ALGEBRA LINEAL EN CONTEXTO
JOSE ARTURO BARRETO,M.A.

CAPITULO 1.

Las Matrices y sus Operaciones

OBJETIVOS: Al terminar este capítulo el estudiante deberá estar en capacidad de:

1. Manipular y reconocer la relación entre subíndices y posición de un elemento en una matriz.
2. Efectuar las operaciones básicas con matrices de pequeñas dimensiones.
3. Reconocer y utilizar las propiedades que rigen el álgebra de matrices(asociativas, distributivas, etc.) en la simplificación de expresiones y la comprobación de fórmulas.
4. Determinar si matrices de dimensiones pequeñas son no singulares verificando la existencia de la matriz inversa.
5. Utilizar el hecho de que una matriz sea no singular para obtener conclusiones a partir de la manipulación de expresiones algebraicas matriciales.

Las aplicaciones "prácticas" tales como las matrices de adyacencia y las cadenas de Markov, no son el objetivo central, se presentan por razones de motivación y para ampliar el contexto. Si el instructor lo considera conveniente podría incluirlas en la evaluación.

El autor considera que el énfasis en las aplicaciones, con cálculos matriciales, en los cursos básicos de álgebra lineal, hace que los estudiantes, ávidos de calcular y de emplear recetas, se centren en ellas, olvidando la generalidad de los conceptos fundamentales que serán realmente aplicados en cursos avanzados.

Es posible que utilizando herramientas como Matlab, en donde los cálculos, no consumen el tiempo del estudiante, salvo en la etapa de diseño de las especificaciones del problema y su método de solución, permita avanzar en aplicaciones a modo de taller. La discusión sobre este punto de vista queda abierta.

1.- LAS MATRICES Y SUS OPERACIONES

1.1- Las Matrices

Una matriz es un arreglo de números reales por filas y columnas tales como:

$$(1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad (2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \qquad (3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -8 \end{pmatrix} \qquad (4)\begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

La matriz * (1) es una matriz de cuatro **filas** y tres **columnnas** (de **dimensión** 4x3). La matriz (2) es una matriz de 2 filas y 2 columnas (cuadrada, de dimensión 2x2). La matriz (3) es una matriz de 3 filas y 3 columnas (cuadrada, de dimension 3x3). La matriz (4) tiene 3 filas y 4 columnas (de dimensión 3x4).

El número en la fila i, columna j, será denominado como a_{ij}.

La matriz $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

es una matriz general de dimensión 3x4 (tres filas, 4 columnas) cuyos elementos se han denominado a_{11}, a_{12}, a_{13}, etc., puesto que no se conocen sus valores. La matriz A del ejemplo anterior se abreviará como:

$$A = (a_{ij})_{3x4}$$

En general, la notación

$$A = (a_{ij})_{mxn}$$

denotará a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} \ldots & a_{3n} \\ & & \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

de m filas y n columnas.

Una matriz A, es **cuadrada, de orden n,** si tiene igual número de filas que de columnas, es decir, si es de dimensión nxn.

Así:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ & \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

es una matriz cuadrada de orden 2 y

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 7 & 8 & 6 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

es una matriz cuadrada de orden 3.

* Hay matrices de números complejos. Este texto está dedicado a las matrices cuyos elementos son números reales

En la matriz A, los elementos a_{11}= 1 y a_{22} = 8, se denominan los elementos de la **diagonal**. Tambien lo son los números b_{11}= 1, b_{22}=8,y b_{33}=2 de B.

A los elementos δ_{ii} (δ_{11}, δ_{22}, δ_{33}, etc), de una matriz, se les denomina elementos de la **diagonal.**

<u>Igualdad de Matrices</u>

<u>Definición:</u> Dos matrices de la misma dimensión

$A = (a_{ij})_{mxn}$ $B = (b_{ij})_{mxn}$, son iguales

si y sólo sí $a_{ij} = b_{ij}$, para todo i,j.

Por lo tanto:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B,$$

puesto que a pesar de que:

$a_{ij} = b_{ij}$ para todo $(i,j) \neq (2,2)$, tenemos que:

$$a_{22} \neq b_{22}$$

Problema resuelto 1:

Describa en detalle a la matriz $A = (a_{ij})_{3x3}$, donde $a_{ij} = 3i + j^2$.

Solución:

Los elementos serán:

$a_{11} = 3(1) + 1^2$, $a_{12} = 3(1) + 2^2$, $a_{13} = 3(1) + 3^2$,
$a_{21} = 3(2) + 1^2$, $a_{22} = 3(2) + 2^2$, $a_{23} = 3(2) + 3^2$,
$a_{31} = 3(3) + 1^2$, $a_{32} = 3(3) + 2^2$, $a_{33} = 3(3) + 3^2$.

Efectuando los cálculos correspondientes:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 12 \\ 7 & 10 & 15 \\ 10 & 13 & 18 \end{pmatrix}$$

Fin del problema resuelto 1.

<u>MATRIZ TRASPUESTA</u>

Dada la matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 8 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a la matriz:

$$A^T = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

se le denomina la matriz **Traspuesta** de A.

A^T se obtiene de A por medio de traslaciones simétricas de sus elementos respecto de la diagonal como se vé en las figuras anteriores. Este proceso se denomina también **reflexión** respecto de la diagonal.

Es de notar que los elementos de la diagonal de A son los mismos que los de la diagonal de A^T, o sea que los elementos de la diagonal permanecen fijos. Se puede decir que A^T se obtiene de A por medio de una **rotación** de sus elementos, de 180º respecto de la diagonal que en este caso es el eje de rotación.

Otra manera de obtener A^T, a partir de A es transformando las filas de A en columnas de A^T (o las columnas de A en filas de A^T), es decir:

1ª columna de A ------> 1ª fila de A^T
2ª columna de A ------> 2ª fila de A^T
3ª columna de A ------> 3ª fila de A^T

En realidad:

$$\text{Si } A = (a_{ij})_{mxn} \quad y \quad A^T = (b_{ij})_{nxm},$$

debe darse la relación:

$$(b_{ij} = a_{ji}) \text{ (para cada i,j)}$$

La noción de matriz traspuesta se extiende a matrices de cualquier dimensión mxn, con la siguiente definición:

Si $A = (a_{ij})_{mxn}$, se define $A^T = (a^{(t)}_{ij})_{nxm}$, por la condición:

$$(a^{(t)}_{ij} = a_{ji}), \text{(para cada i , j)}$$

Por lo tanto:

$$\text{si} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

entonces

$$A^T = \begin{pmatrix} a^{(t)}_{11} & a^{(t)}_{12} & a^{(t)}_{13} \\ a^{(t)}_{21} & a^{(t)}_{22} & a^{(t)}_{23} \\ a^{(t)}_{31} & a^{(t)}_{32} & a^{(t)}_{33} \\ a^{(t)}_{41} & a^{(t)}_{42} & a^{(t)}_{43} \end{pmatrix}$$

en donde

$$(a^{(t)}_{ij} = a_{ji}), \text{ (para cada i , j)}$$

o sea:

$a^{(t)}_{11} = a_{11}$ $a^{(t)}_{12} = a_{21}$ $a^{(t)}_{13} = a_{31}$ $a^{(t)}_{21} = a_{12}$ $a^{(t)}_{22} = a_{22}$, $a^{(t)}_{23} = a_{32}$, etc.

Una matriz cuadrada A es una matriz **simétrica** sí

$$A = A^T$$

es decir:

$$(a_{ij} = a_{ji}) \text{ (para cada i, j)}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -7 \\ 3 & 5 & 4 \\ -7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

es una matriz simétrica.

En consecuencia, la fila 1 es idéntica a la columna 1, la fila 2 a la columna 2, la fila 3 a la columna 3, y viceversa. Dicho de otro modo: A es simétrica respecto de la diagonal.

Ejercicio resuelto #1

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

entonces:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio resuelto # 2

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>EJERCICIOS RESUELTOS</u>

1. Si
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$
entonces: $a_{22} = 0$, $a_{32} = 1$, $a_{34} = 3$.

2. Si $A = (a_{ij})_{33}$, en donde $a_{ij} = (-1)^{i+j}$
entonces
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. La matriz
$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$
es la matriz idéntica de orden 4.

4. La matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$
es una matriz simétrica de orden 4.

5. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, entonces:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \text{y} \qquad (A^T)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ & & \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A$$

6. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{entonces:} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

A es simétrica, puesto que $A = A^T$.

7. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & \pi \\ 3 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & 5 & -2 & 7 \\ \pi & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Como $A = A^T$, entonces A es una matriz simétrica.

8. Halle valores de a,b y c, tales que

$$\begin{pmatrix} 1 & a+2 & 2 \\ -1 & b & 5 \\ 1 & 1 & c^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Solución:</u> De la igualdad anterior se concluye que

$$a + 2 = -1$$
$$b = 1$$
$$c^2 - 1 = 0$$

. En consecuencia: $a = -3$, $b = -1$ y $c = 1$.

<u>Ejercicios propuestos</u>

1. Halle si es posible, todos los valores de cada incognita para que cada una de las siguientes igualdades se cumpla:

a) $$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ & \\ 5 & x+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 4 \\ & \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} x & 0 \\ & \\ 9 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ & \\ y & x \end{pmatrix}$$

2. Escriba explicitamente la matriz $A = (a_{ij})_{4x5}$, si $a_{ij} = i + 2j$, $i = 1,2,3,4.$ $j = 1,2,3,4,5.$

3. Escriba explicitamente la matriz $A = (a_{ij})_{4x4}$, si $a_{ij} = (-1)^{i+j}$, $(i, ,j = 1,2,3,4)$.

4. Dadas las matrices $A = (a_{ij})_{4x4}$ y $B = (b_{ij})_{4x5}$;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Describa explicitamente a la matriz $C = (c_{ij})_{4x4}$, si $c_{ij} = a_{ij}b_{jj} + 2\, b_{ij}$

$(i, ,j = 1,2,3,4)$.

