quad \leftarrow \text{Corriente en la carga AB en } \Delta$$

$$\tilde{I}_{BC} = 2.887 \angle (83.13 - 120) = 2.887 \angle -36.87$$

$$\tilde{I}_{CA} = 2.887 \angle (-36.87 - 120) = 2.887 \angle -156.87$$

$$\tilde{V}_{AB} = \tilde{I}_{AB} \tilde{Z}_{AB} = 2.887 \angle 83.13 \times [177 - j246] = 874.93 \angle 28.87 \quad \leftarrow \text{Voltaje de carga en } \Delta$$

$$\tilde{V}_{BC} = 874.93 \angle (28.87 - 120) = 874.93 \angle -93.13$$

$$\tilde{V}_{CA} = 874.93 \angle (93.13 - 120) = 874.93 \angle 148.87$$

$$P_{AB} = I_{AB}^2 \times 177 = 1475.25 \quad \leftarrow \text{Potencia real de carga en } \Delta$$

$$P_{\text{carga}} = 3 \times P_{AB} = 3 \times 1475.25 = 4425.75$$

$$P_{\text{línea}} = 3 \times I_{aA}^2 \times 1 = 3 \times 5^2 \times 1 = 75$$

$$P_{\text{total}} = P_{\text{carga}} + P_{\text{línea}} = 4425.75 + 75 = 4500.75 \quad \clubsuit$$

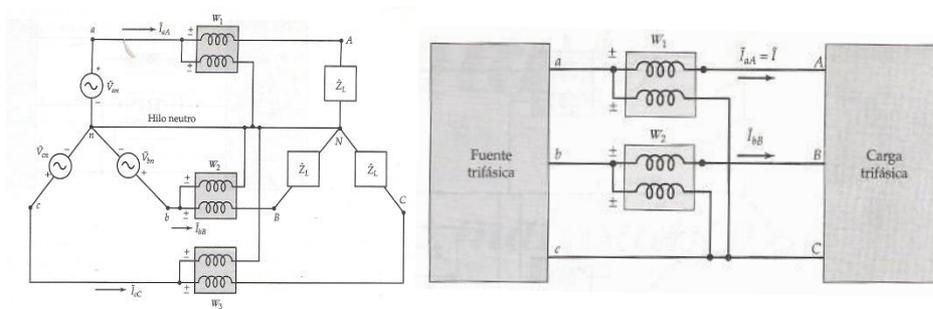
**Medición de la potencia.** La potencia en un *circuito monofásico de cd* es el producto del voltaje por la corriente en la fuente o carga en cuestión, en un *circuito monofásico de ca* la potencia activa o real es el producto de los valores efectivos de voltaje y corriente; en el campo se emplea un *vatímetro* de dos bobinas: *bobina de corriente* y *bobina de potencial* para medir ambos, su lectura es la potencia activa del circuito y se calcula por:

$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos \theta = \text{Re}[\tilde{V}\tilde{I}^*] \quad (115)$$

La *potencia de un circuito trifásico Y-Y de 4 hilos* (con hilo neutro) **figura 1.9a**, se obtiene conectando 3 vatímetros entre cada fase y el neutro; entonces la potencia total es la suma de las tres lecturas y se calcula por:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 \quad P_1 = \text{Re}[\tilde{V}_{an}\tilde{I}_{aA}^*] \quad P_2 = \text{Re}[\tilde{V}_{bn}\tilde{I}_{bB}^*] \quad P_3 = \text{Re}[\tilde{V}_{cn}\tilde{I}_{cC}^*] \quad (116)$$

Si la carga está balanceada la lectura será  $P=3 \times P_1$ .



**Figura 3.9** Medición de potencia en circuitos trifásicos (a) de 4 hilos; (b) de 3 hilos

Para un *circuito trifásico de 3 hilos* (que involucra una  $\Delta$  en la fuente y/o en la carga) **figura 1.9b**, no se dispone de hilo neutro; en tal caso la potencia se mide con dos vatímetros y la potencia total es la suma algebraica de las lecturas en ambos.

$$\begin{aligned} P_1 &= \text{Re}[\tilde{V}_{ac}\tilde{I}_{aA}^*] = \text{Re}[(\sqrt{3}V\angle -30)(I\angle -\theta)] = \sqrt{3}VI \cos(30+\theta) \\ P_2 &= \text{Re}[\tilde{V}_{bc}\tilde{I}_{bB}^*] = \text{Re}[(\sqrt{3}V\angle -90)(I\angle -\theta+120)] = \sqrt{3}VI \cos(30-\theta) \\ P &= P_1 + P_2 = \sqrt{3}VI \times [\cos(30+\theta) + \cos(30-\theta)] = \sqrt{3}VI \cos \theta \end{aligned} \quad (117)$$

## Transformación unidad

En los *sistemas eléctricos de potencia* donde se trabajan valores del orden de los kV y MVA resulta útil para efectos de cálculo y más informativo expresar las cantidades eléctricas como razones de sus cantidades bases eliminando así el uso de unidades, una cantidad por unidad se define por:

$$\text{Cantidad por unidad} = \frac{\text{Cantidad real}}{\text{Cantidad base}} \quad (118)$$

El voltaje  $V$ , la corriente  $I$ , la potencia  $S$  y la impedancia  $Z$ , se relacionan entre sí de manera tal que la selección de los valores base para dos de ellos determina los valores base de los dos restantes. El uso de valores por unidad simplifica el circuito equivalente del transformador, de tal forma que las tensiones, las corrientes, las impedancias y las admitancias externas expresadas por unidad, no cambian cuando se refieren de uno de los lados del transformador hacia el otro.

### Transformación por unidad en circuitos ca

Para los *circuitos de ca monofásicos (1φ) o trifásicos (3φ)* las siguientes cantidades por unidad se definen de igual manera, considerando que en un circuito 1φ el voltaje y la potencia son de fase; mientras que en un circuito 3φ, el voltaje es línea a línea y la potencia es trifásica,  $P_{3\phi} = 3P_{1\phi}$ :

$$\begin{aligned} V_{pu} &= \frac{\text{voltaje real}}{\text{voltaje base, } V_b} & I_{pu} &= \frac{\text{corriente real}}{\text{corriente base, } I_b} \\ V_{A \text{ base}} &= \frac{\text{voltaje base, } V_b}{\text{corriente base, } I_b} & V_{Apu} &= \frac{V_{A \text{ real}}}{V_{A \text{ base}}}, & Z_{\text{real}} &= Z_{pu} \frac{V_b}{I_b} \end{aligned} \quad (119)$$

La impedancia por unidad para un circuito 1φ y para un circuito 3φ se definen por:

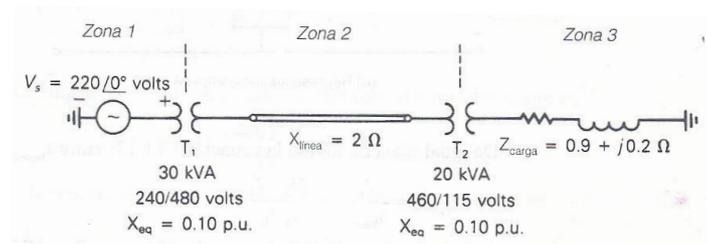
$$\begin{aligned} Z_{pu \ 1\phi} &= \frac{\text{impedancia real, } Z}{\text{impedancia base, } Z_b} = \frac{I_b \cdot Z}{I_b \cdot Z_b} = \frac{I_b \cdot Z}{V_b} \\ Z_{pu \ 3\phi} &= \frac{S_{b \ 3\phi} Z}{V_{b \ LL}^2} \end{aligned} \quad (120)$$

Para cambiar un valor de impedancia por unidad  $Z_{pu_1}$  con valores base  $V_{b_1}$  y  $S_{b_1}$  a nuevos valores base de voltaje y potencia  $V_{b_2}$  y  $S_{b_2}$  se emplea la siguiente relación de transformación:

$$Z_{pu_2} = Z_{pu_1} \left( \frac{V_{b_1}}{V_{b_2}} \right)^2 \left( \frac{S_{b_2}}{S_{b_1}} \right) \quad (121)$$

**Ejemplo 1.14.** Para el circuito 1 $\phi$  de 3 zonas mostrado en la **figura 310**, dividido por dos transformadores  $T_1$  y  $T_2$ , cuyas *capacidades nominales* se muestran, y usando *valores base* de 30kVA y 240 V en la zona 1, dibujar en circuito por unidad y determinar la corriente de la carga. Para los transformadores, las *resistencias de los devanados* y las ramas de *admitancia en derivación* se desprecian.

**Solución.** (1) La potencia base para toda la red es la misma  $S_b=30$  kVA; (2) se determinan los voltajes base en cada zona, sabiendo que  $V_{b_1}=240$  V y conociendo las relaciones de transformación; (3) se determinan las impedancias base; (4) se expresan las reactancias pu de los transformadores en los valores base del sistema; (5) se determinan las impedancias pu de las líneas de transmisión; (6) se determinan los valores del circuito necesarios (el circuito con valores por unidad se muestra en la **figura 1.11**):



**Figura 1.10** Circuito monofásico de 3 zonas

(1)  $S_b = 30,000 \text{ VA}$

(2)  $V_{b_1} = 240V$ ;  $V_{b_2} = \frac{V_2}{V_1} V_{b_1} = \frac{480}{240} 240 = 480V$ ;  $V_{b_3} = \frac{V_3}{V_2} V_{b_2} = \frac{115}{460} 480 = 120V$

(3)  $Z_{b_1} = \frac{V_{b_1}^2}{S_b} = \frac{240^2}{30,000} = 1.92\Omega$ ,  $Z_{b_2} = \frac{V_{b_2}^2}{S_b} = \frac{480^2}{30,000} = 7.68\Omega$ ,  $Z_{b_3} = \frac{V_{b_3}^2}{S_b} = \frac{120^2}{30,000} = 0.48\Omega$

(4)  $X_{T1} pu = 0.10$ ,  $X_{T2} pu = 0.10 \left( \frac{460}{480} \right)^2 \left( \frac{30,000}{20,000} \right) = 0.10 \left( \frac{115}{120} \right)^2 \left( \frac{30,000}{20,000} \right) = 0.1378$

(5)  $X_{\text{linea}} pu = \frac{X_{\text{linea}}}{Z_{b_2}} = \frac{2}{7.68} = 0.2604$ ,  $Z_{\text{carga}} pu = \frac{Z_{\text{carga}}}{Z_{b_3}} = \frac{0.9 + j0.2}{0.48} = 1.875 + j0.4167$

(6)  $V_s pu = \frac{220\angle 0}{240} = 0.917\angle 0$

$$I_{\text{carga}} pu = I_s pu = \frac{V_s pu}{j(X_{T1} pu + X_{\text{linea}} pu + X_{T2} pu) + Z_{\text{carga}} pu} = \frac{0.9167\angle 0}{j(0.10 + 0.2604 + 0.1378) + (1.875 + j0.4167)}$$

$$I_{\text{carga}} pu = \frac{0.9167\angle 0}{2.086\angle 26.01} = 0.4395\angle -26.01$$

$$I_{b_3} = \frac{S_b}{V_{b_3}} = \frac{30,000}{120} = 250A$$

$$I_{\text{carga}} = I_{\text{carga}} pu \times I_{b_3} = (0.4395\angle -26.01) \times 250A = 109.9\angle -26.01A \quad \clubsuit$$

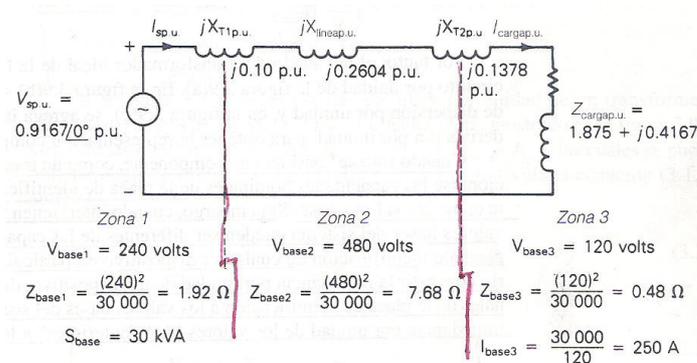


Figura 1.11 Circuito monofásico con valores por unidad (pu)

## Transformación en componentes simétricas

En el estudio de componentes simétricas resulta útil introducir el *operador complejo*  $a = 1\angle 120^\circ = \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2}$ , y sus siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
 a &= 1\angle 120^\circ, & a^2 &= 1\angle 240^\circ, & a^3 &= 1\angle 0^\circ, & a^4 &= a = 1\angle 120^\circ, & ja &= 1\angle 210^\circ \\
 1+a+a^2 &= 0, & 1-a &= \sqrt{3}\angle -30^\circ, & 1-a^2 &= \sqrt{3}\angle 30^\circ, & a^2-a &= \sqrt{3}\angle 270^\circ \\
 1+a &= -a^2 = 1\angle 60^\circ, & 1+a^2 &= -a = 1\angle -60^\circ, & a+a^2 &= -1 = 1\angle 180^\circ
 \end{aligned} \tag{122}$$

### Componentes simétricas de los voltajes de fase

La *transformación en componentes simétricas* es una técnica desarrollada por C. L. Fortescue en 1918 para analizar sistemas trifásicos desbalanceados; consiste en descomponer cada *voltaje o corriente de fase* del sistema trifásico en *tres componentes de secuencia (cero, positiva y negativa)*, de manera que cada *fasor de fase* es la suma de sus 3 componentes de secuencia (**figura 1.12**):

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}_a &= \tilde{V}_{a0} + \tilde{V}_{a1} + \tilde{V}_{a2} \\
 \tilde{V}_b &= \tilde{V}_{b0} + \tilde{V}_{b1} + \tilde{V}_{b2} \\
 \tilde{V}_c &= \tilde{V}_{c0} + \tilde{V}_{c1} + \tilde{V}_{c2}
 \end{aligned} \tag{123}$$

(0) **Componentes de secuencia cero.** Tres fasores de magnitud igual y desplazamiento de fase cero ( $\mathbf{v}_{a0}$ ,  $\mathbf{v}_{b0}$ ,  $\mathbf{v}_{c0}$ ).

$$\tilde{V}_{a0} = \tilde{V}_{b0} = \tilde{V}_{c0} \tag{124}$$

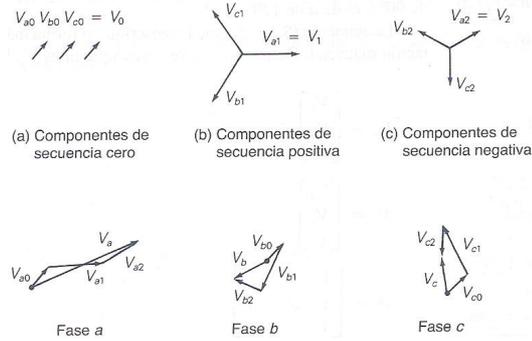
(1) **Componentes de secuencia positiva.** Tres fasores de magnitud igual, desplazamiento de fase  $\pm 120$  y secuencia positiva ( $\mathbf{v}_{a1}$ ,  $\mathbf{v}_{b1}$ ,  $\mathbf{v}_{c1}$ ).

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}_{b1} &= \tilde{V}_{a1} \times 1\angle 240 = a^2 \tilde{V}_{a1} \\
 \tilde{V}_{c1} &= \tilde{V}_{a1} \times 1\angle 120 = a \tilde{V}_{a1}
 \end{aligned} \tag{125}$$

(2) **Componentes de secuencia negativa.** Tres fasores de magnitud igual, desplazamiento de fase  $\pm 120$  y secuencia negativa ( $\mathbf{v}_{a2}$ ,  $\mathbf{v}_{b2}$ ,  $\mathbf{v}_{c2}$ ).

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}_{b2} &= \tilde{V}_{a2} \times 1\angle 120 = a \tilde{V}_{a2} \\
 \tilde{V}_{c2} &= \tilde{V}_{a2} \times 1\angle 240 = a^2 \tilde{V}_{a2}
 \end{aligned} \tag{126}$$

**Figura 1.12** Voltajes de fase en términos de sus componentes de secuencia



Escribiendo *matricialmente* los *fases de fase* en términos de sus *componentes de la fase a*, se tiene lo siguiente:

$$\begin{cases} \tilde{V}_a = \tilde{V}_{a0} + \tilde{V}_{a1} + \tilde{V}_{a2} \\ \tilde{V}_b = \tilde{V}_{a0} + a^2\tilde{V}_{a1} + a\tilde{V}_{a2} \\ \tilde{V}_c = \tilde{V}_{a0} + a\tilde{V}_{a1} + a^2\tilde{V}_{a2} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{V}_a \\ \tilde{V}_b \\ \tilde{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V}_{a0} \\ \tilde{V}_{a1} \\ \tilde{V}_{a2} \end{bmatrix} \quad (127)$$

Definiendo un *vector de fase*  $\mathbf{V}_p$ , un *vector de componentes para la fase a*  $\mathbf{V}_{sa}$  y una *matriz 3-cuadrada de transformación*  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{V}_p = \begin{bmatrix} \tilde{V}_a \\ \tilde{V}_b \\ \tilde{V}_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_{sa} = \begin{bmatrix} \tilde{V}_{a0} \\ \tilde{V}_{a1} \\ \tilde{V}_{a2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \quad (128)$$

De esta manera se tienen las siguientes ecuaciones de conversión entre fasores de fase y de secuencia para la *fase a*:

$$\mathbf{V}_p = \mathbf{A}\mathbf{V}_{sa} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{V}_{sa} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}_p \quad (129)$$

En un *sistema 3φ balanceado* la componente de secuencia cero es cero ya que  $\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_b + \mathbf{v}_c = 0$ . En un *sistema 3φ desbalanceado*, los *voltajes línea a neutro* pueden tener componente de secuencia cero; pero los *voltajes línea a línea* no tienen componente de secuencia cero.

**Ejemplo 1.15.** Para un sistema 3φ balanceado en secuencia positiva con  $v_{an} = 227$  volts, calcular las componentes de secuencia para la *fase a*.

**Solución.** Empleando las ecuaciones antes deducidas se tiene:

$$V_p = \begin{bmatrix} \tilde{V}_a \\ \tilde{V}_b \\ \tilde{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 227\angle 0 \\ 227\angle -120 \\ 227\angle 120 \end{bmatrix}$$

$$V_{sa} = \begin{bmatrix} \tilde{V}_{a0} \\ \tilde{V}_{a1} \\ \tilde{V}_{a2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\tilde{V}_a + \tilde{V}_b + \tilde{V}_c) \\ \frac{1}{3}(\tilde{V}_a + a\tilde{V}_b + a^2\tilde{V}_c) \\ \frac{1}{3}(\tilde{V}_a + a^2\tilde{V}_b + a\tilde{V}_c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(227\angle 0 + 227\angle -120 + 227\angle 120) \\ \frac{1}{3}(227 + 227 + 227) \\ \frac{1}{3}(227 + 227\angle 120 + 227\angle 240) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 227 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \clubsuit$$

### Componentes simétricas de las corrientes de fase

La transformación en componentes simétricas también es aplicable a corrientes fasoriales de fase, como se muestra a continuación:

$$I_p = AI_{sa} \Leftrightarrow I_{sa} = A^{-1}I_p \quad I_p = \begin{bmatrix} \tilde{I}_a \\ \tilde{I}_b \\ \tilde{I}_c \end{bmatrix}, \quad I_{sa} = \begin{bmatrix} \tilde{I}_{a0} \\ \tilde{I}_{a1} \\ \tilde{I}_{a2} \end{bmatrix} \quad (130)$$

En un sistema  $3\phi$  conectado en Y de 4 hilos, la corriente neutra esta dada por:  $\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c = 3\mathbf{I}_{a0}$ ; de manera que en un sistema balanceado conectado en Y, las corrientes de línea no tienen componente de secuencia cero, puesto que la corriente de neutro es cero. De lo anterior se deduce que en un sistema  $3\phi$  de 3 hilos  $\Delta$  o Y no aterrizado las corrientes de línea no tienen componente de secuencia cero.

**Ejemplo 1.16.** Una línea  $3\phi$  que alimenta una carga equilibrada conectada en Y con neutro aterrizado, tiene abierta la fase b. Dadas las *corrientes de línea desbalanceadas*, calcular las *corrientes de secuencia para la fase a* y la *corriente al neutro*:

$$I_p = \begin{bmatrix} \tilde{I}_a \\ \tilde{I}_b \\ \tilde{I}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\angle 0 \\ 0 \\ 10\angle 120 \end{bmatrix}$$

**Solución.** Empleando las ecuaciones definitorias de corrientes de secuencia se tiene que:

$$I_{sa} = \begin{bmatrix} \tilde{I}_{a0} \\ \tilde{I}_{a1} \\ \tilde{I}_{a2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\tilde{I}_a + \tilde{I}_b + \tilde{I}_c) \\ \frac{1}{3}(\tilde{I}_a + a\tilde{I}_b + a^2\tilde{I}_c) \\ \frac{1}{3}(\tilde{I}_a + a^2\tilde{I}_b + a\tilde{I}_c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(10 + 0 + 10\angle 120) \\ \frac{1}{3}(10 + 0 + 10) \\ \frac{1}{3}(10 + 0 + 10\angle 240) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.333\angle 60 \\ 6.667 \\ 3.333\angle -60 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{I}_n = \tilde{I}_a + \tilde{I}_b + \tilde{I}_c = 10 + 0 + 10\angle 120 = 10\angle 60 = 3 \times \tilde{I}_{a0} \quad \clubsuit$$

## Transformación de Laplace

La *transformada de Laplace* es una *operación lineal* que transforma una función en del dominio del tiempo  $f(t)$  en una función  $F(s)$  en el dominio  $s$  de los números complejos y *existe si la integral converge para  $t > 0$* ; se define por:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad L[\ ] \leftarrow \text{Operador de Laplace} \quad (131)$$

$$\left[ \begin{array}{l} L[af(t)] = aL[f(t)] \quad a \in \mathfrak{R} \vee C \\ L[a_1f(t) \pm a_2g(t)] = a_1L[f(t)] \pm a_2L[g(t)] \end{array} \right] \leftarrow \text{Linealidad}$$

La integral converge si  $f(t)$  es *seccionalmente continua* en cada *intervalo finito* en el rango  $t > 0$  y si es de *orden exponencial* conforme  $t \rightarrow \infty$ , esto es existe una constante  $k \in \mathfrak{R}$ , tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-kt}|f(t)| = 0$ .

### Teoremas de la transformada de Laplace

Los teoremas de la transformada de Laplace: (1) *traslación o retardo en el tiempo*; (2) *traslación exponencial*; (3) *cambio de escala en el tiempo*; (4) *diferenciación real*; (5) *valor final*; (6) *valor inicial*; (7) *integración real*; (8) *diferenciación compleja*; ayudan a simplificar el cálculo de las *transformadas de funciones, derivadas e integrales*.

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-t_0 s} \mathcal{L}[f(t)] = e^{-t_0 s} F(s) \leftrightarrow f(t) = 0 \text{ para } t < t_0 \\
(2) \quad & \mathcal{L}[e^{at} f(t)] = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s-a), \quad a \in R \vee C \\
(3) \quad & \mathcal{L}[f(\frac{t}{k})] = kF(ks), \quad k \in R^+ \wedge k > 0 \\
(4a) \quad & \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0), \quad \mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0), \\
(4b) \quad & \mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) \dots - sf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0) \\
& \quad = s^n F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1} f^{(i)}(0) \\
(5) \quad & \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \\
(6) \quad & f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \\
(7) \quad & \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\left[\int_0^t f(t) dt\right]_{t=0}}{s} \\
(8) \quad & \mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \quad n = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

(132)

así mismo la función delta se define como una integral compleja :

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft} df \leftrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \leftarrow \text{frecuencia}$$

### **Función impulso unitario**

Antes de continuar nuestra exposición se estudiará una función de gran interés y aplicación. *La función impulso unitario o función delta es una función del tiempo que vale cero cuando su argumento ( $t-t_0$ ) es menor que cero; que vale cero cuando su argumento es mayor que cero; que es infinito cuando su argumento vale cero, y que tiene un área unitaria*, matemáticamente se expresa por:

$$\delta(t-t) = 0 \quad \text{para } t \neq t_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t-t_0) dt = 1$$

(133)

La *amplitud del impulso es infinita*. Cuando se multiplica por una función  $f(t)$ , su *amplitud o peso* cambia de 1 a  $f(t_0)$ , es decir:

$$\text{Intensidad}[f(t)\delta(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0) dt = f(t_0)$$

(134)

En términos de la *frecuencia  $f$* , y para efectos de *análisis espectrales* y su uso con *transformadas de Fourier*, se tienen una definición alternativa altamente útil para la función delta:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft} df$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \leftrightarrow u(t) \leftarrow \text{escalón unitario} \quad (135)$$

## Transformación de funciones

A continuación se presentan y transforman funciones de amplio uso en la ingeniería de control:

Función **escalón**:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ A & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

$$L[A] = \int_0^{\infty} Ae^{-st} dt = \frac{A}{-s} [e^{-\infty} - e^0] = \frac{A}{s} \quad (136)$$

Función **rampa**:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ At & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

$$L[At] = \int_0^{\infty} Ate^{-st} dt = (-1) \frac{d}{ds} \left( \frac{A}{s} \right) = -A \frac{d}{ds} (s^{-1}) = \frac{A}{s^2} \quad (137)$$

Función **pulso**: es una función escalón de altura A/T y longitud T

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0, T < t \\ \frac{A}{T} & \text{para } 0 < t < T \end{cases} \rightarrow f(t) = \frac{A}{T} 1(t) - \frac{A}{T} 1(t-T)$$

$$L[f(t)] = L\left[\frac{A}{T} 1(t)\right] - L\left[\frac{A}{T} 1(t-T)\right] = \frac{A}{Ts} - \frac{A}{Ts} e^{-sT} = \frac{A}{Ts} (1 - e^{-sT}) \quad (138)$$

Función **impulso**: es un caso limitado de la función pulso

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0, T < t \\ \lim_{T \rightarrow 0} \frac{A}{T} & \text{para } 0 < t < T \end{cases}$$

$$L[f(t)] = \lim_{T \rightarrow 0} \left[ \frac{A}{Ts} (1 - e^{-sT}) \right] = \lim_{T \rightarrow 0} \left[ \frac{\frac{d}{dT} [A(1 - e^{-sT})]}{\frac{d}{dT} [Ts]} \right] = \frac{As}{s} = A \leftarrow \text{Area bajo el impulso} \quad (139)$$

Función **impulso unitario** o **delta de Dirac**: tiene *magnitud infinita* y *duración de cero*

$$f(t) = \begin{cases} \delta(t-T) = 0 & \text{para } t \neq T \\ \delta(t-T) = \infty & \text{para } t = T \end{cases} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-T) dt = 1 \quad \delta(t-T) = \frac{d}{dt} 1(t-T)$$

$$L[\delta(t-T)] = 1 \quad (140)$$

Función **exponencial**:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ Ae^{-at} & \text{para } t \geq 0 \end{cases} \quad a, A = \text{ctes} \quad (141)$$

$$L[Ae^{-at}] = \int_0^{\infty} Ae^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} Ae^{-(a+s)t} dt = \frac{A}{-(s+a)} [e^{-\infty} - e^0] = \frac{A}{s+a}$$

Función **senoidal y cosenoidal**:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ A \sin \omega t & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

$$L[A \sin \omega t] = \int_0^{\infty} (A \sin \omega t) e^{-st} dt = \frac{A}{2j} \int_0^{\infty} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{-st} dt = \frac{A}{2j} \left( \frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (142)$$

$$L[A \cos \omega t] = \int_0^{\infty} (A \cos \omega t) e^{-st} dt = \frac{A}{2} \int_0^{\infty} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) e^{-st} dt = \frac{As}{s^2 + \omega^2}$$

## Transformación inversa de Laplace

El *proceso inverso* de encontrar la *función del tiempo*  $f(t)$  a partir de la *transformada de Laplace*  $F(s)$  se denomina *transformada inversa de Laplace* y se define por:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} dt \quad \text{para } t > 0 \quad (143)$$

Donde  $c \in \mathfrak{R}$  es la *abscisa de convergencia*, y cumple que  $c > \text{Re}[s_i]$ , siendo  $s_i$  cualquier punto singular de  $F(s)$ . La integral es del campo de los números complejos; y su evaluación es complicada; en su lugar se emplea una tabla de funciones  $f(t)$  y sus transformadas  $F(s)$  (ver **tabla 1.5**). En algunos casos es necesario expresar  $F(s)$  como una *suma de fracciones parciales* para transformar cada término separadamente; este es el método preferido.

 **Ejemplo 1.17.** Hallar la *transformada inversa de Laplace* de  $F(s) = 5[s(s+1)(s+2)]^{-1}$

**Solución.** Expresando la *función racional* como una *suma de fracciones parciales* e invirtiendo término a término se tiene:

$$F(s) = \frac{5}{s(s+1)(s+2)} = \frac{a_0}{s} + \frac{b_0}{s+1} + \frac{c_0}{s+2}$$

$$a_0 = \frac{1}{0!} \frac{d^0}{ds^0} \left( \frac{P(s)}{R(s)} \right) \Bigg|_{s=0} = \left( \frac{5}{(s+1)(s+2)} \right) \Bigg|_{s=0} = \left( \frac{5}{(1)(2)} \right) = 2.5$$

$$b_0 = \frac{1}{0!} \frac{d^0}{ds^0} \left( \frac{P(s)}{R(s)} \right) \Bigg|_{s=-1} = \left( \frac{5}{s(s+2)} \right) \Bigg|_{s=-1} = \left( \frac{5}{-1(-1+2)} \right) = -5$$

$$c_0 = \frac{1}{0!} \frac{d^0}{ds^0} \left( \frac{P(s)}{R(s)} \right) \Bigg|_{s=-2} = \left( \frac{5}{s(s+1)} \right) \Bigg|_{s=-2} = \left( \frac{5}{-2(-2+1)} \right) = 2.5$$

$$F(s) = \frac{2.5}{s} - \frac{5}{s+1} + \frac{2.5}{s+2}$$

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1} \left[ \frac{2.5}{s} \right] - L^{-1} \left[ \frac{5}{s+1} \right] + L^{-1} \left[ \frac{2.5}{s+2} \right] = 2.5u(t) - 5e^{-t} + 2.5e^{-2t} \quad \clubsuit$$

Con frecuencia resultan transformadas inversas de Laplace que involucran *polos complejos conjugados*, en tal caso no es necesario la expansión en fracciones parciales; sino como una suma de *funciones seno y coseno amortiguadas*, tomando en cuenta que:

$$L[e^{-at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}, \quad L[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2} \quad (144)$$

**Ejemplo 1.18.** Hallar la transformada inversa de Laplace de  $F(s) = \frac{2s+12}{s^2+2s+5}$

**Solución.** La factorización del denominador es  $s^2+2s+5 = (s+1+j2)(s+1-j2)$ , lo cual también se factoriza como  $s^2+2s+5 = (s+1)^2+2^2$ , de aquí que:

$$F(s) = \frac{2s+12}{s^2+2s+5} = \frac{2s+12}{(s+1)^2+2^2} = \frac{10+2(s+1)}{(s+1)^2+2^2} = 5 \frac{2}{(s+1)^2+2^2} + 2 \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}$$

$$L^{-1}[F(s)] = 5L^{-1} \left[ \frac{2}{(s+1)^2+2^2} \right] + 2L^{-1} \left[ \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} \right] = 5e^{-t} \sin 2t + 2e^{-t} \cos 2t \quad \clubsuit$$

**Convolución**

La *convolución* es un tipo especial de producto conmutativo de dos funciones y se define como una integral, es decir, la convolución de  $f(t)$  y  $g(t)$  se denota y está dada por:

$$(f * g)(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad \rightarrow \quad f * g = g * f \quad (145)$$

La transformada de la convolución de  $f$  y  $g$  es producto de las transformadas individuales de  $f$  y  $g$ . La transformada inversa del producto de las transformadas  $F$  y  $G$ , es la convolución de  $f$  y  $g$ .

$$L[(f * g)(t)] = L[f(t)] \cdot L[g(t)]$$

$$L^{-1}[F(s) \cdot G(s)] = (f * g)(t) \quad (146)$$

Este último hecho permite hallar la transformada inversa de una función  $H(s)$  siempre que: (1)  $H(s)$  pueda descomponerse en dos funciones  $F(s)$  y  $G(s)$ ; (2) las transformadas inversas  $f(t)$  y  $g(t)$  existan; (3) sea posible evaluar las integrales de convolución de  $f$  y  $g$ .

**Ejemplo 1.19.** Hallar la transformada inversa de  $H(s) = [(s+a)(s+b)]^{-1}$ , usando la técnica de convolución.

**Solución.** Se aplican los tres pasos enunciados y se tiene que:

$$\begin{aligned} (1) \quad H(s) &= F(s) \cdot G(s) \rightarrow F(s) = \frac{1}{(s+a)}, \quad G(s) = \frac{1}{(s+b)} \\ (2) \quad f(t) &= L^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] = e^{-at}, \quad g(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s+b}\right] = e^{-bt} \\ (3) \quad (f * g)(t) &= \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t e^{-a\tau}e^{-b(t-\tau)}d\tau = \int_0^t e^{-a\tau-b(t-\tau)}d\tau \\ &= \int_0^t e^{(b-a)\tau-bt}d\tau = \frac{1}{b-a}e^{(b-a)\tau-bt}\Big|_0^t = \frac{1}{b-a}[e^{(b-a)t-bt} - e^{-bt}] \\ &= \frac{1}{b-a}[e^{(b-a-b)t} - e^{-bt}] = \frac{1}{b-a}[e^{-at} - e^{-bt}] \\ \therefore L^{-1}[H(s)] &= (f * g)(t) = \frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt}) \quad \clubsuit \end{aligned}$$

## Transformación de ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo

Las ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo con o sin condiciones iniciales se resuelven de forma sencilla mediante la transformación de Laplace. Dada una ED se realizan los siguientes pasos: (1) se aplica la transformación de Laplace a cada término de la ED; (2) se resuelve para la variable independiente  $F(s)$ ; (3) de ser necesario se aplica transformación inversa de Laplace para expresar la función en el dominio del tiempo  $f(t)$ .

