

Cálculo de Dosis en Braquiterapia

Br. Priscila Vargas Chavarria

Resumen

Se presenta un compendio matemático de las principales ecuaciones a partir de las se obtienen los principales cálculos de dosis en Braquiterapia.

- Braqui del griego brachys que significa corto alcance.

Clasificación de Braquiterapia¹

TABLE 13.1. VARIOUS TYPES OF BRACHYTHERAPY IMPLANT

Type of implant	Description
Intracavitary	Sources are placed into body cavities close to the tumour volume
Interstitial	Sources are implanted surgically within the tumour volume
Surface (mould)	Sources are placed over the tissue to be treated
Intraluminal	Sources are placed in a lumen
Intraoperative	Sources are implanted into the target tissue during surgery
Intravascular	A single source is placed into small or large arteries

TABLE 13.4. BRACHYTHERAPY TREATMENTS CLASSIFIED WITH RESPECT TO DOSE RATE^a

Dose rate	Numerical value of the dose rate at the dose specification point(s)
Low dose rate (LDR)	0.4–2 Gy/h
Medium dose rate (MDR) ^b	2–12 Gy/h
High dose rate (HDR)	>12 Gy/h

^a The definitions here are according to the ICRU. In practice, HDR treatments are given with a substantially higher dose rate than that given by the lower limit of 12 Gy/h.

^b MDR is not in common use. In those few cases in which it has been used, the treatment results have been rather poor compared with LDR or HDR treatments.

Definición de la constante de tasa de exposición

Primero debemos redefinir nuestra tasa de exposición, de la siguiente manera

$$(1) \quad \dot{X} = \frac{dX}{dt} = \frac{A}{l^2} \Gamma_x$$

Donde, A es la actividad de la fuente, l es la distancia desde la fuente hasta el punto de estudio P, y Γ_X es la constante de tasa de exposición, que se define como:

$$(2) \quad \Gamma_X = 193,8 \sum_i^n \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right)_{air,i} E_i f_i \quad \text{en unidades de } \frac{R * m^2}{Ci * h}$$

Donde f_i es la cantidad de fotones que poseen la Energía E_i , y μ_{en} es el coeficiente másico de absorción.

Definición de la fuerza de Kerma en aire

En Braquiterapia, las fuentes se especifican mediante el concepto de fuerza de Kerma en aire (Air Kerma Strength), el cual se define como:

$$(3) \quad S_k = \dot{K}_{c\ air} l^2 \quad \text{en unidades de } \frac{\mu Gy * m^2}{h}$$

Recordemos que la tasa de Kerma en aire se relaciona con la tasa de exposición, como se presenta a continuación:

$$(4) \quad \left(\dot{K}_c \right)_{air} = 0,876 \dot{X} \quad \text{en unidades de } \frac{cGy}{h}$$

También, tomando ecuaciones (4) y (2), se llega fácilmente a (4.1) $S_k = 0,876 \dot{X} l^2 \frac{R}{h} \left(\frac{cGy}{R} \right) m^2$

Utilizando las ecuaciones (4), (3) y (1) se puede mostrar que, otra forma de expresar la fuerza del Kerma en aire es:

$$(5) \quad S_k = A_{app} \Gamma_{AKR}$$

Se introduce aquí una nueva constante, llamada Air Kerma Rate Constant, la cual se relaciona con la constante de tasa de exposición, así:

$$(6) \quad \Gamma_{AKR} = 236,8 \frac{\mu Gy * Ci}{R * GBq} \Gamma_X$$

Y además aparece el concepto de Actividad aparente, o equivalente, que para una fuente de braquiterapia se define como la actividad de una fuente puntual sin filtro, a un metro de distancia de la fuente, que me de el mismo kerma rate en aire, para el

mismo isótopo, en un punto ubicado perpendicularmente a la distribución. Es decir, cuando l vale 1m, en ecuación (1) y en ecuación (3).

