Cálculo de las raíces reales de

Ecuaciones Algebraicas y Trascendentes

con la TI Voyage 200

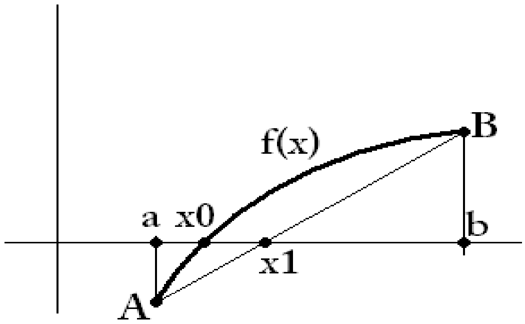
Fermí Vilà

Método de las Cuerdas o Regla de las Partes Proporcionales o de la "Regula Falsi"

Queremos resolver $f(x)=0$

Supongamos: $f(a)f(b)<0$ con $a<b$

Gráficamente, tenemos:



Siendo ***x0*** la raíz buscada y ***x1*** una primera aproximación, por el hecho de considerar la cuerda ***AB***, por esta razón se denomina ***método de las cuerdas***.

$A=(a, f(a))$
$B=(b, f(b))$

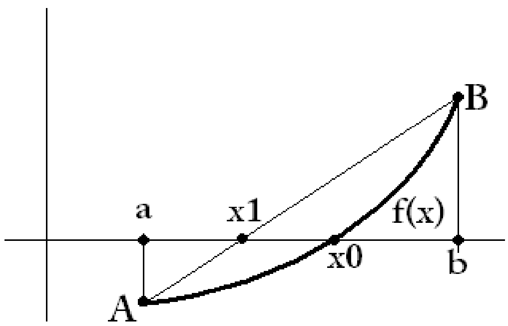
Ecuación de la recta AB: $y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, su punto de corte con el eje de abscisas será: $(x1,0)$, es decir:

$-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x1-a)$, despejando x1 tendremos: $x1=a-\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}$

A partir de aquí basta repetir el proceso:

Una segunda aproximación "x2" será: $x2=a-\frac{(x1-a)f(a)}{f(x1)-f(a)}$, es decir el nuevo valor de "b" es "x1".

Hemos de tener en cuenta que en el caso:



La aproximación "x2" seria:

$$x2=x1-\frac{(b-x1)f(x1)}{f(b)-f(x1)}$$

Resumiendo, el "Método de las Cuerdas", para determinar las raíces de una ecuación, consiste en lo siguiente:

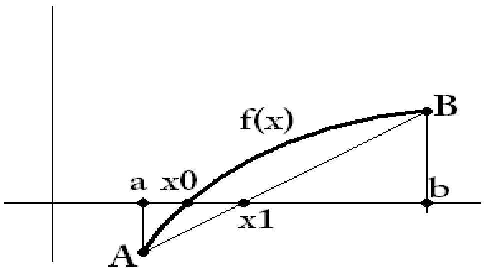
Queremos resolver la ecuación: $f(x)=0$

1º) Hemos de terminar un cambio de signo en la función, es decir: los valores "a" y "b" tales que:

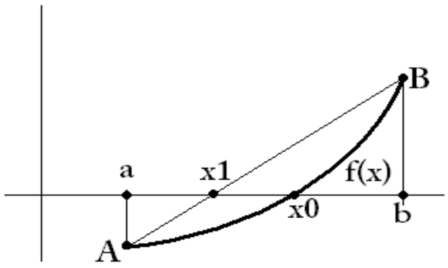
$$f(a)\,f(b)<0 \quad \text{con} \quad a<b$$

2º) Pueden darse dos casos:

Caso 1



Caso 2



3º) Calculamos las diferentes aproximaciones a la raíz "x0" buscada, de la siguiente forma:

Caso 1

$$x1=a-\frac{(b-a)\,f(a)}{f(b)-f(a)}$$

$$x2=a-\frac{(x1-a)\,f(a)}{f(x1)-f(a)}$$

$$x3=a-\frac{(x2-a)\,f(a)}{f(x2)-f(a)}$$

etc ...

Caso 2

$$x1=a-\frac{(b-a)\,f(a)}{f(b)-f(a)}$$

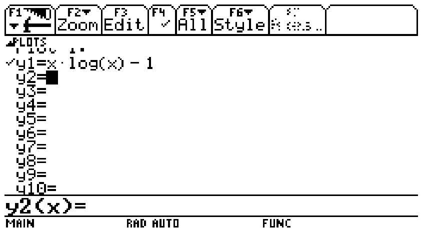
$$x2=x1-\frac{(b-x1)\,f(x1)}{f(b)-f(x1)}$$

$$x3=x2-\frac{(b-x2)\,f(x2)}{f(b)-f(x2)}$$

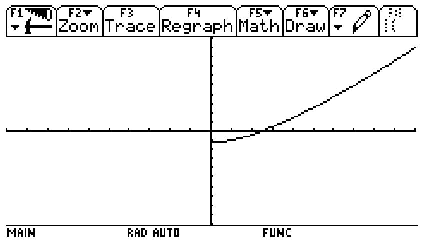
etc ...

Resuelve por el método de la “Regula Falsi”, la ecuación: $x\log(x)-1=0$

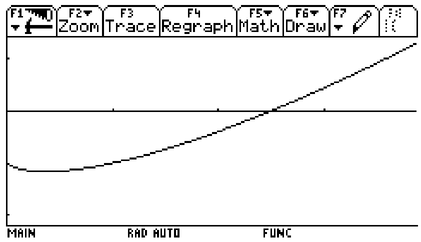
[APPS] – [Y= Editor] Introducimos la función:



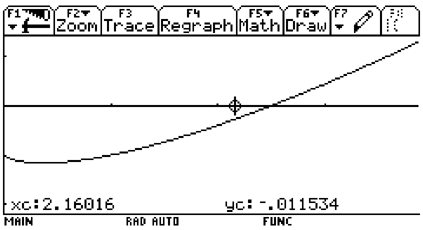
[APPS] – [Graph] La representamos gráficamente:



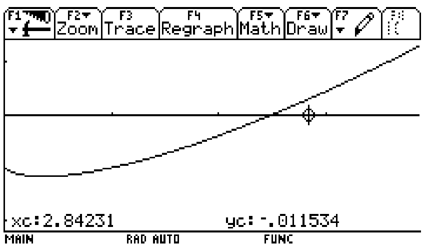
Con [F2] – ZoomBox Mejoramos la visualización:



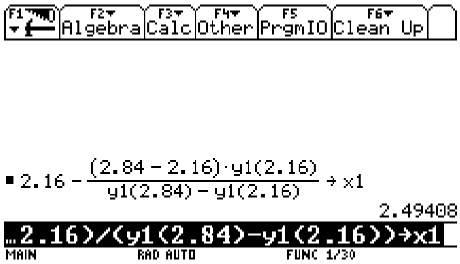
Movemos el cursor para localizar un valor de “a = 2.16”



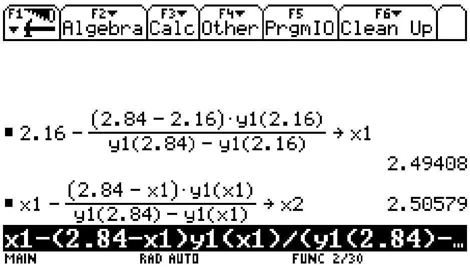
Y una aproximación de “b = 2.84”



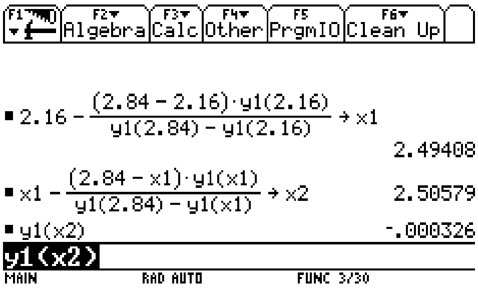
[APPS]- [Home] Introducimos la primera aproximación “x1”:



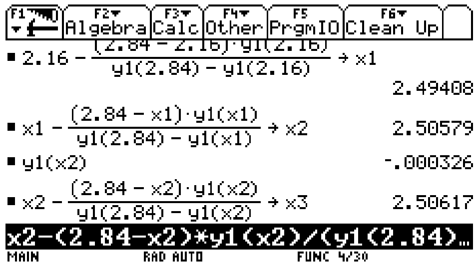
Y una segunda aproximación “x2”, ten en cuenta que se trata del “2º tipo”:



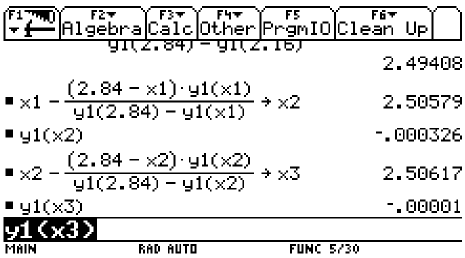
Veamos el error que hacemos:



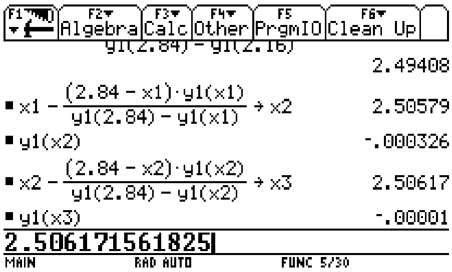
Otra aproximación:



Con un error:



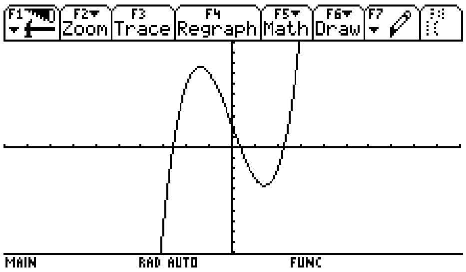
Como la aproximación ya nos parece suficiente, editamos el valor de x3, para obtener más decimales:



Tenemos pues: **2.506171561825**, es la raíz buscada con un error de **-0.00001**.

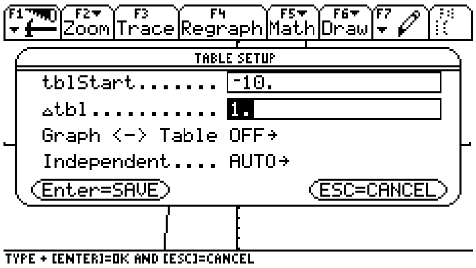
Resuelve por el método de la “Regula Falsi”, la ecuación: $x^3 - 6x + 2 = 0$

[APPS] – [Y = Editor] Introducimos la función y la representamos gráficamente:

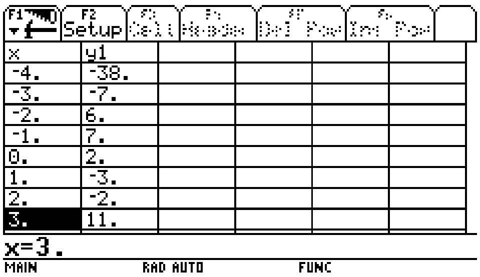


Está claro que tenemos tres raíces, vamos a acotarlas utilizando la opción [TBLSET][TABLE].