 **Ejemplo 1.20.** Hallar la función  $y(t)$  que satisface la ED  $D^2y + 3Dy + 2y = 0$ , sujeta a las condiciones iniciales:  $y(0) = a$ ,  $\dot{y}(0) = b$ .

**Solución.** Se aplican los tres pasos antes numerados y se tiene que:

$$(1) \quad \mathcal{L}[y + 3\dot{y} + 2y = 0] = [s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)] + 3[sY(s) - y(0)] + 2[Y(s)] = 0$$

$$s^2Y - as - b + 3sY - 3a + 2Y = 0 \rightarrow Y(s^2 + 3s + 2) - as - b - 3a = 0$$

$$(2) \quad Y = \frac{a(s+3)+b}{(s^2+3s+2)} = \frac{a_0}{(s+1)} + \frac{b_0}{(s+2)}$$

$$a_0 = \frac{1}{0!} \frac{d^0}{ds^0} \left( \frac{P(s)}{R(s)} \right) \Bigg|_{s=-1} = \left( \frac{a(s+3)+b}{s+2} \right) \Bigg|_{s=-1} = \frac{a(-1+3)+b}{-1+2} = 2a+b$$

$$b_0 = \frac{1}{0!} \frac{d^0}{ds^0} \left( \frac{P(s)}{R(s)} \right) \Bigg|_{s=-2} = \left( \frac{a(s+3)+b}{s+1} \right) \Bigg|_{s=-2} = \frac{a(-2+3)+b}{(-2+1)} = -(a+b)$$

$$Y = \frac{2a+b}{(s+1)} - \frac{a+b}{(s+2)}$$

$$(3) \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2a+b}{(s+1)} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{a+b}{(s+2)} \right] = (2a+b)e^{-t} + (a+b)e^{-2t} \quad \clubsuit$$

Tabla 1.5 Transformadas directas e inversas de Laplace

$F(s)=L[f(t)]$	$f(t)=L^{-1}[F(s)]$	$F(s)=L[f(t)]$	$f(t)=L^{-1}[F(s)]$
1	$\delta(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
$\frac{A}{Ts}(1 - e^{-sT})$	$\frac{A}{T}$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$	$\sinh \omega t$
$\frac{1}{s^2}$	$t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$	$\cosh \omega t$
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$
$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$	$1 - \cos \omega t$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$te^{-at}$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{\omega_n}{K} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n K t)$ , $K = \sqrt{1 - \xi^2}$
$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$t^n e^{-at}$	$\frac{s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$	$-\frac{1}{K} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n K t - \phi)$ $K = \sqrt{1 - \xi^2}$ , $\phi = \tan^{-1} K/\xi$
$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$	$1 - \frac{1}{K} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n K t + \phi)$ $K = \sqrt{1 - \xi^2}$ , $\phi = \tan^{-1} K/\xi$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{\omega^3}{s^2(s^2 + \omega^2)}$	$\omega t - \sin \omega t$
$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{2\omega^3}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\sin \omega t - \omega t \cos \omega t$
$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab} \left[ 1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt}) \right]$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega} t \sin \omega t$
$\frac{1}{s(s+a)^2}$	$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$t \cos \omega t$
$\frac{1}{s(s+a)^2}$	$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$	$\frac{s^2}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)}$	$\frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t)$
$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$

## Transformación en series de potencias

**Sucesión.** Es una función  $S(k)$  cuyo dominio es el conjunto de los enteros no negativos,  $k \in \{Z^{0+}\}$ , y cuyos términos son los elementos de la sucesión (contradominio), pudiendo ser finita o de  $N$  términos:  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ; o bien infinita:  $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ; siendo estas últimas de mayor interés:

$$\begin{aligned} S(0), S(1), S(2), \dots, S(k), \dots = a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots = \{a_k\}_0^\infty = \{a_k\} &\leftarrow \text{Sucesión infinita} \\ S(0), S(1), S(2), \dots, S(N-1) = a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, \dots = \{a_k\}_0^{N-1} &\leftarrow \text{Sucesión finita} \end{aligned} \quad (147)$$

Una sucesión puede ser *convergente* o *divergente* según tienda o no hacia un valor  $L$  cuando  $k \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = L \quad (148)$$

El criterio de *convergencia de Cauchy* establece que: una sucesión  $\{a_k\}$  converge si y sólo si para un  $\varepsilon > 0$  existe un  $N$  tal que  $|a_i - a_j| < \varepsilon$  para toda  $i, j > N$ . Una sucesión es *monótona* si es: *creciente*  $\{a_k < a_{k+1}\}$ , *decreciente*  $\{a_k > a_{k+1}\}$ , *no creciente*  $\{a_k \leq a_{k+1}\}$ , *no decreciente*  $\{a_k \geq a_{k+1}\}$ .

**Serie.** Es la suma de los términos de una sucesión, pueden ser representadas por la notación sigma y es de interés primordial saber si son convergentes o divergentes:

$$\begin{aligned} S &= S(0) + S(1) + S(2) + \dots + S(k) + \dots = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots = \sum_{k=0}^\infty a_k \\ S_N &= S(0) + S(1) + S(2) + \dots + S(N-1) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \end{aligned} \quad (149)$$

La serie  $\sum_{k=0}^\infty a_k$  converge si la sucesión de *sumas parciales*  $S_k = \sum_{k=0}^{N-1} a_k$ , converge; es decir:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} a_k = L \quad (150)$$

Si el límite no existe entonces la serie diverge. Una condición necesaria para la convergencia de la serie es:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 \quad (151)$$

Una serie tiene *convergencia absoluta* si  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  converge; de otra forma tiene *convergencia condicional*. El orden de los sumandos de una serie de convergencia absoluta no altera la suma; pero si la altera en una serie de convergencia condicional.

### Series especiales

La *serie geométrica* se define por y tiene las siguientes propiedades:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + \dots + z^k + \dots$$

$$S_N = \sum_{k=0}^{N-1} z^k = 1 + z + z^2 + \dots + z^{N-1} = \frac{1 - z^N}{1 - z} \quad (152)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - z^N}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} \text{ siempre que } |z| < 1$$

$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots - \dots +$  la serie es oscilante para  $z = -1$

La *serie armónica* es *absolutamente convergente* para  $\operatorname{Re}[\alpha] > 1$ , y *absolutamente divergente* para  $\operatorname{Re}[\alpha] \leq 1$ ; se define por:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{k^\alpha} + \dots$$

$$S_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{N^\alpha} \quad (153)$$

La *serie armónica alternante* es *absolutamente convergente* para  $\operatorname{Re}[\alpha] > 1$ , y *absolutamente divergente* para  $\operatorname{Re}[\alpha] \leq 1$ ; se define por:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^\alpha} = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \dots + \frac{1}{k^\alpha} - \dots$$

$$S_N = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1}}{k^\alpha} = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \dots + \frac{1}{N^\alpha} \quad (154)$$

La *función zeta de Riemann* se define como la *suma de la serie armónica infinita*.

$$\zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad (155)$$

### Pruebas de convergencia

**Prueba de comparación.** La serie de términos positivos  $\sum a_k$  converge, si existe una serie convergente  $\sum b_k$  tal que  $a_k \leq b_k, \forall k$ . Similarmente, la serie  $\sum a_k$  diverge, si existe una serie divergente  $\sum b_k$  tal que  $a_k \geq b_k, \forall k$ .

**Prueba de integral.** Si los coeficientes  $a_k$  de una serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ , son decrecientes y pueden ser extendidos a una *función decreciente de variable continua*  $x$ :  $a(x) = a_k$  para  $x \in \mathbb{Z}^{0+}$ , entonces la serie converge o diverge con la integral:  $\int_0^{\infty} a(x)dx$ .

**Prueba de límites.** Estas pruebas son de *cociente* de *raíz* y de *Raabe* se aplican a la serie  $\sum a_k$ . El caso mostrado indica que la serie converge absolutamente, de lo contrario diverge, si el límite es la unidad, la prueba falla:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 & \quad \leftarrow \text{Prueba de cociente} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k} < 1 & \quad \leftarrow \text{Prueba de raíz} \qquad (156) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} n \left( 1 - \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \right) > 1 & \quad \leftarrow \text{Prueba de Raabe} \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.21:** Aplicar la prueba del cociente a la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k!}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{k+1} k!}{e^k (k+1)!} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{e}{k+1} \right| = 0 \therefore \text{ la serie es absolutamente convergente} \quad \clubsuit$$

**Prueba de Gauss.** Considere la serie  $\sum a_k$ , si  $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \frac{L}{k} + \frac{b_k}{k^2}$ , donde  $b_k$  esta definido, entonces la serie converge absolutamente si  $L > 1$ ; de otra forma la serie diverge o converge condicionalmente.

### Convergencia uniforme

Una *función*  $f(z)$  es *continua* en un dominio cerrado si  $\lim_{\zeta \rightarrow z} f(\zeta) = f(z)$ , para toda  $z$  del dominio. Considere una serie en la cual los términos son funciones de  $z$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z)$ . La serie converge en un dominio, si la serie converge por cada punto  $z$  en el dominio. Si definimos la función continua  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z)$ , podemos establecer un *criterio de convergencia*; para un  $\epsilon$  dado existe una función  $N(z)$  tal que:

$$\left| f(z) - S_{N(z)}(z) \right| = \left| f(z) - \sum_{k=0}^{N(z)-1} a_k(z) \right| < \epsilon \quad \text{para todo } z \text{ en el dominio} \qquad (157)$$

Una serie de la forma  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z)$  es *uniformemente convergente* en el dominio si para un  $\varepsilon > 0$  dado, existe un  $N$  independiente de  $z$  tal que:

$$|f(z) - S_N(z)| = \left| f(z) - \sum_{k=1}^N a_k(z) \right| < \varepsilon \quad \text{para todo } z \text{ en el dominio} \quad (158)$$

**Prueba de Weierstrass.** Una serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z)$  es uniforme y absolutamente convergente, si existe una serie convergente de términos positivos  $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$  tal que:  $|a_k(z)| \leq M_k$  para toda  $z$  del dominio.

**Prueba de Dirichlet.** Considere una secuencia decreciente, de constantes positivas  $c_k$ , con límite cero. Si todas las sumas parciales de  $a_k(z)$ , están definidas en un dominio cerrado, es decir:  $\left| \sum_{k=1}^N a_k(z) \right| < \text{constante}$ , para toda  $N$ ; entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k(z)$ , es uniformemente convergente en ese dominio cerrado. Esta prueba no implica convergencia absoluta.

En general: *una serie uniformemente convergente de términos continuos representa una función continua.*

## Series de potencias de convergencia uniforme

Las *series de potencia* tienen la forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + a_k(z - z_0)^k + \dots \quad (159)$$

El *dominio de convergencia de una serie de potencia es un círculo en el plano complejo*, y su *radio de convergencia* se obtiene al aplicar la *prueba de convergencia del cociente*:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \rightarrow \quad R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} \quad (160)$$

Si la serie de potencias  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  converge para  $z = z_0$ , entonces la serie converge absolutamente para  $|z| = |z_0|$ . **Ejemplo 1.22**, hallar el radio de convergencia para la serie de potencias  $\sum_{k=1}^{\infty} k! z^{k!}$ :

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|(k+1)! z^{(k+1)!}|}{|k! z^{k!}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) |z|^{(k+1)! - k!} = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) |z|^{(k)!} < 1$$

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} (\ln(k+1) + (k)k! \ln|z|) < 0, \rightarrow \ln|z| < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-\ln(k+1)}{(k)k!}, \rightarrow \ln|z| < 0, \rightarrow |z| < 1$$

∴ la serie converge absolutamente para  $|z| < 1$ :  $-1 < z < 1$  ♣

**Función analítica.** La condición necesaria y suficiente para que una función  $f(z)$  sea *analítica* en algún dominio es que  $\oint_C f(z) dz = 0$ , para cualquier *contorno simple cerrado*  $C$ , en el dominio. En otras palabras: una función  $f(z)$  es *analítica en el punto*  $a$  si se puede representar por una serie de potencias  $\sum z^{-a}$ , con *radio de convergencia positivo*  $R > 0$ . Si una función es analítica en  $\xi = a$ , entonces  $a$  es un (1) *punto ordinario*, de otra forma es un (2) *punto singular*, el punto singular puede ser (2a) *singular regular*, (2b) *singular irregular*.

**Derivación e integración de series de potencias**

La *derivación de una serie de potencias* se realiza en cada término de la serie como se muestra:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k &= \frac{d}{dz} a_0 + \frac{d}{dz} a_1 z + \frac{d}{dz} a_2 z^2 + \dots + \frac{d}{dz} a_k z^k + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} z^k \\ \text{Si } y &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \\ \rightarrow y' &= y^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} z^k && (161) \\ \rightarrow y'' &= y^{(2)} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k z^{k-2} \\ \rightarrow y''' &= y^{(3)} = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k z^{k-3} \\ \Rightarrow y^{(n)} &= \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)(k-2) \dots (k-n+1) a_k z^{k-n} \\ \Rightarrow &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+n)(k+n-1)(k+n-2) \dots (k+1) a_{k+n} z^k \\ \therefore y^{(n)} &= \sum_{k=0}^{\infty} (\prod_{j=0}^{n-1} (k+n-j)) a_{k+n} z^k \end{aligned}$$

La *integración de una serie de potencias* se realiza en cada término de la serie como se muestra:

$$\begin{aligned} \int \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k dz &= \int a_0 dz + \int a_1 z dz + \int a_2 z^2 dz + \dots + \int a_k z^k dz + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int z^k dz \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} z^{k+1} + C && (162) \end{aligned}$$

**Desarrollo de funciones en series de potencias**

Brook Taylor demostró que toda función  $f(z)$  continua y diferenciable puede ser aproximada en la vecindad de  $z=a$  por una serie de potencias conocida como *serie de Taylor*:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + c_3(z-a)^3 + \dots + c_k(z-a)^k + \dots \quad (163)$$

Taylor descubrió que  $f^{(k)}(a) = k!c_k$  es decir:  $c_k = f^{(k)}(a)/k!$ , de esta manera la serie de Taylor que representa la función  $f(z)$  en la vecindad de  $z=a$  esta dada por:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k \quad (164)$$

La serie de Taylor se emplea para representar la función con un número finito de términos, que recibe el nombre de *polinomio de Taylor de grado n*. El resto de la función se representa por un *residuo R(z)*:

$$P_n(z) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(z-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

$$R_n(z) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a)^{n+1} \quad (165)$$

**Ejemplo 1.23.** Hallar el polinomio de Taylor para  $\cos x$ , en  $z = \pi/4$ , con 4 términos.

**Solución.** Aplicando la serie de Taylor en las cercanías de  $z = \pi/4$  se tiene:

$$f(z) = \cos z, \quad a = \pi/4$$

$$P_n(z) = f(a) + f^{(1)}(a)(z-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(z-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(z-a)^3 + \dots$$

$$f(a) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}, \quad f^{(1)}(a) = -\sin(\pi/4) = -1/\sqrt{2}$$

$$f^{(2)}(a) = -\cos(\pi/4) = -1/\sqrt{2}, \quad f^{(3)}(a) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$$

$$\cos z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(z-\pi/4) - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(z-\pi/4)^2}{2!} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(z-\pi/4)^3}{3!} + \dots$$

$$= 0.70711 \left[ 1 - (z-\pi/4) - \frac{1}{2}(z-\pi/4)^2 + \frac{1}{6}(z-\pi/4)^3 + \dots \right] \quad \clubsuit$$

Para  $z=0$ , la serie de Taylor se conoce como *serie de Maclaurin*:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \quad (166)$$

La **tabla 1.6** muestra las *series de Maclaurin para varias funciones elementales*, siendo  $z \in \Re \vee C$ :

**Tabla 1.6** Series de Maclaurin para funciones elementales

$(1-z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k,  z  < 1$	$\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k-1}}{2k-1},  z  < 1$	$\cos^{-1} z = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} z,  z  < 1$
$(1-z)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)z^k,  z  < 1$	$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!},  z  < \infty$	$\tan^{-1} z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^{2k-1}}{2k-1},  z  < 1$
$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k,  z  < 1$	$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!},  z  < \infty$	$\sinh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},  z  < \infty$
$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},  z  < \infty$	$\tan z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \frac{17z^7}{315} + \dots,  z  < \frac{\pi}{2}$	$\cosh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!},  z  < \infty$
$\log(1-z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k},  z  < 1$	$\sin^{-1} z = z + \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3z^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5z^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots,  z  < 1$	$\tanh z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} - \frac{17z^7}{315} + \dots,  z  < \frac{\pi}{2}$

## Solución de ecuaciones diferenciales por series de potencias

Como hemos visto cualquier función puede ser aproximada por una serie de potencias; este hecho se aplica a la EDO de cualquier tipo que no es sino una *igualdad de funciones*:

**Ejemplo 1.24.** Resolver la ED  $(x-3)y'+2y=0$ , alrededor del punto  $x=0$ , empleando series de potencias.

**Solución.** La ED es analítica en  $x=0$ , y su solución por hipótesis es una serie de la forma  $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ . El *método de solución* es el siguiente: (1) se sustituye cada función y sus derivadas por series de potencias; (2) se agrupan términos convenientemente de manera tal que se pueda aplicar el *principio de identidad para sumas*; (3) se obtiene una ecuación de recurrencia para los coeficientes; (4) se encuentra un patrón para los coeficientes en términos de las n primeras

constantes arbitrarias; (5) se expresa la solución como una serie de potencias; (6) se determina el radio de convergencia para la solución.

SOLUCIÓN DE UNA ED POR SERIES DE POTENCIAS :  $(x-3)y' + 2y = 0$

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad y' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k$$

$$(1) \quad (x-3) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k + 2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

$$\rightarrow x \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k - 3 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k + 2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} 3(k+1) c_{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k x^k = 0$$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (k c_k x^k - 3(k+1) c_{k+1} x^k + 2c_k x^k) = \sum_{k=0}^{\infty} (k c_k - 3(k+1) c_{k+1} + 2c_k) x^k = 0$$

$$(3) \quad (k c_k - 3(k+1) c_{k+1} + 2c_k) = 0 \Rightarrow c_{k+1} = \frac{k c_k + 2c_k}{3(k+1)} = \frac{k+2}{3(k+1)} c_k$$

$$(4) \quad c_1 = \frac{0+2}{3(0+1)} c_0 = \frac{2}{3} c_0$$

$$c_2 = \frac{1+2}{3(1+1)} c_0 = \frac{3}{6} c_1 = \frac{3}{9} c_0$$

$$c_3 = \frac{2+2}{3(2+1)} c_0 = \frac{4}{9} c_2 = \frac{4}{27} c_0$$

$$\therefore c_k = \frac{k+1}{3^k} c_0$$

$$(5) \quad y = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{3^k} x^k$$

$$(6) \quad R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|, \quad c_{k+1} = \frac{k+2}{3(k+1)} c_k = \frac{k+2}{3(k+1)} \times \frac{k+1}{3^k} c_0$$

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(k+1)c_0}{3^k}}{\frac{(k+2) \times (k+1)c_0}{3(k+1) \times 3^k}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{3(k+1)}{k+2} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{d}{dk}(3k+3)}{\frac{d}{dk}(k+2)} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{3}{1} \right| = 3 \leftarrow \text{Regla de L'Hospital}$$

La solución converge para :  $-3 < x < 3$

♣

### Solución de ED lineales de segundo orden con coeficientes variables por series de potencias

Una aplicación práctica de las series de potencia, es la solución de ED lineales de segundo orden con coeficientes variables:

$$(1) \quad A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$$

$$(2) \quad y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad \rightarrow \quad P(x) = B(x)/A(x), \quad Q(x) = C(x)/A(x) \quad (167)$$

Si tanto  $P$  como  $Q$  son analíticas en  $x=a$ , entonces  $a$  es un punto ordinario, y la ecuación (1) tiene dos soluciones linealmente independientes de la forma:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k \cdot$$

SOLUCIÓN GENERAL DE UNA ED POR SERIES DE POTENCIAS :  $(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$ , en  $x = 0$

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad y' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}, \quad y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}$$

$$(1) \quad (x^2 + 1) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} + x \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

$$\rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^k + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

$$(2) \quad \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^k + [2c_2 x^0 + 6c_3 x + \sum_{k=4}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}] + [c_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} k c_k x^k] - [c_0 x^0 + c_1 x \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k] = 0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^k + [2c_2 + 6c_3 x + \sum_{k=4}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}] + [c_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} k c_k x^k] - [c_0 + c_1 x \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k] = 0$$

$$[2c_2 + 6c_3 x + c_1 x - c_0 - c_1 x] + \sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1) c_k + ((k+2)(k+1) c_{k+2}) + k c_k + k c_k] x^k = 0$$

De donde se observa que :  $2c_2 - c_0 = 0 \rightarrow c_2 = \frac{1}{2} c_0 \leftrightarrow c_0 = 2c_2, c_3 = 0$  entonces :

$$\sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1) c_k + ((k+2)(k+1) c_{k+2}) + k c_k - c_k] x^k = 0$$

$$(3) \quad k(k-1) c_k + (k+2)(k+1) c_{k+2} + k c_k - c_k = k(k-1) c_k + (k+2)(k+1) c_{k+2} + (k-1) c_k = 0$$

$$(k+1)(k-1) c_k + (k+2)(k+1) c_{k+2} = 0 \rightarrow c_{k+2} = \frac{-(k+1)(k-1) c_k}{(k+2)(k+1)} = \frac{(1-k)}{(k+2)} c_k$$

$$(4) \quad c_4 = -\frac{1}{4} c_2 = -\frac{1}{2 \cdot 4} c_0 = -\frac{1}{2^2 \cdot 2!} c_0$$

$$c_5 = -\frac{2}{5} c_3 = 0$$

$$c_6 = -\frac{3}{6} c_4 = \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 6} c_0 = \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!} c_0$$

$$c_7 = -\frac{4}{7} c_5 = 0$$

$$c_8 = -\frac{5}{8} c_6 = -\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} c_0 = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!} c_0$$

$$(5) \quad y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 + c_7 x^7 + c_8 x^8 \dots$$

$$y = c_1 x + c_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2^2 \cdot 2!} x^4 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!} x^6 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!} x^8 + \dots \right]$$

$$\therefore y = c_1 x + c_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} x^2 + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n \cdot n!} x^{2n} \right]$$

(6) Se tiene un punto singular en  $x^2 + 1 = 0 \rightarrow s = \pm i$ , por lo tanto el radio de convergencia es de al menos  $|x| < 1$

### Función Gamma

Una generalización de la *función factorial* que se extiende para todo  $z | z \in C \wedge \text{Re}[z] > 0$  es la *función Gamma* definida por:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad \leftrightarrow \quad \operatorname{Re}[z] > 0 \quad (168)$$

Usando integración por partes se demuestra la siguiente propiedad más importante de la función Gamma:

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = \left[ -e^{-t} t^z \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-t} z t^{z-1} dt \\ \text{El término } \left[ -e^{-t} t^z \right]_0^{\infty} &\text{ se descarta ya que la función se define para } \operatorname{Re}[z] > 0, \text{ entonces :} \\ \Gamma(z+1) &= z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z) \end{aligned} \quad (169)$$

La *fórmula de Gauss* para la función Gamma esta dada por:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{k} \right)^z \left( 1 + \frac{z}{k} \right)^{-1} \right] \quad (170)$$

La *fórmula de Weierstrass* para la función Gamma esta dada por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)} &= z e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left[ \left( 1 + \frac{z}{k} \right)^{-1} e^{-z/k} \right] \\ \gamma &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \dots \right) - \log k \right] = 0.5772 \dots \leftarrow \text{Constante Euler - Mascheroni} \end{aligned} \quad (171)$$

## Transformación de Fourier

Si  $f(t)$  es una *función periódica*, de *periodo*  $T_0$  (frecuencia angular fundamental  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ ),  $f(t) = f(t+T_0)$ ; entonces *la integración de  $f$  a lo largo de un intervalo de longitud igual a su periodo, es independiente de los límites de integración siempre que:*  $L_{\text{sup}} - L_{\text{inf}} = T_0$ :

$$\int_0^{T_0} f(t) dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) dt = \int_{-T_0}^0 f(t) dt \quad (172)$$

La siguiente es una lista de *integrales que simplifican el análisis de Fourier*:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \sin(k\omega_0 t) dt &= \int_0^{T_0} \cos(k\omega_0 t) dt = 0, & k, n \in \mathbb{Z}^+ \wedge k \neq n \\ \int_0^{T_0} \sin(k\omega_0 t) \cos(k\omega_0 t) dt &= \int_0^{T_0} \sin(k\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt = \int_0^{T_0} \cos(k\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0 \\ \int_0^{T_0} \sin^2(k\omega_0 t) dt &= \int_0^{T_0} \cos^2(k\omega_0 t) dt = \frac{T_0}{2} \end{aligned} \quad (173)$$

## Serie de Fourier

Una *función de tiempo periódica*  $f(t)=f(t+T_0)$ , de *periodo fundamental*  $T_0$ , y *frecuencia fundamental*  $f_0 = \omega_0 / 2\pi \rightarrow \omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi / T_0 \leftrightarrow T_0 = 1 / f_0$ , puede ser representada por una *serie trigonométrica* conocida como *serie de Fourier* (demostrada por **Joseph Fourier**, en su tratado *The Analytical Theory of Heat*, 1822); se define por:

$$f(t) = f(t + T_0) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos \frac{2\pi k}{T_0} t + B_k \sin \frac{2\pi k}{T_0} t \right), \quad A_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) dt$$

$$A_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \cos \left( \frac{2\pi k}{T_0} t \right) dt, \quad B_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \sin \left( \frac{2\pi k}{T_0} t \right) dt \quad (174)$$

Una *función con simetría par*  $f(-t)=f(t)$ , conserva sólo los *términos coseno* de la serie; una *función con simetría impar*  $f(-t)=-f(t)$ , conserva sólo los *términos senos* de la serie. De manera alternativa, la serie de Fourier se representa por:

$$f(t) = M_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( M_k \cos \frac{2\pi k}{T_0} t - \phi_n \right)$$

$$M_0 = A_0, \quad M_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \quad \phi_k = \tan^{-1} \frac{B_k}{A_k} \quad (175)$$

De la expresión anterior se observa que la serie de Fourier es una sumatoria de las *armónicas* ( $kf_0$ ) de la *frecuencia fundamental* ( $f_0$ ). Los coeficientes  $M_k$ , se denominan *amplitudes espectrales*.

**Convergencia.** Si  $f(t)$  es *suave por partes*, entonces su *serie de Fourier converge*: (a) al valor  $f(t)$  para todo  $t$  donde  $f(t)$  es *continua*; (b) al valor  $\frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)]$  para toda  $t$  donde  $f(t)$  es *discontinua*. Una *función*  $f(t)$  es *continua por partes* para toda  $t$  cuando es *continua por partes en cada intervalo acotado* y en los puntos de discontinuidad existen *límites laterales finitos*:

$$f(t^+) = \lim_{u \rightarrow t^+} f(u), \quad f(t^-) = \lim_{u \rightarrow t^-} f(u) \quad (176)$$

**Forma exponencial de la serie de Fourier.** La serie de Fourier se puede expresar en términos de la función exponencial compleja considerando la equivalencia exponencial de las funciones seno y coseno:

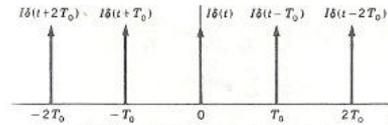
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{\left(\frac{j2\pi k}{T_0}\right)t}, \quad C_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{\left(-\frac{j2\pi k}{T_0}\right)t} dt \quad (177)$$

$$C_0 = M_0, \quad C_k = \frac{M_k}{2} e^{-j\phi_k}$$

Siendo  $C_k$  la *amplitud espectral* de los *componentes espectrales*  $e^{j2\pi k t / T_0}$ .

**Ejemplo 1.25.** Determinar la *serie de Fourier* para el *tren de impulsos* de longitud  $I$ , mostrado en la **figura 1.13**. El impulso en  $t=0$  se define por  $I\delta(t)$ , siendo  $\delta(t)$  la *función delta* definida por:  $\delta(t - T_0) = 1$  en  $t = T_0$  y  $\delta(t) = 0$  para  $t \neq T_0$ , además  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ , su *longitud es el área bajo el impulso* 1. El *tren de impulsos periódicos*, de *periodo*  $T_0$  se define por:  $f(t) = I \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$ :

**Figura 1.13** Tren de impulsos de longitud  $I$  y periodo  $T_0$ .



**Solución.** Se determina la *serie de Fourier* en sus formas: (1) *trigonométrica*; (2) *trigonométrica compacta* y (3) *exponencial compleja*:

$$(1) \quad A_0 = \frac{I}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) dt = \frac{I}{T_0}$$

$$A_k = \frac{2I}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) dt = \frac{2I}{T_0}$$

$$B_k = \frac{2I}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) dt = 0$$

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos \frac{2\pi k}{T_0} t + B_k \sin \frac{2\pi k}{T_0} t \right) = \frac{I}{T_0} + \frac{2I}{T_0} \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right)$$

$$(2) \quad M_0 = \frac{I}{T_0}, \quad M_k = \frac{2I}{T_0}, \quad \phi_k = 0,$$

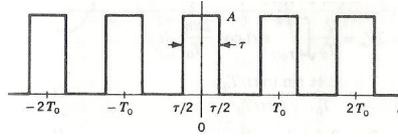
$$f(t) = M_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( M_k \cos \frac{2\pi k}{T_0} t - \phi_n \right) = \frac{I}{T_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2I}{T_0} \cos \frac{2\pi k}{T_0} t \right)$$

$$(3) \quad C_0 = C_k = \frac{I}{T_0}$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{\left(\frac{j2\pi k}{T_0}\right)t} = \frac{I}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{j2\pi k}{T_0}\right)t} \quad \clubsuit$$

**Ejemplo 1.26.** La función  $f(t)$  es un *tren de pulsos rectangulares* de amplitud  $A$  y duración  $\tau$ , que se repite periódicamente cada  $T_0$  segundos, como se muestra en la **figura 1.14**. Determinar la *serie exponencial de Fourier* para  $f(t)$ :

**Figura 1.14** Tren de pulsos rectangulares de amplitud  $A$ , duración  $\tau$  y periodo  $T_0$ .



**Solución.** Se encuentran los parámetros  $A_0, A_k, B_k$  y se sustituyen en la serie de Fourier trigonométrica:

$$A_0 = M_0 = C_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) dt = \frac{A\tau}{T_0}$$

$$A_k = M_k = 2C_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right) dt = \frac{2A\tau}{T_0} \frac{\sin(k\pi\tau/T_0)}{k\pi\tau/T_0}, \quad B_k = 0, \quad \phi_k = 0$$

$$\rightarrow f(t) = \frac{A\tau}{T_0} + \frac{2A\tau}{T_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi\tau/T_0)}{k\pi\tau/T_0} \cos\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right) = \frac{A\tau}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\pi\tau/T_0)}{k\pi\tau/T_0} e^{j\frac{2\pi kt}{T_0}} \quad \clubsuit$$

La función pulso se convierte en la función impulso, cuando su anchura tiende a cero, esto es fácil mostrar mediante límites, ya que:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sin(k\pi\tau/T_0)}{k\pi\tau/T_0} = 1 \tag{178}$$

**La función muestreo**

La *función muestreo* escrita como  $Sa(x)$ , se dibuja en la **figura 1.15a**, tiene simetría par, se emplea en el *análisis espectral*, se define y tiene las propiedades mostradas a continuación:

$$Sa(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad \text{Max } Sa(x) = Sa(0) = 1, \quad Sa(x = \pm k\pi) = 0$$

$$Sa\left[\pm\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right] = \frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi} \tag{179}$$

La **figura 1.15b** muestra las amplitudes espectrales y la *envolvente* de la representación en series de Fourier para el tren de pulsos rectangulares de la **figura 1.14**.

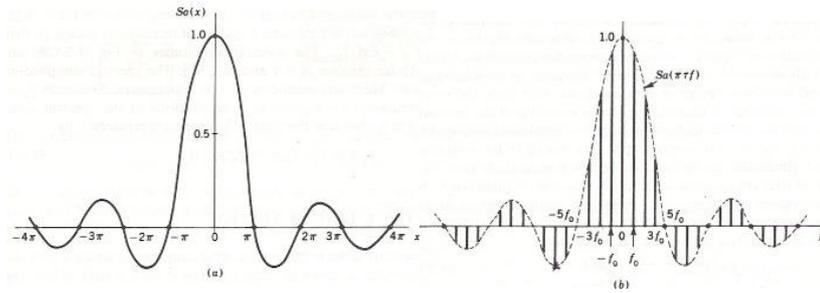


Figura 1.15 (a) función muestreo  $Sa(x)$ ; (b) amplitudes espectrales  $C_k$  para la representación en series de Fourier del tren de pulsos rectangulares.