5. Halle la matriz traspuesta de cada una de las siguientes matrices. En cada caso determine si la matriz es simétrica.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = (0 \quad 1)$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

6. Demuestre que la matriz $A = (a_{ij})_{nxn}$, definida por $a_{ij} = i + j$ $(i, ,j = 1,2,3, ...,n)$, es una matriz simétrica.
7. Verifique que si $n > 1$, la matriz $A = (a_{ij})_{nxn}$, definida por $a_{ij} = i + 2j$ $(i, ,j = 1,2,3, ...,n)$, no es una matriz simétrica.

2 .- OPERACIONES CON MATRICES

2.1.- Multiplicación de una Matriz por un Número

Si α es un número y $A = (a_{ij})_{mxn}$, definiremos la nueva matriz

$$\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} \ldots & a_{3n} \\ & & \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \ldots \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \ldots \alpha a_{2n} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} \ldots \alpha a_{3n} \\ & \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} \ldots \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

En donde cada elemento de la matriz A se multiplica por el número α.

Ejemplo:

$$2 \begin{pmatrix} 4 & 7 & 12 \\ -7 & 10 & 15 \\ 10 & 13 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 14 & 24 \\ -14 & 20 & 30 \\ 20 & 26 & -36 \end{pmatrix}$$

2.2- Suma y Resta de Matrices

<u>Suma de matrices</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Definiremos **A + B** como:

$$\begin{pmatrix} 1+3 & 2+2 & 3+1 & 4+4 \\ 4+4 & 2+3 & 1+1 & 5+2 \\ 3+3 & 1+1 & 0+7 & 6+1 \end{pmatrix}$$

En consecuencia

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 8 \\ 8 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

La **resta** de matrices se define de modo similar

En general. Si $A = (a_{ij})_{mxn}$ $B = (b_{ij})_{mxn}$. Definimos:

$$A + B = (a_{ij})_{mxn} + (b_{ij})_{mxn} = (c_{ij})_{mxn} ,$$

Donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para cada i,j.

No aceptaremos una suma tal como:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

En este último caso diremos que la suma no está definida o que las matrices no son **conformes** para la suma. La suma sólo estará definida para matrices de la misma dimensión.

Problemas resueltos

1. Si $A = (a_{ij})_{3x4}$ definidos por $a_{ij} = -i + j$ y
$B = (b_{ij})_{3x4}$ $b_{ij} = -j$

Tendremos como conclusión que: $a_{32} = -3 + 2$ y $b_{32} = -2$.

De donde el elemento en la fila 3, columna 2 de $C = (c_{ij})_{3x4} = A + B$,

es: $c_{32} = -1 + (-2) = -3$.

Por consiguiente: Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

entonces: $A + B = C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

2. $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} 1+x & 0 \\ 0 & 2+x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & b \\ a & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ -a & 2 \end{pmatrix}$$

4. a) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, entonces $2A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$,

confirmandose que: $A + A = 2A$.

b) $$5\begin{pmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & 2-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-5x & 0 \\ 0 & 10-5x \end{pmatrix}$$

5. Demostraremos que $A - B = A + (-1)B$.

<u>Método 1</u> Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} \ldots & a_{3n} \\ . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$

y $\quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & \dots & b_{3n} \\ . & . & & . \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$

entonces:

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}$$

y $\quad (-1)\ B = \begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{12} & \dots & -b_{1n} \\ -b_{21} & -b_{22} & \dots & -b_{2n} \\ -b_{31} & -b_{32} & \dots & -b_{3n} \\ . & . & & . \\ -b_{m1} & -b_{m2} & \dots & -b_{mn} \end{pmatrix}$

Luego

$$A + (-1)B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{12} & \dots & -b_{1n} \\ -b_{21} & -b_{22} & \dots & -b_{2n} \\ -b_{31} & -b_{32} & \dots & -b_{3n} \\ . & . & & . \\ -b_{m1} & -b_{m2} & \dots & -b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$A + (-1)B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ a_{31} - b_{31} & a_{32} - b_{32} & \dots & a_{3n} - b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}$$

Por consiguiente:

$$A - B = A + (-1)\ B$$

<u>Método2</u>

Sean $A = (a_{ij})_{mxn}$ y $B = (b_{ij})_{mxn}$

Entonces: Si $C = A + (-1)\ B$, donde $C = (c_{ij})_{mxn}$, tendríamos

$c_{ij} = a_{ij} + (-1)\ b_{ij}$, para todo i,,j.

En consecuencia: $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, para todo i,,j.

Por lo tanto: $A - B = A + (-1)\ B$.

<u>Ejercicios propuestos</u>

1. Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, , calcule:

   a) 3A b) -2B c) -A d) A - 3B e) (1/2)B - 2A

   f) Halle C, si B + C = A g) Halle D si A - 2D = 2B.

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 20 \\ -65 & 15 & -10 \end{pmatrix}$

Halle una matriz B que sea múltiplo de A (es decir B = cA ,c un número real) y que tenga en la posición b_{12} el número 2.

2.3.- Multiplicación de Matrices

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 4 \quad 5 \quad 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \boxed{3} \\ 2 & 5 & \boxed{7} \\ 1 & 2 & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

definiremos la multiplicación de la fila 1 de A por la columna 3 de B, como:

$$(1 \quad 2 \quad 3) \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = (1x3 + 2x7 + 3x4) = (3 + 14 + 12) = (29)$$

y similarmente, la multiplicación de la fila 2 de A, por la columna 2 de B, como:

$$(4 \quad 5 \quad 6) \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = (4x1 + 5x5 + 6x2) = (4 + 25 + 12) = (41).$$

Más aún, definiremos la multiplicación

$$C = (c_{ij})_{2x4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

como la matriz C de dimensión 2x4, donde cada elemento $c_{ij,}$ de la fila i, columna j del producto C, es el resultado de la siguiente operación:

Elemento en fila i, columna j de C = Fila i de A x columna j de B

Por supuesto, el elemento c_{23}, de la 2da. fila, 3ra. columna del producto

C = AB,

se calculará multiplicando la fila 2 de A, por la columna 3 de B (enmarcadas), así:

$$\begin{pmatrix} 1 \quad 2 \quad 3 \\ \boxed{4 \quad 5 \quad 6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \boxed{3} & 0 \\ 2 & 5 & \boxed{7} & 1 \\ 1 & 2 & \boxed{4} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x & x & x \\ x & x & \boxed{71} & x \end{pmatrix}$$

ya que

$$(4 \quad 5 \quad 6) \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = (4x3 + 5x7 + 6x4) = (71)$$

O sea que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 16 & 29 & 8 \\ 24 & 41 & 71 & 17 \end{pmatrix}$$

Es de notar que si A es de dimensión 2x3 y B es de dimensión 3x4, entonces AB es una matriz de dimensión 2x4.

Para denotar que una matriz A es de dimensión mxn, (m filas, n columnas), la notaremos como: A_{mxn}.

En general, dos matrices A_{mxn} y B_{sxk}, son **conformes** para la multiplicación sí y sólo sí n = s, o sea que el número de columnas de A, debe ser igual al número de filas de B.

El resultado del producto $A_{mxn} B_{nxk} = C_{mxk}$, es tal que el elemento c_{ij}, de la fila i, columna j de C, es el resultado del producto de la fila i de A por la columna j de B.

Las matrices

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se llamarán la **matrices idénticas** de orden 2 y 3 respectivamente.

En general, la matriz $I_n = (\delta_{ij})_n$, donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Se llamará la **matriz idéntica de orden n.**

Nótese que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \\ 9 & 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \\ 9 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \\ 9 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \\ 9 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

De donde se verifica que si I_n es la matriz idéntica de orden n, entonces, como sucede en los números con el número 1:

$$A_n I_n = I_n A_n = A_n$$

<u>Ejercicios resueltos</u>

1. Sean:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 9 \\ 2 & 5 & 8 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Verifique las condiciones de dimensión para que el producto AB esté definido y halle la dimensión de AB.
b) Halle el elemento c_{24} de AB, situado en la segunda fila, cuarta columna.
c) Calcule AB.
d) Señale por qué BA no está definida.

<u>Solución:</u>

a) Como A es dimensión 3 x 3 y B es de dimensión 3 x 4, entonces AB está definida y su dimensión es 3 x 4.

b) El elemento c_{24} de AB se puede calcular efectuando el producto de la segunda fila de A por la cuarta columna de B así:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} = (9 - 16 + 21) = (14)$$

c)

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 14 & 18 \\ 6 & 12 & 18 & 14 \\ 12 & 33 & 54 & 58 \end{pmatrix}$$

d) Como B es de dimensión 3×4 y A es dimensión 3×3, y $4 \neq 3$, entonces BA no está definida.

2. Demuestre que si

$$A = (a_{ij})_{mxn} \quad \text{y} \quad B = (b_{ij})_{nxk}$$

entonces, en general: $(AB)^T = B^T A^T$.

Demostración:

Si $AB = C = (c_{ij})_{mxk}$, donde $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$.