Explícitamente éste valor sería $A_{app} = \frac{\dot{X}}{\Gamma_x} = \frac{(K_c)_{air}}{\Gamma_{AKR}}$. La Figura #1 indica con una flecha roja el punto donde se mediría ésta actividad equivalente.

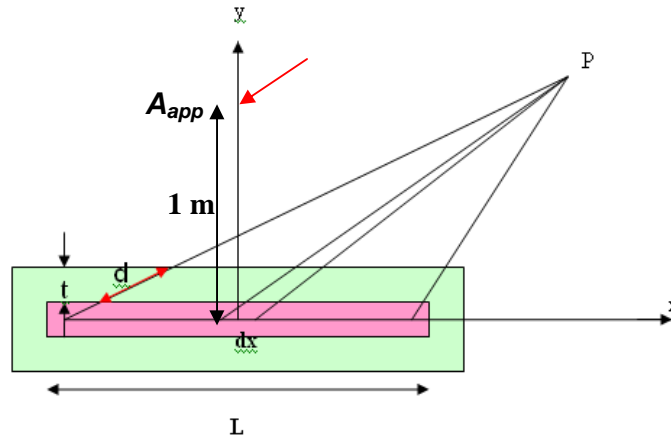


Figura #1 Indica el punto donde se mide la A_{app} .

Actualmente, las fuentes de Braquiterapia, según recomendación de la AAPM², se deben especificar en términos de la fuerza del kerma rate, S_k , que se relaciona con el Air Kerma rate en aire de referencia, como lo indica la ecuación (7), donde d_{ref}^2 se toma como 1 metro de distancia hasta la fuente. Además, el Air Kerma Rate de referencia, es el Kerma a esa misma distancia, cuando el fabricante de la fuente reporta éste valor lleva implícitamente las correcciones de atenuación y dispersión en aire (ICRU Reportes No 38 y No 58).

$$(7) \quad S_k = \dot{K}_{air}(d_{ref}) * d_{ref}^2$$

Análisis de fuentes puntuales

De ecuación (3) y (7) podemos reescribir la ecuación para el Air Kerma Rate en aire, se toma la distancia l como la distancia d , y se obtiene,

² AAPM: American Association of Physicists in Medicine.

$$(8) \left(\dot{K}_{air}(d) \right)_{air} = \dot{K}_{air}(d_{ref}) \left(\frac{d_{ref}}{d} \right)^2$$

Con ayuda de los polinomios de Meissberger, que se denotan con la letra M, se pueden tomar en cuenta las correcciones por atenuación y dispersión en agua, lo cual nos ayuda a definir el air kerma rate en agua, es decir, se toma el valor del kerma en aire y al aplicarle la corrección de Meissberger se obtiene el valor que se tendría para una misma fuente radiactiva pero en un medio de agua, a la misma distancia d. La ecuación (9) expresa éste enunciado:

$$(9) \left(\dot{K}_{air}(d) \right)_{water} = \left(\dot{K}_{air}(d) \right)_{air} M(d)$$

Aquí el polinomio de Meissberger se encuentra en función de la distancia desde el punto de estudio hasta la fuente, experimentalmente se ha visto que ésta corrección es válida para distancias mayores a 1cm y menores a los 10 cm. El gráfico#1 muestra como se comporta ésta corrección para fuentes de ^{192}Ir y ^{137}Cs .