## La transformación de Fourier

La *transformada de Fourier* es una operación que transforma una función del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia; la operación inversa es la *transformada inversa de Fourier* y se definen por:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt & (2) \quad F(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f t} f(t) dt \Leftrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \\
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} F(j\omega) d\omega & f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f t} F(f) df \Leftrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}
 \end{aligned} \quad (180)$$

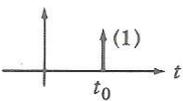
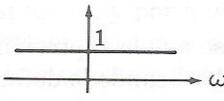
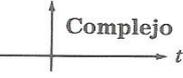
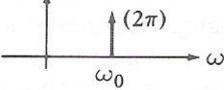
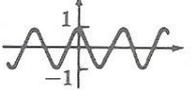
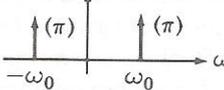
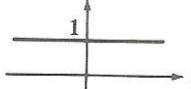
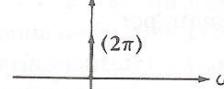
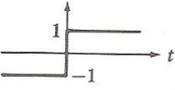
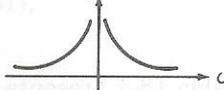
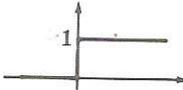
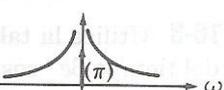
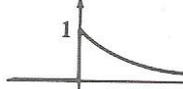
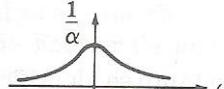
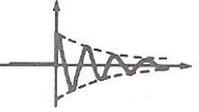
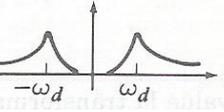
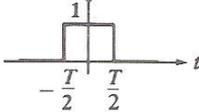
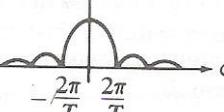
**Ejemplo 1.27.** Determinar la transformada de Fourier para la función  $f(t) = \cos \omega_0 t$ .

**Solución.** Aplicando la ecuación definitoria (2) e identificando la función impulso unitario, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 f(t) = \cos \omega_0 t &= \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \\
 F(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \\
 &= \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0) \quad \clubsuit
 \end{aligned}$$

Basado en las integrales que definen la transformada directa e inversa de Fourier, se han desarrollado fórmulas para funciones comunes, como la mostrada en a **tabla 1.7**:

Tabla 1.7 Transformada de Fourier directa e inversa para funciones comunes

Gráfico $f(t)$	$f(t)$	$F[f(t)]=F(j\omega)$	Gráfico $ F(j\omega) $
	$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	
	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	
	$\cos \omega_0 t$	$\pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)$	
	1	$2\pi\delta(\omega)$	
	$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$	$\frac{2}{j\omega}$	
	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	
	$e^{-\alpha} u(t)$	$\frac{1}{\alpha + j\omega}$	
	$e^{-\alpha} \cos \omega_d t \cdot u(t)$	$\frac{\alpha + j\omega}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_d^2}$	
	$u(t + \frac{1}{2}T) - u(t - \frac{1}{2}T)$	$T \frac{\sin(\omega T / 2)}{\omega T / 2}$	

🔗 **Ejemplo 1.28.** Emplear la tabla para determinar la transformada de Fourier de  $f(t) = 3e^t \cos 4t \cdot u(t)$ .

**Solución.** Identificando la función en la tabla se tiene que:

$$e^{-\alpha} \cos \omega_d t \cdot u(t) \Leftrightarrow \frac{\alpha + j\omega}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_d^2}, \quad \alpha = 1 \quad \omega_d = 4 \rightarrow F(j\omega) = 3 \frac{1 + j\omega}{(\alpha + j\omega)^2 + 16} \quad \clubsuit$$

El *teorema de Parseval* nos permite hallar la *densidad de energía o energía por unidad de ancho de banda* (J/Hz) para una función  $f(t)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \quad (181)$$

Para un circuito, se define la *función del sistema*  $h(t)$  como la *transformada de Fourier de la respuesta al impulso unitario en  $t=0$*  del circuito. En el dominio de la frecuencia compleja, la función del sistema  $H(j\omega)$  es idéntica a la *función de transferencia del sistema*  $G(\omega)$  y es una relación entre la transformada de Fourier y la transformada de Laplace para una función lineal, es decir:

$$H(j\omega) = G(\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{L[y]}{L[x]} \quad (182)$$

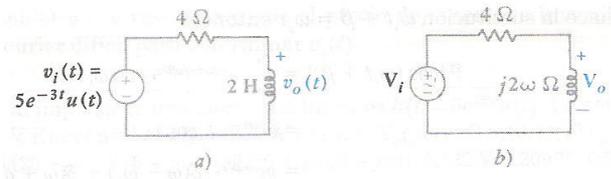
Sean dos funciones  $y(t)$  y  $x(t)$  y  $\mathbf{Y}(j\omega)$ ,  $\mathbf{X}(j\omega)$  sus respectivas transformadas de Fourier; entonces se define la *convolución* de  $y$  y  $x$  como la integral cuya transformada de Fourier es el producto de las transformadas de  $\mathbf{Y}$  y  $\mathbf{X}$ , es decir:

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= F[y(t)], & X(j\omega) &= F[x(t)], \\ F[v(t)] &= Y(j\omega) * X(j\omega) \rightarrow v(t) = F^{-1}[Y(j\omega) * X(j\omega)] \quad \text{donde :} & & (183) \\ v(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \leftarrow \text{Convolución de } x \text{ y } y \end{aligned}$$

Si en una red lineal, se conoce la entrada al circuito  $x(t)$  y la *función del sistema o respuesta al impulso*  $h(t)$ , entonces la salida  $y(t)$  está dada por la convolución de  $x$  y  $h$ , y se define por:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (184)$$

**Ejemplo 1.29.** Para el circuito RL mostrado en la **figura 1.16**, determinar el voltaje en el inductor cuando el voltaje de entrada es un pulso exponencial decreciente. Emplear las propiedades de convolución.



**Figura 1.16** Circuito RL: (a) dominio del tiempo; (b) dominio de la frecuencia  $j\omega$ .

**Solución.** (1) Se determina la función del sistema mediante un análisis senoidal permanente; (2) se determina la transformada de Fourier de la función de excitación; (3) se aplica el principio de convolución para determinar la respuesta del sistema:

$$(1) \quad H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{j2\omega}{4 + j2\omega}$$

$$(2) \quad F[5e^{-3t} \cdot u(t)] = \frac{5}{3 + j\omega}$$

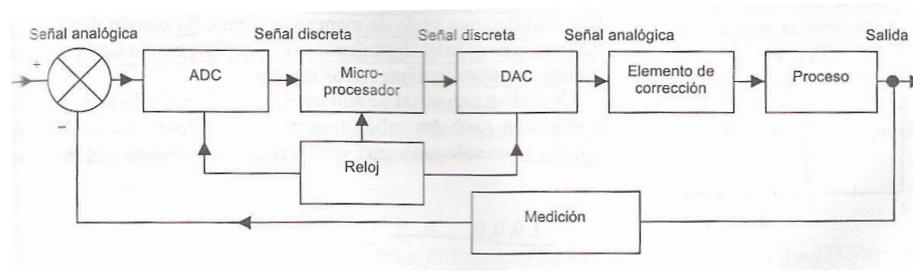
$$(3) \quad F[v_o(t)] = H(j\omega)F[v_i(t)] = \frac{j2\omega}{4 + j2\omega} \cdot \frac{5}{3 + j\omega} = \frac{15}{3 + j\omega} - \frac{10}{2 + j\omega} = 15e^{-3t} \cdot u(t) - 10e^{-2t} \cdot u(t) \quad \clubsuit$$

## Transformación zeta

Las *computadoras digitales*, los *controladores lógicos programables* (PLC) y los *microcontroladores* poseen una *interfaz de entrada* que convierte *señales continuas* en *señales discretas*; el *microprocesador*, su núcleo cerebral, solo trabaja señales discretas. Una forma de considerar estas señales es como *señales continuas del tiempo que se han muestreado a intervalos regulares*; el resultado es una *secuencia en tiempo discreto*. La transformada zeta es un método matemático para analizar señales discretas.

### Sistemas de datos discretos

Considérese el sistema de control mostrado en la **figura 1.17**, donde se usa un microprocesador programado para implementar la acción de control. (1) la entrada al sistema es una señal analógica, que se convierte en una señal discreta mediante un *convertidor analógico-digital* (ADC); (2) el *microprocesador* aplica la estrategia de control, de acuerdo a un programa almacenado en una memoria ROM con la cual se comunica; (3) la *señal de salida digital* del microprocesador es convertida en una señal analógica mediante un *convertidor digital-analógico* (DAC); (4) la *señal analógica* resultante se usa para manejar la unidad de corrección y así controlar la planta variable.



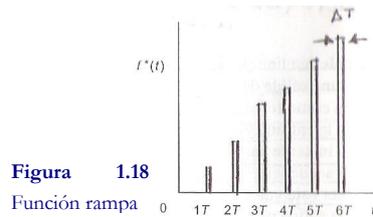
**Figura 1.17** Sistema de control con datos muestreados

Un *reloj* alimenta un pulso cada  $T$  segundos (*periodo de muestreo*), cada vez que el ADC recibe un pulso, este muestrea la señal de error. La entrada al microprocesador es entonces una serie de pulsos.

Consideremos una señal de tiempo continuo  $f(t)$  que se muestrea en intervalos regulares de tiempo con periodo de muestreo  $T$  y se representa por  $f^*(T)$ , para cada  $T$ , el valor de  $f(kT)$  se toma durante un intervalo corto  $\Delta t \ll T$ , lo suficientemente pequeño para que su magnitud se considere constante durante el tiempo que se toma la muestra. La *secuencia de impulsos* se denota por:

$$f(t=0), f(t=1T), f(t=2T), \dots, f(t=kT), \dots = f(0), f(T), f(2T), \dots, f(kT), \dots = f[kT] \quad (185)$$

La *función delta* se emplea para representar señales discretas, esta función se define por  $\delta(t - T_0) = 1$  en  $t = T_0$  y  $\delta(t) = 0$  para  $t \neq T_0$ . De esta manera la señal de pulsos de la *función rampa* mostrada en la **figura 1.18** se representa por:



**Figura 1.18**  
Función rampa

$$0\delta(t), 1\delta(t=1T), 2\delta(t=2T), 3\delta(t=3T), \dots, k\delta(t=kT), \dots \quad (186)$$

En general la *señal de datos muestreados*, empleando la notación  $f[kT] \rightarrow k \in Z^{0+}$ , se puede describir mediante la siguiente *función discreta*:

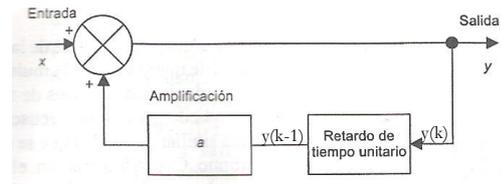
$$f^*(t) = f[0]\delta(t) + f[1]\delta(t-1T) + \dots + f[k]\delta(t-kT) + \dots + f[n]\delta(t-nT) = \sum_{k=0}^n f[k]\delta(t-kT) \quad (187)$$

**Ecuaciones en diferencias**

En un *sistema de procesamiento de señales en tiempo discreto* existe la entrada de una secuencia de pulsos y una salida de pulsos; las expresiones matemáticas que involucran secuencias discretas se denominan *ecuaciones en diferencias*. Así por ejemplo la *secuencia de entrada*  $x[k]$  al controlador, se puede relacionar con su *secuencia de salida*  $y[k]$  mediante la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[k] = a \cdot y[k-1] + x[k], \quad a \equiv \text{Factor de amplificación} \rightarrow a \in R^+ \quad (188)$$

Las ecuaciones en diferencias se pueden representar mediante los *bloques funcionales*: punto, suma, *retardo unitario*  $y[k-1]$  y *amplificación*  $a$ . La **figura 1.19** muestra el bloque funcional de la ecuación anterior.



**Figura 1.19** Diagrama de bloques con amplificación y retardo unitario

Cuando se desea *diferenciar la secuencia de entrada* se emplea la *aproximación tangencial* entre dos muestras sucesivas de entrada  $x[k-1]$ ,  $x[k]$ . Cuando se desea *integrar la secuencia de entrada*, se emplea la *aproximación trapezoidal* para hallar el área bajo la curva de dos muestras sucesivas de entrada  $x[k-1]$ ,  $x[k]$ . De esta forma la salida  $y[k]$  se relaciona con la derivada e integral de su entrada  $x[k]$ , mediante las siguientes ecuaciones en diferencias:

$$\begin{aligned} y[k] &= (x[k] - x[k-1]) / T & \Rightarrow & \quad x[k] = x[k-1] + T \times y[k] & \leftarrow & \text{Diferenciación} \\ y[k] &= y[k-1] + \frac{1}{2} T \times (x[k-1] + x[k]) & \leftarrow & \text{Integración} \end{aligned} \quad (189)$$

*Las ecuaciones en diferencias para funciones discretas, son el análogo a las ecuaciones diferenciales para funciones continuas.*

### **Transformada zeta**

Sea  $f^*(t)$  la función discreta que describe una secuencia de impulsos. Aplicando la transformada de Laplace y al hacer  $z = e^{Ts}$ , se obtiene una *función transformada en términos de la variable zeta*  $F(z)$ :

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[f^*(t)] = \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^n f[k] \delta(t - kT)\right] = f[0] + f[1]e^{-Ts} + \dots + f[k]e^{-kTs} + \dots + f[n]e^{-nTs} \\ &= \sum_{k=0}^n f[k] e^{-kTs} \end{aligned} \quad (190)$$

si  $z = e^{Ts} \rightarrow s = \frac{1}{T} \ln z$  entonces:

$$F(z) = Z[f(k)] = f[0] + f[1]z^{-1} + \dots + f[k]z^{-k} + \dots + f[n]z^{-n} = \sum_{k=0}^n f[k]z^{-k}$$

**Ejemplo 1.30.** Hallar la transformada zeta para **(a)** la *función escalón unitario*,  $f(t) = 1 \leftrightarrow t > 0 \wedge f(t) = 0 \leftrightarrow t \leq 0$ ; **(b)** la *función rampa*,  $f(t) = t \leftrightarrow t \wedge f(t) = 0 \leftrightarrow t < 0$ .

**Solución.** Aplicando la transformación zeta se tiene que:

(a)  $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f[k]z^{-k} = 1z^0 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + 1z^{-3} + \dots = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots = 1 + (1/z) + (1/z)^2 + (1/z)^3 + \dots$

Por comparación con la serie geométrica  $1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$ , para  $|x| < 1$ ; se tiene que:

$$F(z) = \frac{1}{1-1/z} = \frac{z}{z-1} \text{ para } |z| > 1$$

(b)  $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f[k]z^{-k} = 0z^0 + Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + \dots = T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots)$

$$= Tz^{-1}(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \dots) \rightarrow \frac{zF(z)}{T} = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \dots$$

Por comparación con la serie binomial:  $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$  se tiene que:

$$\frac{zF(z)}{T} = \frac{1}{(1-1/z)^2} \rightarrow F(z) = \frac{T}{z(1-1/z)^2} = \frac{T}{z[\frac{z}{z}(1-1/z)]^2} = \frac{T}{z[\frac{z}{z}(z-1)]^2} = \frac{T}{z\frac{1}{z}(z-1)^2} = \frac{Tz}{(z-1)^2} \text{ para } |z| > 1$$

♣

La transformación zeta es una (1) *operación lineal*; y se aplican los siguientes teoremas: (2) *corrimiento*; (3) *translación compleja*; (4) *valor inicial*; (5) *valor final*.

(1)  $Z[f(k) + g(k)] = Z[f(k)] + Z[g(k)]$ ,  $Z[af(k)] = aZ[f(k)]$

(2)  $Z[f(k+n)] = z^n F(z) - (z^n f[0] + z^{n-1} f[1] + z^{n-2} f[2] + \dots + z f[n-1])$   
 $= z^n F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k} f[k]$

$$Z[f(k+1)] = z^1 F(z) - \sum_{k=0}^{1-1} z^{1-k} f[k] = zF(z) - zf[0] \tag{191}$$

$$Z[f(k+2)] = z^2 F(z) - \sum_{k=0}^{2-1} z^{2-k} f[k] = zF(z) - z^2 f[0] - zf[1]$$

(3)  $Z[e^{-akt} f(k)] = F[e^{at} z]$  ↔  $F(z) = Z[f(k)]$

(4)  $f[0] = \lim_{t \rightarrow 0} f[k] = \lim_{z \rightarrow \infty} zF(z)$

(5)  $f[\infty] = \lim_{t \rightarrow \infty} f[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z)$

**Transformada zeta inversa**

Dada una función F(z), se obtiene la función discreta f\*(t) mediante la transformada zeta inversa, definida por

$$f^*(t) = Z^{-1}[F(z)] = \sum_{k=0}^{\infty} f[k] \delta(t - kT) \tag{192}$$

La **tabla 1.8** muestra la transformada zeta de: (a) funciones muestreadas con periodo T; (b) secuencias.

Tabla 1.8 Transformadas zeta de: (a) funciones muestreadas con periodo T; (b) secuencias

a) f(t)	F(z)	f(t)	F(z)	b) f[k]	f[0], f[1], f[2], f[3],...	F(z)
$\delta(t)$	1	$1 - e^{-at}$	$\frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})}$	$1u[k]$	1,1,1,1,...	$\frac{z}{z-1}$
$\delta(t - kT)$	$z^{-k}$	$te^{-at}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$	$a^k$	$a^0, a^1, a^2, a^3, \dots$	$\frac{z}{z-a}$
$l(t)$	$\frac{z}{z-1}$	$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{(e^{-aT} - e^{-bT})z}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})}$	$k$	0,1,2,3,...	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$l(t - kT)$	$\frac{z}{z^k(z-1)}$	$\sin \alpha t$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$	$ka^k$	$0, a^1, 2a^2, 3a^3, \dots$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$t$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\cos \alpha t$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$	$ka^{k-1}$	$0, a^0, 2a^2, 3a^3, \dots$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$
$t^2$	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$	$e^{-at} \sin \alpha t$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$	$e^{-ak}$	$e^0, e^{-a}, e^{-2a}, e^{-3a}, \dots$	$\frac{z}{z - e^{-a}}$
$e^{-at}$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$	$e^{-at} \cos \alpha t$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$			

La *determinación de la transformada zeta inversa* se puede hallar mediante tres formas: (1) usando la ecuación definitoria; (2) usar un listado como en la tabla 1.7, simplificando F(z) mediante fracciones parciales cuando así convenga; (3) realizar una *división larga*  $F(z) = N(z)/D(z)$ .

 **Ejemplo 1.31.** Determinar la *transformada zeta inversa* de  $F(z) = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)}$

mediante *expansión por fracciones parciales*.

**Solución.** En la transformada zeta, se prefiere obtener las fracciones parciales para F(z)/z en vez de F(z) directamente, ya que esto conduce a funciones comunes, es decir:

$$\begin{aligned} \frac{F(z)}{z} &= \frac{1}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{a_0}{(z-1)} + \frac{b_0}{(z-0.5)} \\ a_0 &= \frac{1}{0!} \frac{d^0}{dz^0} \left( \frac{1}{z-0.5} \right) \Bigg|_{z=1} = \frac{1}{1-0.5} = 2 \\ b_0 &= \frac{1}{0!} \frac{d^0}{dz^0} \left( \frac{1}{z-1} \right) \Bigg|_{z=0.5} = \frac{1}{0.5-1} = -2 \\ \rightarrow F(z) &= \frac{2z}{(z-1)} - \frac{2z}{(z-0.5)} \Rightarrow f[k] = 2u[k] - 2 \times 0.5^k \quad \clubsuit \end{aligned}$$

 **Ejemplo 1.32.** Determinar la *transformada zeta inversa* de  $F(z) = \frac{2z}{z^2 + z + 1}$  por *división larga*.

**Solución.** Se realiza la división larga y se tiene que:

$$\begin{array}{r}
 2z^{-1} - 2z^{-2} + 2z^{-4} - 2z^{-5} + \dots \\
 z^2 + z + 1 \overline{) 2z} \\
 \underline{2z + 2z^0 + 2z^{-1}} \\
 -2z^0 - 2z^{-1} \\
 \underline{-2z^0 - 2z^{-1} - 2z^{-2}} \\
 2z^{-2} \\
 \underline{2z^{-2} + 2z^{-3} + 2z^{-4}} \\
 -2z^{-3} - 2z^{-4} \\
 \underline{-2z^{-3} - 2z^{-4} - 2z^{-5}} \\
 2z^{-5}
 \end{array}$$

$\therefore F(z) = 0z^0 + 2z^{-1} - 2z^{-2} + 0z^{-3} + 2z^{-4} - 2z^{-5} + \dots \Rightarrow y[k] = 0, 2, -2, 0, 2, -2$  ♣

# Capítulo 2

## Bloques funcionales de sistemas físicos

---

Una vez sentadas las bases matemáticas estamos en disposición de explorar los componentes físicos elementales cuyo comportamiento se rige de leyes físicas bien definidas y que en unión dan lugar a la formación de sistemas físicos complejos. En esta sección se persiguen los siguientes objetivos:

- ⇒ Presentar los fundamentos teóricos que rigen el comportamiento de los sistemas físicos básicos: *mecánicos, eléctricos, fluidicos, térmicos*.
- ⇒ Observar la analogía natural que existe entre los bloques funcionales de sistemas físicos.
- ⇒ Enunciar las leyes y principios de la física en un lenguaje matemático.



## Introducción

Un **bloque funcional** es un *elemento físico* simple, que se caracteriza por tener una *propiedad física* que se puede describir mediante las *leyes y principios de física*. La descripción se logra formando la ecuación descriptiva que lo representa. Un *sistema físico* que consta de *elementos lineales* se estudia y representa por un *sistema de ecuaciones diferenciales lineales*; en ingeniería cuando un sistema no es lineal se buscan métodos para *aproximarlo a la linealidad* bajo ciertas *condiciones impuestas*. Un sistema se considera lineal si es posible aplicar el **principio de superposición**, que establece: “*la respuesta producida por la aplicación simultánea de  $n$  funciones de excitación diferentes, es la suma de las  $n$  respuestas producidas por las  $n$  funciones actuando individualmente*”.

La manera en que se presentarán los bloques funcionales físicos es la siguiente: (1) se enunciarán los *principios y leyes fundamentales*; (2) se presentará su equivalente en términos de ecuaciones diferenciales con cantidades vectoriales y/o escalares según sea su naturaleza haciendo notar su *comportamiento lineal*.

## Sistema General de Unidades de Medida

Se pretende presentar las ecuaciones físicas en su forma más simple y por lo tanto se presentaran las unidades de las cantidades en conjunto con sus ecuaciones, en su lugar se presentan a continuación las tablas de las *cantidades físicas fundamentales, cantidades derivadas* más empleadas y *constantes físicas* ampliamente usadas. La **Norma Oficial Mexicana NOM-008-SCFI-1993, Sistema General de Unidades de Medida** (publicada el 8 de octubre de 1993 en el *Diario Oficial de la Federación*), tiene por objeto *establecer un lenguaje común que responda a las exigencias actuales de las actividades científicas, tecnológicas, educativas, industriales y comerciales*; y está basada en el *Sistema Internacional de Unidades*.

### Cantidades fundamentales

Con el objeto de simplificar el intercambio de información, disminuir la incertidumbre y ser consistentes en la representación de cantidades se ha

desarrollado un sistema de unidades *universal, unificado y coherente* basado en el *Sistema Métrico Decimal, m-kg-s* desarrollado en 1790 por la *Academia de Ciencias de París*. La *Conferencia General de Pesas y Medidas (CGPM)* es el organismo internacional encargado de la definición de los nuevos patrones de medida. Se han sostenido 20 reuniones desde 1889 hasta 1995, a partir de 1960 se conoce como *Sistema Internacional de Unidades, SI*, y consta de las siete *cantidades fundamentales* mostradas en la **tabla 2.1**. Con el objeto de expresar las cantidades en un amplio rango numérico la CGPM adoptó los prefijos mostrados en la **tabla 2.2**.

Tabla 2.1 Cantidades fundamentales del SI

Cantidad	Tiempo	Longitud	Masa	Cantidad de sustancia	Temperatura	Corriente eléctrica	Intensidad lumínica
Unidad	segundo	metro	kilogramo	mol	kelvin	ampere	candela
Símbolo	s	m	kg	mol	K	A	cd

Tabla 2.2 Prefijos adoptados por el SI

10 <sup>-18</sup>	<i>atto</i>	a	10 <sup>-6</sup>	<i>micro</i>	μ	10 <sup>1</sup>	<i>deca</i>	da	10 <sup>9</sup>	<i>giga</i>	G
10 <sup>-15</sup>	<i>femto</i>	f	10 <sup>-3</sup>	<i>mili</i>	m	10 <sup>2</sup>	<i>hecto</i>	h	10 <sup>12</sup>	<i>tera</i>	T
10 <sup>-12</sup>	<i>pico</i>	p	10 <sup>-2</sup>	<i>centi</i>	c	10 <sup>3</sup>	<i>kilo</i>	k	10 <sup>15</sup>	<i>peta</i>	P
10 <sup>-9</sup>	<i>nano</i>	n	10 <sup>-1</sup>	<i>deci</i>	d	10 <sup>6</sup>	<i>mega</i>	M	10 <sup>18</sup>	<i>exa</i>	E

### Cantidades derivadas

Mediante *análisis dimensional* de una ecuación se pueden expresar cualesquiera otras cantidades en términos de las cantidades fundamentales. Con el objeto de identificarlas fácilmente ciertas cantidades tienen nombres específicos y en general se denominan *cantidades derivadas*. La **tabla 2.3** muestra las cantidades derivadas de mayor uso.

Análisis dimensional:

$$[F] = [ma] = \left[ m \frac{v}{t} \right] = \left[ m \frac{v}{t} \right] = \left[ m \frac{d}{t \cdot t} \right] = \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \leftarrow \text{Fuerza}$$

$$[V] = \left[ \frac{U}{q} \right] = \left[ \frac{F \cdot d}{q} \right] = \text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \left[ \frac{1}{q} \right] = \text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \left[ \frac{1}{i \cdot t} \right] = \text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{As}} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{As}^3} \leftarrow \text{Voltaje}$$

Tabla 2.3 Cantidades derivadas del SI

Cantidad	Unidad	Símbolo	Dimensiones
Área	–	–	m <sup>2</sup>
Volumen	–	–	m <sup>3</sup>
Frecuencia	Hertz	Hz	s <sup>-1</sup>
Densidad de masa	–	–	kg/ m <sup>3</sup>
Velocidad	–	–	m/s
Velocidad angular	–	–	rad/s
Aceleración	–	–	m/ s <sup>2</sup>
Aceleración angular	–	–	rad/ s <sup>2</sup>
Fuerza	Newton	N	kg·m/s <sup>2</sup>
Presión mecánica	Pascal	Pa	N/m <sup>2</sup>
Viscosidad cinemática	–	–	·m <sup>2</sup> /s
Viscosidad dinámica	–	–	N·s/m <sup>2</sup>
Trabajo, energía, calor	Joule	J	N·m
Potencia	Watt	W	J/s
Potencia <i>reactiva</i>	VAR	VAR	J/s
Cantidad de electricidad	Coulomb	C	A·s
Fuerza electromotriz, diferencia de potencial	Volt	V	W/A, J/C
Campo eléctrico	–	–	V/m
Resistencia eléctrica, <i>reactancia, impedancia</i>	Ohm	Ω	V/A
Conductancia eléctrica, <i>susceptancia, admitancia</i>	Siemen	S	A/V
Capacitancia	Faradio	F	A·s/V
Flujo magnético	Weber	Wb	V·s
Inductancia	Henry	H	V·s/A
Densidad de flujo magnético	Tesla	T	Wb/m <sup>2</sup>
Campo magnético	–	–	A/m
Fuerza magnetomotriz	Ampere	A	A
Flujo luminoso	Lumen	lm	cd·sr
Luminancia	–	–	cd/m <sup>2</sup>
Iluminancia	Lux	lx	lm/m <sup>2</sup>
Entropía	–	–	J/K
Capacidad específica del calor	–	–	J/kg·K
Conductividad térmica	–	–	W/m·K
Intensidad radiactiva	–	–	W/sr
Actividad radiactiva	Becquerel	Bq	s <sup>-1</sup>
Angulo plano	Radian	rad	unidad suplementaria
Ángulo sólido	Steradian	sr	unidad suplementaria

### Unidades no oficiales comúnmente empleadas

Algunas unidades que no forman parte del SI, son ampliamente usadas en sectores científicos, industriales y comerciales. La **tabla 2.4** muestra las unidades no oficiales comúnmente empleadas en ingeniería.

**Tabla 2.4** Unidades del Sistema Británico

Cantidad	Unidad	Equivalencia	Cantidad	Unidad	Equivalencia
<b>Longitud</b>	Ángstrom	$\text{Å}=10^{-10} \text{ m}$	<b>Fuerza</b>	dina	$10^{-5} \text{ N}$
	año luz	$9.461 \times 10^{15} \text{ m}$	<b>Presión</b>	bar	$10^5 \text{ Pa}$
<b>Volumen</b>	litro	$10^{-3} \text{ m}^3$		mmHg	torr= $133.3 \text{ Pa}$
<b>Tiempo</b>	minuto	min= $60 \text{ s}$	<b>Energía</b>	ergio	erg= $10^{-7} \text{ J}$
	hora	h= $3600 \text{ s}$		caloría	cal= $4.186 \text{ J}$
	día	d= $86400 \text{ s}$		kWh	kWh= $3.6 \times 10^6 \text{ J}$
	año	a= $3.156 \times 10^7 \text{ s}$	<b>Temperatura</b>	°C	K-273.15
<b>Ángulo</b>	revolución	rev= $360^\circ=2\pi \text{ rad}$	<b>Vel. angular</b>	rpm	rpm=rev/min

### Otros sistemas de unidades

Existen otros sistemas locales o específicos de alguna ciencia entre los cuales destacan: *británico*, *gaussiano* y *cgs*. La mayoría de los países han adoptado el SI oficialmente; sin embargo y debido a que gran cantidad de instrumentos de control están basados en el *Sistema Británico*, en la **tabla 2.5** se dan las equivalencias para las unidades más comunes.

**Tabla 2.5** Unidades del Sistema Británico

Cantidad	Unidad	Símbolo	Equivalencia
<b>Distancia</b>	pulgada	in	2.54 cm
	pie	ft	30.48 cm
	yarda	–	91.44 cm
	milla	–	1609 m
	milla náutica	–	1852 m
<b>Masa</b>	slug	–	14.59 kg
	onza	–	28.35 g
<b>Fuerza</b>	libra	lb	4.448 N
<b>Energía</b>	btu	btu	1055 J
<b>Potencia</b>	hp	hp	745.7 W
<b>Temperatura</b>	grado Fahrenheit	°F	$1.8^\circ\text{C}+32$
<b>Volumen</b>	galón	–	3.788 litros

**Constantes físicas**

En la definición de ecuaciones aparecen ciertos valores numéricos cuyo valor ha sido aceptado como constante, las **tablas 2.6 y 2.7** muestra las constantes más comúnmente empleadas en la ingeniería.

**Tabla 2.6** Constantes físicas empleadas en ingeniería

Descripción	Símbolo	Valor	Unidades
Velocidad de la luz	c	$2.99792458 \times 10^8$	m/s
Carga del electrón	e	$1.602177 \times 10^{-19}$	C
Constante Gravitacional	G	$6.67259 \times 10^{-11}$	$\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^2$
Constante de Planck	h	$6.6260755 \times 10^{-34}$	J·s
Constante de Boltzmann	k	$1.38066 \times 10^{-23}$	J/K
Numero de Avogadro	$N_A$	$6.022 \times 10^{23}$	moléculas/mol
Constante de Gas	R	8.314510	J/mol·K
Masa del electrón	$m_e$	$9.10939 \times 10^{-31}$	kg
Masa del neutrón	$m_n$	$1.67262 \times 10^{-27}$	kg
Masa de protón	$m_p$	$1.67492 \times 10^{-27}$	kg
Permitividad en el vacío	$\epsilon_0$	$8.854 \times 10^{-12}$	$\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$
Permeabilidad en el vacío	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7}$	Wb/A·m
Equivalente mecánico del calor		4.186	J/cal
Presión atmosférica estándar	atm	$1.013 \times 10^5$	Pa
Cero absoluto	0 K	-273.15	°C
Electronvolt	1 eV	$1.602 \times 10^{-19}$	J
Unidad de masa atómica, uma	1 u	$1.66054 \times 10^{-27}$	kg
Energía del electrón en reposo	$m_e c^2$	0.511	MeV
Equivalente energético de uma	$M_e c^2$	931.494	MeV
Volumen de molar de gas ideal	V	22.4	litros/mol
Aceleración debida a la gravedad	g	9.78049	$\text{m}/\text{s}^2$

**Tabla 2.7** Constantes matemáticas empleadas en ingeniería

Razón de la circunferencia	$\pi$	3.1416	--
Número de euler	e	2.71828	--
Unidad imaginaria	i	$\sqrt{-1}$	--

## Sistemas mecánicos

El estudio del *movimiento de los cuerpos* se agrupa convenientemente en dos categorías: *movimiento traslacional* y *rotación con respecto a un eje fijo*. Las *propiedades mecánicas* más simples que manifiestan la mayoría de objetos materiales son las siguientes: *rigidez*, *amortiguamiento* y *fricción* e *inercia*. Estas propiedades están representadas en elementos que exhiben fuertemente cada una de ellas: *resorte*, *amortiguador* y *masa*. Estos elementos se consideran *bloques funcionales* y se encuentran regulados por las leyes de la mecánica clásica.