Luego:

$(AB)^T = C^T = (c_{ij}^{(t)})_{kxm}$, donde $c_{ij}^{(t)} = c_{ji} = a_{j1} b_{1i} + a_{j2} b_{2i} + \ldots + a_{jn} b_{ni}$

Además: $B^T = (b_{ij}^{(t)})_{kxn}$, donde $b_{ij}^{(t)} = b_{ji}$.
$A^T = (a_{ij}^{(t)})_{nxm}$, donde $a_{ij}^{(t)} = a_{ji}$

Si $B^T A^T = D = (d_{ij})_{kxm}$, entonces

$$d_{ij} = b_{i1}^{(t)} a_{1j}^{(t)} + b_{i2}^{(t)} a_{2j}^{(t)} + \ldots + b_{in}^{(t)} a_{nj}^{(t)}.$$

Por consiguiente: $d_{ij} = b_{1i} a_{j1} + b_{2i} a_{j2} + \ldots + b_{ni} a_{jn}$.

Como $(AB)^T$ y $B^T A^T$, son de la misma dimensión $k \times m$ y $c_{ij}^{(t)} = d_{ij}$, para todo (i, j), hemos concluido la demostración.

3. Demostraremos que si A = B y C = D, entonces AC = BD.

Demostración:

Sean $A = (a_{ij})_{mxn}$, y $B = (b_{ij})_{mxn}$,

$C = (c_{ij})_{nxk}$, y $D = (d_{ij})_{nxk}$.

Como A = B, tendremos que $a_{ij} = b_{ij}$, para todo i,,j .
Como C = D, tendremos que $c_{ij} = d_{ij}$, para todo i,,j .

Luego: $AC = (a_{i1} c_{1j} + a_{i2} c_{2j} + \ldots + a_{in} c_{nj})_{mxk}$
y $BD = (b_{i1} d_{1j} + b_{i2} d_{2j} + \ldots + b_{in} d_{nj})_{mxk}$

ya que $a_{ij} = b_{ij}$, para todo i,,j . y
$c_{ij} = d_{ij}$, para todo i,,j .

Se concluye que AC = BD.

4. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, verifique que

$AB \neq BA$, o sea que en este caso A y B no conmutan.

Solución: $AB = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 7 & 15 \end{pmatrix}$

5. Demuestre que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$$

conmutan. Es decir que AB = BA.

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} 22 & 48 \\ 32 & 70 \end{pmatrix} = BA$$

6.La matriz idéntica de orden n, conmuta con todas las matrices de orden n ya que:

AI = IA = A, para toda matriz A de orden n.

7. La matriz 0 de orden n es tal que A0 = 0A = 0

luego: A0 = 0A, para toda matriz A de orden n. Es decir que la matriz 0 de orden n, conmuta con todas las matrices cuadradas (del mismo orden n)

8. Si A es una matriz cuadrada entonces la matriz A + AA, conmuta con A.

Demostración: A(A + AA) = AA + AAA, Y
(A + AA) A = AA + AAA.

<u>Ejercicios Propuestos</u>

9. Multiplique las siguientes matrices si es posible:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $(2 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ f) $(3 \quad 1)\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

10. Dadas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

a) Halle A^T , B^T , $(A + B)^T$, $(AB)^T$

b) Verifique que:

$(A + B)^T = A^T + B^T$
$(AB)^T = B^T A^T$

$(A^T)^T = A$

c) Verifique que: $(AB)^T \neq A^T B^T$

11. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Premultiplique B por A, es decir halle AB.
b) Postmultiplique B por A, es decir halle BA.
c) Halle B^2
d) Halle B^4
e) Halle 28(IB)
f) Halle -11(0B)
g) Halle $(3I)^3$

12. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$, halle una matriz $B \neq 0$, de orden 2, tal que AB = 0.

13. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

Demuestre que existe una y sólo una matriz B de orden 4

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

tal que:

$$AB = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ayuda: Demuestre primero que necesariamente

$$b_{12} = b_{13} = b_{14} = b_{23} = b_{24} = b_{34} = 0.$$

Luego pruebe que $b_{11} = 1$, $b_{22} = 1/3$, $b_{33} = 1/5$, $b_{44} = 1/2$.

Posteriormente calcule los demás elementos.

14. Demuestre que en general:

a) $(A + B)^T = A^T + B^T$ (Asuma que la suma está definida)

b) $((A)^T)^T = A$, para toda matriz A.

15. Suponga que A es una matriz de orden 2 que conmuta con todas las matrices de orden 2. Pruebe que A es un múltiplo de la matriz idéntica.

16. Demuestre que la matriz A conmuta con A^n, para toda matriz cuadrada A.

17. Demuestre que la matriz $a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n$ conmuta con A, para todo n. Construya una matriz que conmute con

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

3.- Propiedades

3.1.- Las leyes de las operaciones

Los objetos del algebra matricial son matrices, las cuales generalmente se denominan por letras mayúsculas como A, B, C, etc.

MATRIZ **0** DE DIMENSIÓN mxn.

La matriz **0** de dimensión mxn, o **matriz nula**, es la matriz

$$\mathbf{0}_{mxn} = (a)_{ij\ mxn}, \text{ donde } a_{ij} = 0, \text{ para cada i,,j.}$$

Por lo tanto $\mathbf{0}_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{0}_{2x3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, etc.

Sabemos que si las matrices son conformables, podemos sumarlas, restarlas y multiplicarlas.

Las siguientes reglas se verifican en el álgebra de matrices, siempre que las operaciones se puedan definir (conformabilidad).

Si A es una matriz cuadrada:

$$A \times 0 = 0 \times A = 0, \qquad A \times I = I \times A = A$$

Para matrices (conformables) de cualquier dimensión:

Propiedades

$A + B = B + A$	Conmutatividad
$(A + B) + C = A + (B + C)$	Asociatividad
$A(BC) = (AB)C$	Asociatividad
$A + 0 = 0 + A = A$	Elemento neutro
$AI = IA = A$	Matriz identica
$A0 = 0A = 0$	
$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$	α es un número
$\alpha(AB) = A(\alpha B) = \alpha AB$	α es un número
$\alpha\beta(A) = \alpha(\beta A)$	
$A(B + C) = AB + AC$	Distributividad
$(A + B)C = AB + AC$	Distributividad
$(A^T)^T = A$	
$(A + B)^T = A^T + B^T$	
$(AB)^T = B^T A^T$	

Por supuesto:

$A^n = \overbrace{AAA \dots A}^{n}$. Si n es un número entero positivo

$$nA = \underbrace{A+A+A \ldots +A}_{n \text{ sumandos}}.$$

Si n es un número entero positivo

En los números se cumple la siguiente ley conmutativa ab = ba	**En las matrices** **No siempre AB = BA**

Ejemplo:

Si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se verifica que:

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & -1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$$

y

BA no está definida

Ejemplo 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 1 \\ -11 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, en este caso, $AB \neq BA$.

De este ejemplo se concluye, que la multiplicación de matrices no es conmutativa. Por lo tanto, una vez planteado un problema hay que tener cuidado con el orden en que se ejecutan las operaciones.**4.-**

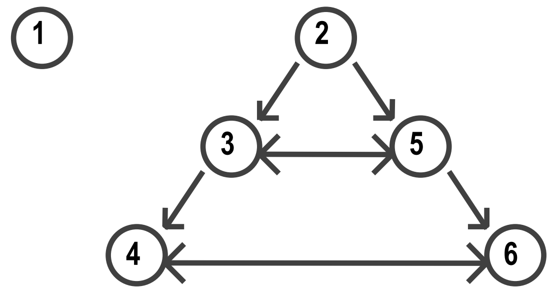
APLICACIONES PRÁCTICAS

4.1 Un problema de comunicaciones

Una señal de radio transmitida por una estación puede ser retransmitida por estaciones vecinas las cuales formando una cadena pueden llevarla hasta los confines más remotos.

Cuando el número de estaciones retransmisoras aumenta, puede ser dificil determinar si la señal que sale de una estación puede llegar a otra directamente o al menos utilizando algunos relevos.

Suponiendo que las estaciones 1,2,3,4,5, y 6 establecen canales de comunicación como los que muestra la siguiente figura:



Debemos determinar si una señal transmitida por una estación puede llegar a otra.

En la figura anterior puede observarse que la estación 1 está aislada de las otras estaciones y que la estación 3 no puede enviar señal a la estación 2, pese a que puede recibir señal de aquella.

Algunas estaciones tienen comunicaciones de doble vía.

Es un hecho que la estación 2 puede enviar señales a la estación 6 utilizando las rutas

2--->3--->4---->6, 2--->3--->5--->6, 2--->5--->6, 2--->5--->3---->4---->6.

El gráfico de la figura anterior podría representar también posibilidades de soborno o tráfico de influencias, que son desgraciadamente comunes en nuestra sociedad, entre las personas **1, 2, 3, 4, 5 y 6.**

En el gráfico anterior observaríamos que el señor **1** no soborna y es insobornable, y que el señor **6**, entre otros, puede ser sobornado por todos, excepto por el incorruptible señor **1** (nuestro héroe). A veces a alto costo por el número de intermediarios que se pueden requerir.

Si el gráfico anterior representa cómo una perturbación sufrida por uno de los focos, se transmite a los restantes, podemos ver que la más alta posibilidad de perturbación se halla en los focos **4** y **6** pues se perturban al perturbar cualquier otro foco distinto de **1.**

Gráficos como el de la figura pueden esquematizar relaciones genéticas entre individuos o generaciones, retrasmisiones de repetidoras o vías de comunicación.

Retornemos al caso de las estaciones de radio!.