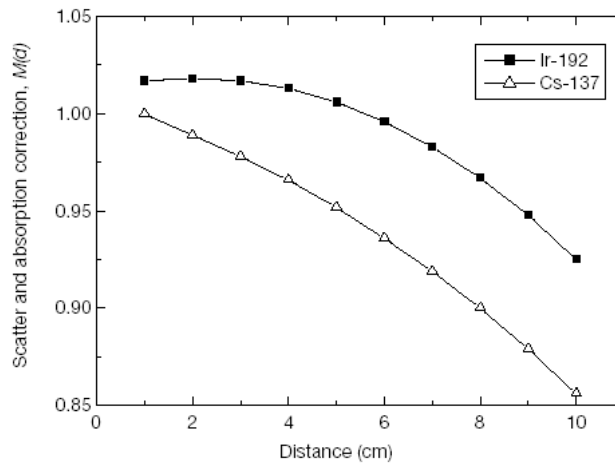


Gráfico #1. Corrección de Meissberger, para dispersión y atenuación en agua.³

Para el cálculo de la dosis en un medio de agua, se necesita el valor del kerma en agua en un medio de agua, que se relaciona directamente con el valor del air kerma rate en agua, ésta relación se muestra en la ecuación (10), y se define la tasa de dosis en agua, por medio de la relación de los coeficientes másicos de energía transferida, como se muestra en ecuación (11).

$$(10) \left(\dot{K}_{wat} \right)_{wat} = \left(\dot{K}_{air} \right)_{wat} \left(\frac{\mu_{tr}}{\rho} \right)_{air}^{wat}$$

³ Tomado de *Radiation oncology physics : a handbook for teachers and students / editor E. B. Podgorsak ; sponsored by IAEA.*

$$(11) \dot{D}_{wat} = \left(\dot{K}_{wat} \right)_{wat} (1 - g)$$

El término g que aparece para el cálculo de dosis, representa la fracción de energía que se pierde por pérdidas radiativas, usualmente éste valor se ignora para fuentes utilizadas en Braquiterapia, ya que tiende a ser menor del 0.3%⁴ en la mayoría de los casos.

Finalmente, el valor explícito de la dosis en agua, en función de la distancia de d y tomando en cuenta las especificaciones de la fuente, se obtiene:

$$(12) \dot{D}_{wat}(d) = \left(\dot{K}_{air}(d_{ref}) \right)_{air} M(d) \left(\frac{\mu_{tr}}{\rho} \right)_{air}^{wat} (1 - g) \left(\frac{d_{ref}}{d} \right)^2$$

Análisis de fuentes lineales

Para una distribución lineal, se considera que estará constituida por una secuencia de fuentes puntuales, de ésta manera el polinomio de Meissberger estará en función tanto de la distancia hasta la fuente, como del ángulo que ayuda a ubicar el punto de estudio. Además se hace uso de la integral de Sievert⁵, que incluye correcciones de filtración que afectan a la fluencia energética de fotones provenientes de la fuente y que al pasar por la cápsula que envuelve al radionucleido se ve atenuada de manera exponencial. Con ayuda de la figura #2, se obtienen las relaciones geométricas $x = h \tan \theta$, $r = h \sec \theta$, $dx = h(\sec \theta)^2 d\theta$. A partir de ecuación (1), tomando l como la distancia r , y aplicando la integral de Sievert, se obtiene ecuación (13):

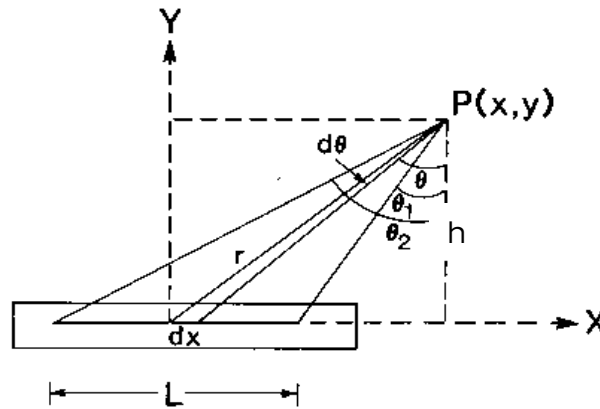


Figura #2. Análisis geométrico de una distribución lineal radiactiva.

⁴ Tomado de *Radiation oncology physics : a handbook for teachers and students / editor E. B. Podgorsak ; sponsored by IAEA.*

⁵ Integral de Sievert: $F(r, \theta) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-\mu' r \sec \theta} d\theta$

$$(13) \quad \dot{X} = \frac{A\Gamma_X}{Lh} \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-\mu' t \sec \theta} d\theta$$

Es importante recalcar que la integral de Sievert se encuentra tabulada, ya que en su resolución intervienen métodos numéricos, en los últimos años se han hecho simulaciones con modelos estadísticos como Monte Carlo, disminuyendo así los errores que introduce Sievert en sus aproximaciones, sobre todo en las partes terminales de las fuentes, donde se introduce mayor error debido a la geometría de la fluencia de energía.