## Fundamentos de cinemática y dinámica traslacional

El *desplazamiento traslacional* es el cambio de posición de un objeto entre dos puntos a lo largo de una *trayectoria rectilínea* o *curvilínea* de tal manera que todas las partículas que forman el objeto se desplazan a lo largo de *trayectorias paralelas*, y poseen la misma velocidad y aceleración en todo momento. La posición del objeto como función del tiempo se denota por  $\mathbf{x}(t)$ , la *velocidad*  $\mathbf{v}(t)$ , es el cambio de posición con respecto al tiempo, la *aceleración*  $\mathbf{a}(t)$  es el cambio de velocidad respecto al tiempo y se definen por:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} \quad (1)$$

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{d^2\bar{\mathbf{x}}}{dt^2} \quad (2)$$

En función de la velocidad ( $\mathbf{v}$ ) es fácil conocer la posición ( $\mathbf{x}$ ) del objeto en el tiempo  $t$ , usando integración:

$$\bar{\mathbf{x}} = \int \bar{\mathbf{v}} dt \quad (3)$$

Si el movimiento traslacional es *uniformemente acelerado*, las siguientes relaciones describen el movimiento del objeto:

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}_0 + \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{v}}_0 + \bar{\mathbf{v}})t \quad \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}_0 + \bar{\mathbf{v}}_0 t + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{a}}t^2 \quad \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}_0 + \bar{\mathbf{a}}t \quad \bar{\mathbf{v}}^2 = \bar{\mathbf{v}}_0^2 + 2\bar{\mathbf{a}}(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_0) \quad (4)$$

El estudio de las causas del movimiento de objetos es materia de la *dinámica*, las *leyes de Newton* son su base teórica fundamental.

*Primera Ley de Newton o ley de la inercia.* Si la fuerza resultante que actúa sobre un objeto es cero, entonces el objeto permanecerá en su estado de movimiento. Un cuerpo se acelera sólo si la fuerza resultante que actúa sobre el es diferente de cero.

*Segunda ley de Newton.* Si la fuerza resultante que actúa sobre un objeto es diferente de cero, entonces este se acelera; la aceleración (**a**) es proporcional a la fuerza (**f**) e inversamente proporcional a la masa (*m*) del objeto.

$$\vec{f} = m\vec{a} = m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \quad (5)$$

*Tercera ley de Newton o ley de acción-reacción.* Por cada fuerza que actúa sobre un cuerpo, existe otra de igual magnitud, pero en sentido opuesto actuando sobre algún otro cuerpo.

*Ley de la gravitación universal de Newton.* Establece que dos partículas de masa *m* y *M*, separadas entre sí por una distancia *r*, se atraen mutuamente con fuerzas de magnitudes iguales y opuestas en sentido:

$$\vec{f} = G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \quad (6)$$

Siendo *G* la constante de gravitación universal.

El peso de un objeto de masa *m*, es **P=mg** y describe la fuerza gravitacional que ejerce el planeta tierra sobre el objeto. En este caso se define la aceleración debida a la gravedad (**g**) dirigida al centro de la tierra, como:

$$\vec{g} = G \frac{M}{R^2} \hat{R} \quad (7)$$

Siendo  $R=6.38 \times 10^6$  el radio promedio de la tierra y  $M=5.97 \times 10^{24}$  su masa.

La energía (*E*) es la capacidad que tiene un cuerpo para realizar un trabajo. El trabajo físico (*W*), es un escalar que se determina por el desplazamiento (**x**) que provee una fuerza o un campo de fuerzas (**f**) para desplazar un objeto.

$$dW = \vec{f} \cdot d\vec{x} \rightarrow W = \int \vec{f} \cdot d\vec{x} \quad (8)$$

La potencia ( $p$ ) es la razón a la que se efectúa el trabajo ( $W$ ) o se consume energía ( $E$ ) y queda definida por:

$$p = \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt} \rightarrow E = \int p dt \quad (9)$$

La conservación de la energía mecánica enuncia: “En cualquier sistema aislado de objetos que interactúan sólo por fuerzas conservativas, tales como el bloque y resorte, la energía puede ser transferida una y otra vez de cinética a potencial; pero el cambio total es de cero; la suma de las energía cinética y potencial permanece constante”.

La energía potencial ( $U$ ), es la energía almacenada en un sistema a causa de la posición relativa u orientación de las partes de un sistema y está definida sólo para fuerzas conservativas:

$$f = -\frac{dU}{dx} \rightarrow dU = -\vec{f} \cdot d\vec{x} \quad (10)$$

El teorema trabajo-energía establece que: “El trabajo neto efectuado por las fuerzas que actúan sobre una partícula es igual al cambio en la energía cinética de las partículas”.

Para una partícula de masa  $m$  que mueve con una velocidad  $\mathbf{v}$ , la energía cinética  $K$ , y el momento lineal o cantidad de movimiento  $p$  de la partícula se definen por:

$$K = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2 = \frac{1}{2} m \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right|^2 \quad (11)$$

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (12)$$

El principio de conservación de momento lineal, establece que: “si la fuerza externa resultante que actúa sobre un sistema de objetos es cero, entonces la suma vectorial de la cantidad de movimiento de los objetos permanece constante”. Si dos objetos de masa  $m_1$  y  $m_2$  chocan, el momento lineal antes y después del impacto se conserva.

$$m_1 \vec{v}_{i1} + m_2 \vec{v}_{i2} = m_1 \vec{v}_{f1} + m_2 \vec{v}_{f2} \quad (13)$$

El *coeficiente de restitución* se define por  $e = (\bar{v}_{f2} - \bar{v}_{f1}) / (\bar{v}_{i1} - \bar{v}_{i2})$ . Para una *colisión perfectamente elástica*  $e=1$ , *inelástica*  $e<1$ , si los cuerpos permanecen *unidos después de la colisión*  $e=0$ . La segunda ley de Newton en términos de la cantidad de movimiento es:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (14)$$

## Bloques funcionales de sistemas mecánicos con movimientos traslacionales

### Resorte

La **rigidez** de un resorte se describe mediante la relación entre la fuerza  $F$  empleada para estirar o comprimir un resorte y la deformación resultante  $x$ , ya sea de estiramiento o compresión. *Roberto Hooke* en 1678 enunció la siguiente ley “*la deformación de un resorte es directamente proporcional a la fuerza aplicada*”.

$$\vec{f} = k\vec{x} = k \int \vec{v} dt \quad (15)$$

El objeto que aplica la fuerza se encuentra sujeto a una fuerza de igual magnitud y de sentido contrario, como lo establece la *tercera ley de Newton*.

La *energía potencial del resorte* de acuerdo a lo visto, queda definida por:

$$U = \int \vec{f} \cdot d\vec{x} = \int (k\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} \frac{f^2}{k} \quad (16)$$

### Amortiguador

El **amortiguamiento** y **fricción** son fuerzas de oposición no conservativas, que actúan sobre la superficie de un cuerpo con el objeto de impedir el desplazamiento. Un *amortiguador* es un elemento físico que presenta la propiedad de amortiguamiento y se puede describir como sigue: “*un émbolo que comprime un fluido alojado dentro de recipiente cerrado, recibe una fuerza de oposición al desplazamiento que es directamente proporcional a la velocidad del émbolo*”.

$$\vec{f} = c \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (17)$$

La fuerza del amortiguador es no-conservativa, por lo tanto el émbolo no regresa a su posición original cuando ha cesado la fuerza. Sin embargo la energía se transforma y disipa en forma de calor, la *potencia disipada* esta dada por:

$$P = c \left[ \frac{d\vec{x}}{dt} \right]^2 \quad (18)$$

### Masa

La **inercia** es la capacidad que tiene un cuerpo debido a su *masa* a cambiar su estado de movimiento o reposo. La fuerza inercial esta determinada por la *segunda ley de Newton* o *ley de la inercia*: “la aceleración producida por una fuerza dada es inversamente proporcional a la masa que es acelerada”

$$\vec{f} = m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \quad (19)$$

Como se enunció anteriormente la *energía cinética* que presenta una masa acelerada esta dada por:

$$K = \frac{1}{2} m \left[ \frac{d\vec{x}}{dt} \right]^2 \quad (20)$$

## Fundamentos de cinemática y dinámica rotacional

Las consideraciones expuestas son válidas para sistemas cuyos movimientos sean traslacionales, si el movimiento es rotacional los bloques funcionales se convierten en: *resorte torsional*, *amortiguador rotatorio* y *momento de inercia*.

El *movimiento de rotación* es aquel que las partículas que constituyen el objeto se desplazan en planos paralelos, a lo largo círculos centrados en el mismo eje fijo llamado *eje de rotación*.

Consideremos el cuerpo rígido de densidad uniforme mostrado en la **figura 2.1**, que gira en torno al eje Z, en sentido antihorario. Sea P un punto inmerso en este cuerpo, descrito por el vector  $\mathbf{r}$ , en el sistema coordenado con origen O. El punto P describe una trayectoria circular de radio  $AP=r \cdot \sin(\phi)$  en el plano XY, y su desplazamiento angular en radianes se denota por  $\theta$ . La longitud de arco  $s$ , el ángulo  $\theta$  y el *radio de giro*  $AP$ , se relacionan por:

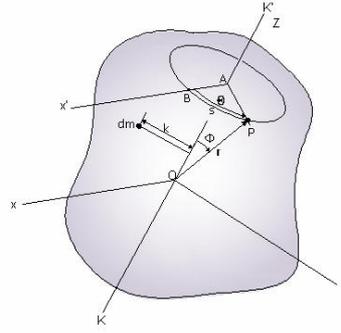


Figura 2.1 Movimiento rotacional

$$\theta = \frac{s}{AP} \rightarrow s = r \overline{AP} \tag{21}$$

La *velocidad angular* ( $\omega$ ), y *aceleración angular* ( $\alpha$ ) del punto P como funciones del tiempo ( $t$ ), están dadas por:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \theta = \int \omega dt \tag{22}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega \frac{d\omega}{d\theta} \tag{23}$$

En términos del *radio vector*  $\mathbf{r}$ , la *velocidad*  $\mathbf{v}$  y la *aceleración*  $\mathbf{a}$  del punto P, quedan determinados por:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \omega \times \mathbf{r} = \omega \cdot r \sin(\phi) \tag{24}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(\omega \times \mathbf{r})}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r} + \omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \alpha \times \mathbf{r} + \omega \times \mathbf{v} = \alpha \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \tag{25}$$

Es común descomponer la aceleración en dos vectores, *aceleración tangencial*  $\mathbf{a}_T$  y *aceleración radial*  $\mathbf{a}_R$ , como se muestra a continuación.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_R \quad \mathbf{a}_T = \alpha \times \mathbf{r} \quad \mathbf{a}_R = \omega \times \mathbf{v} \tag{26}$$

$$\mathbf{a}_T = \alpha \times \mathbf{r} \rightarrow |\mathbf{a}_T| = \alpha \cdot r \sin(\phi) \tag{27}$$

$$\vec{a}_R = \omega \times \vec{v} = \omega \times (\omega \times \vec{r}) \rightarrow |\vec{a}_R| = \omega^2 \cdot \sin(\phi) \quad (28)$$

Si la rotación es *uniformemente acelerada*, las siguientes relaciones describen el movimiento del punto P:

$$\vec{\theta} = \vec{\theta}_0 + \vec{\alpha}t \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad \omega = \omega_0 + \alpha t \quad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \quad (29)$$

El *momento de inercia* (I) de un cuerpo es una medida de su inercia rotacional. Si un objeto se considera constituido por masas infinitesimales  $m_1, m_2, m_3 \dots$  a las distancias respectivas  $r_1, r_2, r_3 \dots$  a partir de un eje, su momento de inercia con respecto a este eje es:

$$I = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 dm \quad (30)$$

Consideremos nuevamente la **figura 2.1**. Definimos al *radio de giro* del cuerpo como la distancia  $k$  paralela al *eje de giro*, donde se debe concentrar toda la masa del cuerpo si su *momento de inercia* I, respecto al eje  $KK'$  debe permanecer inalterado.

$$I = k^2 m \rightarrow k = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad (31)$$

Los *momentos de inercia* respecto a los ejes X, Y, Z están definidos por:

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm \quad I_y = \int (x^2 + z^2) dm \quad I_z = \int (x^2 + y^2) dm \quad (32)$$

El *teorema de los ejes paralelos* establece que: “la inercia de rotación (I), de cualquier cuerpo en torno a un eje arbitrario es igual a la inercia de rotación alrededor de un eje paralelo que pase por el centro de masa ( $I_{cm}$ ), más la masa total ( $m$ ), por la distancia ( $d$ ) entre los dos ejes elevada al cuadrado”:

$$I = I_{cm} + md^2 \quad (33)$$

En términos del momento de inercia, la *energía cinética* K, del cuerpo rígido en rotación, esta dada por:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (34)$$

La *torca* o *momento de fuerza*  $\boldsymbol{\tau}$ , que actúa sobre un punto  $P$  de un cuerpo, está representada por el producto vectorial del *brazo de palanca*  $\mathbf{r}$  y el *vector fuerza*  $\mathbf{f}$  que ocasiona la rotación del cuerpo a través de un eje que pasa por  $P$  y es perpendicular al plano formado por  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{F}$ .

$$\boldsymbol{\tau} = \vec{r} \times \vec{f} \quad (35)$$

La *aceleración angular*  $\alpha$ , y el momento de inercia  $I$ , y el momento de fuerza  $\boldsymbol{\tau}$ , quedan relacionados por la *segunda ley de Newton para rotación*:

$$\sum \tau = I\alpha \quad (36)$$

El *trabajo* ( $W$ ) efectuado para desplazar el cuerpo desde  $\theta_1$  hasta  $\theta_2$ , y la *potencia* consumida ( $P$ ), están dados por:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \boldsymbol{\tau} \cdot d\vec{\theta} \quad P = |\boldsymbol{\tau}| |\omega| \quad (37)$$

El *momento angular*  $\mathbf{L}$ , con respecto al punto  $O$ , de una partícula de masa  $m$  y *velocidad*  $\mathbf{v}$ , es:

$$\vec{L} = \mathbf{r} \times m\vec{v} \rightarrow L = I\omega \quad (38)$$

## Bloques funcionales de sistemas mecánicos con movimientos rotacionales

### Resorte torsional

En un *resorte torsional* el desplazamiento angular  $\theta$  es proporcional al par  $T$ :

$$T = k\theta \quad (39)$$

### Amortiguador rotatorio

En un *amortiguador rotatorio*, un disco que gira en un fluido, el par rotatorio es proporcional a la velocidad angular:

$$T = c\omega = c \frac{d\theta}{dt} \quad (40)$$

### **Momento de inercia**

La segunda ley de Newton aplicada a sistemas con movimiento rotacional se describe por:

$$T = I\alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (41)$$

La **tabla 2.8** lista las ecuaciones que describen las propiedades de bloques funcionales mecánicos para movimientos traslacionales y rotacionales.

Tabla 2.8 Propiedades de los bloques funcionales mecánicos

Bloque funcional	Ecuación descriptiva	
	Movimiento traslacional	Movimiento rotacional
<b>Resorte</b>	$F = kx$	$T = k\theta$
<i>Posee energía en virtud de su posición. Energía potencial</i>	$U = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k}$	$U = \frac{1}{2} k\theta^2 = \frac{1}{2} \frac{T^2}{k}$
<b>Amortiguador</b>	$F = c \frac{dx}{dt}$	$T = c \frac{d\theta}{dt}$
<i>Disipa energía</i>	$P = c \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$	$P = c \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$
<b>Masa/Momento de Inercia</b>	$F = m \frac{d^2x}{dt^2}$	$T = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$
<i>Posee energía en virtud de su movimiento. Energía cinética</i>	$K = \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$	$K = \frac{1}{2} I \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$

## Sistemas eléctricos

Los *elementos pasivos* básicos que constituyen la base de los circuitos eléctricos son: *inductor*, *resistor* y *capacitor*. Estos elementos exhiben fuertemente las siguientes propiedades: *inductancia*, *resistencia*, *capacitancia*.

### Elementos activos y elementos pasivos

En circuitos eléctricos consideramos como *elementos activos* aquellos que son capaces de proporcionar potencia promedio mayor que cero, por ejemplo las fuentes de corriente y voltaje y el amplificador operacional. Un *elemento pasivo* se define como aquel que no suministrar una potencia promedio que sea mayor que cero, en un intervalo de duración infinita.

### Convección de corriente eléctrica

Para efectos de análisis de circuitos se ha adoptado por convención que la dirección de la corriente sea la misma que la de *portadores de carga positivos*. De

esta manera: en un elemento activo la corriente circula de la terminal de menor potencial a la de mayor potencial ( $- \rightarrow +$ ); en un elemento pasivo la corriente circula de la terminal de mayor potencial a la de menor potencial ( $+ \rightarrow -$ ). Lo cual se conoce como convención pasiva de los signos.

## Fundamentos de electrostática y electrodinámica

La potencia eléctrica instantánea para un elemento eléctrico por el cual circula una corriente  $i(t)$  con una diferencia de potencial  $v(t)$  a través de sus terminales, se define por:

$$p = vi \quad (42)$$

Una fuente de fuerza electromotriz práctica es un generador que bajo el principio de inducción electromagnética y la conversión de energía mecánica a eléctrica es capaz de producir una diferencia de potencial  $v(t)$  en sus terminales. La ley de Faraday establece que: La fem ( $e$ ) inducida en un circuito es igual al negativo de la velocidad con que cambia con el tiempo el flujo magnético ( $\Phi_B$ ) a través del circuito:

$$e = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (43)$$

Esto es se produce una diferencia de potencial en las terminales de un conductor que se haya sometido en un campo magnético, cuando existe un movimiento relativo entre ambos.

La corriente eléctrica, se define como el la tasa de flujo de cargas eléctricas a través de un conductor eléctrico que se encuentra sometido al campo potencial de una fuente cuya fuerza electromotriz produce una diferencia de potencial  $v(t)$  en las terminales del conductor. Por naturaleza los portadores de carga negativa (electrones) fluyen de la terminal con menor potencial hacia la terminal con mayor potencial, es decir del cátodo (-) al ánodo (+).

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (44)$$

## Bloques funcionales de sistemas eléctricos

### Inductor

Una *bobina* o *inductor* es un alambre conductor en forma de espira, tal configuración le propicia una propiedad eléctrica conocida como *inductancia*. La inductancia ( $L$ ) es la propiedad por la cual un material eléctrico se opone a cambio súbitos de corriente a través de él. Cuando por las terminales de un inductor fluye una corriente  $i(t)$ , entonces en las terminales de este se induce una *fuerza contraelectromotriz* dada por:

$$v = L \frac{di(t)}{dt} \rightarrow i = \frac{1}{L} \int v dt \quad (45)$$

Por ser un elemento pasivo, el inductor disipa energía cuando sobre él circula una corriente. La energía disipada se obtiene fácilmente al considerar las ecuaciones definitorias de potencia-energía y voltaje en las terminales del inductor.

$$U = \int p dt = \int v i dt = \int \left( L \frac{di}{dt} \right) i dt = L \int i di = \frac{1}{2} L i^2 \quad (46)$$

### Resistor

Un *resistor* es un material que opone *resistencia* al paso de la corriente eléctrica a través de él. La resistencia de un conductor eléctrico es función de la configuración del conductor, para un alambre metálico se tiene que:

$$R = \rho \frac{L}{S} \quad (47)$$

Siendo  $\rho$  la resistividad del material,  $L$  la longitud del alambre y  $S$  el área de la sección transversal. La resistividad es una propiedad de los materiales y es función de la temperatura de acuerdo con:

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \quad (48)$$

Siendo  $\rho_0$  la resistividad del material a la temperatura  $T_0$  y  $\alpha$  el *coeficiente de temperatura* propio del material.

Un *material ohmico* es aquel que obedece la *ley de Ohm*:

$$V = Ri(t) \quad (49)$$

Siendo  $i(t)$  corriente que fluye por el material con resistencia  $R$  expuesto a una diferencia de potencial  $V$  en sus terminales.

Un resistor disipa energía en forma de calor, tal fenómeno es conocido como *efecto Joule*, la energía disipada en forma de potencia, está dada por:

$$p = vi = (Ri)i = Ri^2 = \frac{1}{R}v^2 \quad (50)$$

### **Capacitor**

Un *capacitor* es elemento pasivo cuya propiedad característica es la capacitancia. La *capacitancia* ( $C$ ) es la propiedad de un material por la cual se almacena energía eléctrica en forma de campo eléctrico.

Un capacitor sencillo es un elemento de dos placas conductoras metálicas paralelas distanciadas una de la otra. Cuando las terminales de las placas se conectan a una fuente de voltaje, las placas adquieren cargas iguales en magnitud y opuestas en signo. La *capacitancia* se define como la razón entre la magnitud de la carga en cualquiera de las placas y la diferencia de potencial entre ellas:

$$C = \frac{q}{v} \rightarrow v = \frac{1}{C}q \quad (51)$$

De la definición de capacitancia se obtiene la relación entre voltaje y corriente del capacitor:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = \frac{1}{C}i \rightarrow i = C \frac{dv}{dt} \quad (52)$$

La energía almacenada entre las placas del capacitor se obtiene fácilmente al considerar la definición de potencia eléctrica:

$$U = \int pdt = \int vidt = \int Cv \frac{dv}{dt} dt = C \int vdv = \frac{1}{2}Cv^2 \quad (53)$$

La **tabla 2.9** muestra las ecuaciones descriptivas de los bloques funcionales eléctricos.

**Tabla 2.9** Propiedades de los bloques funcionales eléctricos

Bloque funcional	Ecuación descriptiva	
Inductor	$v = L \frac{di}{dt} \rightarrow i = \frac{1}{L} \int v dt$	$U = \frac{1}{2} Li^2$
Resistor	$V = Ri$	$p = Ri^2 = \frac{1}{R} v^2$
Capacitor	$i = C \frac{dv}{dt} \rightarrow v = \frac{1}{C} \int i dt$	$U = \frac{1}{2} Cv^2$

## Sistemas fluidicos

La *mecánica de fluidos* nos provee la base teórica para el estudio de fluidos. Los fluidos pueden clasificarse en dos categorías atendiendo su *compresibilidad*. Los *fluidos hidráulicos* y *fluidos neumáticos*; no compresibles y compresibles respectivamente.

## Fundamentos de hidrostática e hidrodinámica

Los *fluidos hidráulicos* son fluidos en estado líquido. El estado líquido se distingue porque sus moléculas tienen cierta libertad para desplazarse unas respecto a otras, pero están sometidas a la acción limitante de las fuerzas de cohesión que les impide extenderse indefinidamente; debido a ello su volumen es constante, a temperatura constante; su forma se adapta a la del recipiente que los contiene.

La densidad  $\rho$  se define como la cantidad de materia (m) por unidad de volumen (V), y en los fluidos líquidos es constante:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (54)$$

La presión (p) es la fuerza (f) por unidad de área (A):

$$p = \frac{f}{A} \rightarrow f = pA \quad (55)$$

La *presión hidrostática* ( $P_h$ ) debida a una columna de un fluido de altura  $h$  y densidad de masa  $\rho$ , esta dada por:

$$p_h = \rho gh \quad (56)$$

El *principio de Pascal* establece que: “la presión aplicada a un fluido encerrado es transmitida a cada porción del fluido así como a las paredes del recipiente que lo contiene”:

$$p = \frac{f_1}{A_1} = \frac{f_2}{A_2} \quad (57)$$

El *principio de Arquímedes* afirma que: “Cuando un cuerpo es sumergido en un fluido, el fluido ejerce una fuerza hacia arriba (fuerza boyante) igual al peso del fluido que el cuerpo desplaza, el volumen de líquido desplazado es igual al volumen de la parte sumergida del objeto”. La fuerza boyante  $f_b$  que recibe un objeto que se sumerge un volumen  $V_o$  en un fluido con densidad  $\rho_f$  está dado por:

$$F_b = g\rho_f V_o \quad (58)$$

Cuando un fluido que llena un tubo de sección transversal  $A$  corre a lo largo de este con una velocidad promedio  $v$ , entonces el *gasto, flujo, descarga* o *razón de flujo volumétrico*, esta dado por  $Q=Av$ , además si el fluido es incompresible, se cumple la siguiente relación conocida como *ecuación de continuidad*:

$$Q = A_1v_1 = A_2v_2 \quad (59)$$

La *viscosidad* es la resistencia natural que ofrece un fluido para desplazarse sobre una superficie.

La *ley de Poiseuille* establece que el flujo volumétrico de un fluido que corre a través de un tubo cilíndrico de longitud  $L$  y sección transversal de radio  $r$  y con presiones  $p_1$  y  $p_2$  en los extremos del tubo, esta dado por:

$$Q = \frac{\pi r^4 (p_1 - p_2)}{8\eta L} = K(p_1 - p_2) \quad (60)$$

Para un flujo a lo largo de una tubería de una corriente continua de un fluido de viscosidad despreciable es válida la siguiente relación conocida como *ecuación de Bernoulli*:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + h_1 \rho g = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + h_2 \rho g \quad (61)$$

Donde los subíndices 1 y 2 denotan dos puntos a lo largo de la tubería,  $\rho$ ,  $g$  y  $h$ , son la densidad, la aceleración debida a la gravedad y la altura respectivamente.

## Bloques funcionales de sistemas fluidicos hidráulicos

Las propiedades de los fluidos hidráulicos son: *resistencia hidráulica*, *capacitancia hidráulica* e *inertancia hidráulica*.

### Resistencia hidráulica

Es la resistencia a fluir que se presenta como resultado como resultado de un flujo de líquido a través de válvulas o cambios de diámetro de las tuberías. *La diferencia de presiones entre dos puntos dentro de la tubería que transporta un fluido hidráulico es directamente proporcional al flujo volumétrico*, constante de proporcionalidad se conoce como resistencia hidráulica y es la constante que acompaña la ley de Poiseuille:

$$p_1 - p_2 = Rq \quad (62)$$

### Capacitancia hidráulica

Considérese la **figura 2.2**, se tiene un contenedor cúbico de altura  $h$  y área de base  $A$ , alimentado por un flujo  $q_1$ , con una presión  $p_1$  en la altura máxima de líquido y un

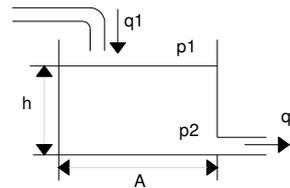


Figura 2.2 Capacitancia hidráulica

flujo  $q_2$  a la salida, con una presión  $p_2$  al fondo del contenedor. La razón de cambio de volumen ( $V$ ) es igual a la diferencia de los flujos volumétricos ( $q$ ) que entran y salen del contenedor:

$$q_1 - q_2 = \frac{dV}{dt} = \frac{d(Ah)}{dt} = A \frac{dh}{dt} \quad (63)$$

La diferencia de presiones según lo visto, está dada por:

$$p = p_1 - p_2 = h\rho g \rightarrow h = \frac{p}{\rho g} \quad (64)$$

Sustituyendo  $h$  de la ecuación anterior se tiene que:

$$q_1 - q_2 = A \frac{dh}{dt} = A \frac{d\left(\frac{p}{\rho g}\right)}{dt} = \frac{A}{\rho g} \frac{dp}{dt} = C \frac{dp}{dt} \xrightarrow{\text{siendo}} C = \frac{A}{\rho g} \quad (65)$$

Donde la constante  $C$  se conoce como *capacitancia hidráulica*. Reescribiendo la ecuación en su forma integral, resulta:

$$p = \frac{1}{C} \int (q_1 - q_2) dt \quad (66)$$

### Inertancia hidráulica

Considérese el bloque mostrado en la **figura 2.3**, representa un volumen de líquido cuya densidad es  $\rho$ , con longitud  $L$  y área de sección transversal  $A$ , del lado izquierdo se haya sometido a una presión  $p_1$  y del lado derecho a una presión  $p_2$ .

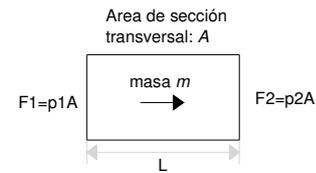


Figura 2.3 Inertancia hidráulica

La fuerza neta que actúa sobre el bloque de líquido está dado por:

$$F_1 - F_2 = p_1 A - p_2 A = (p_1 - p_2) A = m \frac{dv}{dt} = AL\rho \frac{dv}{dt} \rightarrow p_1 - p_2 = L\rho \frac{dv}{dt} \quad (67)$$

Considerando la definición de flujo volumétrico  $q = Av \rightarrow v = q/A$  se tiene:

$$p_1 - p_2 = \frac{L\rho}{A} \frac{dq}{dt} = I \frac{dq}{dt} \quad (68)$$

Donde la constante  $I$  se denomina *inertancia hidráulica* y se define por (es el equivalente del resorte en sistemas mecánicos y el inductor en sistemas eléctricos):

$$I = \frac{L\rho}{A} \quad (69)$$

Las propiedades de los fluidos neumáticos son: *resistencia neumática*, *capacitancia neumática* e *inertancia neumática*. El estudio de los fluidos neumáticos es menester de la *Termodinámica*.

## Fundamentos de fisicoquímica y termodinámica

Un *mol* es una unidad de cantidad que equivale a  $6.0225 \times 10^{23}$  partículas. Consideremos una *masa* ( $m$ ) de un gas en su máximo estado de pureza, de *masa molecular*  $M$ , encerrado en un recipiente de *volumen*  $V$ , bajo una *presión*  $p$  y con una *temperatura*  $T$ , la *ley de los gases ideales*, establece que:

$$pV = nRT \rightarrow \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad (70)$$

Siendo  $n = m/M$  el número de moles y  $R$  la *constante universal de gases ideales*. El *principio de Avogadro* establece que: “*volúmenes iguales de todos los gases, a la misma presión y temperatura contienen igual número de moléculas*”.

La *ley de Dalton de las presiones parciales*, afirma que “*la presión total ( $p_t$ ) de una mezcla de  $n$  gases es igual a la suma de las presiones parciales ( $p_k$ ) de los componentes individuales de la mezcla*”.

$$p_t = \sum_{i=1}^n p_i = p_1 + p_2 + p_3 + \dots \quad (71)$$

La *teoría cinética de los gases ideales* establece que un gas de  $n'$  *moléculas* cada una de *masa*  $m'$ , moviéndose a una *velocidad promedio*  $v_{rms}$ , sometidos a una *presión*  $p$  en un *volumen*  $V$ , entonces se cumple que:

$$pV = \frac{1}{3} m' n' v_{rms}^2 \quad (72)$$

Así mismo la *energía cinética promedio* de cada molécula está dada por  $E_k = \frac{3}{2}kT$ , así mismo la *velocidad por molécula* es  $v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}}$ .

Para *gases reales* sin embargo, se han desarrollado ecuaciones de estado que semejen el caso ideal, esto se ha logrado parcialmente mediante factores de corrección, una de las cuales es la *ecuación de Van Der Waals*, con  $a$  y  $b$  como constantes:

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \quad (73)$$

Las *leyes de la termodinámica* establecen los fundamentos de la dinámica de fluidos en estado gasificado. Las *propiedades termodinámicas* de las sustancias son: *temperatura* ( $T$ ), *presión* ( $P$ ), *densidad* ( $\rho$ ), *entropía* ( $S$ ). Un *proceso es reversible* cuando su dirección puede invertirse en cualquier punto por un cambio infinitesimal en las condiciones externas. En la práctica todos los procesos son irreversibles.

La *energía térmica* ( $Q$ ), es la energía que fluye de un cuerpo a otro debido a la diferencia de temperaturas. La *energía interna* ( $U$ ), es la energía total contenida en un sistema, suma de las energías cinética, potencial, eléctrica, nuclear que poseen átomos y moléculas del sistema.

La *conversión de trabajo* en formas de *energía potencial, cinética, eléctrica, o mecánica* se puede llevar a cabo con un *eficiencia* cercana al 100% eliminando la *fricción* que disipa energía en forma de calor. Sin embargo lo contrario, la *conversión de calor en trabajo* u otra forma aprovechable de energía tiene una *eficiencia* ( $\text{eficiencia} = \text{trabajo realizado} / \text{calor introducido}$ ) que no supera el 40%. La segunda ley de la termodinámica trata de explicar este hecho.

El *trabajo* ( $W$ ) necesario para expandir un gas, a presión constante  $p$ , de un volumen de  $V_1$  a un volumen  $V_2$ , es:

$$dW = p dV \rightarrow W = \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (74)$$

La *entalpía* ( $H$ ) es una relación simple entre la *energía interna* ( $U$ ) y el *trabajo* ( $W=PV$ ) de un sistema, que se ha definido para efectos prácticos como:

$$dH = dU + d(PV) \rightarrow \Delta H = \Delta U + \Delta(PV) \quad (75)$$

*Ley cero de la termodinámica.* Si dos cuerpos están en equilibrio con un tercero, entonces estos están en equilibrio térmico entre sí.

*Primera Ley de la termodinámica.* Si una cantidad de energía térmica  $dQ$  fluye dentro de un sistema, entonces está debe aparecer como un incremento de la energía interna  $dU$  del sistema y/o como un trabajo  $dW$  por el sistema sobre sus alrededores.

$$dQ = dU + dW = dU + pdV \quad (76)$$

*Segunda Ley de la termodinámica.* “Es imposible para cualquier sistema sufrir un proceso en el cual se absorba calor de un depósito a una temperatura única y convierta el calor completamente en trabajo mecánico, con el sistema terminando en mismo estado en el cual comenzó”. Es decir, si un sistema experimenta cambios espontáneos, éste cambiará en tal forma que su *entropía* ( $S$ ) se incrementa, o bien permanezca constante, pero nunca disminuye. *La entropía es una medida del desorden espacial y térmico de un sistema.* El calor siempre fluye espontáneamente de los cuerpos de mayor a los de menor temperatura. Cualquier *proceso irreversible* produce cambios del sistema hacia un *estado de mayor entropía*. Para un *proceso ideal reversible e isotérmico* se tiene:

$$dS = \frac{dQ}{T} \rightarrow \Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} \quad (77)$$

*Tercera ley de la termodinámica.* El cero absoluto no puede ser alcanzado por ningún procedimiento que conste de un número finito de pasos.