Si el número de estaciones y de relaciones aumenta, gráficos como el de la figura anterior pueden parecer al observador tan indescifrables como el gráfico siguiente:

La matriz **C** que llamaremos la matriz de las comunicaciones directas, condensa toda la información del gráfico.

RECEPTORES

$$
\begin{array}{ll}
\text{E} & \begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{array} \\
\begin{array}{l} \text{M}\ \mathbf{1} \\ \text{I}\ \mathbf{2} \\ \text{S}\ \mathbf{3} \\ \text{O}\ \mathbf{4} \\ \text{R}\ \mathbf{5} \\ \text{E}\ \mathbf{6} \end{array} &
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\text{S} &
\end{array}
$$

La matriz **C** = $(c_{ij})_{6x6}$, ha sido definida de tal manera que $c_{ij} = 1$, para i = j, si la señal de la i-ésima estación es recibida directamente por la j-ésima estación.

Por definición $c_{ii} = 0$ para todo i (no aceptamos retrasmisión de una estación a sí misma).

Podemos plantearnos la pregunta:

Cuáles estaciones se pueden comunicar entre sí enviando sus señales por intermedio de otras estaciones (relevos) ?.

Motivaremos la respuesta a esta pregunta observando un elemento en la matriz C^2.

Estudiemos por ejemplo el elemento situado en la 2da. fila, 4ta. columna de C^2. Tal elemento es:
.

$$c_{21} \cdot c_{14} + c_{22} \cdot c_{24} + c_{23} \cdot c_{34} + c_{24} \cdot c_{44} + c_{25} \cdot c_{54} + c_{26} \cdot c_{64}$$

Cada elemento $c_{2k} \cdot c_{k4}$ de la suma anterior es 0 o 1. Además: $c_{2k} \cdot c_{k4}$ es 1 sólo en el caso de que $c_{2k} = 1$ y $c_{k4} = 1$. Es decir, sólo en caso de que la señal de la estación 2 pueda ser retransmitida a la estación 4, pasando por la estación intermedia k.

En consecuencia la suma anterior, cuenta de cuántas maneras se puede enviar la señal de la estación 2 a la estación 4, utilizando exactamente una estación como intermediaria (un relevo).

Asumimos de nuevo que los elementos de la diagonal de C^2, se reemplazan por ceros.

Por un razonamiento similar se concluye que cada elemento de la fila i, columna j, de C^3, dá exactamente el número de maneras como la señal de la estación i puede llegar a la estación j, utilizando exactamente dos relevos.

Verifiquemos el caso de C^2.

$$C^2 = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} .$$

En tal matriz, $b_{36} = 2$, ya que las cadenas que se pueden utilizar para enviar la señal de la estación 3 a la estación 6, a partir del gráfico inicial de la página 17, utilizando exáctamente un relevo son:

3--->5--->6 y 3---->4---->6,

mientras que $b_{25} = 1$, ya que la única cadena que lleva la señal de la estación 2 a la estación 5, utilizando exactamente un relevo es:

2---->3---->5.

El elemento $\mathbf{C}^2_{3,3} = 1$, está informándonos de la cadena

3 -----> 5 ------->3

Dependiendo del problema, esta cadena puede tenerse o no, en cuenta. En nuestro caso hemos decidido eliminarla ya que no queríamos que nos estorbara ese tipo de retrasmisión tipo eco. Sin embargo, es posible que estos ecos deban ser tomados en cuenta como lo haremos a continuación estudiando los casos C, C^2 y C^3 cuando aceptamos 1's en la diagonal.

Similarmente, el elemento en la posición **i,j** de C^3 nos dice de cuántas maneras se puede enviar la señal de la estación **i** a la estación **j** utilizando exactamente 2 relevos.

En general, el elemento en la posición **i,j, fila i, columna j** de $\mathbf{A^k}$, para cualquier **k,** cuenta de cuántas maneras, la señal de la estación **i** puede llegar a la estación **j,** utilizando exactamente **k - 1** relevos.

Se concluye por lo tanto que el elemento en la posición **i,j** de $\mathbf{C + C^2}$ nos dá el número de maneras como la señal de la estación **y** puede ser transmitida a la estación **j**, utilizando a lo más un relevo.

En general, el elemento en la posición **i,j** de $\mathbf{C + C^2 + C^3 + C^4 + \dots + C^k}$ señala el número de maneras como la señal de la estación **y** puede llegar a la estación **j,** utilizando a lo más **k - 1** relevos.

Como aporte al lector, hemos calculado:

$$\mathbf{C^3} = \mathbf{C^2 C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nuevamente, hemos sustituido los 1's en la diagonal de C^2 por 0's, antes de calcular $\mathbf{C^3}$.

Esta matriz señala que no hay forma de enviar la señal de la estación 2 a la estación 1 utilizando exactamente dos relevos, mas hay dos (2) maneras de llevar la señal de la estación 2 a cuarta y a la sexta utilizando dos relevos. Si observamos el gráfico de la página 17, corroboramos lo siguiente:

Comunicaciones con exactamente dos relevos	
De 2 a 4	De 2 a 6
2--->5---->6---->4	2---->3---->4---->6
2--->5---->3---->4	2---->3---->5---->6
Total 2	Total 2

Por supuesto que las igualdades matemáticas que hemos estado utilizando, han sido bastante flexibles en el sentido que $\mathbf{C^2}$**,** no es exactamente $\mathbf{C^2}$ **al calcular** $\mathbf{C^3}$, ya que previamente cambiamos los unos en la diagonal principal por ceros. Lo mismo hicimos con $\mathbf{C^3}$ y así sucesivamente.

Estudiemos en detalle nuestro $\mathbf{C^2}$, antes de que cambiaramos los 1's en la diagonal principal por 0´s.

En tal caso

$$\mathbf{C^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{C}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En $\mathbf{C}^2$ se cuentan rutas tales como:

$c^2_{(3,3)}$ = 1 correspondiente a las rutas 3---->5---->3
$c^2_{(4,4)}$ = 1 correspondiente a las rutas 4---->6---->4
$c^2_{(5,5)}$ = 1 correspondiente a las rutas 5---->3---->5
$c^2_{(6,6)}$ = 1 correspondiente a las rutas 6---->4---->6

que ahora no se están desechando.

Otras diferencias son aleccionadoras.

Si en $\mathbf{C}^2$ cambiamos los 1's por 0's en la diagonal, entonces $c^3_{(3,4)} = 2$. Vease la matriz de la página 11.

Si dejamos los 1's en la diagonal, como en $\mathbf{C}^2$ en la página anterior, entonces $c^3_{(3,4)} = 3$.

La diferencia proviene de que si $c^2_{(4,4)} = 1$, como se ve en la página anterior, estamos tomando en cuenta la ruta 4---->6---->4, la cual producirá en $c^3_{(3,4)}$ la ruta 3---->4---->6---->4, además de 3->5->6->4
y 3---->5---->3---->4.
El asunto se puede complicar, auncuando cambiemos continuamente en cada potencia de **C** los unos de la diagonal por ceros, ya que en este ejemplo $c^3_{(3,4)} = 2$, como es el caso de $\mathbf{C}^3$ en la página 11, lo cual significa que se están tomando en cuenta las rutas

3---->5---->6---->4, *3---->5---->3---->4.*

La ruta *3---->5---->6---->4* señalada en itálica podría tener sentido o nó según el problema.

Estas limitaciones del método nos llevan a sospechar de que en algunos casos debe complementarse o refinarse, reviviendo de alguna manera la información perdida al pasar del **grafo** de la página 8 a la matriz C. La teoría de grafos con sus propios desarrollos todavía puede darnos mejores respuestas en problemas específicos.

__Ejercicios__

1) Estudie en detalle los inconvenientes presentados por el modelo matricial en el problema de las comunicaciones y posibles soluciones que nos permitan desechar rutas indeseables. Proponga alternativas, ya sea utilizando teoría de matrices o de grafos.

2) Compare el método matricial para controlar el problema de las comunicaciones, con métodos en teoría de grafos o de otro tipo.

4.2 CADENAS DE MARKOV

Una matriz **estocástica** $A = (a_{ij})_{nxn}$ es una matriz con las siguientes propiedades:

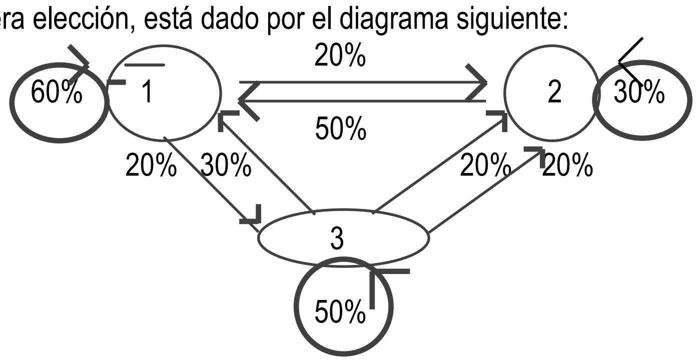
a) $a_{ij} \geq 0$ para todo i, j
b) $a_{1j} + a_{2j} + a_{3j} + \ldots + a_{nj} = 1$ para cada j.

En consecuencia, una matriz estocástica es una matriz con elementos no negativos tal que la suma de los números en cada columna es 1.

$$\begin{pmatrix} 0,25 & 0,30 & 0,25 \\ 0,60 & 0,60 & 0,30 \\ 0,15 & 0,10 & 0,45 \end{pmatrix}$$

es una matriz estocástica.