Accede a la configuración de la “tabla”, es decir: [TBLSET], y considera:



[TABLE]

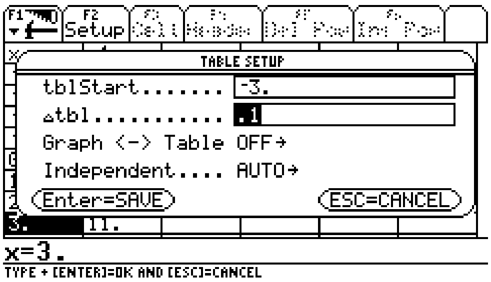


x	y1
-4.	-38.
-3.	-7.
-2.	6.
-1.	7.
0.	2.
1.	-3.
2.	-2.
3.	11.

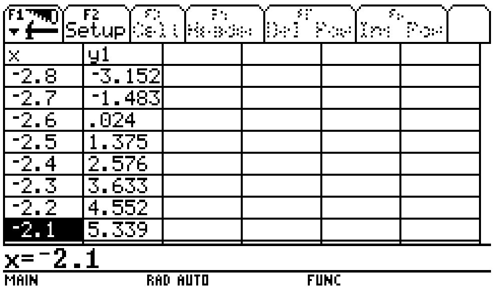
x=3.

MAIN RAD AUTO FUNC

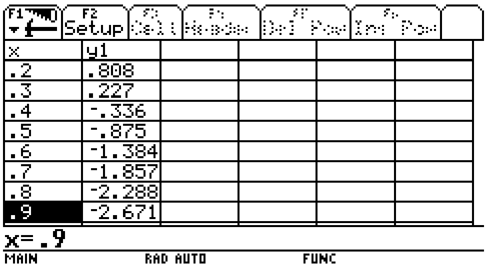
Tenemos un cambio de signo entre -3 y -2, otro cambio entre 0 y 1, y un último cambio de signo entre 2 y 3.
Vamos a afinar más nuestra acotación; basta acceder de nuevo a [TBLSET] y considerar:



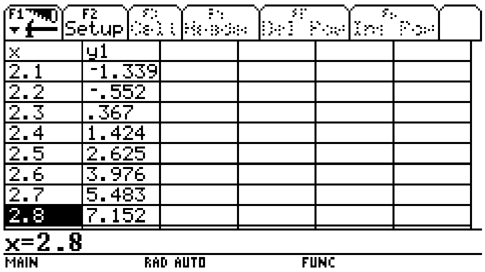
Observa:



Tenemos una raíz entre -2.7 y -2.6

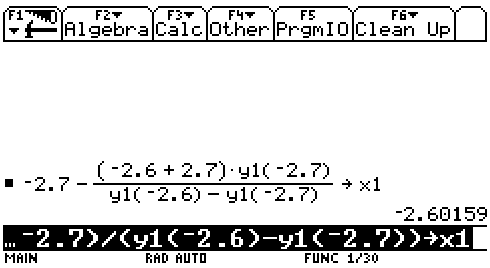


Otra raíz entre 0.3 y 0.4

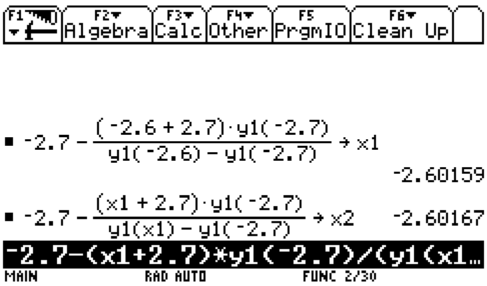


Y la tercera raíz se encuentra entre 2.2 y 2.3

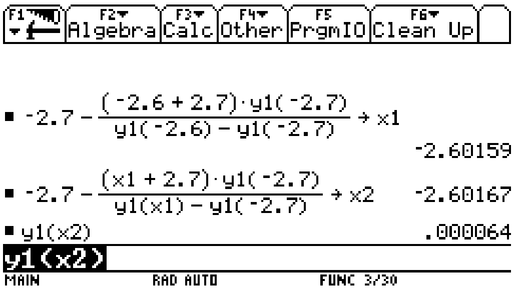
Vamos a buscar la raíz entre a = -2.7 y b = -2.6



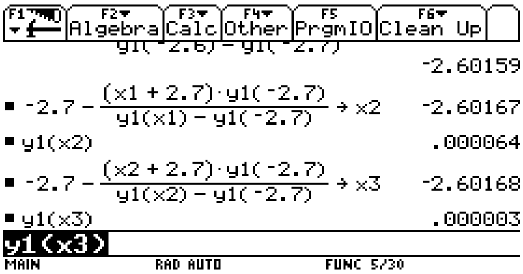
Busquemos una segunda aproximación, observa que nos encontramos en el primer caso, es decir la raíz buscada se encuentra entre “a” y “x1”:



Con un error:

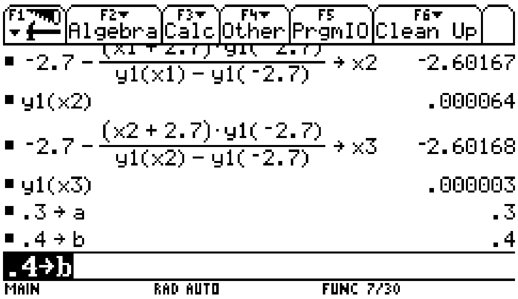


Busquemos otra aproximación:

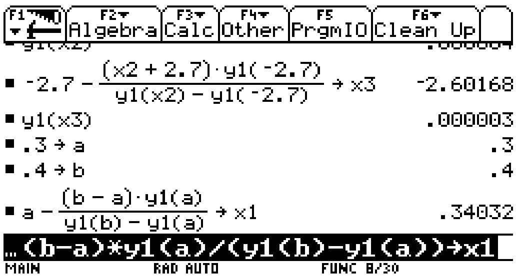


Tenemos pues una raíz: **-2.60168**, con un error de **0.000003**

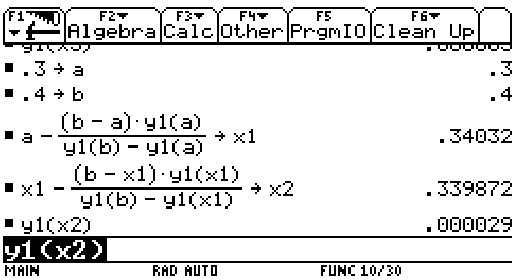
Vayamos a buscar la raíz entre "a = 0.3 y b = 0.4":



Una primera aproximación:

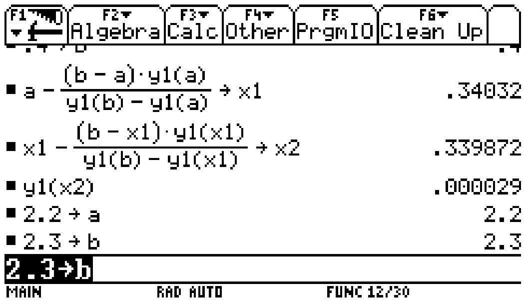


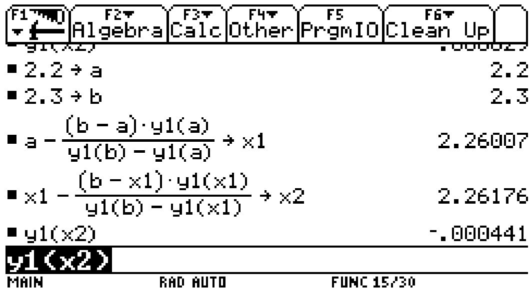
Una segunda aproximación (es del segundo tipo, es decir la raíz se encuentra entre "x1" y "b":

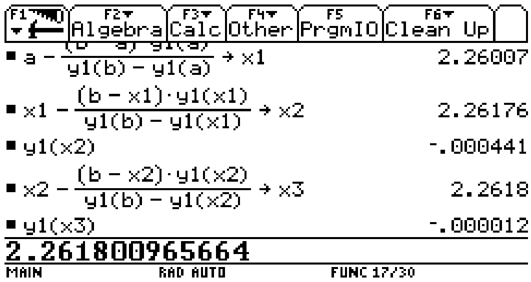


Tenemos pues la raíz **0.339872** con un error de **0.000029**

Vamos a por la última raíz:







Tenemos pues la tercera raíz: 2.261800965664 con un error de -0.000012

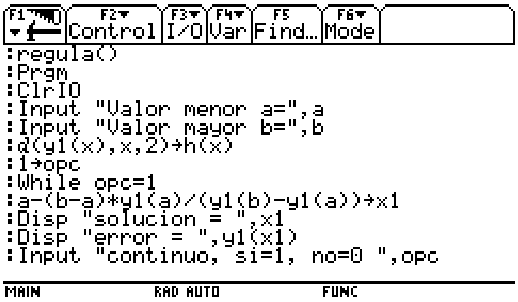
Programa en "TI-Basic" que resuelve una ecuación por el método de la "Regula Falsi"

Se supone definida la función "y1(x)" y conocido el intervalo (a , b) donde tenemos una raíz de la ecuación "y1(x)=0"

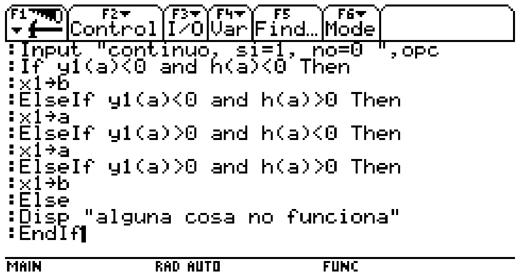
[APPS] – [Program Editor]

Type: Program
Variable: regula

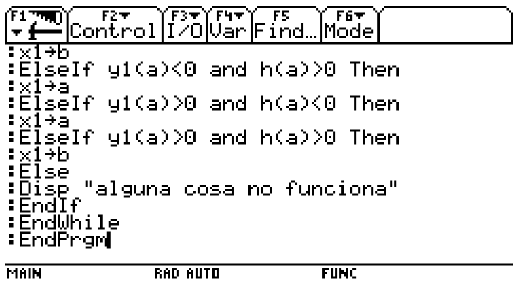
Escribe:



```
F1 F2 Control F3 I/O F4 Var F5 Find... F6 Mode
:regula()
:Prgm
:ClrIO
:Input "Valor menor a=",a
:Input "Valor mayor b=",b
:d(y1(x),x,2)→h(x)
:1→opc
:While opc=1
:a-(b-a)*y1(a)/(y1(b)-y1(a))→x1
:Disp "solucion = ",x1
:Disp "error = ",y1(x1)
:Input "continuo, si=1, no=0 ",opc
MAIN RAD AUTO FUNC
```