El *calor específico* o *capacidad calorífica*,  $c = \Delta Q / (m\Delta T)$ , de una sustancia es la cantidad de calor requerida para elevar la temperatura de una unidad de masa  $m$ , en un grado. Para el agua  $c=4180$  J/kg. En caso de gases se tienen dos capacidades caloríficas, *calor específico a volumen constante* ( $C_V$ ) y *calor*

específico a presión constante ( $C_p$ ). Para un gas ideal de masa molecular  $M$ , se cumple que:

$$C_p - C_v = \frac{R}{M} \quad (78)$$

La razón de calor específico para gases es  $\gamma = C_p / C_v$ , cuyo valor para gases monoatómicos es  $\gamma = 1.67$ , y para gases diatómicos  $\gamma = 1.40$ .

En los cálculos de ingeniería los gases que están sujetos a presiones de unos cuantos *bar* pueden considerarse como ideales. Para un *mol de gas ideal* en un proceso donde *no hay flujo* y es *mecánicamente reversible*, se aplican las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} dU &= dQ + dW \rightarrow \Delta U = Q + W \\ dW &= p dV \rightarrow W = \int p dV \\ dU &= C_v dT \rightarrow \Delta U = \int C_v dT \\ dH &= C_p dT \rightarrow \Delta H = \int C_p dT \end{aligned} \quad (79)$$

Se dice que el proceso es *politrópico* si la relación presión-volumen, está dada por:  $PV^\delta = K$ , siendo  $K$  una constante. En tal proceso, el *trabajo*  $W$ , y el *calor*  $Q$ , se obtienen con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} W &= \frac{RT_1}{\delta - 1} \left[ \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{(\delta-1)/\delta} - 1 \right] \\ Q &= \frac{(\delta - \gamma)RT_1}{(\delta - 1)(\gamma - 1)} \left[ \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{(\delta-1)/\delta} - 1 \right] \end{aligned} \quad (80)$$

Para valores particulares de la constante  $\delta$ , las ecuaciones anteriores se reducen a los siguientes *procesos termodinámicos*, para un gas ideal: *isobárico* (presión constante,  $\delta=0$ ), *isotérmico* (temperatura constante,  $dU=0$ ,  $\delta=1$ ), *adiabático* (sin transferencia de calor,  $dQ=0$ ,  $\delta=\gamma$ ), *isocórico* o *isovolumétrico* (volumen constante,  $dW=0$ ,  $\delta=\infty$ ),

Los problemas cuyas soluciones dependen exclusivamente de la *conservación de la masa* y de las *leyes de la termodinámica* suelen dejarse fuera del estudio de la

*mecánica de fluidos* (que involucra el principio de *momento lineal*) y son estudiados por la *termodinámica*.

Un *volumen de control* ( $V_C$ ), es un volumen aislado de un sistema físico en estudio, con una entrada y una salida para comunicarse con sus alrededores. Consideremos un volumen de control que aloja una cantidad contable  $X$  de fluido. Una *ecuación de balance de masa* expresa la relación entre la *rapidez de transporte* ( $\dot{X}_T$ ) hacia (+) o desde el fluido (-), con la *rapidez con la que se genera* ( $\dot{X}_G$ ) la sustancia dentro del volumen y con la *rapidez de cambio de la sustancia* dentro del volumen de control ( $dX_{vc} / dt$ ):

$$\dot{X}_T + \dot{X}_G = \frac{dX_{vc}}{dt} \quad (81)$$

La *rapidez de flujo másico*  $m$  con la que fluye un fluido en fase gaseosa, de *densidad*  $\rho$ , a través de una tubería de *área de sección transversal*  $A$ , con *velocidad promedio*  $v$ , esta dada por:

$$m = \rho v A \quad (82)$$

El proceso de *flujo en estado estable* es aquel en el que el flujo másico de entrada y salida es el mismo. Dicho estado obedece la *ecuación de continuidad*, la cual se puede escribir en términos del *volumen específico* ( $V_e = 1 / \rho$ ).

$$m = \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 = \frac{v_1 A_1}{V_{e1}} = \frac{v_2 A_2}{V_{e2}} \quad (83)$$

## Bloques funcionales de sistemas fluidicos neumáticos

### Resistencia neumática

Considere un sistema en fase gaseosa en flujo estable, fluyendo a través de una tubería. La *resistencia neumática* se define en términos de la razón de *flujo másico*  $m$  y la diferencia de presiones en dos puntos 1 y 2, a lo largo de la tubería, como:

$$p_1 - p_2 = Rm \quad (84)$$

### **Capacitancia neumática**

Consideremos un volumen de control  $V_c$ , que aloja un gas, con las siguientes propiedades, *masa  $m$ , densidad  $\rho$ , temperatura  $T$* , al cual entra un flujo másico  $m_1$  y sale un flujo másico  $m_2$ . Supongamos que las condiciones del gas estén dadas por la ecuación del gas ideal.

$$pV = mRT \rightarrow p = (m/V)RT = \rho RT \rightarrow \rho = (1/RT)p$$

El *cambio de masa* en el volumen de control, sabiendo que  $m = \rho V$ , y considerando la ecuación anterior es:

$$m_1 - m_2 = \frac{d(m)}{dt} = \frac{d(\rho V)}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} + V \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} + V \frac{d(\frac{1}{RT} p)}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} + \frac{V}{RT} \frac{dp}{dt}$$

Lo cual se puede reescribir como:

$$m_1 - m_2 = \rho \frac{dV}{dp} \frac{dp}{dt} + \frac{V}{RT} \frac{dp}{dt} = \left( \rho \frac{dV}{dp} + \frac{V}{RT} \right) \frac{dp}{dt} = (C_1 + C_2) \frac{dp}{dt} \quad (85)$$

Donde las constantes  $C_1$  y  $C_2$  son la *capacitancia neumática debida al cambio de volumen* y la *capacitancia debida a la compresibilidad del gas*, respectivamente.

$$C_1 = \rho \frac{dV}{dp}, \quad C_2 = \frac{V}{RT} \quad (86)$$

En términos de la diferencia de presiones, la ecuación puede escribirse como:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{C_1 + C_2} \int (m_1 - m_2) dt \quad (87)$$

### **Inertancia neumática**

Consideremos un bloque de gas de *área de la sección transversal  $A$ , longitud  $L$* . Sea su *densidad uniforme  $\rho$* , y su *masa  $m = \rho AL$* . Apliquemos la *segunda ley de Newton* para estudiar las relaciones entre la fuerza que se provee al bloque de

gas para acelerarlo y sus propiedades. Consideremos que la fuerza actúa en las caras laterales del bloque, ejerciendo presiones  $p_1$  y  $p_2$ .

$$f = (p_1 - p_2)A = ma = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{d(\rho LA v)}{dt} = L \frac{d(\rho q)}{dt} \quad (88)$$

Donde  $q = Av$ , es el *flujo volumétrico*, así mismo el *flujo másico* esta dado por  $m = \rho q$ . En estas condiciones se tiene que:

$$p_1 - p_2 = \frac{L}{A} \frac{dm}{dt} = I \frac{dm}{dt} \Leftrightarrow I = \frac{L}{A} \quad (89)$$

La constante  $I = L/A$  se denomina *inertancia neumática*.

## Sistemas térmicos

Para sistemas térmicos solo se consideran dos bloques funcionales: *resistencia térmica* y *capacitancia térmica*.

## Fundamentos de transferencia de calor y calorimetría

Las *escalas de temperatura* mas comunes (con el *punto fusión* y *ebullición* del agua indicado en paréntesis) son: *Celsius* (0-100 °C), *Fahrenheit* (32-212 °F), *Rankine* (492-672 °R) y la *escala absoluta* o *Kelvin* (273.15-373.15 K). Se relacionan entre si, como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} K &= ^\circ C + 273.15 \\ ^\circ F &= 1.8^\circ C + 32 \rightarrow ^\circ C = (^\circ F - 32)/1.8 \\ ^\circ R &= ^\circ F + 460 \end{aligned} \quad (90)$$

El *punto triple del agua* se define a 0.01°C y equivale a 273.16K. Si un material de *coeficiente lineal de expansión*  $\alpha$ , y *coeficiente volumétrico de expansión*  $\beta$  ( $\beta = 3\alpha$  para sólidos), con *longitud*  $L_0$  y *volumen*  $V_0$ , se somete a un *cambio de temperatura*,  $\Delta T$ , este resiente un cambio en longitud y volumen dados por:

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T \quad \Delta V = \beta V_0 \Delta T \quad (91)$$

El calor transferido de un cuerpo a otro es el resultado de la diferencia de temperaturas. El calor necesario para elevar la temperatura de un material de *capacidad calorífica*  $c$  y *masa*  $m$ , una cantidad  $\Delta T$  es:  $Q = mc\Delta T$ .

Los tres mecanismos para la *transferencia de calor* son: *conducción*, *convección* y *radiación*. La *conducción* ocurre cuando la energía calorífica pasa a través de un material como resultado de las colisiones entre la moléculas del mismo. La *convección* de energía calorífica involucra movimientos de masa de una región a otra, el material de menor temperatura es desplazado. La *radiación* es transferencia de energía a través de ondas electromagnéticas.

**Conducción.** Consideremos dos cuerpos de temperatura  $T_A$  y  $T_B$ , siendo  $T_A > T_B$ , y sea un *material de conducción* aislado de *longitud*  $L$  y *área de sección transversal*  $A$  y sea  $k$  su *conductividad*, entonces la *corriente de calor por conducción* ( $H$ ) es:

$$H = \frac{dQ}{dT} = -kA \frac{dT}{dx} = \frac{Ak(T_A - T_B)}{L} = \frac{A(T_A - T_B)}{R} \Leftrightarrow R = \frac{L}{k} \quad (92)$$

**Convección.** El proceso de transferencia de calor por convección es complejo y no existe una ecuación general, por el contrario se desarrollan ecuaciones particulares dependiendo de su aplicación. Por ejemplo la *convección natural de aire* desde superficies verticales y planos horizontales está dado por:

$$\frac{hL}{k_f} = b \left[ \frac{L^2 \rho_f^2 g \beta_f \Delta T (c_p \mu)_f}{\mu_f^2} \left( \frac{c_p \mu}{k} \right)_f \right]^n \quad (93)$$

Siendo:  $h$ =coeficiente medio de transferencia de calor,  $k_f$ =conductividad calorífica del fluido,  $c_p$ =calor específico a presión constante del fluido,  $\rho_f$ =densidad del fluido,  $\beta_f$ =coeficiente de expansión térmica del fluido,  $g$ =aceleración debida a la gravedad,  $\Delta T$ =diferencia de temperaturas entre la lamina y el fluido,  $\mu_f$ =viscosidad del fluido.

**Radiación.** Un *cuerpo negro* es un cuerpo que absorbe toda la energía radiante que incide sobre él. En *equilibrio térmico* un cuerpo emite la misma cantidad de energía radiante que la que absorbe. A partir de la *ley de Stefan-Boltzmann*,

se tiene la *corriente de calor por radiación* ( $H$ ) para una *superficie*  $A$ , de un cuerpo a *temperatura absoluta*  $T$ , esta dada por:

$$H = \frac{dQ}{dT} = Ae\sigma T^4 \quad (94)$$

Donde  $\sigma$  es la constante de *Stefan-Boltzmann*, y  $e$  es la *emisividad de la superficie*. Para un cuerpo negro  $e=1$  y  $e<1$  para una superficie real. Cuando un cuerpo con temperatura absoluta  $T$ , está en una región donde la temperatura absoluta es  $T_0$ , la energía radiada por el cuerpo es:

$$H = \frac{dQ}{dT} = Ae\sigma(T^4 - T_0^4) \quad (95)$$

## Bloques funcionales de sistemas térmicos

### Resistencia térmica

Como sabemos de la termodinámica, sólo hay flujo de calor neto entre dos puntos si hay una diferencia de temperaturas entre ellos. El *flujo de calor*  $q$ , debido a una *superficie*  $A$ , entre dos puntos de *temperatura*  $T_1$  y  $T_2$  se relacionan por:

$$q = \frac{T_2 - T_1}{R} \quad (96)$$

Donde  $R$  es la *resistencia térmica*. El valor de la resistencia depende del modo en el que se transfiere el calor. En la conducción a través de un sólido  $R=L/k$ . En la convección  $R=1/(Ah)$ .

### Capacitancia térmica

La *capacitancia térmica* ( $C$ ) es una medida del almacenamiento de energía interna de un sistema. Sea  $q_1$  la razón de flujo en el interior de un sistema y  $q_2$  la razón de flujo que sale de este, entonces:

$$\Delta q = q_1 - q_2 = mc \frac{dT}{dt} = C \frac{dT}{dt} \Leftrightarrow C = mc \quad (97)$$

## ***Relaciones analogías de bloques funcionales de sistemas físicos***

Hasta ahora nuestro esfuerzo se ha concentrado en la determinación de los bloques funcionales de los siguientes sistemas físicos: *mecánicos traslacionales*, *mecánicos rotacionales*, *eléctricos*, *fluídicos hidráulicos*, *fluídicos neumáticos* y *térmicos*. La intención que se ha tenido en mente es presentarlos de manera tal que se observe una analogía natural en los modelos matemáticos que los presentan, como se resume en la **tabla 2.10**.

Tabla 2.10 Relaciones análogas de los bloques funcionales de sistemas físicos

Sistema físico	Bloques funcionales		
	Almacenamiento de energía potencial	Disipador de energía	Almacenamiento de energía cinética
<i>Mecánico trasnacional</i>	Resorte traslacional $F = k \int \bar{v} dt$	Amortiguador traslacional $F = c\bar{v}$	Masa $F = m \frac{d\bar{v}}{dt}$
<i>Mecánico rotacional</i>	Resorte torsional $T = k \int \omega dt$	Amortiguador rotacional $T = c\omega$	Momento de inercia $T = I \frac{d\omega}{dt}$
<i>Eléctrico</i>	Inductor $i = \frac{1}{L} \int v dt$	Resistor $i = \frac{1}{R} v$	Capacitor $i = C \frac{dv}{dt}$
<i>Fluido hidráulico</i>	Inertancia hidráulica $q = \frac{1}{I} \int (p_1 - p_2) dt$	Resistencia hidráulica $q = \frac{1}{R} (p_1 - p_2)$	Capacitancia hidráulica $q = C \frac{d(p_1 - p_2)}{dt}$
<i>Fluido neumático</i>	Inertancia neumática $\dot{m} = \frac{1}{I} \int (p_1 - p_2) dt$	Resistencia neumática $\dot{m} = \frac{1}{R} (p_1 - p_2)$	Capacitancia neumática $m = C \frac{d(p_1 - p_2)}{dt}$
<i>Térmico</i>	Sin equivalente	Resistencia térmica $q = \frac{1}{R} (T_1 - T_2)$	Capacitancia térmica $q_1 - q_2 = C \frac{dT}{dt}$

# Capítulo 3

## Modelado de sistemas dinámicos

---

Los sistemas físicos se presentan en la naturaleza como sistemas dinámicos. El modelo matemático que representa un sistema físico se obtiene a partir de un análisis del estado que guardan los bloques funcionales que componen el sistema, aplicando los principios de *conservación de energía, masa y momento (angular y lineal)*. El objetivo de este capítulo es presentar un conjunto de técnicas que permitan la obtención de *modelos matemáticos* para los siguientes sistemas físicos:

- ⇒ Sistemas mecánicos.
- ⇒ Sistemas eléctricos.
- ⇒ Sistemas fluidicos.
- ⇒ Sistemas térmicos.
- ⇒ Sistemas electromecánicos.

El *modelado* se presenta mediante la función de transferencia del sistema en el dominio de  $s$ , empleando la transformada de Laplace; se presenta una introducción al análisis en espacio de estados.



## **Modelado de sistemas dinámicos**

Una *ecuación diferencial de un sistema dinámico*, es un modelo matemático que representa la relación entre las variables de entrada del sistema y las variables de salida para una característica del sistema en particular, como una función del tiempo. Una *modelo de estado* es una representación matricial que relaciona las variables de: entrada, salida y de estado; de manera que determina el comportamiento del sistema en cualquier tiempo. En general las *leyes de conservación de la masa* (M), *energía* (E) y *momento* (P) se aplican a los componentes del sistema para formar una ecuación de balance que se puede escribir como:

$$\text{flujo de [ME] de entrada} - \text{flujo de [ME] de salida} = \text{tasa de acumulación de [ME]} \quad (1)$$

En ingeniería de control se emplean varias técnicas matemáticas bien fundamentadas: (1) modelado mediante *función de transferencia*, aplicable a *sistemas lineales invariantes con el tiempo* (ED lineales con coeficientes constantes); (2) representación del sistema mediante *diagramas de bloques* y (3) modelado de sistemas complejos mediante *espacio de estados*.

## Modelado mediante función de transferencia

La *teoría de control convencional* emplea la función de transferencia para el análisis de sistemas lineales invariantes con el tiempo sujetos a una sola entrada y una sola salida; y el análisis se realiza en el dominio de la frecuencia (1/t). Una *función de transferencia* o *ganancia*  $G(s)$ , de un sistema se obtiene al aplicar la *transformada de Laplace* a la *ED invariante con el tiempo*, que representa el sistema (transformando la ED del dominio del tiempo al dominio de los números complejos) y se expresa como una razón de la *salida* o *respuesta*  $Y(s)$ , entre la *entrada* o *excitación*  $X(s)$ ; bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero:

$$Y(s) = G(s) \times X(s) \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{L[y(t)]}{L[x(t)]} \quad (2)$$

El *orden del sistema* queda determinado por el orden de  $X(s)$  y en general el orden de  $X(s)$  será siempre menor que el orden de  $Y(s)$ .

**Ejemplo 3.1.** Obtener la *función de transferencia* para el sistema mecánico mostrado en la figura cuya entrada es la *fuerza externa*  $u(t)$  y su salida el *desplazamiento*  $y(t)$ .

**Solución.** Cuando se aplica la *fuerza externa*  $u(t)$  a la masa, en la dirección indicada, las *fuerzas de resorte y amortiguamiento* se oponen al desplazamiento. De esta manera: (1) aplicando la *segunda ley de Newton*,  $F=ma$ ; (2) transformando la ED lineal e invariante resultante; (3) hallando la *función de transferencia* suponiendo condiciones iniciales iguales a cero, se tiene:

$$\begin{aligned} u(t) - ky(t) - b \frac{dy(t)}{dt} &= m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} & \rightarrow & \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = u \\ ms^2 Y(s) + bsY(s) + kY(s) &= U(s) & \rightarrow & \quad Y(s) \times [ms^2 + bs + k] = U(s) \\ \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{1}{ms^2 + bs + k} & \clubsuit & \end{aligned}$$

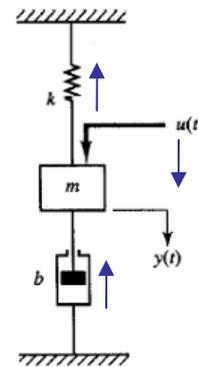


Figura 3.1 Sistema bloque-resorte-amortiguador

## Representación del sistema mediante diagramas de bloques

Los *diagramas de bloques* son representaciones gráficas de la dinámica de un sistema de control, en su forma más sencilla representan una función de transferencia; y constan de los siguientes

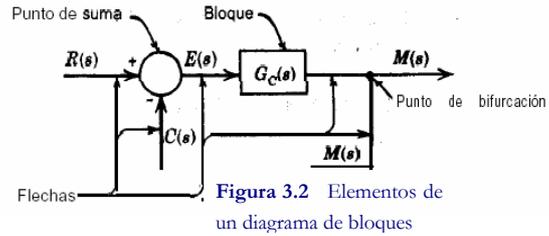


Figura 3.2 Elementos de un diagrama de bloques

elementos (figura 3.2): (1) flechas: se emplean para representar la dirección del flujo de la señal; (2) punto suma: es el lugar donde dos o más señales se suman o restan dependiendo del signo indicado; (3) punto de separación: es el lugar donde la señal se separa en dos o más direcciones de flujo; (4) bloques: son recuadros que alojan una operación matemática de transformación para la señal de entrada.

Los diagramas de bloques obedecen algunos principios algebraicos básicos como se muestra en la figura 3.4.

Para un sistema de lazo abierto, que consta de elementos conectados en serie, la función de transferencia global es el producto de las funciones de transferencia de los elementos individuales:

$$G = \prod_{k=1}^n G_k = G_1 G_2 \cdots G_n \tag{3}$$

Para un sistema de lazo cerrado consideremos el diagrama de bloques mostrado en la figura 3.3. Se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} C(s) &= G(s)E(s) \\ E(s) &= R(s) - B(s) = R(s) - H(s)C(s) \\ \rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \end{aligned} \tag{4}$$

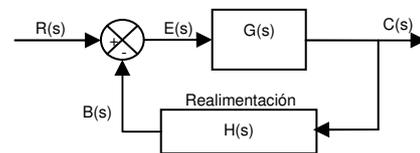


Figura 3.3 Función de transferencia de un sistema de lazo cerrado

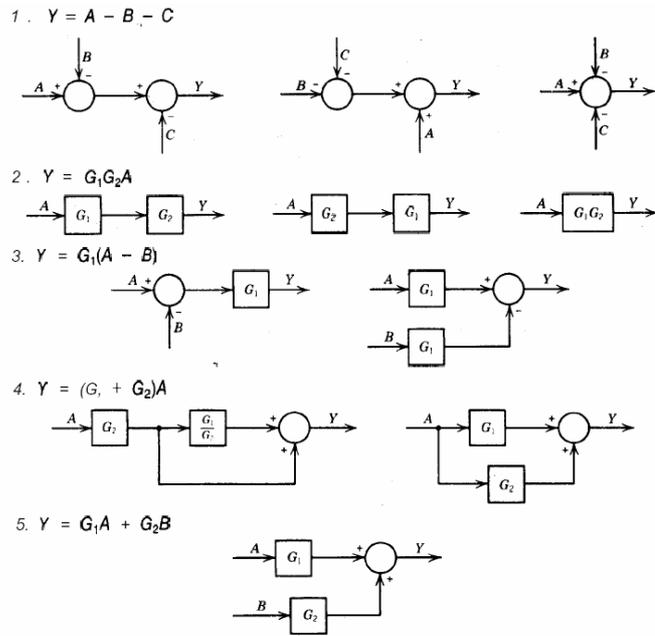


Figura 3.4 Reglas algebraicas de los diagramas de bloques

En la ecuación anterior  $G$  se conoce como *función de transferencia de la trayectoria directa*,  $GH$  se conoce como *función de transferencia de lazo*.

**Efectos de las perturbaciones**

Una **perturbación** es una señal no deseada la cual afecta la salida del sistema. Las perturbaciones pueden venir de fuentes exógenas (medio ambiente) o del interior del sistema, por ejemplo *ruido eléctrico*.

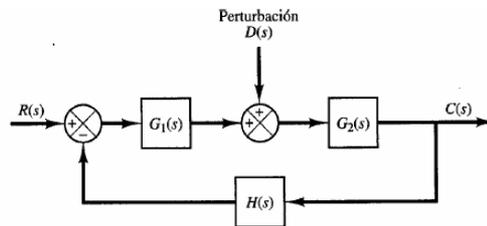


Figura 3.5 Sistema de control en lazo cerrado con perturbación

Consideremos el sistema de lazo cerrado sujeto a una perturbación  $D(s)$ , mostrado en la **figura 3.5**. La respuesta del sistema  $C(s)$  es la superposición de las respuestas de la señal de entrada  $C_R(s)$  y la perturbación  $C_D(s)$ , esto es:

$$C(s) = C_R(s) + C_D(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} [G_1(s)R(s) + D(s)] \tag{5}$$

En general los sistemas de lazo cerrado son poco sensibles a los efectos de las perturbaciones.

**Representación de un sistema dinámico en diagrama de bloques**

**Ejemplo 3.2.** Para el circuito RC mostrado en la **figura 3.6**; cuya entrada es  $e_i$  y cuya salida es  $e_o$ . Hallar su representación en diagrama de bloques.

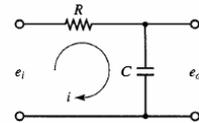
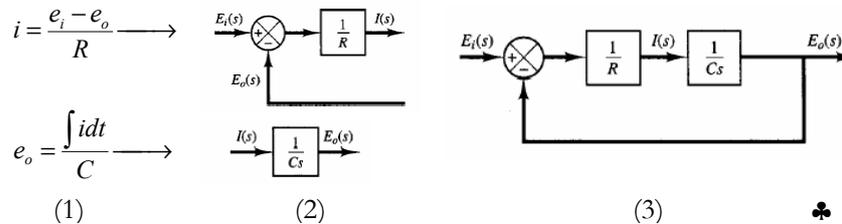


Figura 3.6 Circuito RC

**Solución.** (1) Se escriben ecuaciones que relacionen las variables de entrada y salida; (2) se transforman en diagramas de bloques; (3) se forma un diagrama de bloques general:



**Modelado mediante espacio de estados**

En la *teoría de control moderna* se emplea el concepto de espacio de estados para el análisis de sistemas dinámicos que pueden tener entradas y salidas múltiples y que pueden variar con el tiempo (ED no lineales); y el análisis se realiza en el dominio del tiempo (t).

El *estado* de un sistema queda determinado al conocer el *n-vector de estado*, cuyos componentes son *n-variables de estado* y que gráficamente se representa como un punto en el *n-espacio de estados*. Una *ecuación de estado* es una relación

entre tres conjuntos de variables que determinan el comportamiento del sistema: (1) variables de entrada, (2) variables de salida y (3) variables de estado. Un sistema dinámico debe incorporar elementos que memoricen los valores de la entrada, estos son los integradores y sus salidas son las variables de estado  $x_i = \int x'_i dx$ .

Mediante el espacio de estados un sistema dinámico, se puede representar mediante el siguiente conjunto de ecuaciones matriciales:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

donde:

- y** = matriz de estado (6)
- B** = matriz de entrada
- A** = matriz de salida
- B** = matriz de transmisión directa

Las matrices **A**, **B**, **C** y **D** son funciones del tiempo si el sistema es variante con el tiempo, de lo contrario son matrices constantes. El vector de entrada (**u**), vector de salida (**y**) y vector de estado (**x**), se definen por:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (7)$$

**Ejemplo 3.3.** Representar el sistema masa-resorte-amortiguador, mediante ecuaciones de estado.

**Solución.** El punto clave para la representación del sistema mediante ecuaciones de estado es la selección adecuada de las variables de estado, y se lleva a cabo como sigue: (1) se determina la ED que representa el sistema dinámico y el grado de esta (n); (2) se eligen n-variables de estado, que pueden ser la función de salida y sus (n-1) derivadas; (3) se escriben relaciones de las variables de entrada y las variables de salida con las variables de estado; (4) se expresan matricialmente las ecuaciones de estado; (5) se representa el sistema en su forma matricial estándar identificando las matrices de coeficientes (**A**, **B**, **C**, **D**):

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = u \rightarrow my'' + by' + ky = u \\
 (2) \quad & x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = y'(t) \quad \leftarrow \quad \text{variables de estado} \\
 (3) \quad & x'_1 = x_2, \\
 & x'_2 = \frac{1}{m}(-ky - by') + \frac{1}{m}u \rightarrow x'_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \\
 & Y = x_1 \\
 (4) \quad & \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
 (5) \quad & (t) = (t) + (t) \\
 & (t) = (t) + (t) \\
 & \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \mathbf{Ax} & \mathbf{Bu} \\ \mathbf{Cx} & \mathbf{Du} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0 \quad *
 \end{aligned}$$

### Representación de EDL con coeficientes constantes en espacio de estados

El método antes enunciado se generalizará para representar un sistema dinámico que es representado por una ecuación diferencial lineal de enésimo orden, en su *forma normal*:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n y = b_1 u \quad (8)$$

Consideremos como variables de estado la función de salida y sus derivadas y definimos:

$$x_1 = y, \quad x_2 = y^{(1)}, \quad \dots, \quad x_n = y^{(n-1)} \quad (9)$$

Reescribiendo la ED en términos de las variables definidas:

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = x_3, \quad \dots, \quad x'_{n-1} = x_n \quad (10)$$

Por lo que matricialmente en espacio de estados la ED lineal de n-ésimo orden se representa por dos ecuaciones lineales de primer orden:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\
 \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u
 \end{aligned}
 \quad \Rightarrow \quad
 \begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C} &= [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n], & \mathbf{D} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Asimismo la función de transferencia del sistema está dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n}
 \tag{12}$$

### Relación entre funciones de transferencia y espacio de estados

Cuando se tiene un modelo en el espacio de estados de un sistema con una sola entrada y una sola salida, es posible obtener la función de transferencia a partir de los parámetros **A**, **B**, **C** y **D** como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)] &= s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}U(s) \rightarrow s\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s) \\
 &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s) \rightarrow \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}U(s) \\
 \mathcal{L}[\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t)] &= Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}U(s) \\
 &= (\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D})U(s) = U(s) \times \left[ \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \right]
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

**Ejemplo 3.4.** Obtener la función de transferencia para el sistema masa-resorte-amortiguador representado en espacio de estados.

**Solución.** Aplicando la ecuación definitoria se tiene que:

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ m \end{bmatrix}, \quad = [1 \quad 0], \quad = 0 \\
 (sI - \mathbf{A})^{-1} &= \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{D} \\
 \det(sI - \mathbf{A}) &= s(s + b/m) + k/m, \quad \text{adj } A = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \\
 (sI - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{\text{adj } A}{|A|} = \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \leftrightarrow R = \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \\
 G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = (sI - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} Rs + R\frac{b}{m} & R \\ -R\frac{k}{m} & Rs \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ m \end{bmatrix} + 0 = R \frac{1}{m} \\
 &= \frac{\mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}
 \end{aligned}$$

### Sistemas mecánicos

Para los *sistemas mecánicos traslacionales* existen tres bloques funcionales básicos: *masa-resorte-amortiguador*; para *sistemas mecánicos rotacionales* los bloques funcionales básicos son: *momento de inercia-resorte rotacional-amortiguador rotacional*. En *análisis de sistemas mecánicos* se lleva acabo aplicando la segunda ley de Newton a cada masa o momento de inercia según corresponda, con frecuencia es útil dibujar un *diagrama de cuerpo libre*, en el que se muestran las fuerzas o torques actuando sobre cada masa:

$$\sum F = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \sum T = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{14}$$

**Ejemplo 3.5.** Obtener el modelo por función de transferencia del sistema mostrado en la **figura 3.7**, donde la fuerza externa es la variable de entrada y el desplazamiento la variable de salida.

**Solución.** Cuando la fuerza  $f(t)$  se aplica a la masa en la dirección indicada, los resortes se oponen al

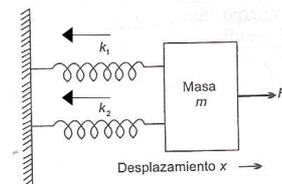


Figura 3.7 Sistema masa-resorte

movimiento con fuerzas indicadas. Aplicando la segunda ley de Newton, se tiene que:

$$f(t) - k_1x - k_2x = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad \rightarrow \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + (k_1 + k_2)x = f(t)$$

$$\mathcal{L} \left[ m \frac{d^2x}{dt^2} + (k_1 + k_2)x = f(t) \right] \quad \rightarrow \quad ms^2X(s) + (k_1 + k_2)X(s) = F(s)$$

$$X(s) \times [ms^2 + (k_1 + k_2)] = F(s) \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + (k_1 + k_2)} \quad \clubsuit$$

**Ejemplo 3.6.** Obtener el modelo por función de transferencia de un motor que hace girar una carga, donde el par externo  $T$ , es la variable de entrada y el desplazamiento angular la variable de salida.

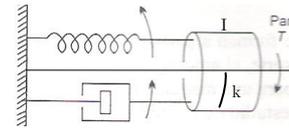


Figura 3.8 Masa que gira sujeta al extremo de un eje

**Solución.** En la figura 3.8 se muestra el modelo de bloques. La masa es representada por el momento de inercia  $I$ , con radio de giro  $k$  y es hecha girar por un par externo  $T$  (internamente es un par aplicado a la armadura, debido a fuerzas electromagnéticas por interacción con el campo magnético,  $\vec{T} = BIAN \sin \theta_x$ ), el resorte y el amortiguador rotacionales generan pares que se oponen al movimiento de la masa; se aplica la segunda ley de Newton en forma rotacional  $T = I \frac{d\theta}{dt}$ , y se tiene que:

$$T(t) - k\theta - c \frac{d\theta}{dt} = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \rightarrow \quad I \frac{d^2\theta}{dt^2} + c \frac{d\theta}{dt} + k\theta = T(t)$$

$$\mathcal{L} \left[ I \frac{d^2\theta}{dt^2} + c \frac{d\theta}{dt} + k\theta = T(t) \right] \quad \rightarrow \quad Is^2\Theta(s) + cs\Theta(s) + k\Theta(s) = T(s)$$

$$\Theta(s) \times [Is^2 + cs + k] = T(s) \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{s^2 + cs + k} \quad \clubsuit$$

**Ejemplo 3.7.** Obtener el modelo por función de transferencia del sistema de suspensión de un automóvil, figura 3.9a.

**Solución.** El sistema de suspensión es complejo, un acercamiento es como el mostrado en la figura 3.9b, una simplificación mayor conduce al sistema mostrado en la figura 3.9c. En el cual el desplazamiento  $x_i$  del punto P es la entrada del sistema y el desplazamiento  $x_o$  de la masa es la salida del sistema.