Suponga que el flujo probable de los votos por los partidos 1, 2 y 3, de las elecciones del año 2000 al 2001, primera elección, está dado por el diagrama siguiente:



El diagrama indica, por ejemplo que el 30% de las personas que pertenecían al partido **2** en el 2000, votarán de nuevo por los **2** en el 2001, mientras que el 50% votará por los **1** y el 20% por el partido **3**. El resto del diagrama es facil de interpretar. Esta información puede representarse en la matriz estocástica:

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{de 1} & \text{de 2} & \text{de 3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,60 & 0,50 & 0,30 \\ 0,20 & 0,30 & 0,20 \\ 0,20 & 0,20 & 0,50 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{por 1} \\ \text{por 2} \\ \text{por 3} \end{array}$$

MATRIZ 2000 - 2001

Por simplicidad asumiremos que en el siguiente período no contabilizaremos a los nuevos votantes.

Estudiemos a la matriz de **transición** T^2.

$$T^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{de 1} & \text{de 2} & \text{de 3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,52 & 0,51 & 0,43 \\ 0,22 & 0,23 & 0,22 \\ 0,26 & 0,26 & 0,35 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{por 1} \\ \text{por 2} \\ \text{por 3} \end{array}$$

MATRIZ 2000 – 2002

Es de nuevo una matriz estocástica.

Asumiremos que el número total N de votantes permanece constante de año en año.

Suponga que la distribución de votos en el año 2000 y la esperada en el 2001 está dada por:

	2000	2001	
Por 1	x_0 %	x_1 %	
Por 2	y_0 %	y_1 %	**([1])**
Por 3	z_0 %	z_1 %	

[1] En este caso el número de votos recibidos por el partido 1 en el año 2000 fue x_0N y se espera que sea x_1N en el año 2001. Los otros casos se interpretan de modo semejante.

En este caso:

$$x_1 = 0.60\, x_0 + 0.50\, y_0 + 0.30\, z_0$$

$$y_1 = 0.20\, x_0 + 0.30\, y_0 + 0.20\, z_0$$

$$z_1 = 0.20\, x_0 + 0.20\, y_0 + 0.50\, z_0$$

Es decir que:

$$T \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

Si la matriz T se utiliza para calcular la distribución porcentual del año 2002 .

	Año 2002
Por 1	x_2
Por 2	y_2
Por 3	z_2

Tendríamos que:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = T^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Asumiendo que esta matriz de transición se pudiese aplicar en años venideros, tendríamos que en n años, la distribución de los votos estaría dada por

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = T^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

En particular, la relación de los votantes con los resultados de las elecciones , está dado por:

T	T^2	T^3	...	T^n
2000---> 2001	2000---> 2002	2000---> 2003		2000 ----> 200(n)

Las matrices

$T \qquad T^2 \qquad T^3 \qquad \ldots \qquad T^n$

son todas, matrices estocásticas. (la suma de los elementos de cada columna es 1) es decir (100%).
De la matriz T sacamos la siguiente información:

$$T = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccc} \text{de 1} & \text{de 2} & \text{de 3} \\ \end{array}$$

$$T = \left(\begin{array}{ccc} 0,60 & 0,50 & 0,30 \\ 0,20 & 0,30 & 0,20 \\ 0,20 & 0,20 & 0,50 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{por 1} \\ \text{por 2} \\ \text{por 3} \end{array}$$

El 60% de los votantes de 1 votarán por 1 en la siguiente elección
El 20% de los votantes de 1 votarán por 2 en la siguiente elección
El 20% de los votantes de 1 votarán por 3 en la siguiente elección
El 50% de los votantes de 2 votarán por 1 en la siguiente elección
El 30% de los votantes de 2 votarán por 2 en la siguiente elección
El 20% de los votantes de 2 votarán por 3 en la siguiente elección
El 30% de los votantes de 3 votarán por 1 en la siguiente elección
El 20% de los votantes de 3 votarán por 2 en la siguiente elección

El 50% de los votantes de 3 votarán por 3 en la siguiente elección.

De T^2 concluimos que:

$$T^2 = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc|c} \text{de } 1 & \text{de } 2 & \text{de } 3 & \\ \end{array}$$

$$T^2 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{de } 1 & \text{de } 2 & \text{de } 3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 0{,}52 & 0{,}51 & 0{,}43 \\ 0{,}22 & 0{,}23 & 0{,}22 \\ 0{,}26 & 0{,}26 & 0{,}35 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{por } 1 \\ \text{por } 2 \\ \text{por } 3 \end{array} \end{array}$$

El 52% de los votantes originales de 1 votarán por 1 en la siguiente elección
El 22% de los votantes originales de 1 votarán por 2 en la siguiente elección
El 26% de los votantes originales de 1 votarán por 3 en la siguiente elección
El 51% de los votantes originales de 2 votarán por 1 en la siguiente elección
El 23% de los votantes originales de 2 votarán por 2 en la siguiente elección
El 26% de los votantes originales de 2 votarán por 3 en la siguiente elección
El 43% de los votantes originales de 3 votarán por 1 en la siguiente elección
El 22% de los votantes originales de 3 votarán por 2 en la siguiente elección
El 35% de los votantes originales de 3 votarán por 3 en la siguiente elección.

De acuerdo con la teoría de las matrices estocásticas, si la matriz T es una **matriz estocástica regular**[1], T^n tiende a una matriz con todas sus columnas iguales a medida que n crece.

Con un computador podría comprobarse que:

$$T^5 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{de } 1 & \text{de } 2 & \text{de } 3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 0{,}49276 & 0{,}49275 & 0{,}49033 \\ 0{,}22222 & 0{,}22223 & 0{,}22222 \\ 0{,}28502 & 0{,}28502 & 0{,}28745 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{por } 1 \\ \text{por } 2 \\ \text{por } 3 \end{array} \end{array}$$

y

$$^{2}\,T^{17} \approx \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{de } 1 & \text{de } 2 & \text{de } 3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 0{,}492063492 & 0{,}492063492 & 0{,}492063492 \\ 0{,}222222222 & 0{,}222222222 & 0{,}222222222 \\ 0{,}285714286 & 0{,}285714286 & 0{,}285714286 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{por } 1 \\ \text{por } 2 \\ \text{por } 3 \end{array} \end{array}$$

Ya que T^{18} tiene la forma

$$T^{18} \approx \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & \beta \\ \gamma & \gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

Se concluye que

$$T^{19} = T^{18} . T$$

$$\approx \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & \beta \\ \gamma & \gamma & \gamma \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0{,}60 & 0{,}50 & 0{,}30 \\ 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}20 \\ 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}50 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & \beta \\ \gamma & \gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, a partir de n=18:

$$T^n \approx T^{n+1} \approx T^{n+2} \approx \dots$$

[1] Una matriz de transición T es **regular**, si para alguna potencia k > 0, T^k tiene todas sus entradas (números que la conforman) positivas.
[2] Utilizamos a veces el símbolo $\approx$ para hacer notar que los resultados ya no son exactos debido al error por aproximación (redondeo o truncamiento) introducido en los cálculos por la aritmética finita del computador.

Por consiguiente:

Si las expectativas de votación (flujo de votantes de año en año), se mantuviese igual por años, se concluíria que a partir de n > 18, los partidos se repartirían los votos de una manera que puede predeterminarse, quedando el partido 1 con α votantes, el partido 2 con β votantes y el partido 3 con γ votantes.

La matriz T^n con n suficientemente grande, sirve para "predecir" como terminarán las cosas si la situación planteada por la matriz de transición T, se mantiene igual por n años.

Por supuesto, en realidad la matriz de transición cambia de año en año, y a la final, la matriz T_n que relacionaría el flujo de votantes entre los partidos, a partir del censo inicial hasta la n - ésima votación, se calcularía así:

$$T^{(n)} = T^{(n-1)} . T_n = T^{(n-2)} . T_{n-1} . T_n = T^{(n-3)} . T_{n-2} . T_{n-1} . T_n =$$

$$= T_1 . T_2 . T_3 . T_4 \ldots T_n.$$

Cada matriz T_k es estocástica y en particular lo es $T^{(n)}$.

El vector $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ se denomina el **vector de estado inicial**, cada uno de los vectores $\mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ yi \\ z_i \end{pmatrix}$ es también un vector de estado. Las siguientes ecuaciones son válidas:

$$\mathbf{X}_1 = T\,\mathbf{X}_0 ; \quad n \geq 1, \ \mathbf{X}_n = T\,\mathbf{X}_{n-1} ; \quad n \geq 1, \ \mathbf{X}_n = T^{(n)}\,\mathbf{X}_0.$$

EJERCICIOS CORRESPONDIENTES A APLICACIONES

1. Dibuje un diagrama semejante al que se presentó en el ejemplo de las comunicaciones, que corresponda a la matriz:

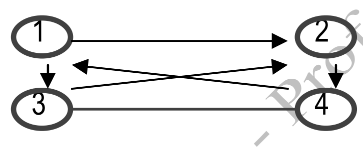
$$C = \begin{array}{cc} & \text{RECEPTOR} \\ \text{E} & \begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4}\end{array} \\ \begin{array}{r}\text{M } \mathbf{1}\\ \text{I } \mathbf{2}\\ \text{S } \mathbf{3}\\ \text{O } \mathbf{4}\end{array} & \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \\ \text{R} & \end{array}$$

a) Calcule: i) C^2 ii) C^3 iii) $C + C^2 + C^3$

b) Verifique en el gráfico Por ejemplo, hay una flecha de 2 a 3 y no la hay de 2 a 1) que C^2 si es la matriz de las comunicaciones utilizando exactamente un relevo y C^3 la de las comunicaciones con exactamente dos relevos. Distribuya los números 1,2,3,4 en un espacio tal que le permita trazar flechas entre aquellos que están comunicados directamente (tienen un 1 en la intersección fila, columna de A). Verifique además que $C + C^2 + C^3$ es la de las comunicaciones con a lo más dos relevos.

c) Encuentre matricialmente de cuántas maneras puede llegar la señal de la estación 4 a la estación 2 utilizando a lo más dos relevos. Dé la lista a partir del gráfico de todas las cadenas que cumplen tal función.