Para cálculos rápidos de la integral de Sievert, se puede usar la siguiente aproximación $\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-\mu' t \sec \theta} d\theta \approx \theta e^{-\mu' t}$, válida sólo para $\theta < 20^\circ$.

Se define μ' como el coeficiente de atenuación efectiva, cuyo valor está en función del espesor del filtro t , y de los coeficientes másicos de energía absorbida en aire, así como de las energías de los fotones emitidos por la fuente,

$$(14) \quad \mu'(t) = -\left(\frac{1}{t}\right) \ln \left[\frac{\sum_i E_i f_i \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right)_{air,i} e^{-\mu_{en,i} t}}{\sum_i E_i f_i \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right)_{air,i}} \right]$$

La ecuación (14) se utiliza para calcular el coeficiente de atenuación efectiva para aquellos casos en los que no se cuente con el dato, ya que también se encuentra tabulado.

Una vez que tenemos la tasa de exposición, se puede expresar el air kerma rate en aire, como indica la ecuación (15):

$$(15) \quad \left(\dot{K}_{air} \right)_{air} = \frac{A\Gamma_{AKR}}{Lh} \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-\mu' t \sec \theta} d\theta$$

Y de manera análoga a la de las fuentes puntuales, se obtiene la expresión para la tasa de dosis en agua, incluyendo la corrección por dispersión y atenuación en agua que pueden sufrir los fotones, es decir el término $M(d, \theta)$.

$$(16) \quad \dot{D}_w(d, \theta) = \frac{A\Gamma_{AKR}}{Lh} \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-\mu' t \sec \theta} M(d, \theta) d\theta \right) \left(\frac{\mu_{tr}}{\rho} \right)_{air}^{water} (1-g)$$

Análisis de fuentes con simetría cilíndrica, AAPM TG43.

⊕ Es un modelo de cálculo de dosis modulada.

- ⊕ Es considerado el modelo mas completo disponible actualmente.
- ⊕ Fue introducido en 1995 por la AAPM.
- ⊕ Permite calcular la distribución de dosis de manera bidimensional, alrededor de una fuente con simetría cilíndrica.

Su expresión matemática está dada mediante la relación de varias correcciones que se aplican al mismo tiempo, y que son analizadas por separado, lo cual es más simple de realizar, en comparación con los modelos de fuentes puntuales y lineales, ya que la medición del coeficiente de atenuación efectivo no siempre es fácil, y esto entorpece las aproximaciones, introduciendo muchos errores.

$$(17) \dot{D}(r, \theta) = S_K \Lambda \frac{G(r, \theta)}{G(r_0, \theta_0)} g(r) F(r, \theta)$$

En el modelo de cálculo de dosis modulada, ecuación (17), r es la distancia en cm desde la fuente hasta el punto de estudio P. El ángulo θ ubica el radio vector r , con respecto al eje de simetría axial de la fuente cilíndrica, es decir el eje z , como se aprecia en la figura #3. S_K es la fuerza del kerma en aire dado en unidades de $\mu\text{Gym}^2\text{h}^{-1}$. El punto $P(r_0, \theta_0)$, es un punto que se toma de referencia, donde $r_0 = 1\text{cm}$ y $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, en éste punto se mide la tasa de dosis $\dot{D}(r_0, \theta_0)$, con esto

se define la constante de dose rate en agua, (18) $\Lambda = \frac{\dot{D}(r_0, \theta_0)}{S_K}$ en unidades⁶ de $\text{cGyh}^{-1}\text{U}^{-1}$. La importancia de la constante de tasa de dosis radica en lo que representa conceptualmente, ya que incluye los efectos de la geometría de la fuente, tales como la distribución espacial de la fluencia de energía dentro de la capsula que envuelve al material radiactivo, así como los efectos de dispersión en agua, y de auto-filtración hacia el interior de la misma fuente.