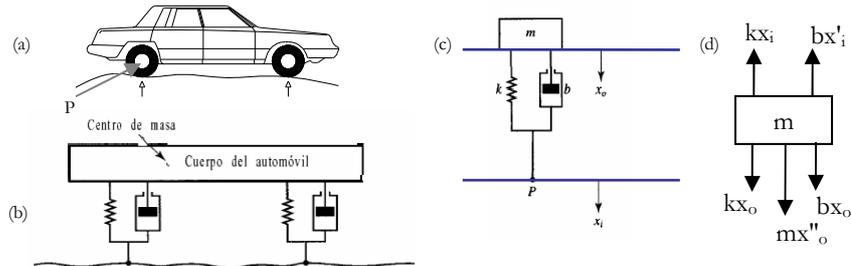


Figura 3.9 (a) Suspensión de un automóvil; (b) sistema de suspensión; (c) simplificación; (d) cuerpo libre

La suspensión de un automóvil tiene por objeto la estabilidad de este, de manera que se minimicen las vibraciones como resultado del relieve del terreno. Se compone de dos elementos principales *resortes* (o muelles) y *amortiguadores* además de brazos y ejes rígidos. Refiriéndose a la figura 3.9c el sistema se modela como un sistema *masa-resorte-amortiguador*. En términos de desplazamientos, cuando un desplazamiento  $x_i$ , se aplica al punto P, la masa  $m$  reacciona con desplazamiento  $x_o$  a partir de su posición de equilibrio; pero se amortigua mediante el amortiguador de constante  $b$  y el resorte de constante  $k$ . El diagrama de cuerpo libre se muestra en la **figura 3.9d**, en símbolos se tiene que:

$$m \frac{d^2 x_o}{dt^2} + kx_o + b \frac{dx_o}{dt} - kx_i - b \frac{dx_i}{dt} = m \frac{d^2 x_o}{dt^2} + b \left( \frac{dx_o}{dt} - \frac{dx_i}{dt} \right) + k(x_o - x_i) = 0$$

$$L \left[ m \frac{d^2 x_o}{dt^2} + b \left( \frac{dx_o}{dt} - \frac{dx_i}{dt} \right) + k(x_o - x_i) = 0 \right] \rightarrow ms^2 X_o(s) + bs(X_o(s) - X_i(s)) + k(X_o(s) - X_i(s)) = 0$$

$$X_o(s) \times (ms^2 + bs + k) - X_i(s) \times (bs + k) = 0 \rightarrow X_o(s) \times (ms^2 + bs + k) = X_i(s) \times (bs + k)$$

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k} \quad *$$

## Sistemas eléctricos

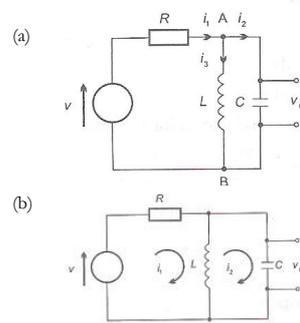
Los bloques funcionales básicos de sistemas eléctricos son: *inductor-resistor-capacitor*. El análisis de sistemas eléctricos se lleva a cabo aplicando las *leyes de voltajes y corrientes de Kirchhoff* (LVK, LCK), mediante dos métodos conocidos

como análisis de mallas y análisis de nodos que expresan la conservación de la energía y la carga respectivamente:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \hat{V}_k &= 0 \leftarrow \text{LVK} \\ \sum_{k=1}^n \hat{I}_k &= 0 \leftarrow \text{LCK} \end{aligned} \quad (15)$$

**Ejemplo 3.8.** Obtener el modelo por función de transferencia del sistema RLC mostrado en la **figura 3.10**, la variable de entrada es el voltaje aplicado  $v$ , la variable de salida es el voltaje en el capacitor  $v_C$ .

**Solución.** La **figura 3.10a**, muestra el análisis de nodos, la **figura 3.10b** muestra el análisis de mallas, ambos conllevan al mismo resultado, es decir:



**Figura 3.10** Circuito R-L||C, (a) análisis de nodos; (b) análisis de mallas

Análisis de nodos :

$$\begin{aligned} \sum i = 0: \quad i_1 - i_2 - i_3 &= 0, \quad i_1 = \frac{v - v_A}{R}, \quad i_2 = \frac{1}{L} \int v_A dt, \quad i_3 = C \frac{dv_A}{dt} \\ \frac{v - v_A}{R} - \frac{1}{L} \int v_A dt - C \frac{dv_A}{dt} &= 0 \quad \text{pero } v_C = v_A, \text{ entonces: } RC \frac{dv_C}{dt} + \frac{R}{L} \int v_C dt + v_C = v \\ L \left[ RC \frac{dv_C}{dt} + \frac{R}{L} \int v_C dt + v_C \right] &= v \quad \rightarrow \quad RCsV_C(s) + \frac{R}{L} \frac{V_C(s)}{s} + V_C(s) = V(s) \\ V_C(s) \left( RCs + \frac{R}{sL} + 1 \right) &= V(s) \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1}{RCs + \frac{R}{sL} + 1} \end{aligned}$$

Análisis de mallas :

$$\begin{aligned} \text{Malla 1: } v &= Ri_1 + L \frac{d(i_1 - i_2)}{dt} \\ \text{Malla 2: } 0 &= v_C + L \frac{d(i_2 - i_1)}{dt} = v_C - L \frac{d(i_1 - i_2)}{dt} \rightarrow v_C = L \frac{d(i_1 - i_2)}{dt} \rightarrow \int v_C dt = L(i_1 - i_2) \\ \rightarrow \int v_C dt &= Li_1 - LC \frac{dv_C}{dt} \rightarrow i_1 = \frac{1}{L} \int v_C dt + C \frac{dv_C}{dt} \\ \Rightarrow v &= R \left[ \frac{1}{L} \int v_C dt + C \frac{dv_C}{dt} \right] + v_C \quad \therefore \quad v = RC \frac{dv_C}{dt} + \frac{R}{L} \int v_C dt + v_C \quad \clubsuit \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.9.** Escribir el circuito eléctrico análogo al sistema mecánico mostrado en la **figura 3.11**.

**Solución.** La analogía entre elementos mecánicos y eléctricos es como sigue: *resorte* → *inductor*; *amortiguador* → *resistor*; *masa* → *capacitor*, la fuerza  $F$ , es análoga a la intensidad de corriente eléctrica  $i$ . Los elementos de la rama 1 están en paralelo con el elemento de la rama 2, lo mismo ocurre en su circuito dual. El resultado se muestra en la **figura 3.12**.

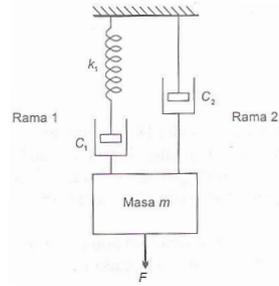


Figura 3.12 Sistema mecánico

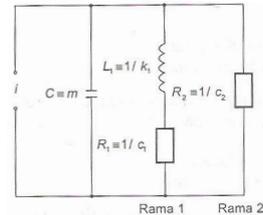


Figura 3.12 Sistema eléctrico

**Transformada de Laplace de impedancias complejas**

El análisis de circuitos eléctricos se facilita en gran medida cuando las impedancias del circuito se transforman por la técnica de Laplace. La impedancia se define como la razón  $Z(s)=V(s)/I(s)$ ; para los elementos *resistor*  $R$ , *inductor*  $L$  y *capacitor*  $C$ , se tienen las impedancias complejas  $R$ ,  $Ls$  y  $1/Cs$  respectivamente, el recíproco de la impedancia es la *admitancia*  $Y(s)$ . El equivalente de impedancias en serie es su suma algebraica, el equivalente de admitancias en paralelo es su suma algebraica, es decir:

$$Z_{eq}(s) = \sum_{k=1}^n Z_k(s), \quad Y_{eq}(s) = \sum_{k=1}^n Y_k(s) \tag{16}$$

**Ejemplo 3.10.** Obtener la transformación de Laplace del circuito RLC mostrado en la **figura 3.13**.

**Solución.** Se escribe la LVK para la malla y se transforma:

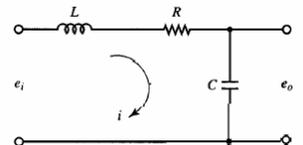
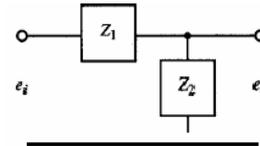


Figura 3.13 Circuito RLC

$$\begin{aligned}
 e_i - v_L - v_R - v_C &= 0, & v_L &= L \frac{di}{dt}, & v_R &= Ri, & v_C &= \frac{1}{C} \int idt \\
 e_i - L \frac{di}{dt} - Ri - \frac{1}{C} \int idt &= 0, & e_o &= \frac{1}{C} \int idt \\
 \mathcal{L} \left[ e_i - L \frac{di}{dt} - Ri - \frac{1}{C} \int idt = 0 \right] &= E_i(s) - LsI(s) - RI(s) - \frac{I(s)}{sC} = E_i(s) - I(s) \left[ Ls + R + \frac{1}{sC} \right] = 0 \\
 \mathcal{L} \left[ e_o = \frac{1}{C} \int idt \right] &= E_o(s) = \frac{I(s)}{sC} \\
 \Rightarrow G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{I(s)/sC}{I(s) \left[ Ls + R + \frac{1}{sC} \right]} = \frac{1/sC}{Ls + R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad \clubsuit
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.11.** Obtener el modelo por función de transferencia del circuito mostrado en la **figura 3.14**, empleando el concepto de impedancia compleja. Siendo  $Z_1(s)=Ls+R$ ,  $Z_2(s)=1/Cs$ .



**Figura 3.14** Circuito de impedancias complejas

**Solución.** Puesto que es un circuito de una sola malla, se aplica la LVK y se tiene que:

$$\begin{aligned}
 E_i(s) = Z_{eq}(s)I(s) &= [Z_1(s) + Z_2(s)] \times \frac{E_o(s)}{Z_2(s)} \\
 \Rightarrow G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} = \frac{1/Cs}{Ls + R + 1/Cs} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad \clubsuit
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.12.** Obtener el modelo en espacio de estados del circuito RLC mostrado en la **figura 3.13**.

**Solución.** Se aplica el método para EDL con coeficientes constantes, antes presentado, que consta de los siguientes pasos: (1) se obtiene la EDL y se escribe en su forma normal y se obtiene el orden  $n$ ; (2) se escriben las  $n$  variables de estado  $x_1, \dots, x_n$ , que consta de la variable de salida y sus  $n-1$  derivadas; (3) se escribe la variable de entrada  $u$ , y la variable de salida  $y=x_1$ ; (4) se escriben las ecuaciones matriciales de primer orden que representan el estado del sistema de acuerdo al formato presentado; (5) se obtiene la función de transferencia empleando la ecuación antes presentada:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad e_i - L \frac{di}{dt} - Ri - \frac{1}{C} \int idt &= 0, \quad e_o = \frac{1}{C} \int idt \rightarrow i = C \frac{de_o}{dt} \\
 e_i - L \frac{d\left(C \frac{de_o}{dt}\right)}{dt} - R\left(C \frac{de_o}{dt}\right) - \frac{1}{C} \int \left(C \frac{de_o}{dt}\right) dt &= e_i - LC \frac{d^2 e_o}{dt^2} - RC \frac{de_o}{dt} - e_o = 0 \\
 \rightarrow e_o'' + \frac{R}{L} e_o' + \frac{1}{LC} e_o &= \frac{1}{LC} e_i \quad \leftarrow \text{EDL en su forma normal de orden } n = 2 \\
 a_1 &= \frac{R}{L}, \quad a_2 = \frac{1}{LC} \\
 (2) \quad x_1 &= e_o, \quad x_2 = e_o' \quad \leftarrow \text{variables de estado} \\
 (3) \quad u &= e_i, \quad y = e_o = x_1 \quad \leftarrow \text{variables de entrada y salida} \\
 (4) \quad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u, \\
 y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
 (5) \quad G(s) &= \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1/LC}{s^2 + R/Ls + 1/LC} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad \clubsuit
 \end{aligned}$$

## Sistemas fluidicos

Un líquido que fluye dentro de una tubería se dice que tiene *flujo laminar* si su *número de Reynolds* es menor que 2000, si es mayor se dice que es *flujo turbulento*. El número de Reynolds es una cantidad adimensional que se define por:

$$NR = \frac{DG}{\mu}$$

donde:  $\mu$  = viscosidad [poise = dina - seg/cm<sup>2</sup> = g/seg - cm]

G = velocidad másica del flujo

D = diámetro de la sección transversal circular

(17)

Los sistemas con flujo laminar se modelan con EDL mientras que los de flujo turbulento requieren EDP; los primeros son menester de nuestro estudio.

 **Ejemplo 3.13.** Para el sistema de nivel de líquidos con iteración mostrado en la **figura 3.15**, obtener las EDL que describen el cambio de las alturas de los líquidos en los contenedores respecto al tiempo, si la inercancia es despreciable.

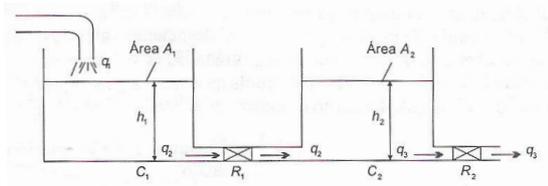


Figura 3.15 Sistema de nivel de líquidos comunicantes

**Solución.** Los elementos que componen el sistema mostrado son básicamente dos tipos: los *contenedores o capacitores* y las *válvulas*; los primeros tienen la propiedad de *capacidad* y los segundos de *resistencia*. Empleando las ecuaciones definitorias se tiene que:

Para el contenedor 1 :

$$q_1 - q_2 = C_1 \frac{dp}{dt}, \quad p = h_1 \rho g, \quad C_1 = A_1 / \rho g \rightarrow q_1 - q_2 = A_1 \frac{dh_1}{dt}$$

Para la válvula 1 :

$$\Delta p = R_1 q_2, \quad \Delta p = h_1 \rho g - h_2 \rho g \rightarrow (h_1 - h_2) \rho g = R_1 q_2 \rightarrow q_2 = \frac{\rho g}{R_1} (h_1 - h_2)$$

$$\Rightarrow q_1 - \frac{\rho g}{R_1} (h_1 - h_2) = A_1 \frac{dh_1}{dt} \rightarrow \frac{dh_1}{dt} + \frac{\rho g}{A_1 R_1} (h_1 - h_2) = \frac{q_1}{A_1}$$

Para el contenedor 2 :

$$q_2 - q_3 = C_2 \frac{dp}{dt}, \quad p = h_2 \rho g, \quad C_2 = A_2 / \rho g \rightarrow q_2 - q_3 = A_2 \frac{dh_2}{dt}$$

Para la válvula 2 : (el líquido sale a presión atmosférica  $p = 0$ )

$$\Delta p = R_2 q_3, \quad \Delta p = h_2 \rho g - 0 \rightarrow h_2 \rho g = R_2 q_3 \rightarrow q_3 = \frac{\rho g}{R_2} h_2$$

$$\rightarrow q_2 - \frac{\rho g}{R_2} h_2 = A_2 \frac{dh_2}{dt} \rightarrow q_2 = A_2 \frac{dh_2}{dt} + \frac{\rho g}{R_2} h_2, \text{ sustituyendo } q_2 \text{ en la ec de la válvula 1 :}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho g}{R_1} (h_1 - h_2) = A_2 \frac{dh_2}{dt} + \frac{\rho g}{R_2} h_2 \rightarrow \frac{dh_2}{dt} - \frac{\rho g}{R_1 A_2} (h_1 - h_2) + \frac{\rho g}{R_2 A_2} h_2 = 0 \quad \clubsuit$$

**Ejemplo 3.14.** Para el tubo en U, mostrado en la figura 3.16, que contiene un líquido, obtener la EDL que describe el cambio de altura con el tiempo, cuando se incrementa la presión por el extremo del tubo indicado.

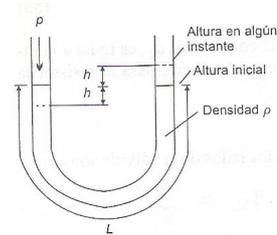


Figura 3.16 Tubo en U conteniendo líquido

**Solución.** Cuando se ejerce presión por el extremo izquierdo del tubo, desplazándose el nivel 1 una

altura  $h$ , la diferencia de alturas entre niveles es  $2h$ , y el volumen desplazado es  $V=Ah$ , siendo  $A$  el área de sección transversal. En cualquier instante, la diferencia de presiones entre los dos extremos debe ser igual a la caída de presión total a través del sistema, si consideramos que el sistema tiene inercia, resistencia y capacitancia entonces se tiene que:

$$p = I \frac{dq}{dt} + Rq + \frac{1}{C} \int q dt, \quad q = \frac{dV}{dt} = \frac{d(Ah)}{dt} = A \frac{dh}{dt} \rightarrow p = IA \frac{d^2h}{dt^2} + RA \frac{dh}{dt} + \frac{A}{C} \int dh$$

$$\int dh = 2h \leftarrow \text{Diferencia entre los niveles}, \quad I = \frac{\rho L}{A}, \quad C = \frac{A}{\rho g}$$

$$\Rightarrow \rho L \frac{d^2h}{dt^2} + RA \frac{dh}{dt} + 2\rho gh = p \quad \clubsuit$$

### Sistemas térmicos

**Ejemplo 3.15.** Considérese un termómetro de temperatura  $T$  que se sumerge en un líquido de temperatura  $T_L$ , mostrado en la figura 3.17, determinar la EDL que describe la variación de temperatura del termómetro.

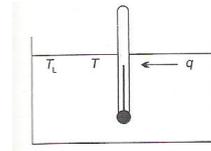


Figura 3.17 Termómetro

**Solución.** El termómetro tiene una *capacitancia térmica*  $C$ , y existe un flujo de calor del líquido al termómetro  $q$ , a través de una *resistencia térmica*  $R$ , es decir:

$$T_L - T = Rq \leftarrow \text{resistencia térmica} \quad q = \frac{T_L - T}{R}$$

$$q = C \frac{dT}{dt} \leftarrow \text{flujo de calor del líquido al termómetro}$$

$$\frac{T_L - T}{R} = C \frac{dT}{dt} \rightarrow RC \frac{dT}{dt} + T = T_L \quad \clubsuit$$

**Ejemplo 3.16.** La figura 3.18 muestra un sistema térmico que consta de un calefactor eléctrico CE en una habitación  $H$ . El CE emite calor a la razón  $q_1$  y  $H$  pierde calor a la razón  $q_2$ . Si el aire en  $H$  está a una *temperatura uniforme*  $T$  y que no se almacena calor en las paredes, obtener la EDL que describe como cambia  $T$ .

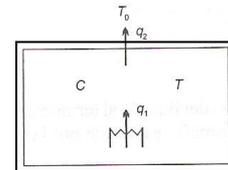


Figura 3.18 Calefacción

**Solución.** El aire en H tiene una capacitancia térmica C, la temperatura dentro de H es T y T<sub>O</sub> fuera de ella, empleando las ecuaciones definitorias, se tiene que:

$$q_1 - q_2 = C \frac{dT}{dt}, \quad Rq_2 = T - T_o \rightarrow q_2 = \frac{1}{R}(T - T_o)$$

$$\Rightarrow q_1 - \frac{1}{R}(T - T_o) = C \frac{dT}{dt} \rightarrow RC \frac{dT}{dt} + T = Rq_1 - T_o \quad *$$

### Sistemas electromecánicos

Gran parte de los dispositivos de aplicación práctica se componen de la agrupación de sistemas simples, el análisis de estos requiere la aplicación de leyes de conservación de las energías que intervienen en su operación.

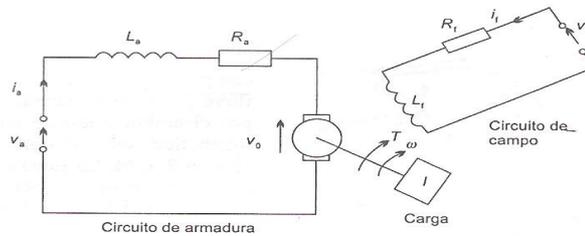
 **Ejemplo 3.17.** Determinar el modelo matemático del *motor de CD* (a) controlado por armadura; (b) controlado por campo. Dibujar el circuito, realizar un diagrama de representativo del modelo.

**Solución.** Un motor de CD es dispositivo que transforma energía eléctrica en energía mecánica. Se compone de partes principales un *embobinado de campo* y un *embobinado de armadura*; el primero genera un *campo magnético de densidad de flujo* B, por circulación de una *corriente* i<sub>f</sub>, cuando por el embobinado de la armadura de N *espiras*, circula una *corriente* i<sub>a</sub>, sobre cada espira de *longitud* L y *anchura* b, actúan *fuerzas* F, que la hacen girar a *velocidad angular* ω; generando un *par* T. En las terminales de la armadura se induce un voltaje denominado *fuerza contraelectromotriz* v<sub>b</sub> y se opone al *voltaje aplicado* v<sub>a</sub> y es proporcional a ω.

(a) Para el *motor controlado por armadura*, la corriente de campo i<sub>f</sub>, es constante y el motor se controla ajustando el *voltaje de la armadura* v<sub>a</sub>. El circuito de la armadura se puede considerar como una *resistencia* R, en serie con una *inductancia* L<sub>a</sub> y una *fuerza contraelectromotriz* v<sub>b</sub> opuesta el voltaje aplicado a la armadura v<sub>a</sub>, como se muestra en la **figura 3.19**. Al *par de la armadura* T, se opone el *par de amortiguamiento* T<sub>m</sub>, proporcional a la velocidad de la armadura.

(b) Para el *motor controlado por campo*, la corriente de la armadura  $i_a$  es constante y el motor se controla ajustando el *voltaje del campo*  $v_f$ . El circuito del campo se puede considerar como una *resistencia*  $R_f$ , en serie con una *inductancia*  $L_f$ , como se muestra en la **figura 3.19**. Al par de la armadura, se opone el *par de amortiguamiento*,  $T_m$  proporcional a la velocidad de la armadura. La **figura 3.20** muestra el diagrama en bloques en función del tiempo, la deducción matemática se muestra a continuación:

**Figura 3.19** Circuitos de la armadura y campo para un motor de CD.



Comportamiento del motor de CD :

$$\begin{aligned}
 F &= N B i_a L && \leftarrow \text{fuerza magnética sobre } N \text{ espiras} \\
 T &= F b = N B i_a L b = k_1 B i_a && \leftarrow \text{par sobre } N \text{ espiras de la armadura} \\
 v_b &= k_2 B \omega && \leftarrow \text{fuerza contraelectromotriz inducida} \\
 \text{Motor CD controlado por armadura : } i_f &= \text{constante} \therefore B = \text{constante} \\
 v_b &= k_3 \omega
 \end{aligned}$$

$$\sum v = 0 : \quad L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = v_a - v_b \rightarrow L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = v_a - k_3 \omega$$

$$\sum T = I \frac{d\omega}{dt} : \quad T = k_4 i_a, \quad T_m = c \omega \rightarrow I \frac{d\omega}{dt} = k_4 i_a - c \omega$$

Motor CD controlado por campo :  $i_a = \text{constante}$

$$\sum v = 0 : \quad L_f \frac{di_f}{dt} + R_f i_f = v_f$$

$$\sum T = I \frac{d\omega}{dt} : \quad T = k_5 i_f, \quad T_m = c \omega \rightarrow I \frac{d\omega}{dt} = k_5 i_f - c \omega \quad \clubsuit$$

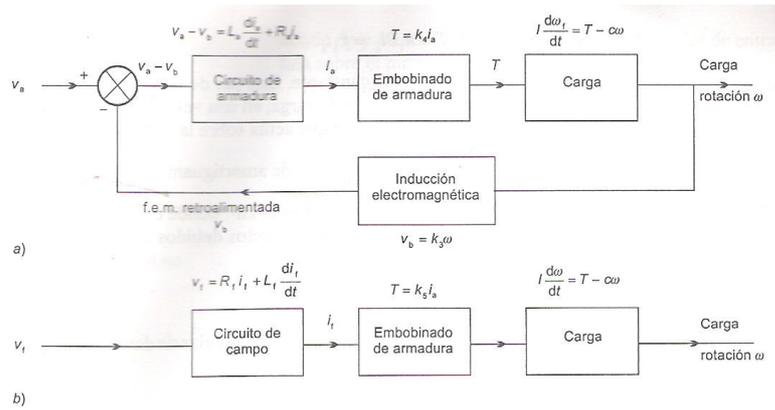


Figura 3.20 Diagrama en bloques en dominio del tiempo, para el motor de CD controlado por: (a) armadura; (b) campo.

**Ejemplo 3.18.** Para el motor de CD del ejemplo 3.17, obtener la función de transferencia por elemento, determinar la función de transferencia global y dibujar el diagrama de bloques en el dominio de s.

**Solución.** (1) Se obtiene la transformada de Laplace de cada elemento de la figura 3.20 suponiendo condiciones iniciales iguales a cero; (2) se ordenan los términos convenientemente y se obtiene la función de transferencia global. El diagrama de bloques en el dominio de s, se muestra en la figura 3.21; los cálculos se muestran a continuación:

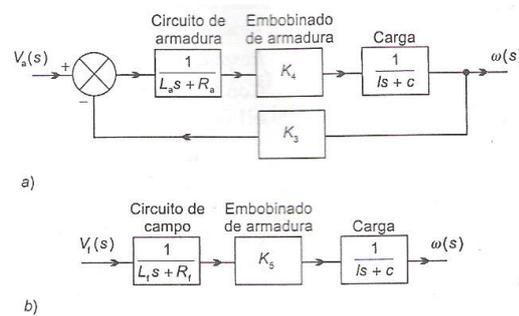


Figura 3.21 Diagrama en bloques en dominio de s, para el motor de CD controlado por: (a) armadura; (b) campo.

(1)

Circuito de la armadura :

$$V_a(s) - V_b(s) = L_a s I_a(s) + R_a I_a(s) = I_a(s) \times (L_a s + R_a) \rightarrow G(s) = \frac{I_a(s)}{V_a(s) - V_b(s)} = \frac{1}{L_a s + R_a}$$

Embobinado de la armadura :

$$G(s) = \frac{T(s)}{i_a(s)} = k_4$$

Carga :

$$I_s \omega(s) = T(s) - c \omega(s) \rightarrow G(s) = \frac{\omega(s)}{T(s)} = \frac{1}{I_s + c}$$

Realimentación :

$$H(s) = \frac{V_b(s)}{\omega(s)} = k_3$$

(2)

Motor CD controlado por armadura :

$$\text{Armadura : } \frac{1}{L_a s + R_a} = \frac{1/R_a}{(L_a/R_a)s + 1} = \frac{1/R_a}{\tau_1 s + 1} \leftrightarrow \tau_1 = \frac{L_a}{R_a}$$

$$\text{Carga : } \frac{1}{I_s + c} = \frac{1/c}{(I/c)s + 1} = \frac{1/c}{\tau_2 s + 1} \leftrightarrow \tau_2 = \frac{I}{c}$$

$$G_{eq}(s) = \frac{(1/R_a)k_4(1/c)/(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{1 + k_3(1/R_a)k_4(1/c)/(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} = \frac{[(1/R_a)k_4(1/c)]/(\tau_1 \tau_2)}{s^2 + [(\tau_1 + \tau_2)/(\tau_1 \tau_2)]s + [k_3(1/R_a)k_4(1/c) + 1]/(\tau_1 \tau_2)}$$

$$G_{eq}(s) = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \leftrightarrow K = [(1/R_a)k_4(1/c)]/(\tau_1 \tau_2), \quad \omega_n = \sqrt{[k_3(1/R_a)k_4(1/c) + 1]/(\tau_1 \tau_2)}$$

Motor CD controlado por campo :

$$\text{Campo : } \frac{1}{L_f s + R_f} = \frac{1/R_f}{(L_f/R_f)s + 1} = \frac{1/R_f}{\tau_1 s + 1} \leftrightarrow \tau_1 = \frac{L_f}{R_f}$$

$$\text{Carga : } \frac{1}{I_s + c} = \frac{1/c}{(I/c)s + 1} = \frac{1/c}{\tau_2 s + 1} \leftrightarrow \tau_2 = \frac{I}{c}$$

$$G(s) = \frac{\omega(s)}{V_f(s)} = \frac{1/R_f}{\tau_1 s + 1} \times k_5 \times \frac{1/c}{\tau_2 s + 1} = \frac{(1/R_f)k_5(1/c)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad \clubsuit$$

# Capítulo 4

## Sistemas de Control

---

En esta sección se presentan los fundamentos de los sistemas de control de procesos industriales.

- ¿Qué es un sistema de control automático?
- Sistema de control lazo abierto y lazo cerrado.
- Tipos de señales de transmisión.
- Componentes de un sistema de control
- Dimensionamiento de válvulas
- Tipos de controladores por realimentación
- Controladores lógicos programables PLCs

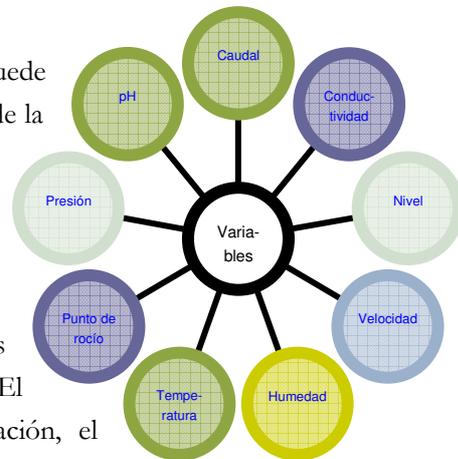


## Control automático

El *control de sistemas industriales* existe por la necesidad de mantener constantes algunas **cantidades variables** (figura 4.1), cuyo valor deseado se denomina **punto de control**; a expensas de las perturbaciones o trastornos del medio o inherentes al sistema.

Un **sistema de control automático** puede definirse como aquél que compara el valor de la variable o condición a controlar con un valor deseado y toma una acción de corrección sin que el operador intervenga en absoluto.

Los sistemas de control se clasifican en dos grupos: en *lazo abierto* y en *lazo cerrado*. El *sistema de lazo abierto* carece de realimentación, el *sistema de lazo cerrado* posee realimentación, la señal de realimentación es aquella que sale del controlador con la finalidad de realizar ajustes en la señal de entrada de manera que se establezca según convenga.



**Figura 4.1** Cantidades variables comúnmente controladas

## Sistema de lazo abierto

Los sistemas de control de lazo abierto son en general basados en secuencias definidas y finitas o bien por temporizadores. Los componentes básicos de un sistema de control de lazo abierto son los siguientes (véase figura 4.2):

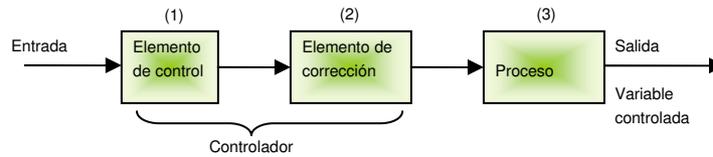


Figura 4.2 Elementos de un sistema de control de lazo abierto

- 1.- *Elemento de control.* Es el elemento que determina que acción se va a tomar dada la entrada al sistema.
- 2.- *Elemento de corrección.* Este elemento responde a la entrada que viene del elemento de control e inicia la acción para producir el cambio en la variable controlada al valor requerido.
- 3.- *Proceso.* Es el lugar donde se controla la variable.

Con los sistemas de control de lazo abierto los tipos de control más conocidos son de dos posiciones (ON/OFF) o secuencias de acciones conmutadas por tiempo.

## Sistema de lazo cerrado

Con el sistema de control de lazo cerrado se tiene una señal de realimentación hacia la entrada desde la salida, la cual se utiliza para modificar la entrada de modo que la salida se mantenga constante a pesar de los cambios en las condiciones de operación .

Los componentes de un sistema de control de lazo cerrado son los mostrados en la **figura 4.3**. La entrada del sistema es el valor requerido de la variable, y la salida es el valor real de la variable.

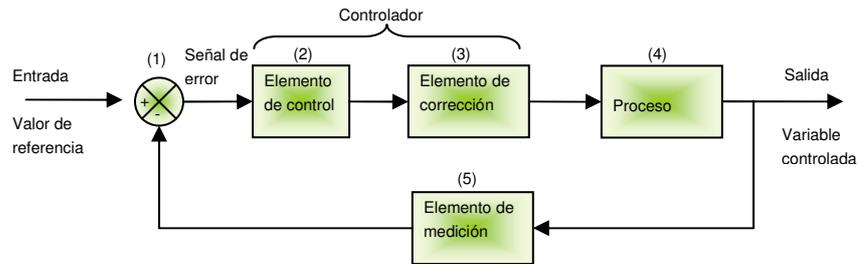


Figura 4.3 Elementos de un sistema de control de lazo cerrado

1.- *Elemento de comparación.* Compara el valor requerido o de referencia de la variable por controlar con el valor medido de lo que se obtiene a la salida, y produce una señal de error la cual indica la diferencia del valor obtenido a la salida y el valor requerido.

$$\text{error} = \text{valor de referencia} - \text{valor medido}$$

(1)

2.- *Elemento de control.* Decide que acción tomar cuando se recibe una señal de error. A menudo se utiliza el término *controlador* para un elemento que incorpora el elemento de control y la unidad de corrección.