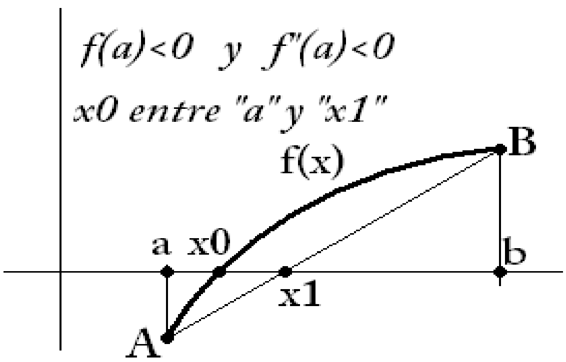


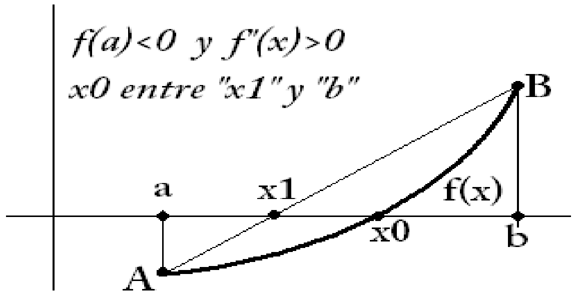
```
F1 F2 Control F3 I/O F4 Var F5 Find... F6 Mode
:Input "continuo, si=1, no=0 ",opc
:If y1(a)<0 and h(a)<0 Then
:x1→b
:ElseIf y1(a)<0 and h(a)>0 Then
:x1→a
:ElseIf y1(a)>0 and h(a)<0 Then
:x1→a
:ElseIf y1(a)>0 and h(a)>0 Then
:x1→b
:Else
:Disp "alguna cosa no funciona"
:EndIf
MAIN RAD AUTO FUNC
```

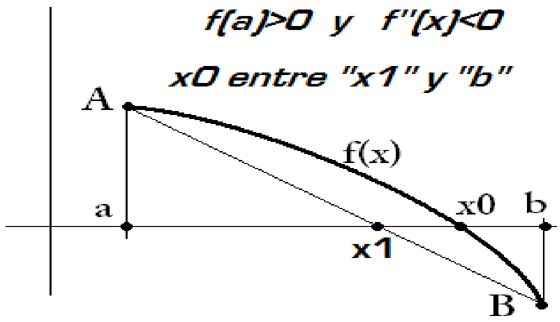


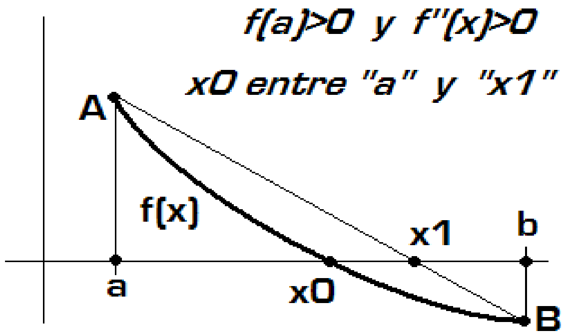
```
F1 F2 Control F3 I/O F4 Var F5 Find... F6 Mode
:x1→b
:ElseIf y1(a)<0 and h(a)>0 Then
:x1→a
:ElseIf y1(a)>0 and h(a)<0 Then
:x1→a
:ElseIf y1(a)>0 and h(a)>0 Then
:x1→b
:Else
:Disp "alguna cosa no funciona"
:EndIf
:EndWhile
:EndPrgm
MAIN RAD AUTO FUNC
```

Observa que separamos los diferentes casos según el signo de f(a) y el hecho de ser cóncava o convexa en "a" (y1"(x) = h(x), positivo o negativo):



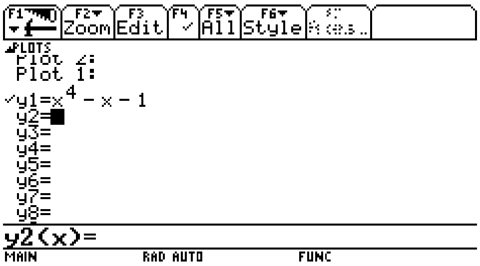

f(a)<0 y f''(x)>0
x0 entre "x1" y "b"
B
a
x1
f(x)
x0
b
A


f(a)>0 y f''(x)<0
x0 entre "x1" y "b"
A
f(x)
a
x0
b
x1
B

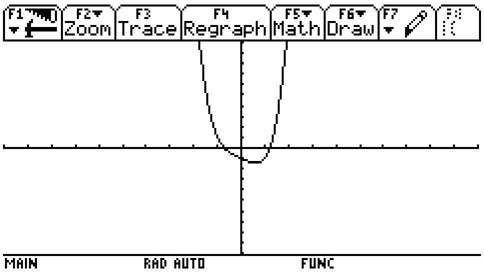

f(a)>0 y f''(x)>0
x0 entre "a" y "x1"
A
f(x)
x1
b
a
x0
B

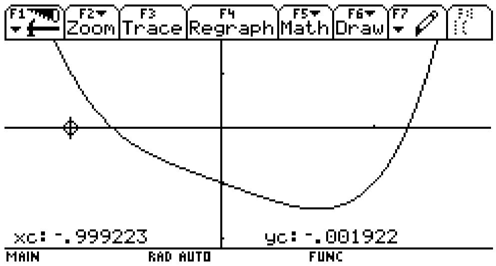
Resuelve utilizando el programa **regula()**, la ecuación: $x^3 - 6x + 2 = 0$

[APPS] – [Y= Editor] Introducimos la función:



[APPS] – [GRAPH] Representamos gráficamente la función:

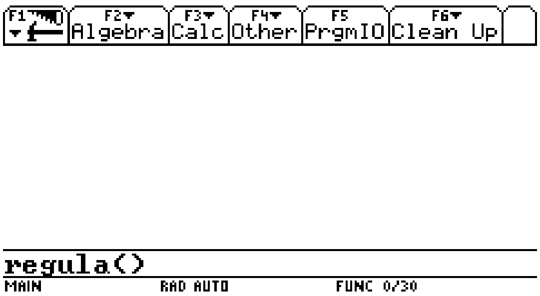




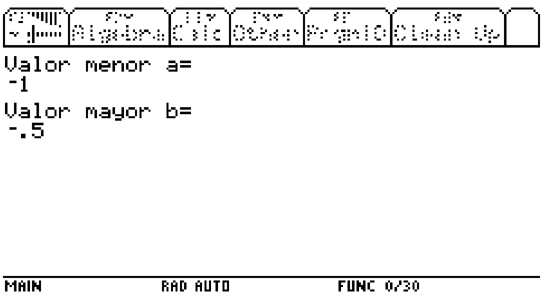
Localizamos una raíz entre -1 y -0.5, y otra raíz entre 1 y 1.5

Busquemos la raíz entre -1 y 0.5:

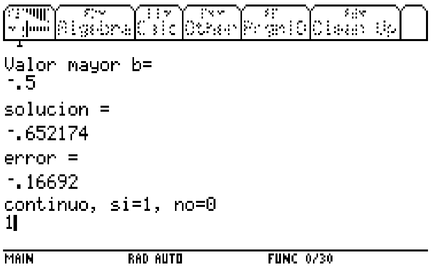
[APPS] – [HOME] Para ejecutar el programa:

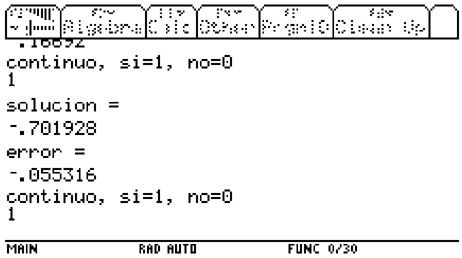


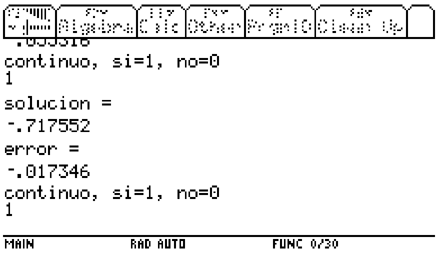
Introducimos el valor de “a” y de “b”:

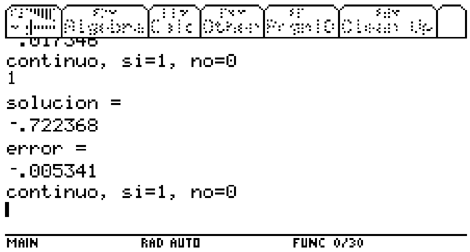


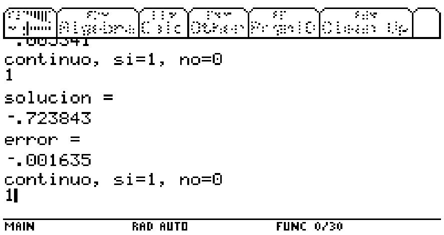
A partir de este momento repetimos la ejecución del programa (opc = 1), tantas veces como deseemos (depende del error deseado está claro):

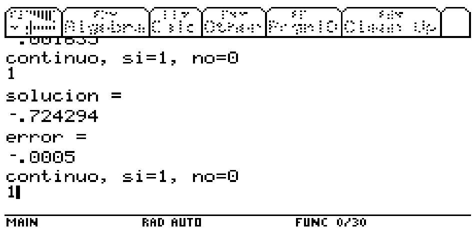


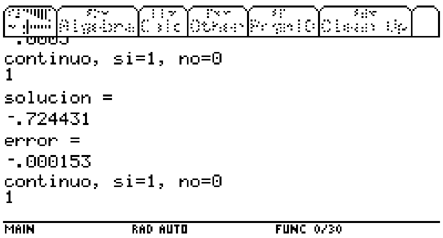


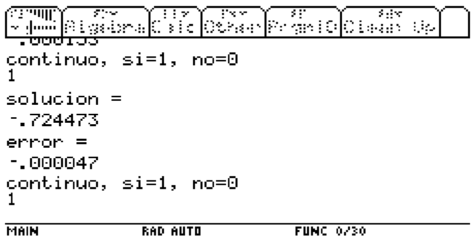


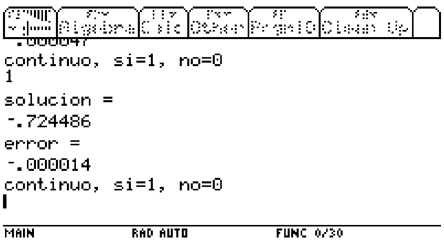


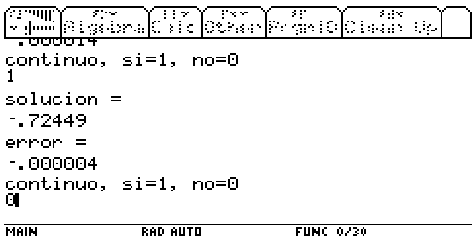




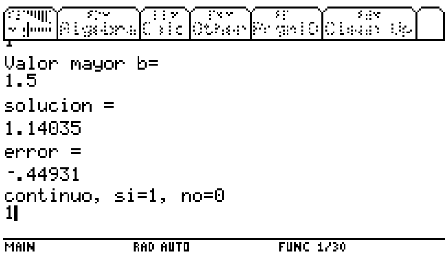


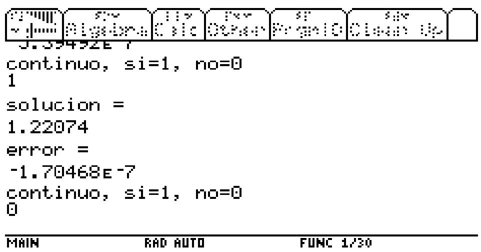






En definitiva, tenemos la solución en **-0.72449**, con un error de **-0.000004**
Busquemos la raíz entre 1 y 1.5. Volvemos a ejecutar el programa **regula()** y