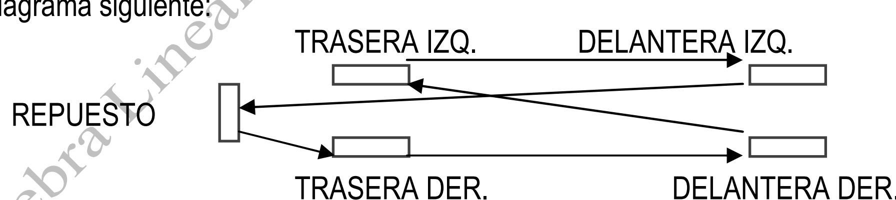
2. Suponga que cuatro personas tienen establecido un tráfico de influencias de acuerdo con la figura siguiente:



a) Escriba la matriz que muestra el número de maneras en las cuales una persona puede influenciar a otra utilizando a lo más un intermediario.

b) Ordene a las personas de acuerdo con el número total de canales de influencia que puede ejercer utilizando a lo más un intermediario.

3. Una fabrica de automóviles aconseja rotar las llantas después de cada 10.000 kmts., tal como se indica en el diagrama siguiente:



Escriba un ensayo corto sobre cómo el álgebra de matrices puede ser utilizada para determinar la posición ocupada por una llanta al cabo de **n** rotaciones.

4. Teniendo en cuenta la matriz de transición presentada en el ejemplo teórico de ésta sección, conteste las siguientes preguntas:

a) Qué porcentaje de quienes pertenecían originalmente al partido **3**, votarán de nuevo por el partido 3 en la segunda siguiente elección?.

b) Cuál partido retendrá mayor porcentaje de sus votantes originales en tal elección a partir del estado inicial?

c) Qué porcentaje de los votantes iniciales del partido 2, votará por el partido 3 en tal elección?.

5. Suponiendo que el flujo de votantes (matriz de transición) se mantuviese inalterable año por año, verifique que:

   a) El 50% de los votantes iniciales del partido **1** votarán de nuevo por el partido **1** en la siguiente tercera elección.

   b) Aproximadamente el 50% de los votantes iniciales del partido **2**, votará por el partido **1** en la siguiente tercera elección.

6. Tres compañías A, B y C, introducen nuevas marcas de crema dental simultaneamente en el mercado. Inicialmente el mercado está repartido así: A posee el 40%, B el 20% y C el 40%.

   Durante el primer año, la compañía A retiene el 85% de sus clientes, pierde el 5% con B y el 10% con la compañía C. La compañía B retiene el 75% y pierde el 15% con A y el 10% con C. La compañía C retiene el 90% y pierde el 5% con A y el 5% con B. Asuma que los hábitos de consumo no cambian. Como estará repartido el mercado en porcentajes al final del 1ro. y 2do. años?.

7) Asuma que las personas, de acuerdo con el trabajo que desempeñan y el grado de calificación, se dividen en profesionales, trabajadores calificados y trabajadores no calificados. Asuma que el 70% de los hijos de profesionales son profesionales, 20% trabajadores calificados y 10% no calificados. De modo similar suponga que el 60% de los hijos de trabajadores calificados son trabajadores calificados, 20% profesionales y 20% no calificados. Asuma además que 89% de los hijos de los trabajadores no calificados son trabajadores no calificados, 10% son calificados y 1% son profesionales. Asuma que la matriz de transición permanece constante. Muestre que las fracciones de los nietos de los trabajadores no calificados que son profesionales, calificados y no calificados son (aproximadamente) 0.04, 0.15, y 0.81 respectivamente.

8. Con ayuda de un computador compruebe que si las relaciones dadas en el problema 7 se conservan por más de 40 años, cada nueva generación estará discriminada (aproximadamente) así: profesionales 17.65%, trabajadores calificados 23.53% y trabajadores no calificados 58.82%.

5.- Matrices cuadradas no singulares.

5.1.- Matrices singulares y no singulares

En los números	En las matrices
Existencia de inverso para cada numero diferente de 0 Si $a \neq 0$ existe siempre uno y sólo un número $b \neq 0$ tal que ab=ba=1	**Esta afirmación en general, no es válida** Para cada matriz $A \neq 0$, existe una y sólo una matriz $B \neq 0$, tal que AB = BA = I (donde I es la matriz idéntica)

Ejemplo

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Si existiera una matriz

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

tal que:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se concluiría que:

$$2x + 4z = 1 \qquad 2y + 4w = 0$$

$$3x + 6z = 0 \qquad 3y + 6w = 1$$

Proposiciones que son contradictorias ya que si

$2x + 4z = 1$, entonces $1.5(2x + 4z) = 1.5 \times 1 = 1.5$. De donde se concluiría

$3x + 6z = 1.5 \neq 0$,

en contradicción con

$3x + 6z = 0$.

En el caso de que para una matriz cuadrada A de orden n, exista una matriz cuadrada B, del mismo orden, tal que:

$$AB = BA = I_n,$$

se dice que B es la **matriz inversa de A** (la cual es única, para cada A).

A tal matriz B (cuando existe), se le denomina, **la matriz inversa de A** o $\mathbf{A}^{-1}$.

5.2.- Verificación de la existencia de la matriz inversa

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

es no singular, ya que la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$, es tal que

$$AB = I$$

5.3.- Aplicaciones de la no singularidad

Por definición, la matriz inversa de A, es la única matriz, denotada como A^{-1}, tal que

$$A A^{-1} = A^{-1}A = I$$

Si A posee matriz inversa, se dice que A es una matriz **no singular.**

Las matrices cuadradas que no poseen inversa se llaman **matrices singulares.**

Nunca digas nunca jamás [3] ....

Se puede hacer un simposio entre profesores de matemáticas y presentar la siguientes preguntas:

- Cuando usted va a resolver un problema, sabe de antemano si la matriz es regular o no?
- Que es mejor para usted, que la matriz sea regular o nó ?
- Si usted está resolviendo un problema físico o económico o quizás de otro tipo, y la investigación la financia alguien más, prefiere que la matriz sea no singular?. Y el que le financia qué quisiera?.
- Considera usted que el cálculo de la matriz inversa **siempre** no es importante?

Propongo una semana de simposio y repartir árnica y yantén entre los asistentes para curar las heridas y aliviar problemas sicológicos y frustraciones.

Es de anotar que el hecho de que una matriz sea regular o nó tiene una importancia teórico práctica. Por lo tanto:

- Trataremos de señalar en cada tema que lo amerite, su importancia (si la tiene) en la determinación de la regularidad o nó de las matrices.
- Enseñaremos métodos o alternativas para resolver problemas cuando teoricamente parezca que los mismos pueden ser utilizados para calcular,acelerar, o evitar el cálculo de la matriz inversa[4].

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es no singular.

[3] Lo que se señala en el siguiente cuadro es responsabilidad única de José Arturo Barreto Gutiérrez. No se dá el teléfono ni la dirección para evitar discusiones entre respetables profesores.
Y el cuervo dijo: "nunca jamas". Edgar Allan Poe. El cuervo.
[4] Atención dogmáticos: no digan nunca jamas....

La matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

es singular.

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

posee inversa, ya que la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$, es tal que

$AB = I$ (Compruébelo, efectuando la multiplicación)

Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

es una matriz cuadrada de orden 2,

definiendo $\Delta = a_{11}\, a_{22} - a_{21}a_{12}$, como **el determinante** de A, tenemos que si $\Delta \neq 0$, entonces A es no singular, es decir invertible y

$$\mathbf{A}^{-1} = (1 / \Delta) \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Note que los elementos a_{11} y a_{22} de la diagonal principal se han intercambiado de lugar y los elementos a_{21} y a_{12} de la **diagonal secundaria** han cambiado de signo.

Ejemplo:

Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

entonces $\Delta = a_{11}\, a_{22} - a_{21}a_{12} = 3 \times 6 - 4 \times 5 = 18 - 20 = -2$

Por lo tanto $\mathbf{A}^{-1} = (-½) \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

Es fácil verificar en este caso que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$

Puede probarse además que la condición $\Delta \neq 0$, no es sólo suficiente, para la invertibilidad, sino también necesaria, es decir que si la matriz **A,** de orden 2 , es invertible entonces (necesariamente), su determinante Δ es diferente de 0.

La posibilidad de la existencia de matrices no singulares es de gran importancia en Álgebra lineal, como lo ilustraremos a continuación.

Ecuaciones tales como $2x = 4$, $3x - 1 = 7$, etc. se resuelven despejando la x, así:

Si $2x = 4$, entonces $x = (1/2)\, 4 = 2$

Si $3x - 1 = 7$, entonces $x = (7 + 1) / 3 = 8/3$

Hemos utilizado las leyes familiares que señalan que el término que multiplica se pasa a dividir, el que divide a multiplicar, el que suma a restar y el que resta a sumar.

Aún en los números hay que tener sumo cuidado ya que la ecuación

$$0\,x = 4$$

No tiene solución y el 0 no se puede pasar a dividir.

En contraste, la ecuación

$0\,x = 0$, tiene infinitas soluciones.