3.- *Elemento de corrección.* Se utiliza para producir un cambio en el proceso al eliminar el error, y con frecuencia se denomina *actuador*.

4.- *Elemento proceso.* El proceso, o planta, es el sistema donde se va a controlar la variable.

5.- *Elemento de medición.* Produce una señal relacionada con la condición de la variable controlada, y proporciona la señal de realimentación al elemento de comparación para determinar si hay o no error.

Todo sistema de control de lazo cerrado posee *realimentación*; que es el medio a través del cual una señal relacionada con la variable real obtenida se realimenta para compararse con la señal de referencia. Se tiene una *realimentación negativa* cuando la señal realimentada se sustrae del valor de referencia:

$$\text{error} = \text{valor de referencia} - \text{valor de realimentación} \quad (2)$$

La *realimentación positiva* se presenta cuando la señal realimentada se adiciona al valor de referencia:

$$\text{error} = \text{valor de referencia} + \text{valor de realimentación} \quad (3)$$

### Control de un proceso industrial

El bucle o lazo para un proceso industrial está formado por los siguientes elementos (figura 4.4): **proceso**, **transmisor**, **controlador** y **válvula de control**.

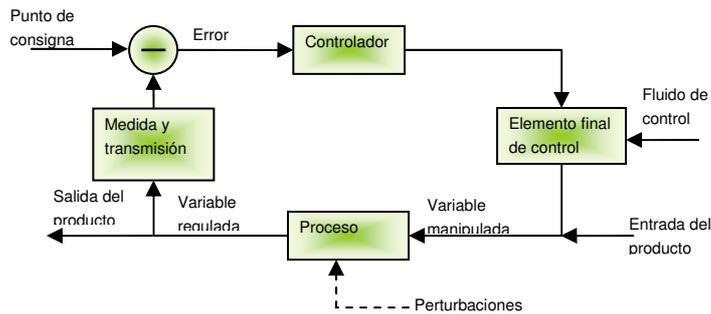


Figura 4.4 Elementos de un sistema de control industrial

El **proceso** consiste en un sistema que ha sido desarrollado para llevar a cabo un objetivo de terminado: tratamiento del material mediante una serie de operaciones específicas destinadas a llevar a cabo una transformación.

El **transmisor** (figura 4.5) es un instrumento que capta la variable del proceso y la transmite a distancia a un instrumento receptor indicador, registrador, controlador o una combinación de estos.

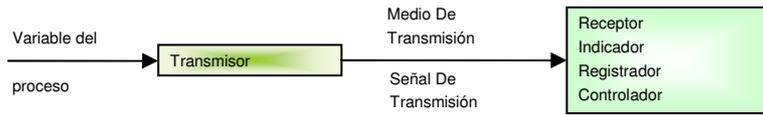


Figura 4.5 Elementos que intervienen en la transmisión

Los tipos de señales de transmisión pueden ser una de las indicadas en la [tabla 4.1](#):

Tabla 4.1 Señales de transmisión

No.	Señal	Rango
1	Neumática	3-15 PSI, 0.2-1 Bar, 0.21-1 Kg/cm <sup>2</sup>
2	Electrónica	4-20 mA CD, 0-20mA CD, 1-5 VCD
3	Digital	0 y 1 en grupos de 8, 16 y 32 bits
4	Hidráulica	Para transmisión de grandes potencias
5	Telemétrica	Para transmisión de grandes potencias

El **controlador** permite al proceso cumplir su objetivo de transformación del material y realiza dos funciones esenciales:

- ♦ Compara la variable medida con la de referencia o deseada (*punto de consigna*) para determinar el error.
- ♦ Estabiliza el funcionamiento dinámico del bucle de control mediante circuitos especiales para reducir o eliminar el error.

Los procesos presentan dos características principales que deben considerarse al automatizarlos:

- ♦ Los cambios en la variable controlada debido a alteraciones en las condiciones del proceso y llamados generalmente cambios de carga.
- ♦ El tiempo necesario para que la variable del proceso alcance un nuevo valor al ocurrir un cambio de carga. Este retardo se debe a una o varias propiedades del proceso: capacitancia, resistencia y tiempo de transporte.

La **válvula** o **elemento final** de control esta en contacto directo con la variable de campo y es la que ejecuta la acción de control de acuerdo a lo indicado por el controlador.

## ***Componentes de un sistema de control***

Los cuatro *componentes básicos de los sistemas de control* son los **sensores**, los **transmisores**, los **controladores** y los **elementos finales de control**; tales componentes desempeñan las *tres operaciones básicas de todo sistema de control*: **medición (M)**, **decisión (D)** y **acción (A)**.

## **Sensores y transmisores**

Con los sensores y transmisores se realizan las operaciones de medición en el sistema de control. En el sensor se produce un fenómeno mecánico, eléctrico o similar, el cual se relaciona con la variable de proceso que se mide; el transmisor, a su vez, convierte este fenómeno en una señal que se puede transmitir y, por lo tanto, ésta tiene relación con la variable del proceso.

Existen tres términos importantes que se relacionan con la combinación sensor/transmisor S/T:

- (1) La **escala** del instrumento la definen los valores superior e inferior de la variable a medir del proceso; esto es, si se considera que un S/T se calibra para medir la presión entre 20 y 50 psi de un proceso, se dice que la escala de la combinación S/T es de 20-50 psi.
- (2) El **rango del instrumento** es la diferencia entre el valor superior y el inferior de la escala, para el instrumento citado aquí el rango es de 30 psi. En general, para definir la escala del instrumento se deben especificar un valor superior y otro inferior; es decir, es necesario dar dos números; mientras que el rango es la diferencia entre los dos valores.

(3) El valor inferior de la escala se conoce como **cero del instrumento**, este valor no necesariamente debe ser cero para llamarlo así; en el ejemplo dado más arriba el “cero” del instrumento es de 20 psi.

Para un instrumento la **ganancia** es la relación del rango de salida respecto al rango de entrada:

$$G = \frac{\text{rango de salida}}{\text{rango de entrada}}, \quad \text{Ejemplo: } G = \frac{20\text{mA} - 4\text{mA}}{200\text{psi} - 0\text{psi}} = \frac{16\text{mA}}{200\text{psi}} = 0.08 \frac{\text{mA}}{\text{psi}} \quad (4)$$

## Válvulas de control

La selección de la válvula se realiza tomando en cuenta la acción que esta debe realizar en caso de que la energía que la acciona falle, como medida de seguridad. Existen dos tipos abierta en falla (AF) y cerrada en falla (CF); la primera se cierra y la segunda se abre cuando el suministro falla. La mayoría de las *válvulas de control se operan de manera neumática* y, consecuentemente, la energía que se les aplica es aire comprimido. Para abrir una válvula cerrada en falla se requiere energía y; por ello, también se les conoce como válvulas de “aire para abrir” (AA). Las válvulas abiertas en falla, en las que se requiere energía para cerrarlas, se conocen también como de “aire para cerrar” (AC).

### Dimensionamiento de la válvula de control

El dimensionamiento de la válvula de control es el procedimiento mediante el cual se calcula el *coeficiente de flujo de la válvula*,  $C_v$ ; se define como “*la cantidad de agua en galones U.S. que fluye por minuto a través de una válvula completamente abierta, con una carga de presión de 1 psi en la sección transversal de la válvula*”.

La ecuación básica para dimensionar una *válvula de control que se utiliza con líquidos* es la misma para todos los fabricantes:

$$C_v = q \sqrt{\frac{G_f}{\Delta P}} \quad (5)$$

donde:

- $q$  = flujo de líquido en gpm U.S.
- AP = caída de presión  $P_1 - P_2$ , en psi en la sección de la válvula
- $P_1$  = presión de entrada a la **válvula** (corriente arriba), en psi
- $P_2$  = presión de salida de la **válvula** (corriente abajo), en psi
- $G_f$  = gravedad específica del líquido a la temperatura en que fluye, para agua = 1 a 60°F.

Las ecuaciones para dimensionar una *válvula de control que se utiliza con gas, vapor y vapor de agua* difiere de fabricante en fabricante, para fluidos compresibles, debido a como se exprese el flujo crítico. El *flujo crítico* es la condición que se presenta cuando el flujo no es función de la raíz cuadrada de la caída de presión en la sección de la válvula, sino únicamente la presión de entrada a la válvula. Este fenómeno ocurre después de que el fluido alcanza la velocidad del sonido en la vena contracta; cuando el fluido se encuentra en la condición del flujo crítico, los decrementos o incrementos en la presión de salida de la válvula no afectan al flujo, sino únicamente a los cambios en la presión de entrada. Así se tienen las siguientes ecuaciones:

<b>Flujo volumétrico de gas</b>	<b>Flujo de gas por peso</b>
$C_v = \frac{Q\sqrt{G_f}}{1.83C_f P_1(y - 0.148y^3)}$	$C_v = \frac{W}{2.8C_f P_1 \sqrt{G_f} (y - 0.148y^3)}$

**Vapor (de agua)**

$$C_v = \frac{W(1 + 0.0007T_{SH})}{1.83C_f P_1(y - 0.148y^3)}$$

(6)

donde:

$Q$  = tasa de flujo de gas en **scfh**; las condiciones estándar son de 14.7 **psia** y **60°F**.

$G$  = gravedad específica del gas a 14.7 **psia** y **60°F** (aire = 1.0); para los gases perfectos es la relación entre el peso molecular del gas y el peso molecular del aire (29).

$G_f$  = gravedad específica del gas a la temperatura del flujo,  $G_f = G \left( \frac{520}{T} \right)$

$T$  = temperatura en **°R**

$C_f$  = factor de flujo crítico, el valor **numérico** de este factor va de 0.6 a 0.95. En la figura C-44 se muestra este factor para diferentes tipos de válvulas.

$P_1$  = presión de entrada a la válvula en **psia**

$P_2$  = presión de salida de la **válvula** en **psia**

$\Delta P = P_1 - P_2$

$W$  = tasa de flujo, en **lb/hr**

$T_{SH}$  = grados de **sobrecalentamiento**, en **°F**

El término  $y$  se utiliza para expresar la *condición crítica o subcrítica del flujo* y se define por:

$$y = \frac{1.63}{C_f} \sqrt{\frac{\Delta P}{P_1}} \quad (7)$$

El dimensionamiento de la válvula mediante el cálculo de  $C_V$  se debe hacer de manera tal que, cuando la válvula se abra completamente, el flujo que pase sea más del que se requiere en condiciones normales de operación; es decir, debe haber algo de *sobrediseño en la válvula para el caso en que se requiera más flujo*, un factor de 2 es buena elección en la mayoría de los casos:

$$q_{\text{diseño}} = 2.0q_{\text{requerido}} \quad (8)$$

### Consideraciones de caída de presión en la válvula

Una regla usual consiste en especificar la caída de presión de diseño en la válvula al 25 % de la caída dinámica total de presión en todo el sistema de conductores, o a 10 psi, la que sea mayor; pero el valor real depende de la situación y del criterio establecido en la compañía. Como se supone, la caída de presión de diseño también tiene efecto sobre el desempeño de la válvula, tal como se verá en la siguiente sección.

**Ejemplo 4.1.** Dimensionar una válvula que será usada con gas; flujo nominal 25,000 lbm/hr; presión de entrada 250 psi; caída de presión de diseño 100 psi. Gravedad específica del gas 0.4, temperatura de flujo 150°F, peso molecular 12. Usar una válvula de acoplamiento ( $C_f=0.92$ ).

**Solución.** Sustituyendo los valores en las ecuaciones se tiene que:

$$y = \frac{1.63}{C_f} \sqrt{\frac{\Delta P}{P_1}} = \frac{1.63}{0.92} \sqrt{\frac{100}{250}} = 1.12$$

$$W_{\text{diseño}} = 2W_{\text{nominal}} = 50.000 \frac{\text{lbm}}{\text{hr}}$$

$$C_v = \frac{W}{2.8C_f P_1 \sqrt{G_f(y - 0.148y^3)}}$$

$$= \frac{50000}{2.8(0.92)(250)\sqrt{0.4(1.12 - 0.148(1.12)^3)}}$$

$$C_v = 134.6$$

## Controladores

El **controlador** es el “cerebro” del circuito de control; es el dispositivo que toma la decisión (D) en el sistema de control y, para hacerlo:

- (1). Compara la señal del proceso que llega del transmisor, la variable que se controla, contra el punto de control y
- (2). Envía la señal apropiada a la válvula de control, o cualquier otro elemento final de control, para mantener la variable que se controla en el punto de control.

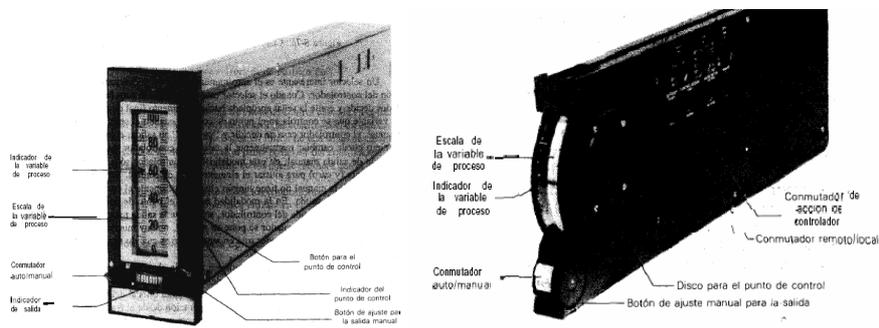
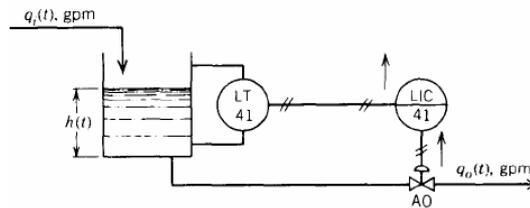


Figura 4.6 Diferentes tipos de controladores de procesos

Considérese ahora el circuito de control de nivel que se muestra en la **figura 4.7**, si el nivel del líquido rebasa el punto de fijación, el controlador debe abrir la válvula para que el nivel regrese al punto de control. Puesto que la válvula es de aire para abrir (AA), el controlador debe incrementar su señal de salida (ver las flechas en la figura) y, para tomar esta decisión, el controlador se debe colocar en *acción directa*. Algunos fabricantes denominan a esta acción *incremento*; es decir, cuando hay un *incremento* en la señal que entra al controlador entonces existe un *incremento* en la señal de salida del mismo. Para determinar la acción del controlador, el ingeniero debe conocer: (1) los requerimientos de control del proceso; (2) la acción de la válvula de control u otro elemento final de control.

**Figura 4.7** Circuito de control para nivel de líquido



### Tipos de controladores por realimentación

**Control proporcional.** El controlador proporcional es el tipo más simple de controlador, con excepción del controlador de dos estados; la ecuación con que se describe su funcionamiento es la siguiente:

$$m(t) = \bar{m} + K_c(r(t) - c(t)) \quad m(t) = \bar{m} + K_c e(t) \quad (9)$$

donde:

$m(t)$  = salida del controlador, psig o mA

$r(t)$  = punto de control, psig o mA

$c(t)$  = variable que se controla, psig o mA; ésta es la señal que llega del transmisor.

$e(t)$  = señal de error, psi o mA; ésta es la diferencia entre el punto de control y la variable que se controla.

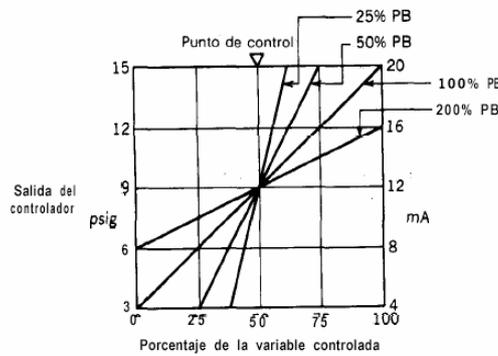
$K_c$  = ganancia del controlador,  $\frac{\text{psi}}{\text{psi}}$  o  $\frac{\text{mA}}{\text{mA}}$

$\bar{m}$  = valor base, psig o mA. El significado de este valor es la salida del controlador cuando el error es cero; generalmente se tija durante la calibración del controlador, en el medio de la escala, 9 psig o 12 mA.

Muchos fabricantes de controladores no utilizan el término ganancia para designar la cantidad de sensibilidad del controlador, sino que utilizan el término **Banda Proporcional**, PB. La relación entre la ganancia y la banda proporcional se expresa mediante:

$$PB = \frac{100}{K_c} \tag{10}$$

En la **figura 54.8** se explica gráficamente la definición de PB; en ella se ve que una PB del 100% significa que, cuando la variable que se controla varía en rango un 100%, la salida del controlador varía 100% en rango; una PB de 50% significa que, cuando la variable que se controla varía un 50% en rango, la salida del controlador varía en rango 100%. También se debe notar que, en un controlador proporcional con PB del 200 % , la salida del controlador no se mueve sobre el rango completo; una PB del 200% significa muy poca ganancia o sensibilidad a los errores.



	Salida del controlador		
	3 psig 4 mA	9 psig 12 mA	15 psig 20 mA
PB = 100%	100 c	200 c	300 c
PB = 50 %	150 c	200 c	250 C
PB = 25 %	175 c	200 c	225 C
PB = 200%	—	200 c	—

Figura 4.8 Definición de la banda proporcional BP.

La *función de transferencia* para este controlador es:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_c \quad (11)$$

En los casos en que el proceso se controla dentro de una banda del punto de control, los controladores proporcionales son suficientes; sin embargo, en los procesos en que el control debe estar en el punto de control, los controladores proporcionales no proporcionan un control satisfactorio.

**Control proporcional integral (PI).** La mayoría de los procesos no se pueden controlar con una desviación, es decir, se deben controlar en el punto de control, y en estos casos se debe añadir inteligencia al controlador proporcional, para eliminar la desviación. Esta nueva inteligencia o nuevo modo de control es la acción integral o de reajuste y en consecuencia, el controlador se convierte en un controlador proporcional-integral

$$m(t) = \bar{m} + K_c[r(t) - c(t)] + \frac{K_c}{\tau_I} \int [r(t) - c(t)] dt$$

$$m(t) = \bar{m} + K_c e(t) + \frac{K_c}{\tau_I} \int e(t) dt \quad (12)$$

Donde  $\tau_I$  = tiempo de integración o reajuste minutos/repetición. Por lo tanto, el controlador PI tiene dos parámetros,  $K_C$  y  $\tau_I$ , que se deben ajustar para obtener un control satisfactorio. A continuación se muestran las ecuaciones con que algunos fabricantes describen la operación de sus controladores:

<p><b>Foxboro Co.</b></p> $m(t) = \bar{m} + \frac{100}{PB} e(t) + \frac{100}{PB \cdot \tau_I} \int e(t) dt$	<p><b>Taylor Co., Honeywell, Inc.</b></p> $m(t) = \bar{m} + K_c e(t) + K_c \tau_I^R \int e(t) dt$	(13)
<p><b>Fisher Controls</b></p> $m(t) = \bar{m} + \frac{100}{PB} e(t) + \frac{100 \tau_I^R}{PB} \int e(t) dt$		

La *función de transferencia* de este controlador está dada por:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} \right) \quad (14)$$

En general: los controladores proporcionales-integracionales tienen dos parámetros de ajuste: la ganancia o banda proporcional y el tiempo de reajuste o rapidez de reajuste; la ventaja de este controlador es que la acción de integración o de reajuste elimina la desviación.

**Controlador proporcional-integral-derivativo (PID).** Algunas veces se añade otro modo de control al controlador PI, este nuevo modo de control es: la acción derivativa, que también se conoce como rapidez de derivación o preactuación; tiene como propósito *anticipar hacia dónde* va el proceso, mediante la observación de la rapidez para el cambio del error, su derivada. La ecuación descriptiva es la siguiente:

$$m(t) = \bar{m} + K_c e(t) + \frac{K_c}{\tau_I} \int e(t) dt + K_c \tau_D \frac{de(t)}{dt} \quad (15)$$

Donde  $\tau_D$  es la *rapidez de desviación* en minutos. Por lo tanto, el controlador PID tiene tres parámetros,  $K_c$  o PB,  $\tau_I$  o  $\tau_I^R$  y  $\tau_D$ , que se deben ajustar para obtener un control satisfactorio. Nótese que sólo existe un parámetro para ajuste de derivación,  $\tau_D$ , el cual tiene las mismas unidades, minutos, para todos los fabricantes.

Los controladores PID se utilizan en procesos donde las constantes de tiempo son largas. Ejemplos típicos de ello son los circuitos de temperatura y los de concentración.

La *función de transferencia* de un controlador PID “ideal” es:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} \right) \left( \frac{\tau_D s + 1}{\alpha \tau_D s + 1} \right) \quad (16)$$

Los valores típicos de  $\alpha$  están entre 0.05 y 0.1. En general, los controladores PID tienen tres parámetros de ajuste: la ganancia o banda proporcional, el tiempo de reajuste o rapidez de reajuste y la rapidez derivativa. La rapidez derivativa se da siempre en minutos. Los controladores PID se recomiendan para circuitos con constante de tiempo larga en los que no hay ruido. La ventaja del modo derivativo es que proporciona la capacidad de “ver hacia dónde se dirige el proceso”.

**Controlador proporcional/ derivativo (PD).** Este controlador se utiliza en los procesos donde es posible utilizar un controlador proporcional, pero se desea cierta cantidad de “anticipación”. La ecuación que los define y la función de transferencia están dadas por:

$$m(t) = \bar{m} + K_c e(t) + K_c \tau_D \frac{de(t)}{dt} \quad \frac{M(s)}{E(s)} = K_c (1 + \tau_D s) \quad (17)$$

Una desventaja del controlador PD es que opera con una desviación en la variable que se controla; la desviación solamente se puede eliminar con la acción de integración, sin embargo, un controlador PD puede soportar mayor ganancia, de lo que resulta una menor desviación que cuando se utiliza un controlador únicamente proporcional en el mismo circuito.

## Controladores lógicos programables

Un **Controlador Lógico Programable** es una computadora industrial que controla máquinas y procesos. Un PLC interactúa con el exterior, por medio de módulos de entradas y salidas, el programa de controlador reside en su memoria, la información de sus entradas, es empleada para actualizar los estados de sus salidas, es decir un PLC implementa un

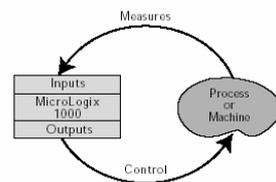


Figura 4.9 Operación del PLC.

control de lazo cerrado para manejar máquinas y procesos. El proceso conjunto de un PLC mostrado en la **figura 4.9** es muy simple, el PLC mide o censa señales provenientes de máquinas o procesos, entonces a través de su programa interno proporciona realimentación a la máquina o proceso controlada. Los PLCs proporcionan muchos beneficios respecto a los sistemas de control electromecánicos. Uno de los mejores beneficios es que hacen más fácil y menos costosos los cambios en un sistema de control.

## Componentes del PLC

Un PLC esta conformado por dos componentes principales (figura 4.10): (1) el sistema de Entradas Salidas (E/S); (2) la Unidad Central de Procesamiento (CPU).

EL sistema de entradas/salidas es la parte del PLC que interactúa físicamente con el mundo externo. La unidad Central de Procesamiento, es donde el PLC almacena datos y realiza el proceso de cómputo.

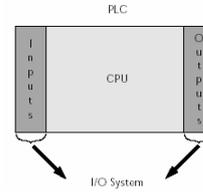


Figura 4.10 Componentes del PLC.

El **Sistema de entradas/salidas** se conforma de dos componentes, la interfaz de entrada y la interfaz de salida (figura 4.11):

**Interfaz de entrada:** Es el banco de terminales de entrada que físicamente conectan los dispositivos de entrada, tales como botones, sensores, interruptores de límite al PLC. Con el objetivo de traducir la información desde los dispositivos de entrada de manera que la unidad de procesamiento entienda.

**La interfaz de salida:** Es el banco de terminales que físicamente conectan los dispositivos de salida, tales como arrancadores, solenoides, válvulas al PLC. Con el objetivo de traducir la información proveniente de la unida de procesamiento de manera que entiendan los dispositivos de salida.

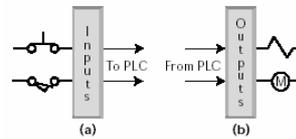


Figura 4.11 Interfaz I/O de PLC.

La **Unidad Central de Procesamiento** se conforma de los siguientes componentes (figura 4.12): (1) sistema de memoria; (2) procesador; (3) fuente de alimentación.

El **sistema de memoria** almacena el programa de control del PLC, así como los datos recibidos o enviados al sistema de entrada/salida. También conserva en memoria cuales dispositivos de E/S están conectados a que interfaces de E/S.

El **procesador** es la parte computarizada del CPU que ejecuta el programa de control. Manipula los datos almacenados en el sistema de memoria y determina cual es el estado de las terminales de salida dado el estado de las terminales de entrada.

La **fuerza de alimentación** provee la potencia para ambos el sistema de potencia y el procesador. De manera que puedan trabajar eficientemente.

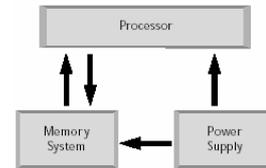


Figura 4.12 CPU del PLC.

## Operación del PLC

Todos los PLCs, incluyendo el MicroLogix 1000, ejecutan una secuencia continua de tres pasos llamada un **escaneo** (figura 4.13a), que consiste en lo siguiente: (1) lectura de los datos de entrada que el PLC recibe desde los dispositivos de entrada; (2) ejecución del programa de control almacenado en la memoria del PLC; (3) actualización de los dispositivos de salida basado en el resultado alojado por la ejecución del programa de control.

El escaneo puede ser dividido en dos partes, el **escaneo de entradas/salidas** y el **escaneo del programa** (figura 4.13b). Durante el escaneo E/S, el PLC lee las entradas y actualiza las salidas. Durante el escaneo de programa, el PLC ejecuta el programa de control.

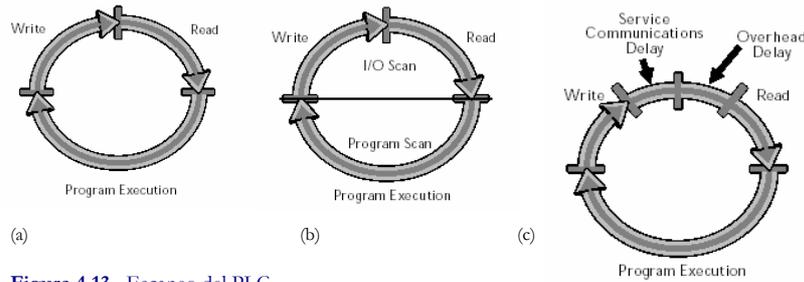


Figura 4.13 Escaneo del PLC.

El **tiempo de escaneo** es la cantidad específica de tiempo que requiere el PLC para ejecutar ambos escaneos. Un MicroLogix 1000 puede ejecutar un escaneo en milisegundos. Sin embargo cuando el PLC está en línea con un dispositivo programador, el MicroLogix experimenta dos retardos durante su escaneo (figura 4.14c), que son los siguientes:

**Retardo por servicio de comunicación.** Es el tiempo requerido para enviar los datos al dispositivo de programación o monitoreo. Que puede ser un PC o un programador manual.

**Retardo por seguridad de transmisión de datos.** Es el tiempo requerido para operaciones como manejo de memoria y actualización de información de temporizadores.

### La norma IEC 1131

La norma IEC 1131 trata de unificar los lenguajes de programación para PLCs en un entorno integrado de programación múltiple similar a la tendencia actual de multilinguaje en entornos de PC. Se consideran como lenguajes válidos los siguientes: (1) *Instruction List*, IL; (2) *Structured Text*, ST; (3) *Function Block Diagram*, FBD; (4) *Sequential Function Chart*, SFC; (5) *Ladder Diagram*, LD.

# Capítulo 5

## Instrumentos de Control

---

En la presente sección se muestran los dispositivos básicos usados en sistemas de control así como las funciones de transferencia que los representan. Se tienen los siguientes objetivos:

- Presentar los instrumentos básicos de control de medición y corrección.
- Presentar la función de transferencia que representa el instrumento de control.
- Presentar el equipo básico de medición altamente empleado en centrales eléctricas.



## Instrumentos de control industrial

Un *instrumento* es una herramienta o mecanismo para servicio científico y profesional. Los instrumentos básicos de un sistema de control son de *medición y corrección*. Los **instrumentos de medición** son aquellos que sensan o miden las cantidades en los procesos industriales. Los **instrumentos de corrección** son aquellos que ejecutan la acción correctiva.

### Instrumentos de medición

#### Potenciómetro

Un *potenciómetro* con una pista de resistencia uniforme produce una señal de voltaje proporcional al desplazamiento del contacto deslizante desde un extremo de la pista de resistencia del potenciómetro.

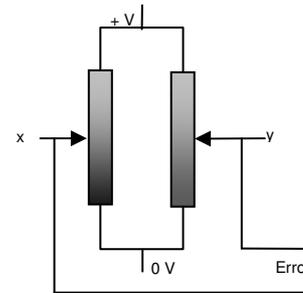


Figura 5.1 Sensor de error de dos potenciómetros

$$\text{Salida [Volts]} = K x \text{ Posición de entrada} \quad (1)$$

Donde  $K$  es la sensibilidad del potenciómetro en volts por radián.

Un detector de error de dos potenciómetros se puede construir con el arreglo mostrado en la **figura 5.1**. Un potenciómetro convierte el desplazamiento de entrada en un voltaje y el otro, el desplazamiento real también en un voltaje. Si  $x$  e  $y$  son los desplazamientos angulares de cada potenciómetro, la señal de error en volts esta dada por:

$$V_e = K *(x-y) \quad (2)$$

### Transformador diferencial de variación lineal

Es un detector de posición LVDT (*Linear Variable Differential Transformer*). Proporciona una salida de voltaje alterna que tiene una amplitud relacionada con la posición de un núcleo ferroso. La **figura 5.2** muestra el principio básico. Cuando al devanado primario se aplica una corriente alterna, se inducen voltajes de CA en cada uno de los devanados secundarios de acuerdo a la *Ley de Faraday*. Las salidas de los dos devanados están conectados de tal manera que la salida combinada es la diferencia entre ellos **figura 5.3**.

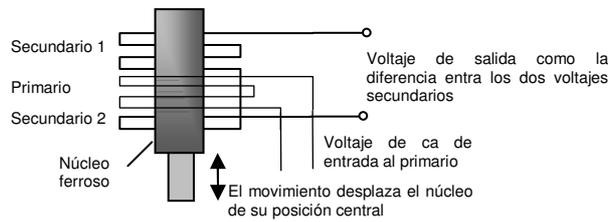


Figura 5.2 Transformador diferencial de variación lineal

A fin de que no se produzca una misma salida para desplazamientos diferentes, se usa un demodulador con filtro pasa-bajas sensible a la fase que proporcione un valor único para cada desplazamiento. La función de transferencia se obtiene aplicando las *Leyes de Kirchhoff* a los circuitos:

$$G(s) = \frac{[(M_1 - M_2) / R_p]s}{\tau s + 1} \tag{3}$$

Donde  $M_1$  y  $M_2$  son las inductancias mutuas de los devanados;  $M_1 - M_2$  es la cantidad que varía en forma razonablemente lineal con el desplazamiento del núcleo  $R_p$ , la resistencia del

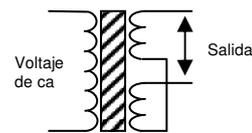


Figura 5.3 Conexión de los devanados

circuito primario, y  $t$ , es el cociente de la inductancia del primario entre sus resistencia. Se emplean principalmente en sistemas de control donde se desean monitorear desplazamientos que están en el rango de  $\pm 0.25$  mm hasta  $\pm 250$  mm.

### Extensómetro (galga extensométrica) de resistencia eléctrica

Cuando se estira un alambre metálico o una tira de semiconductor su resistencia cambia. El cambio fraccional en la resistencia es proporcional al cambio fraccional en la longitud, es decir el esfuerzo.

$$\frac{\Delta R}{R} = G \times \text{Esfuerzo} \quad (4)$$

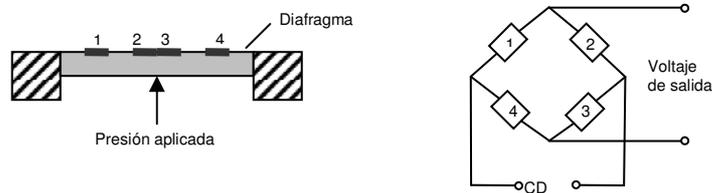


Figura 5.4 Celda de presión de galga extensométrica

Donde  $G$  es una constante denominada factor galga. Para metales el factor galga es de alrededor de 2 y para semiconductores de aproximadamente 100. Las galgas extensiométricas se basan en este principio y se usan en puentes de *Wheatstone*, donde el voltaje de desbalance es una medida del cambio de resistencia.

La figura 5.4 muestra como emplear el arreglo de puente de Wheatstone para monitorear la deformación de un diafragma sujeto a cambios de presión.

### Tacómetro

Los *tacómetros* son sensores que producen una salida eléctrica en relación con la velocidad a la que se gira. Existen dos tipos principales de CD y CA.

*Tacómetro de CD.* Es en esencia un generador de CD con un magneto permanente que produce un campo magnético en el que puede girar un devanado (figura 5.5a). Cuando el devanado gira, se induce una *fuerza electromotriz (fem)* alterna en el devanado: mientras más rápido gira el devanado, mayor será la magnitud de la fem alterna. Los anillos deslizantes se usan para obtener una salida de CD proporcional a la velocidad angular.