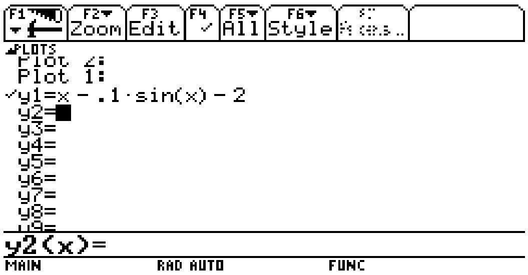




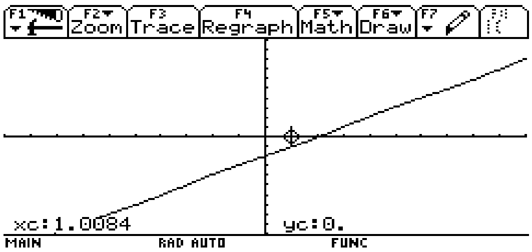
Después de ejecutarlo varias veces tenemos la raíz en **1.22074**, con un error muy pequeño.

Resuelve utilizando el programa **regula()**, la ecuación: $x-0.1\sin(x)=2$

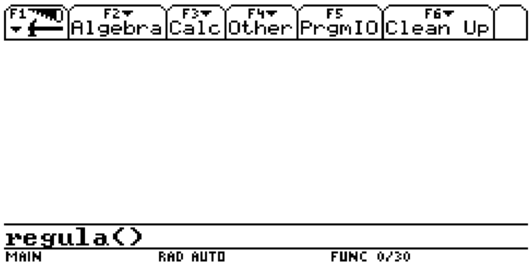
Definimos la función:



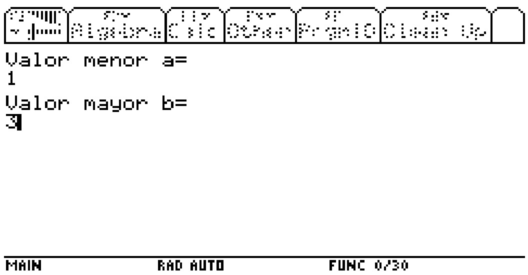
La representamos gráficamente para acotar las raíces:



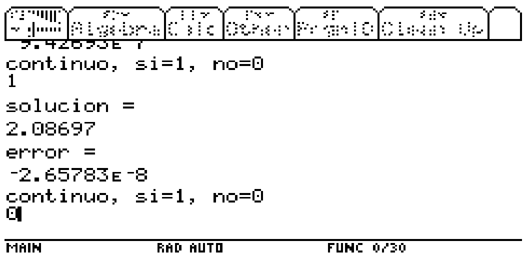
La raíz resulta estar entre 1 y 3
Ejecutamos el programa:



Introducimos los valores de "a" y "b":



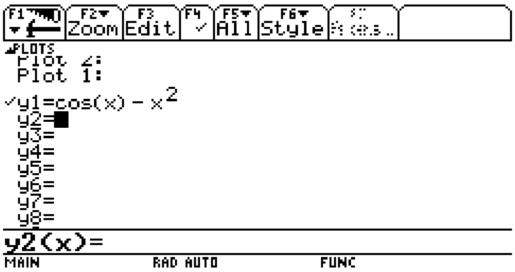
Después de ejecutar el programa varias veces, tenemos:

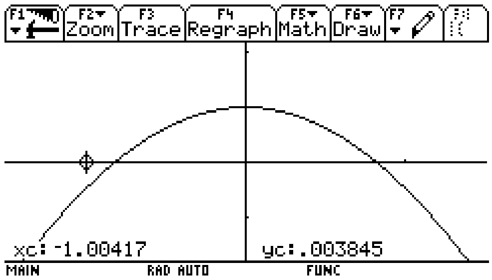


La raíz buscada es **2.08697**

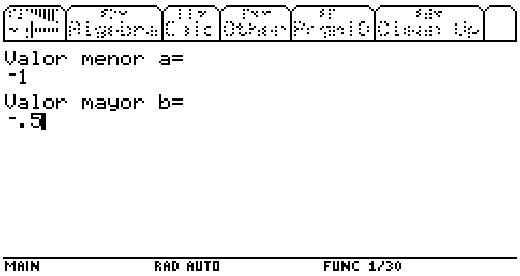
Resuelve utilizando el programa **regula()**, la ecuación: $\cos(x)=x^2$

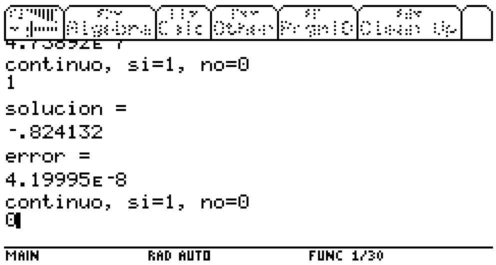
Definimos la función y la representamos gráficamente:





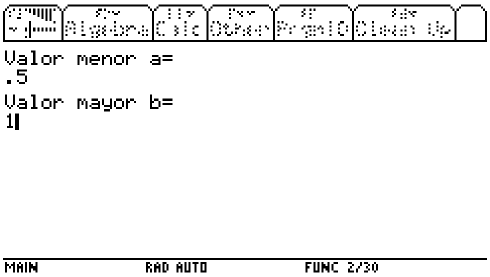
Raíz entre -1 y -0.5:

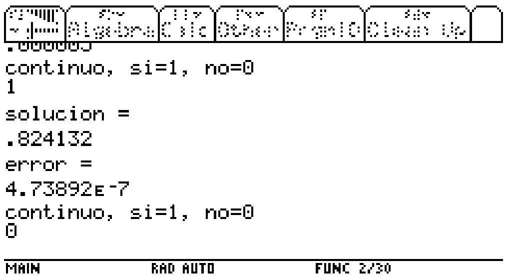




Raíz buscada: **-0.824132**

Raíz entre 0.5 y 1:





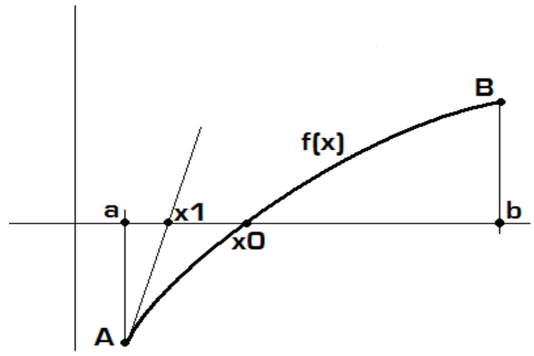
Raíz buscada: **0.824132**

Método de Newton o de la Tangente

En vez de sustituir el arco $y=f(x)$ por una cuerda, el método de Newton lo sustituye por la tangente en un extremo.

La tangente que sustituye el arco de curva se elige en el extremo en que $f(x)$ y $f''(x)$ tienen el mismo signo.

En el caso:



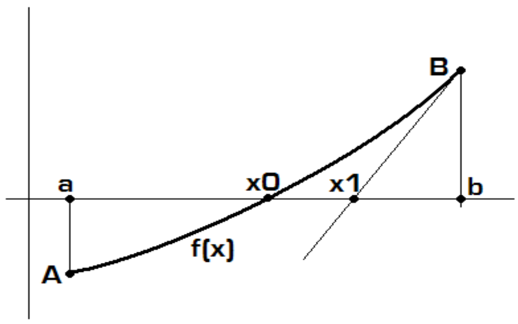
$f(a)<0$ y $f''(a)<0$, por lo tanto la tangente en el extremo A (a,f(a)), que tendrá por ecuación:

$y=f(a)+f'(a)(x-a)$, busquemos la aproximación "x1", que no es más que la intersección de la tangente anterior con el eje de las "X", y por tanto:

$0=f(a)+f'(a)(x1-a)$, despejando:

$$x1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

En el caso:



$f(b)>0$ y $f''(b)>0$, por lo tanto la tangente en el extremo B (b,f(b)), que tendrá por ecuación:

$y=f(b)+f'(b)(x-b)$, busquemos la aproximación "x1", que no es más que la intersección de la tangente anterior con el eje de las "X", y por tanto:

$0=f(b)+f'(b)(x1-b)$, despejando:

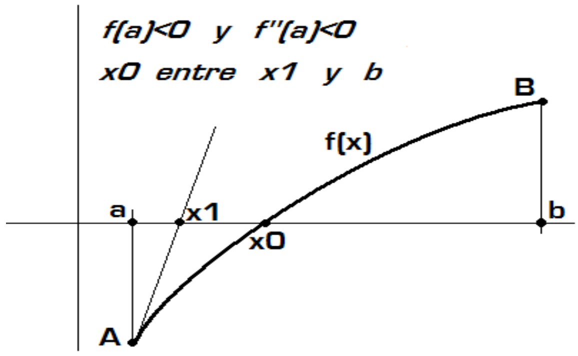
$$x1=b-\frac{f(b)}{f'(b)}$$

Resumiendo:

$$x1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

$$x2 = x1 - \frac{f(x1)}{f'(x1)}$$

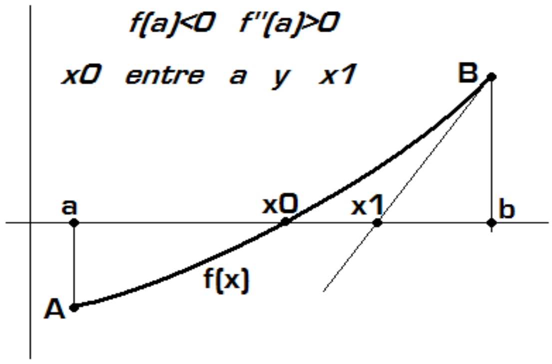
etc ...



$$x1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

$$x2 = x1 - \frac{f(x1)}{f'(x1)}$$

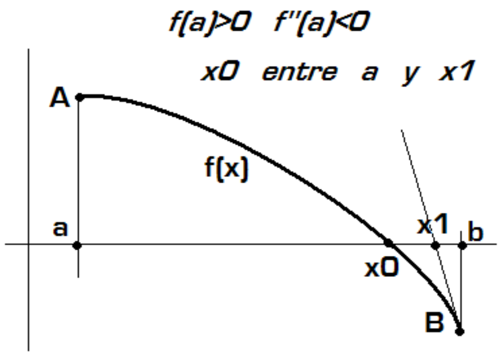
etc ...



$$x1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

$$x2 = x1 - \frac{f(x1)}{f'(x1)}$$

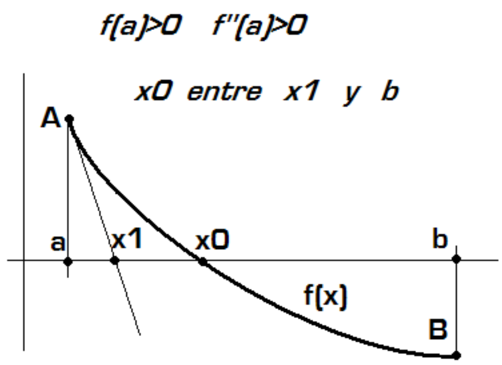
etc ...