La razón de tal "despropósito" radica en que en el caso de $2\,x = 1$, el número 2 tiene inverso multiplicativo (1/2) (recuerde $2 \times (1/2) = 1$, por lo cual ½ es el inverso multiplicativo de 2).

Por lo tanto, utilizando la ley $ax = b \Rightarrow x = a^{-1} b = ½\, b = (1/2)1 = 1/2$

Y en el caso de $3x – 1 = 7$, entonces $3\,x = 8$, luego $x = 3^{-1} 8 = (1/3)\, 8$

En los números se concluye que si $ax = b$ y a^{-1} existe (es decir si $a \neq 0$), entonces existe una única solución $x = a^{-1} b$. Y si a^{-1} no existe (caso a=0), entonces $ax = b$, tiene solución sólo en el caso en que $b = 0$ (desafortunadamente $0\,x = 0$ tiene infinitas soluciones).

Existen también ecuaciones matriciales tales como

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \quad \text{y} \quad \mathbf{AX} + \mathbf{B} = \mathbf{C},$$

en donde la matrix **X** es la "incógnita" que se pretenderá calcular.

Veremos mas adelante que si **A** es una matriz cuadrada no singular (invertible), podremos proceder a "despejar" la **X** cualquiera sea el orden de **A** (**A** podría ser de orden 10, 100 o más):

En el caso $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, premultiplicamos por $\mathbf{A}^{-1}$ a ambos lados, obteniendo la solución así:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{I\,X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

(Hay que tener cuidado ya que la premultiplicación es una multiplicación por "la izquierda" que es muy diferente a la multiplicación por la derecha, ya que la multiplicación de matrices no es conmutativa y aun cuando ambas operaciones tengan sentido, por lo general son diferentes $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ y $\mathbf{BA}^{-1}$)

En el caso $\mathbf{AX} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$, se procederá así, para "despejar" la **X**.

Si $\mathbf{AX} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$ (y **A** es no singular) $\Rightarrow \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{AX} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$

$\Rightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{IX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$

$\Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ y hemos despejado la **X**.

En el caso de que en cualquiera de los dos ejemplos matriciales anteriores la matriz **A** fuese singular, no posee inversa, tal como sucedió en el caso de los números cuando $a = 0$ (para $ax = b$ o $ax + b = c$), el sistema o no tendrá solución o tendrá infinitas soluciones como lo veremos en el capítulo correspondiente a la solución de sistemas de ecuaciones (capítulo 3).

Ejemplo:

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones, utilizando si es posible el concepto de matriz inversa, como se explicó en los párrafos anteriores.

a) $\begin{aligned} 3x + \ \ y &= 2 \\ 2x - 5y &= 1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 3x + \ \ y &= 2 \\ 6x + 2y &= 3 \end{aligned}$

Solución de a)

El sistema de ecuaciones lineales (las variables x e y, están elevadas a la primera potencia y no hay términos mixtos en xy, xz, xyz, etc.), se puede escribir matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lo hemos llevado a la forma

AX = **B**, en donde **A** = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ **B** = $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Como el determinante de la matriz **A,** $\Delta = 3(-5) - 2(1) = -17$, concluimos que **A** es no singular y que

$$\mathbf{A}^{-1} = (-1/17) \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$, por lo tanto

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = (-1/17) \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/17 \\ 1/17 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en el sistema de ecuaciones original, los valores $x = 11/17$, $y = 1/17$, concluímos que la solución es correcta.

Solución de b):

Escribiendo el sistema de ecuaciones en la forma

AX = **B**

En donde

A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

Vemos que el determinante de A, $\Delta = 3(2) - 6(1) = 0$, por lo tanto la matriz A es singular y nuestros métodos utilizando la matriz inversa no se pueden aplicar.

Concluimos que: o el sistema no tiene solución o tiene infinitas soluciones.

Reestudiando el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x + y &= 2 \\ 6x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

trataremos de eliminar la incógnita x, restando a la segunada ecuación el doble de la primera, llegando a:

$$\begin{aligned} 3x + y &= 2 \\ 0x + 0y &= -1 \end{aligned}$$

La incompatibilidad de la segunda ecuación así obtenida nos indica que el sistema <u>no tiene solución</u>.

Definición:

Si n es un número entero positivo y A^{-1} existe, definimos:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n$$

Definiendo, como es natural: $A^0 = I$,

tambien se cumplen las reglas de los exponentes:

$A^r A^s = A^{r+s}$, para r,s, números enteros, no necesariamente positivos.

Las reglas anteriores se parecen a las reglas de las operaciones con números reales.

El estudiar y caracterizar las condiciones de no singularidad para matrices y sus consecuencias, cuando el caso lo amerite, es equivalente a estudiar las condiciones de singularidad pues es el caso complementario. Nos adentraremos en el campo de las matrices no singulares y las consecuencias de la no singularidad, aquí y en diferentes partes de este libro.

Si A es no singular, las siguiente leyes cancelativas son válidas:

- Si AB = AC entonces B = C
- Si BA = CA entonces B = C

Argumento:

$$AB = AC \therefore A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \therefore (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \therefore IB = IC \therefore B = C$$

Argumento similar para el otro caso.

Proposición: Si A y B son matrices no singulares del mismo orden, entonces $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demostración: $(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = (B^{-1}I\,B) = B^{-1}B = I$
$AB(B^{-1}A^{-1}) = AB\,B^{-1}A^{-1} = A\,I\,A^{-1} = A\ A^{-1} = I$

De donde se concluye que:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Como no siempre la multiplicación de matrices es conmutativa, no es cierto en general que:

$$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$$

PROPOSICION:

Si A es una matriz cuadrada no singular, entonces A^T es no singular y

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

DEMOSTRACION:

$(A^T).(A^{-1})^T = ((A^{-1})(A))^T = I^T = I$. (recuerde que $(AB)^T = B^TA^T$)

Observación: Exigimos que A y A^{-1} conmuten**.** Se puede probar (y no lo probaremos aquí) que si **AB = I y A es una matriz cuadrada**, entonces **BA = I** y que si **AB = I entonces BA = I**. O lo que es lo mismo, si A es una matriz cuadrada, toda matriz cuadrada inversa a derecha es a su vez inversa a izquierda y viceversa. Por ello en la práctica para verificar si dos matrices cuadradas A y B son inversas una de la otra, basta con verificar que AB = I o que BA = I.

Ejercicios resueltos

1. Si se tiene que A + C = A + D, se puede concluir, sumando -A a ambos lados de la desigualdad que C = D. (propiedad CANCELATIVA de la suma de matrices).

No es en general cierto que si A, C, D, son matrices y AC = AD, se concluye que C = D, ya que de la igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$ (verifíquelo),

Se concluiría que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$, lo cual es falso.

2. Demuestre que si la matriz A es no singular y AC = AD, entonces C = D.

Solución:

Si AC = AD, como A es no singular, entonces A^{-1} existe, por lo tanto

$A^{-1}(AC) = A^{-1}(AD)$. Luego
$(A^{-1}A)C = (A^{-1}A)D$. Por lo tanto
$IC = ID$, o lo que es lo mismo:
$C = D$.

3. No es en general cierto que si A y B son matrices y AB = 0, entonces A = 0 o B = 0.
Hallaremos dos matrices A y B, ambas diferentes de 0, tales que AB = 0.

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Sin embargo: Si A es una matriz no singular, y AB = 0, entonces se concluye que B=0.

Veamos: Si A es no singular, entonces A^{-1}existe. Como AB = 0, concluimos que
$A^{-1}(AB) = A^{-1}0 = 0$.
Luego $(A^{-1}A)B = 0$. Por lo tanto: $IB = B = 0$.

4. Hallar una matriz no singular de orden 4 tal que:

$A^2 + A = 0$.

Solución: $A^{-1}(A^2 + A) = 0$. Por lo tanto: $A + I = 0$. Por consiguiente $A = -I$.

Como a es de orden 4, concluimos que :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Verifiquemos que en el problema anterior, $-I$ sea una matriz no singular.

Solución: Lo es ya que $(-I)(-I) = I$. O sea que $(-I)^{-1} = -I$.

6. Demuestre que si A es una matriz no singular, entonces A^T es una matriz no singular y que además $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. **Prueba:** $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$.

7. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

es no singular, ya que la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$, es tal que

$$AB = I$$

Ejercicios Propuestos

Ejercicios 1 a 5. Determine si las siguientes matrices son regulares (inversibles o no singulares). Si lo son, calcule su inversa por el método que desee. Verifique en cada caso, si $\mathbf{A}^{-1}$ existe, que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

1) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 3) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

4) **A** =

5) **A** = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicios 6 a 12. Resuelva cada uno de los sistemas de ecuaciones lineales **AX = B** así:

a) Si la **matriz A de los coeficientes** del sistema es no singular, despeje la **X**, utilizando la fórmula **X**= $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.
b) Si la matriz **A** de los coeficientes del sistema es singular, determine por cualquier otro método si el sistema no tiene solución o si tiene infinitas soluciones.
c) Si el sistema tiene infinitas soluciones, dé una fórmula general para el conjunto de las soluciones y calcule 3 **soluciones particulares.**

6) $7x - 4y = 2$
$-2x + 3y = 1/4$

7) $7x - 4y = 2$
$-2x + 3y = 1/4$

8) $7x - 4y = 2$
$-2x + 3y = 1/4$

9) $7x - 4y = 2$
$-2x + 3y = 1/4$

10) $7x - 4y = 2$
$-2x + 3y = 1/4$

11) $7x - 4y = 2$
$-2x + 3y = 1/4$

12) $7x - 4y = 2$
$-2x + 3y = 1/4$

Aclaración: Si en uno de los problemas, al eliminar, digamos la x, en la segunda ecuación, llega a una forma, como sería el caso de ejemplo siguiente:

$$2x + 3y = 2$$

$$0x + 0y = 0,$$

El sistema tendría infinitas soluciones, para las cuales, despejando la x en la primera ecuación

(*) $x = -(3/2)\,y + 1$,

la cual sería la solución general.