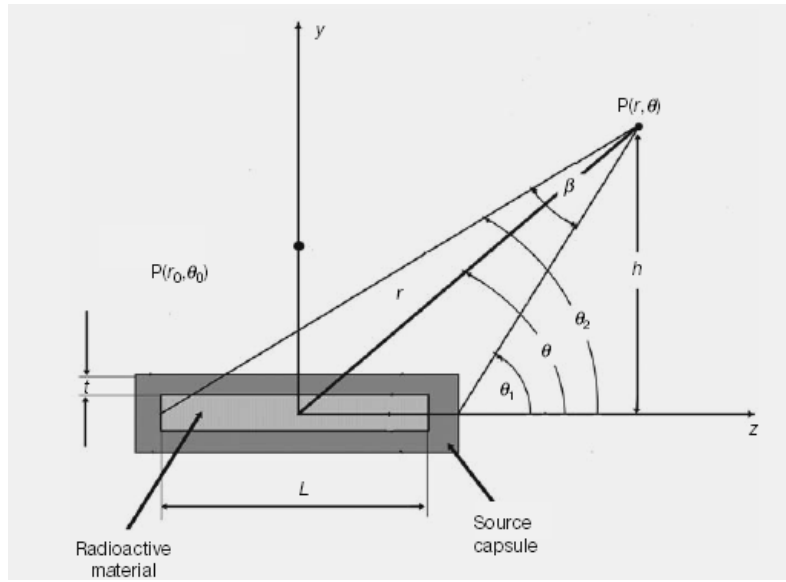
La función geométrica $G(r, \theta)$ representa la variación de la dosis relativa debida a la distribución espacial de la actividad dentro de la fuente. Es decir toma en cuenta el decaimiento de la fuente. Para fuentes puntuales $G(r, \theta) = \frac{1}{r^2}$, y para fuentes

lineales $G(r, \theta) = \frac{\beta}{Lr \sin \theta}$.

El factor anisotrópico $F(r, \theta)$ explica la distribución anisotrópica de la dosis alrededor de la fuente, incluye las correcciones por dispersión y absorción en un medio de agua, se ve afectado por el espesor t de la capsula de la fuente, así como también cuando $\theta \rightarrow 0^\circ$ y $\theta \rightarrow 180^\circ$.

Y $g(r)$ es la función radial de dosis, que aplica sólo para las vecindades de $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, incluyendo las correcciones por dispersión y absorción en agua.

⁶ $1\text{U} = 1\mu\text{Gy} * \text{m}^2 * \text{h}^{-1} = 1\text{cGy} * \text{cm}^2 * \text{h}^{-1}$



Figura#3. Análisis geométrico para el modelo AAPM TG43. ⁷

Análisis para implantes y corrección por decaimiento radiactivo.

Cuando se hacen implantes permanentes, se debe tomar en cuenta el decaimiento exponencial radiactivo que sufre el radionucleido, así la dosis total al final del tratamiento será, (19) $D_{total} = \dot{D}_0 \tau$, donde τ representa la vida media del radioisótopo. A continuación se presenta el calculo de la dosis acumulada D_c , a partir de la tasa de Dosis la cual decae de manera exponencial, en función de la tasa inicial de dosis \dot{D}_0 .

$$\dot{D} = \dot{D}_0 e^{-\lambda t}$$

$$\dot{D} = \dot{D}_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t}$$

$$D = \int \dot{D}_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} dt$$

$$D_c = \dot{D}_0 \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} \right)$$

$$D_c = \dot{D}_0 \tau \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} \right)$$

⁷ Tomado de: *Radiation oncology physics : a handbook for teachers and students / editor E. B. Podgorsak ; sponsored by IAEA.*

Ejercicios para cimentar los nuevos conocimientos en la presentación.