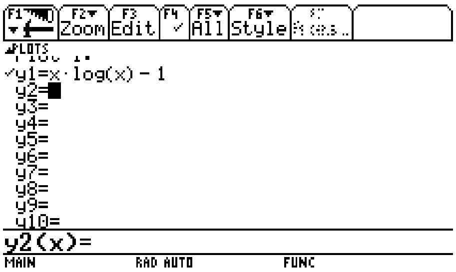
$$x1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

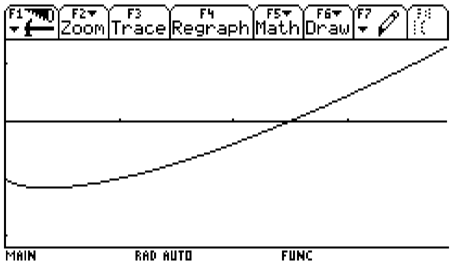
$$x2 = x1 - \frac{f(x1)}{f'(x1)}$$

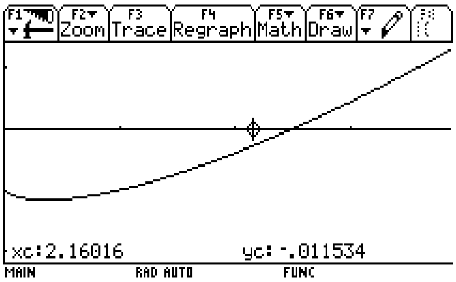
etc ...

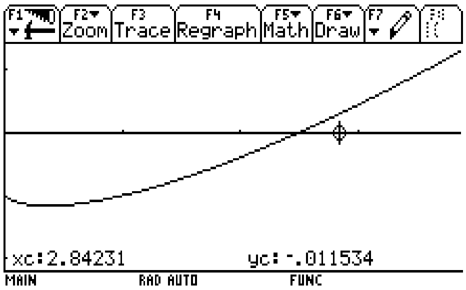


Resuelve por el método de "Newton", la ecuación: $x\log(x)-1=0$



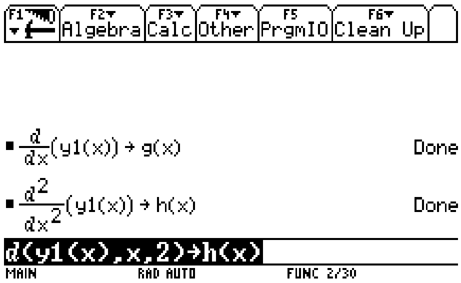




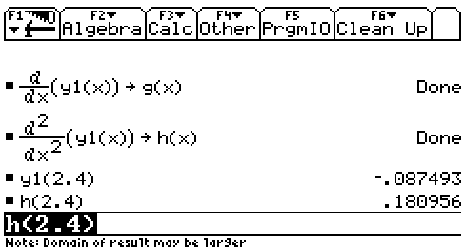


Ya habíamos determinado en otro ejercicio anterior que a = 2.4 y b = 2.7

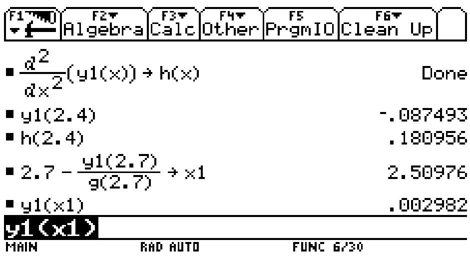
Definimos g(x), primera derivada de y1(x) y h(x) la segunda derivada:



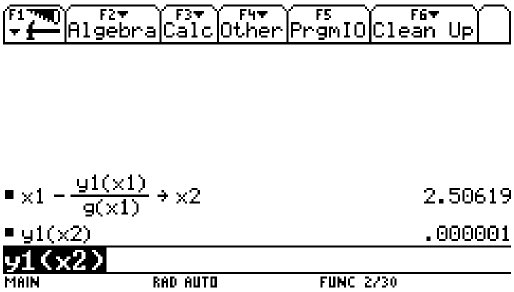
Calculamos f(a) y f''(a):



Por lo tanto:



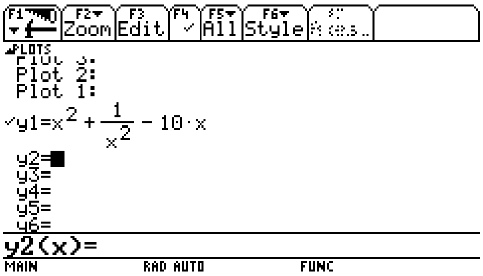
Tenemos una primera aproximación: x1 = 2.50976.



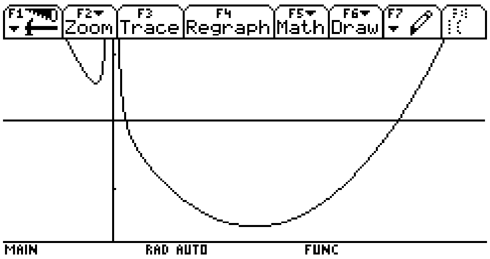
Definitivamente tenemos una solución **2.50619** con un error del **0.000001**

Resuelve por el método de "Newton", la ecuación: $x^2+\frac{1}{x^2}=10\text{x}$

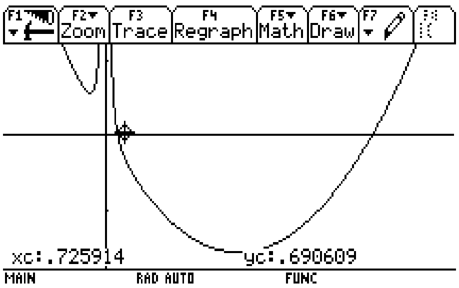
Definimos la función:

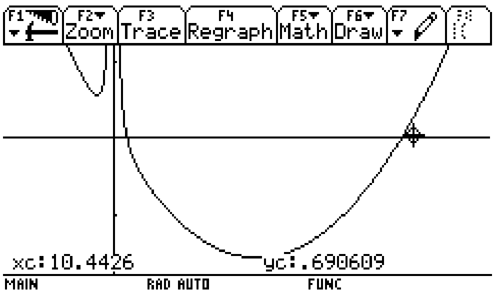


Gráficamente:



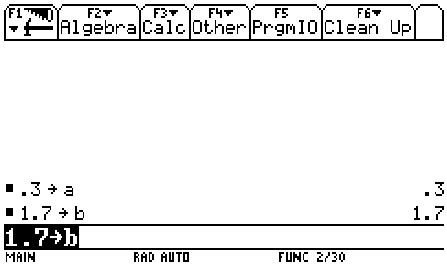
Acotamos las raíces:



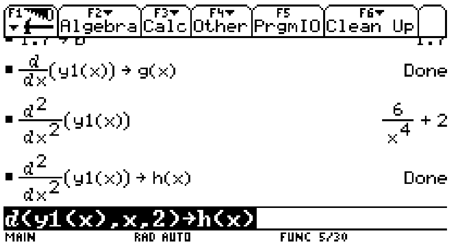


Tenemos aproximadamente: "a = 0.3" y "b = 1.7"

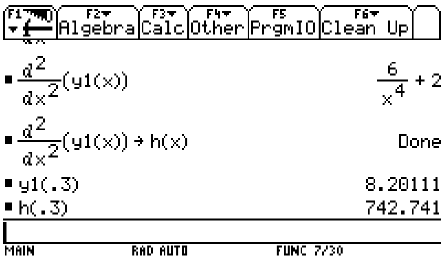
Introducimos los valores de “a” y “b”:



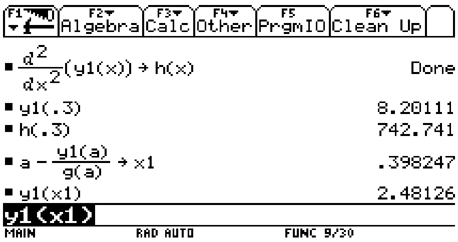
Definimos “f'(x)” y “f''(x)”:



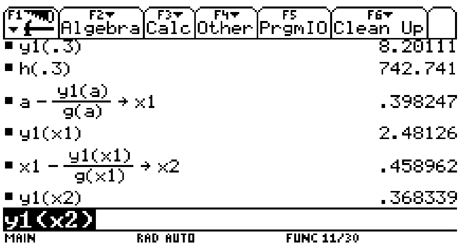
Buscamos el signo de f(a) y f''(a):



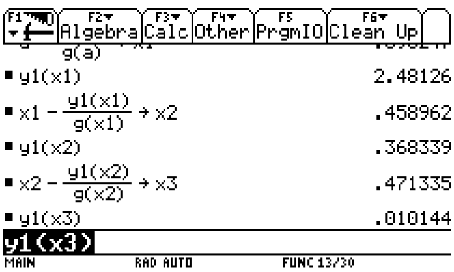
En definitiva:



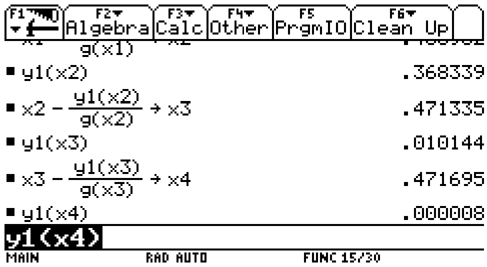
Otra aproximación:



Y otra:

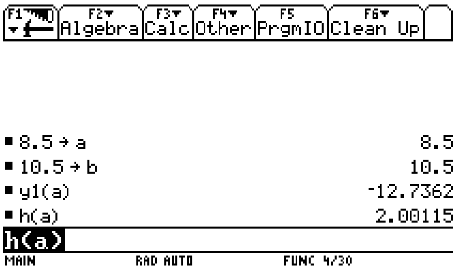


Y por último:

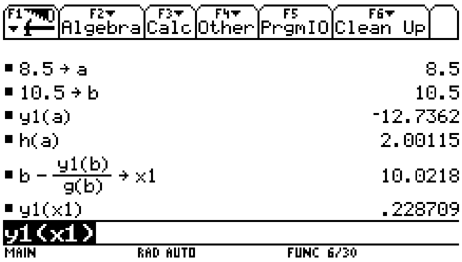


Tenemos: una raíz es **0.471695**, con un error del **0.000008**

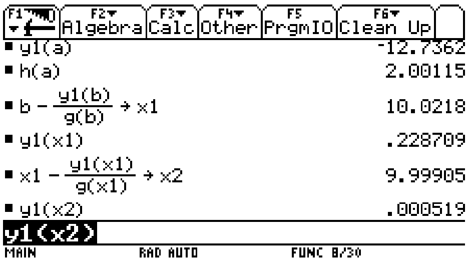
Busquemos la otra raíz:



Es decir:



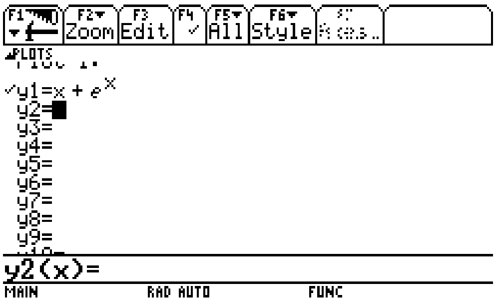
Otra aproximación:

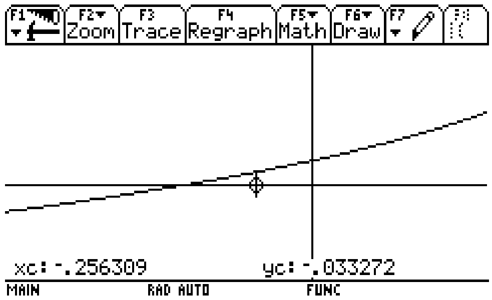


La otra raíz es **9.99905**, con un error del **0.000519**

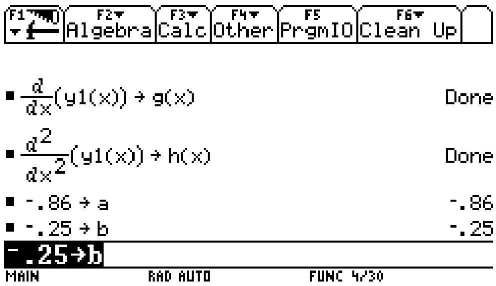
Resuelve por el método de “Newton”, la ecuación: $x + e^{x} = 0$

Definimos la función y la representamos gráficamente:

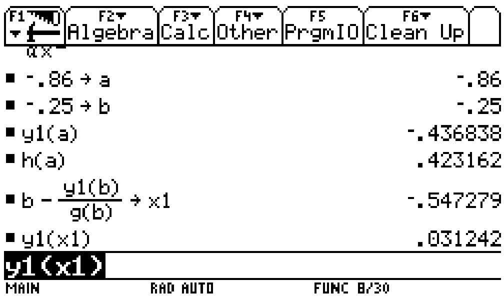




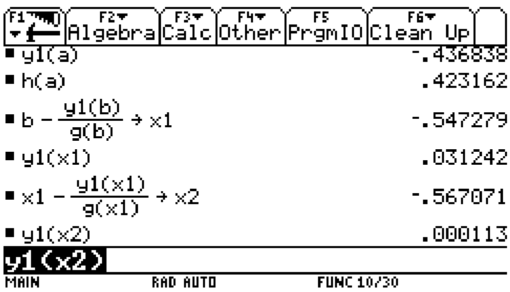
Tomemos un valor de a = -0.86 y de b = -0.25



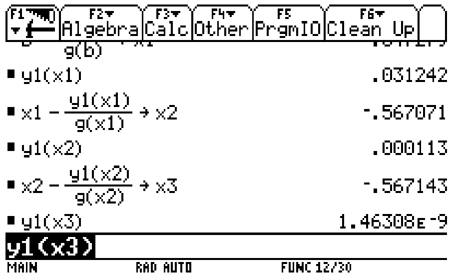
Buscamos el signo de f(a) y de f''(a), y buscamos una primera aproximación:



Otra aproximación:



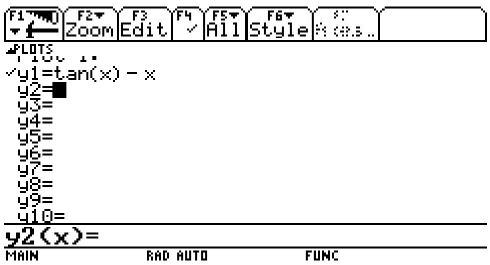
Y por último:

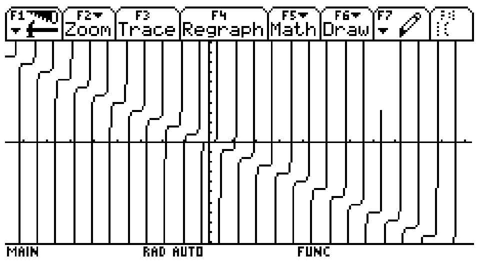


Es decir, la raíz buscada es **-0.567143**, con un error muy pequeño.

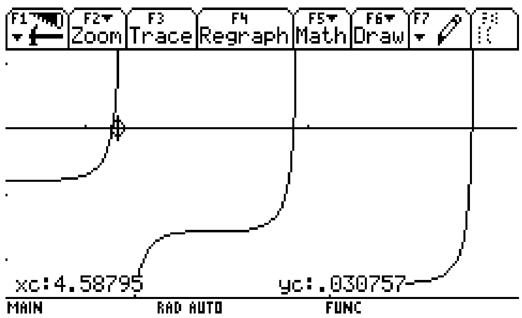
Resuelve por el método de "Newton", la ecuación: $\tan(x) = x$ (las 3 primeras raíces positivas)

Definimos la función y la representamos gráficamente:





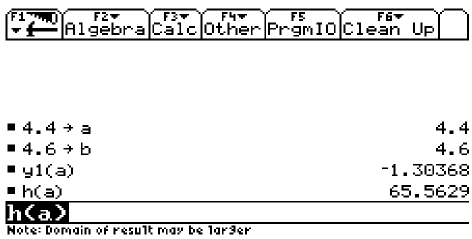
Hacemos un "zoom" para "ver" las tres primeras raíces positivas:



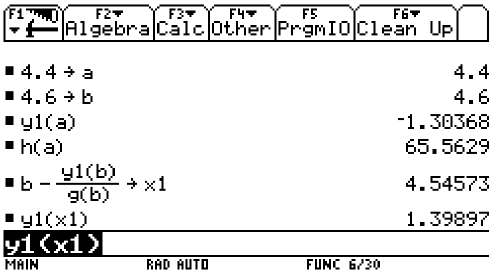
Tenemos aproximadamente:

primera raíz positiva: entre 4.4 y 4.6
segunda raíz positiva: entre 7.7 y 7.8
tercera raíz positiva: entre 10.9 y 10.95

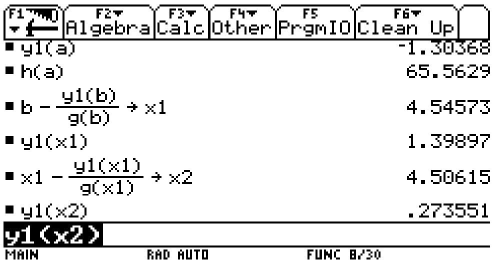
Localicemos la primera raíz positiva:



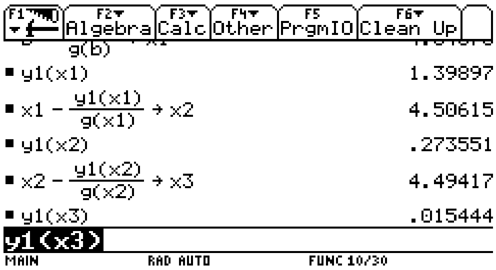
Busquemos una primera aproximación:



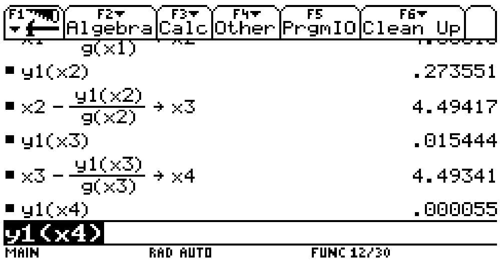
Otra:



Y otra:

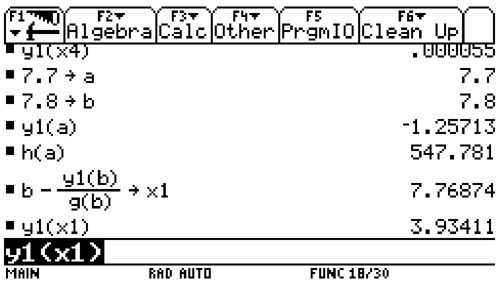


Y una última aproximación:

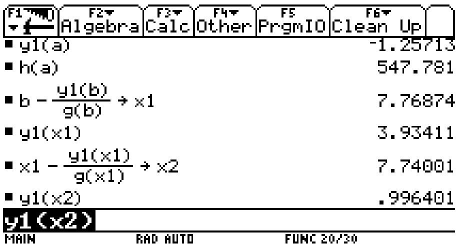


Es decir la primera raíz positiva es **4.49341**, con un error del **0.000055**

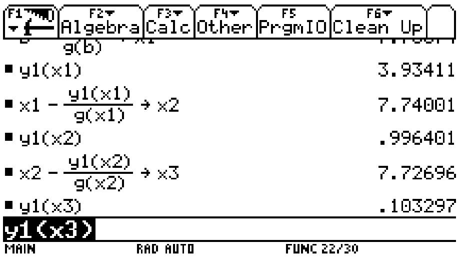
Segunda raíz positiva:



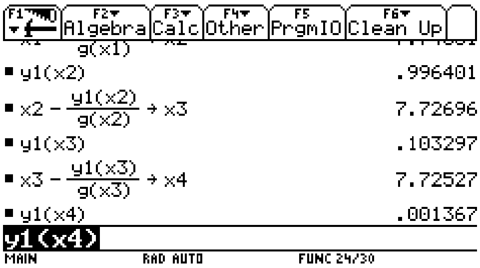
Otra aproximación:

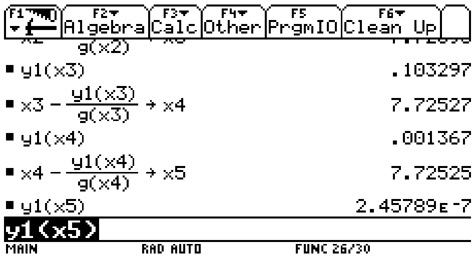


Y otra:



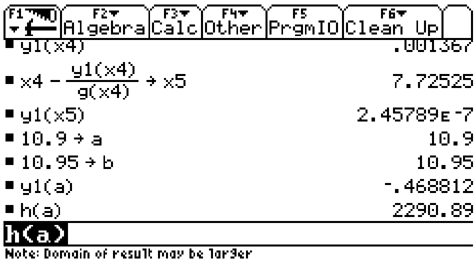
Y dos más:



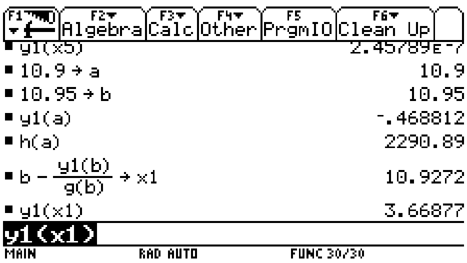


Tenemos, pues, la segunda raíz positiva: **7.72525**, con un error muy pequeño

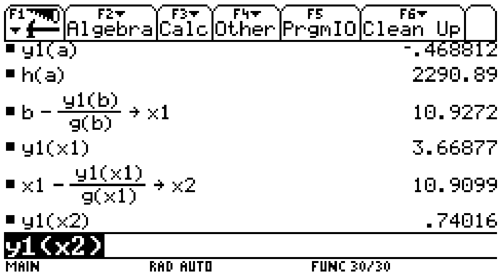
Vamos a buscar la tercera raíz positiva:

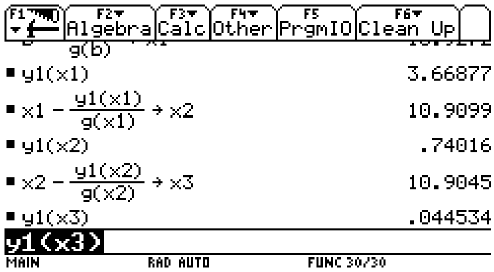


Una primera aproximación:

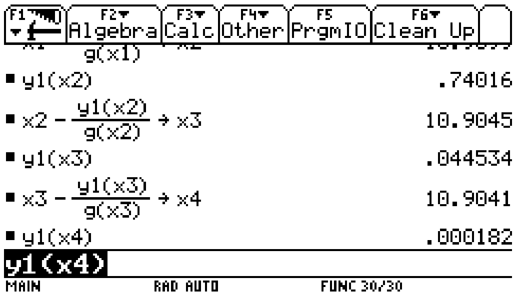


Y dos más:





Y por último:



Tenemos la tercera raíz pedida: **10.9041**, con un error del **0.000182**

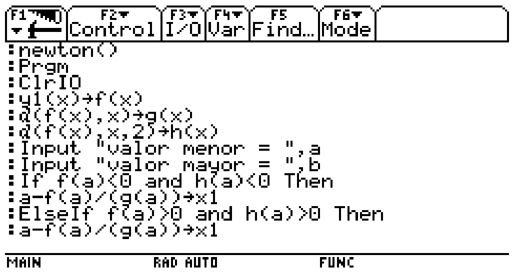
Programa en "TI-Basic" que resuelve una ecuación por el método de "Newton"

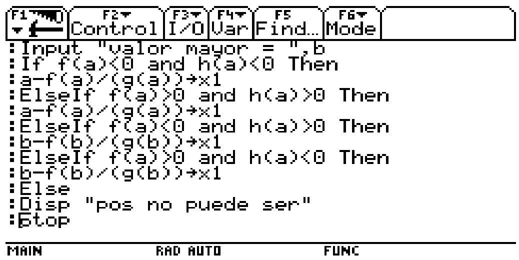
Se supone definida la función "y1(x)" y conocido el intervalo (a , b) donde tenemos una raíz de la ecuación "y1(x)=0"

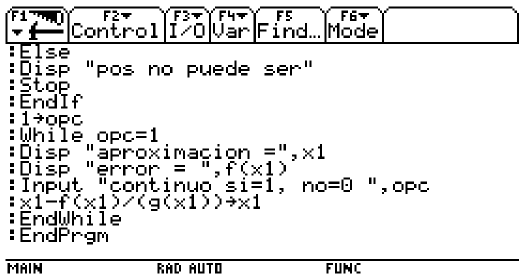
[APPS] – [Program Editor]

Type: Program
Variable: newton

Escribe:



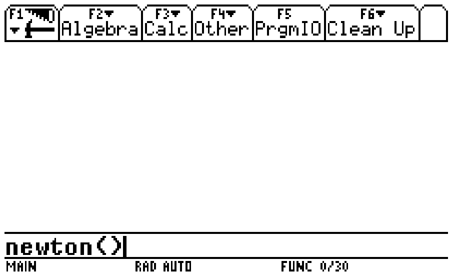




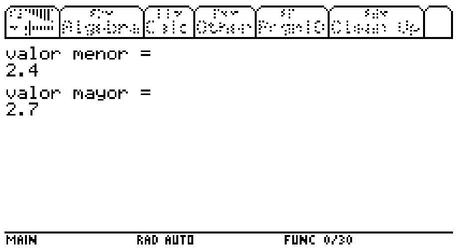
Resuelve utilizando el programa **newton()**, la ecuación: $x\log(x)-1=0$

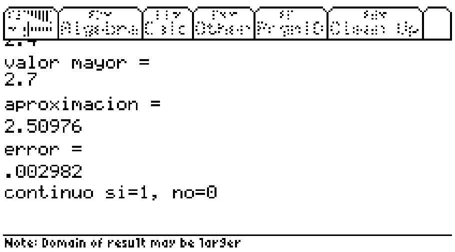
Se supone definida la función: y1(x) = xlog(x) – 1, y determinados los valores de a = 2.4 y b=2.7

Ejecutamos el programa “newton()”:

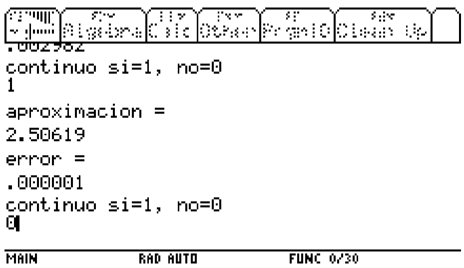


Introducimos los valores de “a” y de “b”:





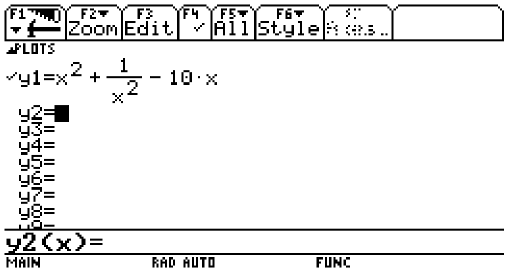
Repetimos la ejecución del programa (opc =1), para obtener otra aproximación:



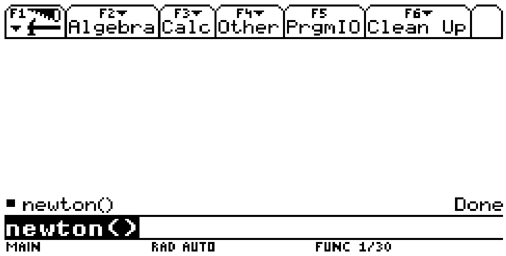
Tenemos la raíz: **2.50619**, con un error del **0.000001**

Resuelve utilizando el programa **newton()**, la ecuación: $x^2+\frac{1}{x^2}=10x$

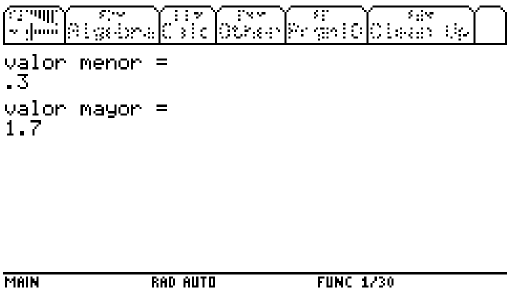
Definimos la función:

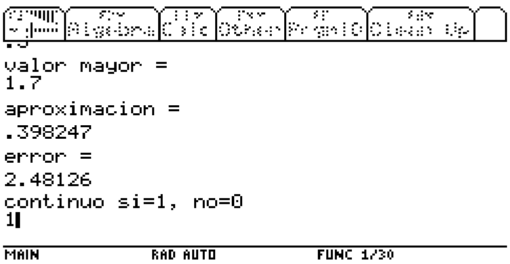


Ejecutamos el programa:

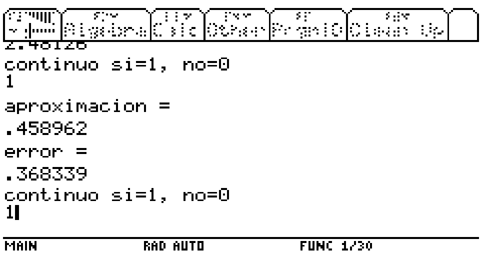


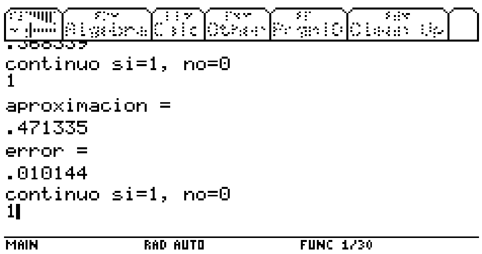
Introducimos los valores de “a” y de “b”:



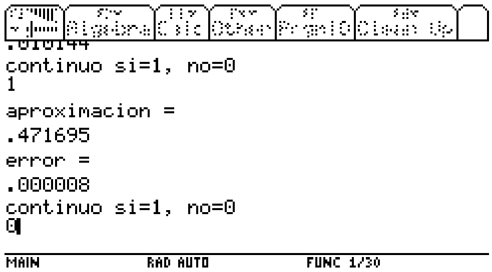


Repetimos la ejecución del programa:





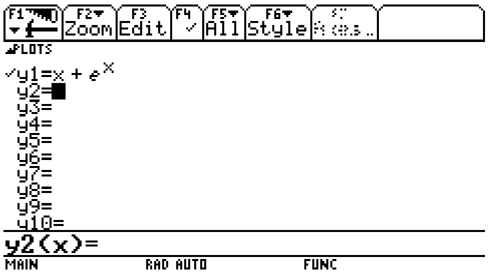
Y por último:



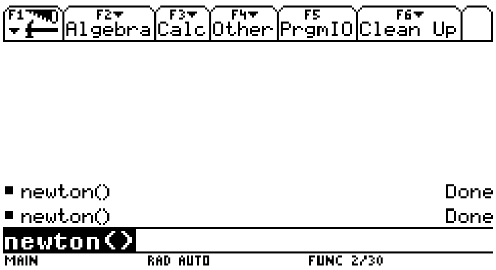
Tenemos la raíz de la ecuación: **0.471695**, con un error del **0.000008**