Cada solución particular se puede hallar dando valores a la y, calculando el correspondiente valor de x, a partir de (*), así:

1. $y = 0 \Rightarrow x = 1.$ Solución particular: $x = 1$, $y = 0$
2. $y = 1 \Rightarrow x = -1/2$ Solución particular: $x = -1/2$, $y = 1$
3. $y = -2/3 \Rightarrow x = 2$ Solución particular: $x = 2$, $y = -2/3$
4. $y = 2/3 \Rightarrow x = 0$ Solución particular: $x = 0$, $y = 2/3$

y hemos hallado 4 soluciones particulares a partir de la solución general (*).

13. Demuestre que si la matriz A es no singular, se cumple la siguiente ley cancelativa a derecha. Es decir que si

$$CA = DA, \text{ entonces } C = D$$

14. Demuestre que si la matriz A es no singular y $A^2 - AB = 0$, entonces A = B.

15. a) Demuestre que una matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$ es no singular, sí y sólo si

$$\Delta = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \neq 0$$

y que en ese caso:

$$A^{-1} = (1/\Delta) \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

A Δ se le denomina, el **determinante** de A.

b) Señale si las siguientes matrices son no singulares. Halle la matriz inversa de cada una de las matrices no singulares.

i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Miscelánea de ejercicios

1) Demuestre que si

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, entonces A y B conmutan.

b) Halle dos matrices A y B de orden 2 tales que

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

2) a) Demuestre que si A y B son dos matrices tales que $(AB)^{-1} = A^{-1} B^{-1}$, entonces A y B conmutan. Es decir que AB = BA.

b) Halle dos matrices no singulares de orden 2, tales que $(AB)^{-1} \neq A^{-1} B^{-1}$

3) a) Demuestre que si $(AB)^T = A^T B^T$, entonces A y B conmutan.

b) Halle dos matrices A y B de orden 4 tales que $(AB)^T \neq A^T B^T$

4) Demuestre que si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

entonces, A es no singular si y sólo si $a_{ii} \neq 0$ (i = 1,2,3).

Demuestre además que si A es no singular, entonces

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33} \end{pmatrix}$$

5) a) Demuestre utilizando las propiedades de las operaciones entre matrices que

$$B(B^{-1}A + C)\, A^{-1} = I + BCA^{-1} .$$

b) Calcule $B(B^{-1}A + C)\, A^{-1}$, utilizando el lado derecho de la igualdad anterior, para no calcular B^{-1}.

6) Demuestre que A + 2 (A + 3B) = 3A + 6B.

7) Utilizando el hecho de que $A^n = AA \ldots^{n \text{ veces}} \ldots A$, demuestre que:

i) $A^{p+q} = A^p A^q = A^q A^p$

ii) $(A^p)^q = A^{pq}$

8)

a) Demuestre que para toda matriz A, -A = (-1) A

(Ayuda: A + (-A) = 0. Demuestre que A + (-1) A = 0)

b) Demuestre que para todo número real p y toda matriz A:

$$(-p)\, A = - (pA).$$

9.

a) Demuestre que si las matrices A y B conmutan, entonces $(AB)^n =$

$A^n B^n$, para todo número entero positivo n.

b) Halle matrices A y B de orden 2 y 3, tales que $(AB)^2 \neq A^2 B^2$.

10. Demuestre que si las matrices A, B, y A + B, son no singulares, entonces:

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A$$

Asuma que las operaciones están definidas.

Miscelánea (continuación)

1. Construya una matriz A de orden 2, diferente de **0**, con la propiedad **$A^2 = 0$**.

2. De un argumento general por el cual no es posible hallar una matriz A, no singular tal que $A^2 = 0$.
   Ayuda: Si A es no singular, entonces de $A^2 = 0$, se concluiría que:
   $A^{-1} A^2 = A^{-1} 0 = 0$.

3. a) Demuestre que si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

tiene la propiedad $A^2 = I$. (I es la matriz idéntica de orden 2), entonces:

$a_{12} = 0$ y $a_{11} = (+/-)\,1$, $a_{22} = (+/-)\,1$; o $a_{11} = (+/-)\,1$ y $a_{22} = -\,a_{11}$

4. Construya 6 matrices A , diferentes de I o –I, con la propiedad $A^2 = I$.

Será posible construir una matriz cuadrada C de orden 2, de la forma

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix}$$

con la propiedad $C^2 = -I$?.

5. Sea A una matriz A de dimensión mxn con la propiedad $A\,A^T = 0$.
   Concluya que necesariamente A = 0.

6. Sea

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{matrix} 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Demuestre que $A^4 = 0$.

7. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Halle un vector columna

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

diferente de **0**, tal que $A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$.

¿Cuál es la relación que deben satisfacer x_1 y x_2 para que el vector **x** tenga la propiedad $A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$?

8. La ecuación $x^2 = 1$, tiene exactamente dos soluciones si x es un número real. Encuentre por lo menos 3 matrices diferentes que satisfagan la ecuación matricial $A^2 = I$ (I es la matriz idéntica).

9. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Halle números reales x_1 , x_2 y x_3, si existen, tales que

$$D = x_1A + x_1B + x_1C$$

10. Compute las potencias

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^4$$

11.Si

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad y = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Compute i) xy^T ii) x^Ty

12.Muestre que una matriz con una fila o columna de ceros no puede tener matriz inversa

13.Muestre que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{no conmutan.}$$

14.Halle la relación que debe existir entre los números $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ para que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

conmute con la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

15.Si

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

calcule A^{-1}

16.Suponga que las matrices A y B de orden n son **ortogonales,** es decir tales que:

$A^{-1} = A^T$ y

$B^{-1} = B^T$

Es AB una matriz ortogonal ?. O dicho de otro modo es $(AB)^{-1} = (AB)^T$?.
Justifique su respuesta.

17.Es $(A + I)(A - I) = A^2 - I$?. Justifique su respuesta.

18. Dados los siguientes datos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 & -1/2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 & -1/2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule: i) $(AB)^{-1}$ ii) $(A^T)^{-1}$

19. Demuestre que si A y B son matrices cuadradas del mismo orden, entonces:

$(A + B)^T = A^T + B^T$.

Ayuda: Los elementos de $(A + B)^T$ en posición i, j, provienen de elementos en posición j, i de A+B, por lo tanto son de la forma $a_{ji} + b_{ji}$ Compárelos con los elementos en posición i , j de $A^T + B^T$.

20. Una matriz A de orden n es simétrica si $A = A^T$. Demuestre que si A y B son matrices simétricas entonces $A + B$ es una matriz simétrica.
    Ayuda: $(A + B)^T = A^T + B^T = A + \ldots$.
21. Demuestre que si F es una matriz cuadrada entonces $F + F^T$ es una matriz simétrica, aún cuando F no lo sea.

22. Verifique que aún cuando A y B sean matrices simétricas no necesariamente AB es una matriz simétrica.

23. Una matriz A es nilpotente si $A^k = 0$ para algún número entero positivo k.

    i) Demuestre que si $A^3 = 0$, entonces $(I - A)^{-1} = I + A + A^2$.
    ii) Demuestre que si $A^k = 0$, entonces
    $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{k-1}$.
24. Demuestre que $(I + C^{-1})^{-1} C^{-1} = (I + C)^{-1}$.
    Sugerencia: Demuestre que $(I + C^{-1})^{-1} C^{-1} (I + C) = I$.

25. Calcule la matriz A si:

    a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ b) $(7B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$

    Sugerencia: $(7 B)^{-1} = (1/7) B^{-1}$. Por qué ?

26. Asuma que A es una matriz cuadrada que satisface la ecuación $A^2 - 3A + I = 0$. Demuestre que $A^{-1} = 3I - A$.. Sugerencia: $A (3I - A) = I$. Por qué ?

27. Demuestre que $(A + B)^2 - (A - B)^2 = 2 (AB + BA)$.

28. Demuestre que si la matriz cuadrada P es tal que $P^2 = P$, entonces la matriz $J = I - 2P$ es tal que $J^2 = I$.

29. Demuestre que para toda matriz cuadrada A la matriz $A^T A$ es simétrica.

30. Suponga que la matriz A satisface la ecuación: $A^2 - 2A + I = 0$.
    Pruebe que $A^3 = 3A - 2I$ y $A^4 = 4A - 3I$.

31. Demuestre que si las matrices A y B conmutan, entonces las matrices A^T y B^T también conmutan.

32. Pruebe que si c es un número real, diferente de 0 y A es una matriz no singular, entonces: $(cA)^{-1} = (1/c)\,A^{-1}$.

33. Pruebe que: $(ABA^{-1})^2 = A\,B^2 A^{-1}$

34. Justifique por qué si A es una matriz simétrica de orden m y B es una matriz (no necesariamente simétrica) de orden mxn, entonces la matriz $B^T A\, B$ es una matriz simétrica.

35. Dada la ecuación $X^2 + 2X = 0$, en donde X es una matriz cuadrada. Se podrá concluir que necesariamente $X = 0$ o $X = -2\,I$?. Justifique su respuesta.

36. Encuentre la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_1 \\ 0 & k_2 & 0 \\ k_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$