*Tacómetro de CA.* Es un cilindro giratorio y dos devanados en ángulo rectos (figura 5.5b). Al aplicar una corriente alterna a uno de los devanados, entonces el otro produce una salida proporcional a la velocidad de rotación del cilindro.



Figura 5.5 (a) Tacómetro de CD. (b) Tacómetro de CA

El voltaje de salida de un tacómetro es proporcional a la razón de cambio en la posición angular  $\theta$  del eje del medidor, es decir:

$$V_s = K \frac{d\theta}{dt} = k\omega \tag{5}$$

Donde  $K$  es una constante y  $\omega$ , la velocidad angular. De esta forma, la función de transferencia esta dada por:

$$G(s) = \frac{V(s)}{\theta(s)} = ks \quad (6)$$

### Codificador

El término *decodificador* se usa para un dispositivo que proporciona una salida digital como resultado de un desplazamiento angular o lineal. Un *codificador incremental* detecta los

cambios de desplazamiento angular o lineal de algún dato de posición y un *codificador absoluto* proporciona la posición angular o lineal real.

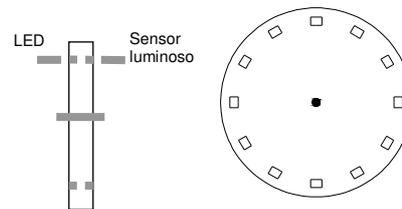


Figura 5.6 Codificador incremental

La **figura 5.6** muestra la forma básica de un decodificador incremental que podría usarse para medir el desplazamiento angular. En un disco se hace incidir un haz luminoso proveniente de un diodo emisor de luz LED (*Light Emitting Diode*), que es capaz de pasar a través de las ranuras para detectarlo mediante un sensor luminoso, por ejemplo un *fotodiodo* o un *fototransistor*. Cuando el disco gira, el haz de luz se transmite en forma intermitente proporcionando una salida en forma de pulsos.

El número de pulsos es proporcional al ángulo por el que gira el disco. La resolución es proporcional al número de ranuras del disco. Por ejemplo, con 60 ranuras alrededor del disco el movimiento de una ranura a otra es un giro de  $6^\circ$ . Con el uso de ranuras por compensación, es posible tener más de 1000 ranuras para una sola revolución.

El codificador absoluto difiere del incremental en que solo tiene un patrón de ranuras que sólo define cada posición angular mediante un patrón de señales encendido/apagado producidas.

**Ejemplo.** La **figura 5.7** describe un decodificador absoluto con 3 conjuntos de ranuras; los decodificadores por lo común tienen hasta 10 o 12 pistas. El

número de bits en la salida binaria resultante es igual al número de pistas, en este caso 3. De manera que el número de posiciones que se pueden detectar será de  $2^3=8$ , es decir, una resolución de  $360^\circ/8=45^\circ$ . Con 10 pistas se tendrían 10 bits, esto es  $2^{10}=1,024$  posiciones y una resolución angular de  $360^\circ/1024=0.35^\circ$ .

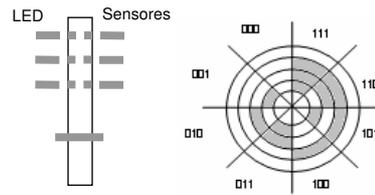


Figura 5.7 Codificador absoluto

### Sincros

El sincro es un pequeño transformador giratorio de una sola fase que convierte el desplazamiento angular en voltaje de ca, o voltaje de ca en desplazamiento angular.

La figura 5.8 muestra el principio básico de un elemento sincro. Consta de 3 devanados de estator espaciados  $120^\circ$

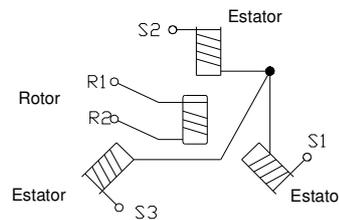


Figura 5.8 Elemento sincro

alrededor de un estator cilíndrico, y de un devanado de rotor concéntrico interior que gira en forma libre entre estos devanados del estator. Una corriente alterna de entrada al devanado del rotor induce salidas en cada devanado secundario. Las salidas de cada uno de los 3 devanados del estator dependerán de la posición angular del rotor, por lo tanto éstos son una medida de la posición angular.

Con frecuencia los sincros se usan en pares (figura 5.9) como un medio para medir la diferencia entre el desplazamiento angular de dos ejes y así proporcionar una señal de error para un sistema de control. Cuando las posiciones de los rotores del sincro que se unas como transmisor y la del sincro que se usa como transformador de control están formando ángulos rectos, el voltaje generado a través de las terminales del rotor del

transformador es cero. Cuando los dos están en algún otro ángulo, el voltaje del rotor no es cero y es aproximadamente una función senoidal de la diferencia entre los ángulos de los dos ejes. Sin embargo para pequeñas desviaciones angulares, la salida se puede considerar proporcional a la diferencia angular.

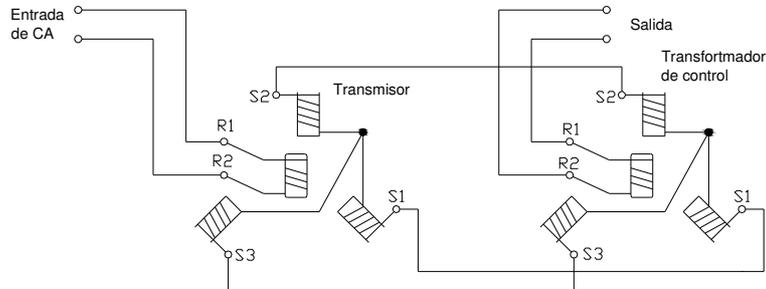


Figura 5.9 Detector de error con sincros

### Detector de temperatura por resistencia

El detector de temperatura por resistencia, *RTD*, es una forma muy común para sensar temperatura. *La resistencia eléctrica de los metales o semiconductores cambia con la temperatura.* La resistencia de los metales varía en forma lineal con la temperatura sobre un rango amplio de temperaturas, aunque el cambio real en la resistencia por grado es ligeramente pequeño. Por lo común los *RTD* se hacen de platino, níquel o aleaciones de níquel. Los semiconductores, como los *termistores*, con la temperatura muestran en la resistencia cambios muy grandes no lineales. Los *RTD* se pueden usar en una rama de un puente de Wheatstone y la salida del puente se toma como medida de la temperatura (figura 5.10a), o se puede usar una fuente de corriente constante que pase a través del *RTD* y el voltaje se monitorea mediante este (figura 5.10b).

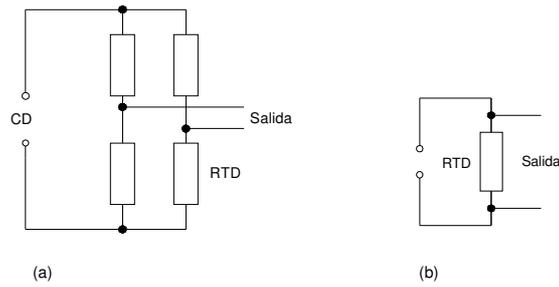


Figura 5.10 Detector de temperatura por resistencia. (a) Con puente; (b) Corriente constante

**Sensores de razón de flujo de fluidos**

Existen varias maneras de medir flujos, pero la más común se basa en la caída de presión que produce el flujo en una restricción (disminución del área de la sección transversal) ubicada en la trayectoria del fluido. Cuando un fluido que llena un tubo de sección transversal  $A$  corre a lo largo de este con una velocidad promedio  $v$ , entonces el *gasto, flujo, descarga* o *razón de flujo volumétrico*, esta dado por:  $Q=Av$ . Para fluidos incompresibles (densidad constante) se cumple la siguiente relación conocida como *ecuación de continuidad*:

$$Q = A_1v_1 = A_2v_2 \tag{7}$$

Siendo el fluido incompresible, y la corriente continua y estacionaria es posible aplicar la *ecuación de Bernoulli*:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + h_1 \rho g = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + h_2 \rho g \tag{8}$$

Donde los subíndices 1 y 2 denotan dos puntos a lo largo de la tubería,  $\rho$ ,  $g$  y  $h$ , son la densidad, la aceleración debida a la gravedad y la altura respectivamente. Si consideramos una tubería horizontal  $h_1 = h_2$ , simplificando y ordenando términos resulta:

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \frac{p_1 - p_2}{\rho} \quad (9)$$

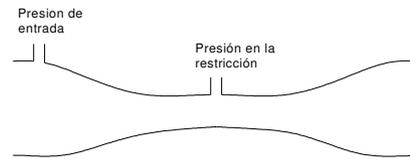
Empleando la ecuación de continuidad, se tiene que:

$$Q = \frac{A_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}} \quad (10)$$

Puesto que las secciones transversales del instrumento ( $A_1$ ,  $A_2$ ), la densidad del líquido ( $\rho$ ), son conocidas, la ecuación permite conocer el flujo volumétrico en términos de la presión diferencial ( $p_2 - p_1$ ). Sin embargo esta relación no es lineal, y para efectos prácticos el segundo miembro de la igualdad se ve afectado por una constante  $C$  conocida como *coeficiente de descarga*, que compensa las pérdidas de energía como resultado de la fricción.

### Tubo Venturi

El tubo Venturi mostrado en la **figura 5.11** se basa en el principio de presión diferencial de la ecuación (13). Consta de un tubo con un punto de restricción central. La diferencia de presión entre el flujo antes de la restricción y en esta se puede medir con un *celda de presión de diafragma*; las presiones se aplican en los lados del diafragma, de modo que la deflexión del diafragma es una medida de la diferencia de presión. El instrumento es de operación sencilla, tiene una exactitud de  $\pm 0.5\%$  y una confiabilidad a largo plazo.



**Figura 5.11** Tubo Venturi de presión diferencial

### Medidor de flujo de boquilla

Una forma económica de un tubo Venturi es el *medidor de flujo de boquilla*. Los dos tipos de boquillas que se usan son la boquilla Venturi (**figura 5.12a**) y la boquilla de flujo (**figura 5.12b**). Las boquillas son más baratas que los tubos Venturi, proporcionan diferencias de presión similares y tienen una exactitud de  $\pm 0.5\%$ .

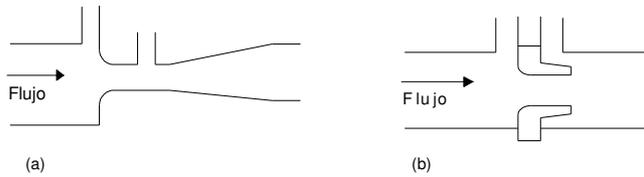


Figura 5.12 Medidor de flujo de boquilla. (a) Boquilla de Venturi; (b) Boquilla de flujo

### Tubo Dall

El *tubo Dall* (**figura 5.13a**) es otra versión del tubo Venturi, con una longitud de casi dos diámetros del tubo donde se monta. Una forma más corta es el *orificio Dall* cuya longitud es de 0.3 veces el diámetro del tubo donde se monta (**figura 5.13b**).

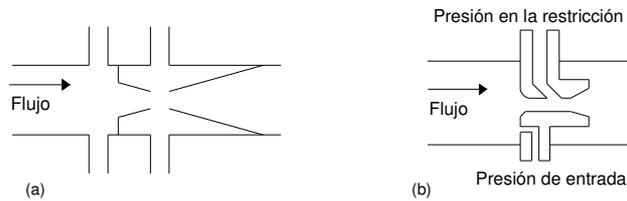


Figura 5.13 Medidor de flujo Dall. (a) Tubo de Dall; (b) Orificio Dall

### Placa de orificio

La placa de orificio es un disco con un orificio (figura 5.14). El efecto de introducirla es restringir el flujo a la apertura del orificio y el canal de flujo a una región aún mas angosta corriente abajo (después) del orificio. La diferencia de presión se mide entre un punto de diámetro igual al tubo corriente arriba (antes) del orificio y un punto de diámetro igual a la mitad corriente abajo. La placa de orificio es sencilla y confiable, más económica que el Venturi, pero menos exacta, alrededor de  $\pm 1.5\%$ .

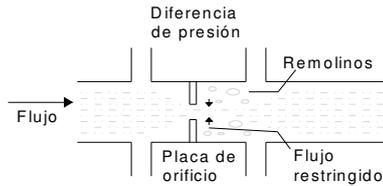


Figura 5.14 Medidor de flujo basado en una placa con orificio

## Instrumentos de corrección

### Motores de CD

El *motor de corriente directa*, consta de bobinas de alambre montadas en ranuras sobre un cilindro de material ferromagnético. Éste se conoce como *devanado de armadura* y está montado a su vez sobre rodamientos de modo que gira con una libertad en un campo magnético que se produce mediante una corriente que pasa a través de las bobinas de alambre (figura 5.15) conocidas como *bobinas de campo* o *devanados de campo*.

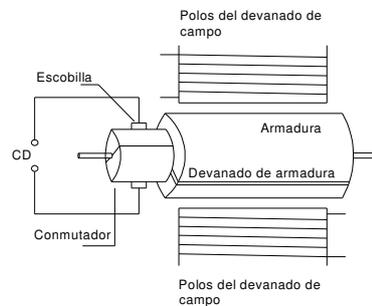
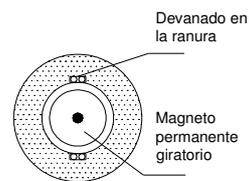


Figura 5.15 Elementos básicos de un motor de CD

el devanado actúan fuerzas que hacen que este gire. Para invertir la corriente, cada medio giro se usan escobillas y el conmutador a fin de mantenerlo girando. Con el motor controlado por la armadura, la velocidad se modifica al cambiar la magnitud de la corriente del devanado de armadura. Con frecuencia esto se hace usando fuentes de alimentación de voltaje fijas al devanado y se varía el tiempo para el cual la fuente está encendida. De esta manera se controla el valor promedio del voltaje y, por lo tanto, el de la corriente. Esto se conoce como modulación por ancho de pulso, PWM (*Pulse Width Modulation*).

Otra forma de motor de CD es el *motor de CD sin escobillas*. Este usa un magneto permanente para proveer el campo magnético, y gira dentro de un devanado estacionario. La **figura 5.16** describe el principio básico donde sólo se muestra una bobina del devanado. El motor es en esencia el arreglo del motor de CD básico “invertido”. La velocidad de rotación se puede controlar usando modulación por ancho de pulso. Se usan circuitos electrónicos para invertir la corriente y proveer la conmutación.



**Figura 5.16** Motor de CD sin escobillas

### **Motor de CA**

Los *motores de corriente alterna* constan de dos partes básicas: un cilindro giratorio llamado *rotor* y una parte estacionaria denominada *estator*, el cual circunda al rotor y tienen los devanados que producen un campo magnético giratorio en el espacio que ocupa el rotor. Este campo magnético giratorio hace que gire el rotor.

La **figura 5.17** ilustra un motor de inducción monofásico de jaula de ardilla. El rotor consta de barras de cobre o aluminio que se fijan en las ranuras de dos anillos de los extremos para formar un conjunto de conductores paralelos conectados, la llamada jaula de ardilla. Cuando una corriente

alterna pasa a través del devanado de estator, éste produce un campo magnético alterno; se induce una fuerza electromotriz ( $fem$ ) en los conductores del rotor y fluye corriente a través de ellos. En estos conductores que transportan corriente actúan fuerzas. El rotor gira a una velocidad que determina la frecuencia de la corriente alterna aplicada al estator. Una forma de variar la velocidad de rotación es usar un circuito electrónico para controlar la frecuencia de la corriente alimentada al estator.

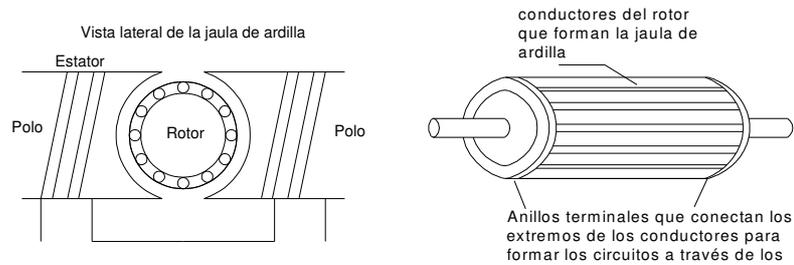
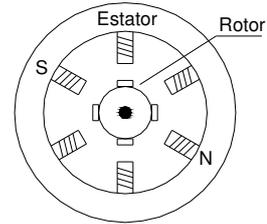


Figura 5.17 Motor de inducción jaula de ardilla

### Motor de pasos

El *motor paso a paso* produce una rotación angular igual al ángulo de paso de cada pulso digital aplicado a su entrada que puede usar para posicionamiento angular exacto. Por ejemplo. Un motor de pasos puede dar una rotación de  $1.8^\circ$  por cada pulso de entrada, por lo tanto una entrada de 200 pulsos daría una rotación de  $360^\circ$ .

La **figura 5.18** muestra el principio básico del *motor paso a paso de reluctancia variable*. Su rotor está hecho de acero suave y tiene varios dientes; el número de dientes es menor al número de polos sobre el estator. El estator tiene pares de polos y cada par se energiza mediante la corriente que pasa a través



**Figura 5.18** Motor de pasos de reluctancia variable de 4 dientes y 6 polos

de los devanados que los envuelven. Cuando un par de polos se activa, se produce un campo magnético que atrae el par de dientes más cercano del rotor, de manera que los polos y dientes se alinean. Así mediante la conmutación de la corriente al siguiente par de polos, se puede lograr que gire el rotor. De esta manera el rotor puede girar en pasos mediante la conmutación secuencial de la corriente de un par de polos al siguiente.

La entrada de una secuencia de pulsos debe proporcionar las salidas a cada par del devanado del estator en la secuencia correcta. El sistema de manejo se puede obtener como un circuito integrado. La **figura 5.19** ilustra el circuito integrado *SA41027* y sus conexiones que se usa con motores de pasos que tienen cuatro pares de polos en el estator. La entrada para accionar un solo paso de giro del motor de pasos es una transición de voltaje de bajo a alto para la entrada en la terminal 15. Las salidas del circuito integrado son corrientes en secuencia a lo largo de las conexiones café, negra, verde y amarilla a los devanados del estator. El motor se moverá en el sentido de las manecillas del reloj cuando en la terminal 3 se tiene un voltaje menor a 4.5V, y en el sentido contrario de las manecillas del reloj, cuando es mayor a 7.5V. Cuando la terminal 2 está en bajo, la salida se restaura a su posición normal.

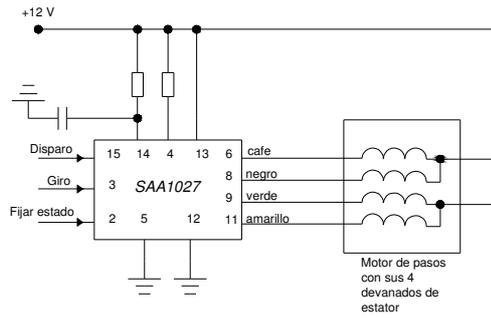


Figura 5.19 Circuito integrado SAA1027 para el motor de pasos

**Relevador**

En algunos sistemas de control se necesita que la salida del controlador conmute de encendido a apagado una corriente mucho más grande que la que requiere el elemento de corrección final, por ejemplo la corriente que requiere un calefactor eléctrico en un sistema de control de temperatura. Esto se puede lograr mediante un *relevador*. Los relevadores son interruptores que operan en forma eléctrica y en los que al cambiar una corriente en un circuito eléctrico conmutan una corriente en otro circuito. En el relevador mostrado en la **figura 5.20**, cuando hay una corriente a través del solenoide, se produce un campo magnético que atrae a la armadura de hierro, mueve el rodillo de empuje y, de esta manera, cierra los contactos del interruptor normalmente abierto, NO (*Normally Open*) y abre los contactos del interruptor normalmente cerrado, NC (*Normally Closed*).

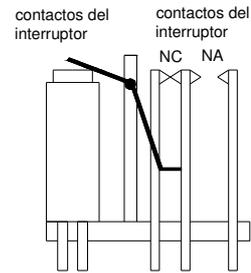
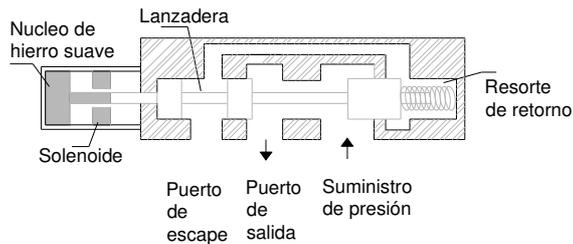


Figura 5.20 Relevador

**Válvula solenoide simple**

Un *solenoid* es un núcleo de hierro suave, parcialmente en una bobina. Cuando la corriente pasa a través de la bobina se establece un campo magnético que atrae al núcleo de hierro un poco más hacia el interior de la bobina. La **figura 5.21** muestra los elementos básicos de una *válvula solenoide simple neumática*. Cuando al solenoide se le aplica una corriente, la lanzadera se mueve a la derecha. Esto cambia los puertos a través de los cuales fluye el aire. Antes de activar el solenoide, la presión del aire de la fuente de suministro ingresa a la válvula y sale a través del puerto de salida. Cuando el solenoide se activa, el suministro del aire se apaga y el puerto de salida se conecta al puerto de escape.

Cuando ya no se aplica corriente al solenoide, el resorte regresa la válvula a su posición original. De esta manera, en la válvula que se muestra, la corriente al solenoide conmuta la presión de aire al puerto de salida de encendido/apagado.



**Figura 5.21** Válvula solenoide simple hidráulica

**Clasificación de instrumentos de medición**

Con la finalidad de presentar el mayor número de instrumentos de medición empleados en procesos industriales, a continuación se presenta una lista de los instrumentos de medición ampliamente usados en centrales eléctricas, se

hará una clasificación en *instrumentos que miden cantidades mecánicas o termodinámicas* e *instrumentos que miden cantidades eléctricas*.

## **Instrumentos que miden cantidades mecánicas o termodinámicas**

### **Medición de temperaturas**

**Termómetros de mercurio con tubo de vidrio.** Se usan para instalarse en cápsulas termométricas en las tuberías; para medir la temperatura de agua condensada, en circulación de alimentación, aceite de cojinetes, etc. Dan lecturas locales, pero a menudo se instalan para comprobar las lecturas de los termómetros de bulbo remoto y tubo.

**Termómetros de bulbo lleno de gas y tubo.** Pueden usarse para medir la temperatura de los gases y líquidos hasta 538 °C y marcan o registran lo mismo hasta un lugar que diste 90 m del bulbo.

**Termómetros de vapor.** Se usa para medir temperaturas hasta de 260 °C. Consiste en un bulbo parcialmente lleno con un líquido, conectado con un tramo de tubo. Tiene menos aplicaciones en la planta de fuerza motriz que el tipo de gas.

**Termómetro de resistencia eléctrica.** Es un termómetro para hacer medidas precisas de la temperatura del agua de alimentación y de la condensada, y para medir la temperatura de los devanados de máquinas eléctricas.

**Termómetro de par termoeléctrico o pirómetro.** El par termoeléctrico se usa para medir temperaturas muy altas, como las de los *hogares*, el gas de los tubos de las calderas, el aire precalentado, o las temperaturas del vapor sobrecalentado. Existen también potenciómetros múltiples, tanto indicadores como registradores.

### **Medición de presión**

**Manómetro para medir presión del vapor, del tipo con tubo de Bourdon.** Muy usado para medir presiones moderadas y altas de vapor. Los tipos indicadores o registradores de acción remota pueden colocarse en tableros, pero para obtener lecturas de primera mano se usarán siempre manómetros de conexión corta montados sobre la misma caldera.

**Manómetros del tipo de tubo helicoidal o de diafragma para medir presiones bajas de vapor.** Como los que se usan para medir la presión en los grifos de purga, la presión del vapor de escape, etc.

**Vacuómetros o manómetros.** Estos se usan para medir el vacío de los condensadores y las presiones en los calentadores.

**Manómetros para medir el tiro (de tubo de vidrio inclinado, de diafragma, de campanas sumergidas en un líquido).** El manómetro para medir el tiro se emplea para obtener y mantener las mejores condiciones en el hogar, para comprobar la operación del equipo automático de combustión, la instalación de la caldera y sus tubos. Los manómetros para medir el tiro también se emplean para medir el funcionamiento de los ventiladores para el tiro forzado y el de las chimeneas.

### **Medición de gasto**

**Contadores de presión.** Se usa para medir el rendimiento individual de una caldera, grupo de calderas, de la toma de una turbina; el vapor auxiliar y el vapor industrial.

**Contadores de agua.** Para medir el agua condensada, de alimentación, la descarga de una bomba etc.

**Contadores de aire.** Cuando se usan tienen la forma de un manómetro diferencial para medir el tiro. El gasto del aire se mide sólo ocasionalmente fuera del sistema de combustión.

### **Medida de combustible**

**Medida de carbón de piedra.** El carbón de piedra se pesa generalmente por cada carga, aunque algunas básculas de transportador de banda son continuas. Las parrillas alimentadoras de cadena pueden equiparse con medidores de volumen continuos.

**Contadores de gas.** Estos pueden ser de dos tipos, de desalojamiento positivo, o de carga diferencial. Este último tipo es el que predomina.

**Contadores de aceite.** Son del tipo de desalojamiento positivo.

### **Análisis de gas**

Los instrumentos para medir la densidad del humo están relacionados con los que se usan para determinar el  $\text{CO}_2$ . El ábaco de Ringelman es un patrón de referencia. Los instrumentos son electrónicos y operan con la luz que recibe una celda fotoeléctrica.

Aparatos de Orsay e instrumentos para determinar el  $\text{CO}_2$  o el  $\text{O}_2$ . Los tipos de instrumentos para determinar el  $\text{CO}_2$  que se usan actualmente emplean algunos de los siguientes principios:

**Químico.** Modificaciones del aparato de Orsat.

**Eléctrico.** Que se basan en la medida de la conductividad del gas de los tubos de las calderas.

**Mecánico.** Determinando la densidad del gas de los tubos de las calderas en comparación con el aire.

### Medida de Velocidad

- ✦ Tacómetro de lengüeta vibratoria.
- ✦ Tacómetro eléctrico.
- ✦ Tacómetro del tipo reloj.
- ✦ Tacómetro centrífugo.
- ✦ Estroboscopio.
- ✦ **Contadores de revoluciones.** Los tacómetros se emplean para medir la velocidad de las turbinas; también la velocidad de algunos equipos auxiliares de las plantas grandes.

### Registadores de nivel

Para registrar el nivel de los líquidos en las calderas, tanques, canales, etc.  
Para registrar el nivel de polvo de carbón en los silos.

### Alarmas sonoras

Alarmas de timbres, con o sin anunciadores, se usan para advertir que se tienen altas temperaturas en los devanados de los generadores y transformadores, en el aire de enfriamiento de los generadores, en el aceite lubricante, alto nivel de agua en los depósitos de los condensadores, o el bajo nivel de agua en el tanque de alimentación de la caldera.

### Calorímetros para vapor y combustible

No se usan ordinariamente para la supervisión o guía de la operación, sino que se pone en servicio cuando se hacen pruebas especiales. Sin embargo, para usarlos se necesita incluir las conexiones adecuadas en donde se podrán conectar para usarlos.

### Medidas atmosféricas

Barómetros, higrómetros, termómetros.

## **Instrumentos que miden cantidades eléctricas**

### **Amperímetros**

Los amperímetros se usan en las salidas de los generadores, circuitos de alimentación, en los circuitos auxiliares de fuerza motriz, y en los circuitos de los campos de los generadores.

### **Voltímetros**

Los voltímetros se usan para manejar el voltaje correcto, para comprobar el trabajo de los reguladores de voltaje, para la sincronización y, con las conexiones adecuadas para descubrir tierras.

### **Vatímetros**

Que indican la potencia en los circuitos de alimentación o en los generadores.

### **Sincronoscopios**

Se usan para sincronizar y poner en paralelo los alternadores.

### **Indicadores de factor de potencia**

Estos aparatos se usan en las salidas de los alternadores para comprobar la excitación y la distribución de la carga, o en las barras colectoras si se usa un condensador sincrónico para mantener el factor de potencia.

### **Detector de tierras**

Empleados para la determinación de la resistividad del terreno.

# Bibliografía

## Matemáticas

- (1) Dennis G. Zill. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. 6a edición. Thomson. México, 2003.
- (2) Dennis G. Zill. *Cálculo con geometría analítica*. Grupo Editorial Iberoamérica. México, 1987.
- (3) Edwards C. H, Penney E. D. *Ecuaciones diferenciables elementales*. 3a edición. Prentice-Hall. México, 1994.
- (4) Granville. *Cálculo diferencial e integral*. Limusa. México, 2001.
- (5) Grimaldi P. Ralph. *Discrete and combinatorial mathematics*. 3a edición. Addison-Wesley. USA, 1994.
- (6) Marsden E. J, Tromba J. A. *Cálculo vectorial*. 4a edición. Prentice-Hall. México, 1998.
- (7) Sean Mauch. *Advanced mathematical methods for Scientists and Engineers*. 2004.

## Física

- (8) Halliday D, Resnick R, Krane S. *Física, volumen 1 y 2*. 4a edición. CECSA. México 1998.
- (9) Young D. H, Zemansky, Sears. *University Physics*. 8a edición. Addison-Wesley. USA, 1992.

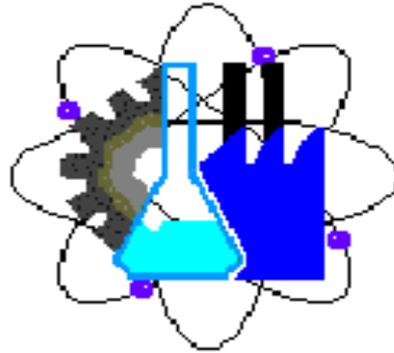
## Ingeniería eléctrica y de control

- (10) Bolton W. *Ingeniería de control*. 2a edición. Alfaomega. México, 2001.
- (11) Enriquez H. G. *Control de motores eléctricos*. Limusa. México, 1998.
- (12) Enriquez H. G. *Transformadores y motores de inducción*. 4a edición. Limusa. México, 2001.
- (13) Glover. J. D, Sarma S. M. *Sistemas de potencia análisis y diseño*. 3a edición. Thomson. México 2003.
- (14) Grainger J. J, Stevenson D. W. *Análisis de sistemas de potencia*. McGrawHill. México, 1996.
- (15) Guru B. S, Hiziroglu H. R. *Máquinas eléctricas y transformadores*. 3a edición. Oxford. México, 2003.
- (16) Gwyther H. F. G. *Potencia electrónica y electrónica de potencia*. Alfaomega. México 1997.
- (17) Hayt H. W, Kemmerly E. J. *Análisis de circuitos en ingeniería*. 5a edición. McGrawHill. México, 2001.
- (18) Hayt W. *Teoría electromagnética*. 5a edición. McGrawHill. México, 2003.

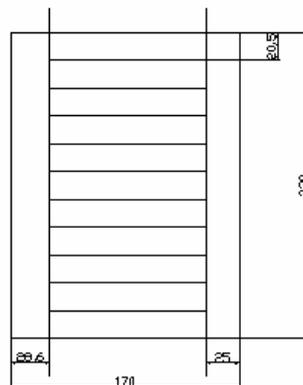
- (19) Matthew N. O. *Elementos de electromagnetismo*. 3a edición. Oxford. México, 2003.
- (20) Ogata Katsuhiko. *Ingeniería de control moderna*. 3a edición. Prentice-Hall. México, 1998.
- (21) Smith A. C, Corripio B. A. *Control automático de procesos*. Limusa. México, 1991.

### **Programación y computación**

- (22) Deitel H. M. *Como programar en C/C++*. 2a edición. Prentice-Hall. México, 1992.
- (23) Jose A, Javier L. *Autocad V.14. Manual de actualización*. McGrawHill. España, 1998.
- (24) Morris M. M. *Arquitectura de computadoras*. 3a edición. Pearson. México 1993.
- (25) Scott Meyers. *Effective C++*. Addison-Wesley. USA, 1996.
- (26) The Programming Research Group. *High-integrity C++ coding standard manual - version 2.2*. USA, 2004.



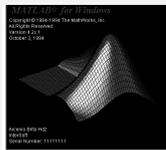
**FCQI**



IMPRESO 28 MAYO DE 2007. CUERNAVACA MORELOS, MÉXICO.



## Software



## MS Word 2003, configuración página

Configurar página

Márgenes | Papel | Diseño

Márgenes

Superior: 20.5 mm Inferior: 25 mm  
Izquierdo: 23.6 mm Derecho: 25 mm  
Esguadrernación: 5 mm Posición del margen interno: Izquierda

Orientación

Vertical Horizontal

Páginas

Varias páginas: Normal

Vista previa

Aplicar a: Todo el documento

Predefinir... Aceptar Cancelar

Configurar página

Márgenes | Papel | Diseño

Tamaño del papel:

Tamaño personal

Agcho: 170 mm  
Alt: 230 mm

Origen del papel

Primera página: Segunda predeterminada (Auto)  
Auto

Otras páginas: Segunda predeterminada (Auto)  
Auto

Vista previa

Aplicar a: Todo el documento

Opciones de impresión...

Predefinir... Aceptar Cancelar

Configurar página

Márgenes | Papel | Diseño

Sección

Empezar sección: Página nueva

Suprimir notas al final

Encabezados y pies de página

Pares e impares diferentes  
 Primera página diferente

Desde el borde: Encabezado: 12.5 mm  
Pie de página: 12.5 mm

Página

Alineación vertical: Superior

Vista previa

Aplicar a: Todo el documento

Números de líneas... Bordes...

Predefinir... Aceptar Cancelar

IMPRESO 28 MAYO DE 2007. CUERNAVACA MORELOS, MÉXICO.