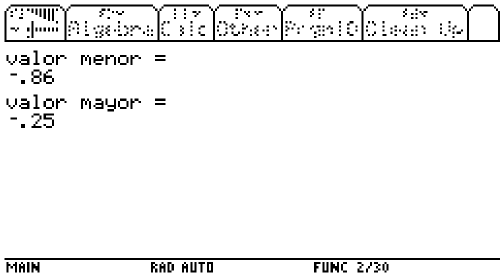
Resuelve utilizando el programa **newton()**, la ecuación: $x+e^x=0$

Definimos la función:

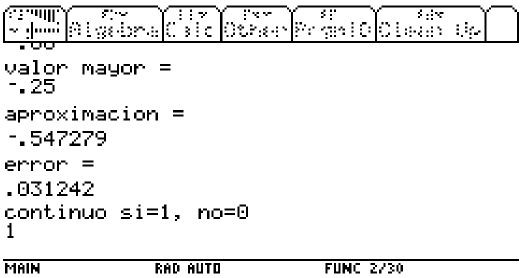


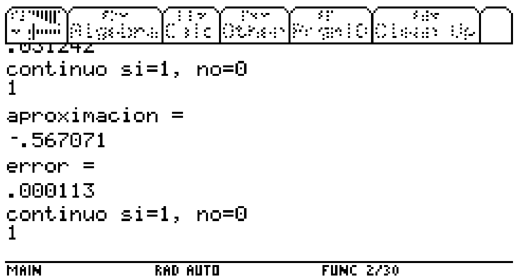
Ejecutamos el programa e introducimos los valores de “a” y de “b”:

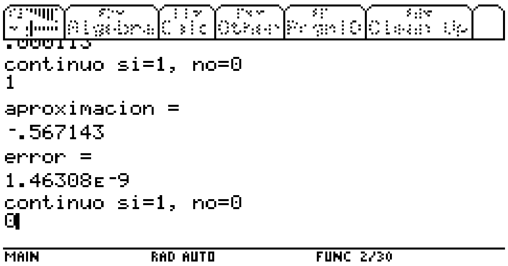




Repetimos la ejecución del programa hasta conseguir una aproximación satisfactoria:



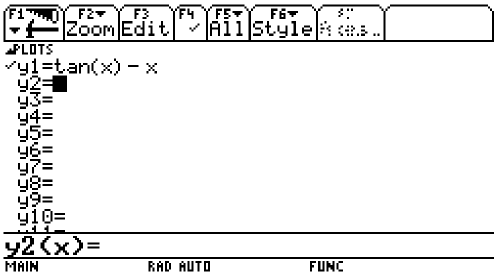




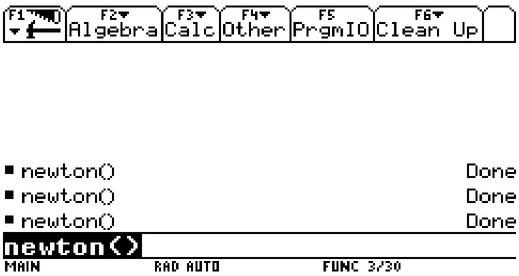
En definitiva tenemos una raíz, **-0.567143**, con un error muy pequeño.

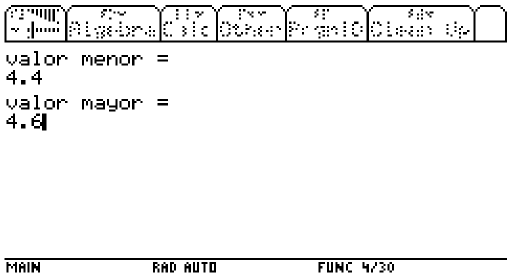
Resuelve utilizando el programa **newton()**, la ecuación: $\tan(x)=x$

Definimos la función:

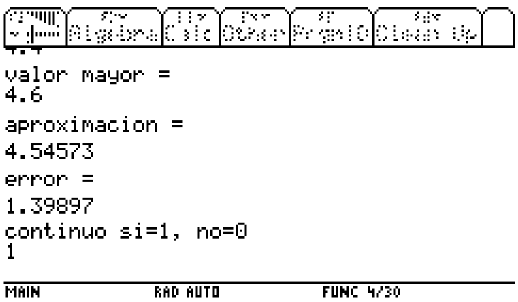


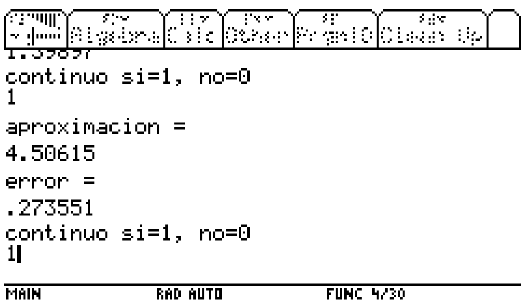
Ejecutamos el programa e introducimos los valores de “a” y de “b”:

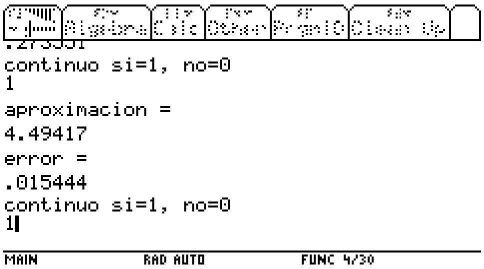


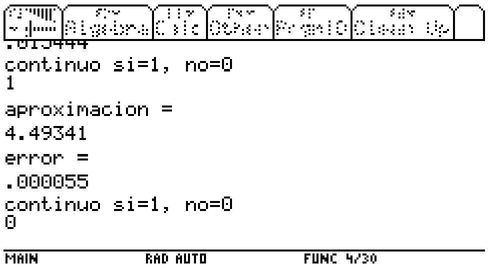


Repetimos la ejecución del programa hasta conseguir una aproximación satisfactoria:







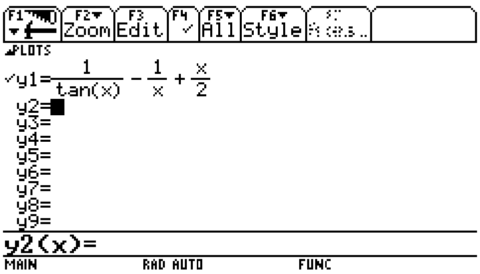


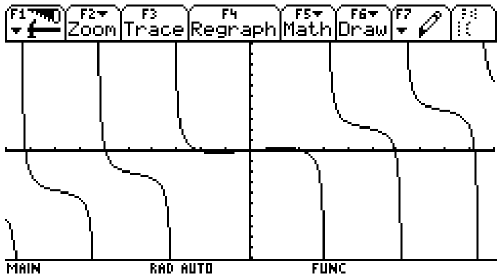
Tenemos en definitiva una raíz, **4.49341**, con un error del **0.000055**

Resuelve utilizando el programa **newton()**, la ecuación: $cotan(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$

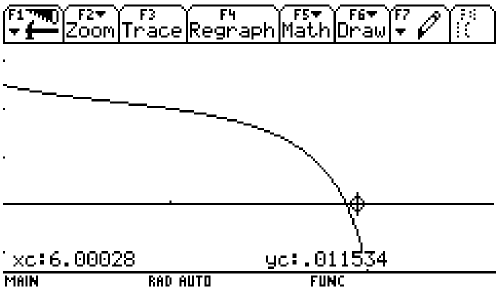
(una raíz positiva)

Definimos la función y la representamos gráficamente:

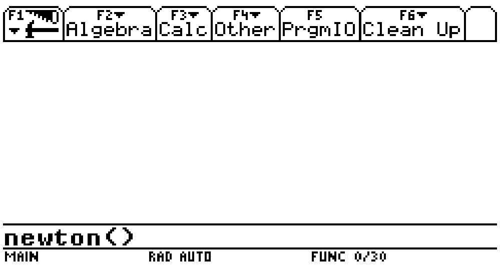


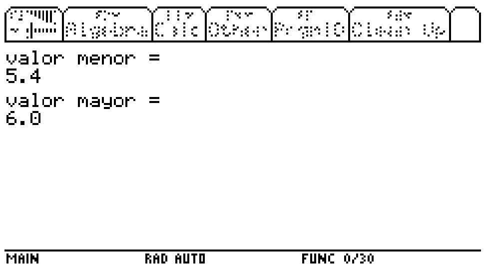


Hacemos un “Zoom” para localizar “a” y “b” de la primera raíz positiva:

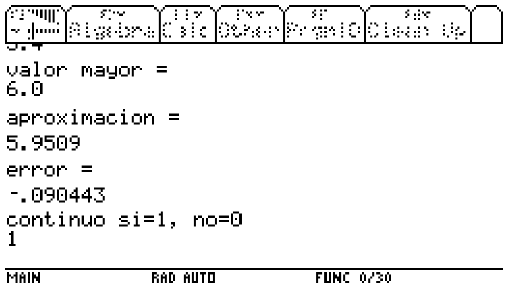


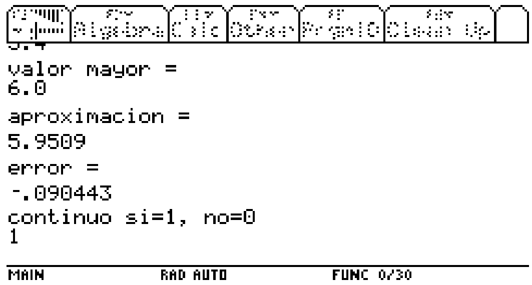
Ejecutamos el programa e introducimos los valores de “a” y de “b”:

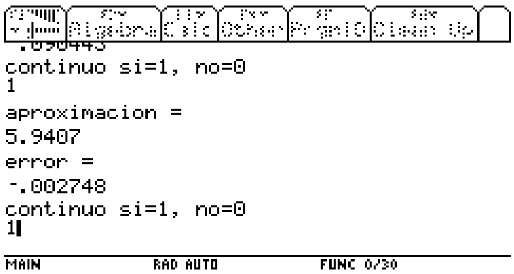


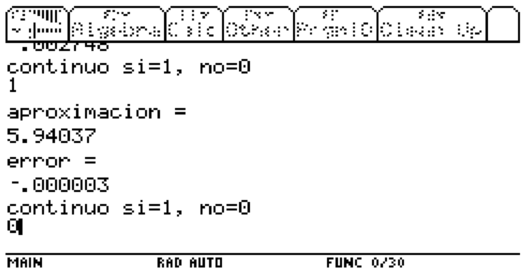


Repetimos la ejecución del programa hasta conseguir una aproximación satisfactoria:









Tenemos en definitiva la raíz buscada, **5.94037**, con un error del **0.000003**