UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
(Universidad del Perú, Decana de América)

Contabilidad de crecimiento o fuentes de crecimiento

En esta parte estudiaremos las fuentes que ayudan al crecimiento de la economía. Ya desde los clásicos ya habían formalizado las fuentes de crecimiento que son: La acumulación de capital, crecimiento de la fuerza de trabajo, crecimiento en el uso de recursos naturales y progreso tecnológico.

Aporte de Solow

Solow (1957) va formalizar la contabilidad de crecimiento en su trabajo sobre cambio tecnológico en este trabajo supone una función Hicks-neutra; es decir, que el cambio tecnológico afecta de la misma manera tanto al capital como al trabajo y la función agregada de producción.

Supuestos del modelo

- ✓ Sea una economía capitalista.
- ✓ Esta economía no tiene relación con el exterior.
- ✓ La economía es perfectamente competitiva en la que a cada factor productivo se le cancela el equivalente de su producto marginal.
- ✓ La economía produce un solo bien.
- ✓ El progreso tecnológico es neutral a lo Hicks-neutral.
- ✓ Formula una función de producción dinámica.

Función de Producción

El análisis comienza por presentarnos una función de producción dinámica que depende del stock de capital agregado, de la fuerza de trabajo y de los recursos naturales.

$$Y_t = F(K_t, L_t, N_t t)\ldots(FPA)$$

Donde

Y_t: Producto agregado en el instante "*t*".

K_t: Stock de capital agregado en el instante "*t*".

L_t: Fuerza de trabajo agregada en el instante "*t*".

N_t: Recursos naturales (RRNN) en el instante "*t*".

Aplicando el diferencial total a la función de producción

$$\underbrace{\frac{dY_t}{dt}}_{\dot{Y}_t} = \underbrace{\frac{dF(\circ)}{\partial K_t}\frac{\partial K_t}{dt}}_{F_K \dot{K}_t} + \underbrace{\frac{dF(\circ)}{\partial L_t}\frac{\partial L_t}{dt}}_{F_L \dot{L}_t} + \underbrace{\frac{dF(\circ)}{\partial N_t}\frac{\partial N_t}{dt}}_{F_N \dot{N}_t} + \underbrace{\frac{\partial F(\circ)}{\partial t}\frac{dt}{dt}}_{F_t}$$

Dividiendo a toda la ecuación entre Y_t

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{F_K \dot{K}_t}{Y_t} + \frac{F_L \dot{L}_t}{Y_t} + \frac{F_N \dot{N}_t}{Y_t} + \frac{F_t}{Y_t}$$

Multiplicando los tres primeros términos del lado derecho de esta ecuación por K/K, L/L y N/N respectivamente, se obtiene

$$\underbrace{\frac{\dot{Y}_t}{Y_t}}_{g_Y} = \underbrace{\left(\frac{F_K K_t}{Y_t}\right)}_{\varepsilon_K^Y}\frac{\dot{K}_t}{K_t} + \underbrace{\left(\frac{F_L L_t}{Y_t}\right)}_{\varepsilon_L^Y}\frac{\dot{L}_t}{L_t} + \underbrace{\left(\frac{F_N N_t}{Y_t}\right)}_{\varepsilon_N^Y}\frac{\dot{N}_t}{N_t} + \underbrace{\frac{F_t}{Y_t}}_{m} \ldots (I)$$

$$g_Y = \varepsilon_K^Y . g_K + \varepsilon_L^Y . g_L + \varepsilon_N^Y . g_N + m \ldots (II)$$

Sea

m: Tasa de progreso tecnológico.

ε_K^Y: Elasticidad del producto respecto al factor i-ésimo capital.

ε_L^Y: Elasticidad del producto respecto al factor i-ésimo capital trabajo.

ε_N^Y: Elasticidad del producto respecto al factor i-ésimo de recursos naturales.

- ❖ Solow asume que el mercado de bienes y el mercado de factores son de competencia perfecta, cuya implicancia de este supuesto es:

$\varepsilon_K^Y = \alpha_K$: Representa la participación de los beneficios en el ingreso nacional.

$\varepsilon_L^Y = \alpha_L$: Representa la participación de los salarios en el ingreso nacional.

$\varepsilon_N^Y = \alpha_N$: Representa la participación de la renta de los recursos naturales en el ingreso nacional.

- ➢ El mercado de capital esta en competencia perfecta, por eso el producto marginal de capital es igual a la tasa de rendimiento bruto de capital.

$$F_K = PmgK = R$$

$$\varepsilon_K^Y = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t}\frac{K_t}{Y_t} \Longrightarrow \varepsilon_K^Y = PmgK\frac{K_t}{Y_t} \Longrightarrow \varepsilon_K^Y = \frac{R.K_t}{Y_t} = \frac{B}{Y_t} = \alpha_K$$

- El mercado de trabajo se encuentra en competencia perfecta, por eso el producto marginal del trabajo es igual al salario.

$$F_L = PmgL = w$$

$$\varepsilon_L^Y = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t}\frac{L_t}{Y_t} \Longrightarrow \varepsilon_K^Y = PmgL\frac{L_t}{Y_t} \Longrightarrow \varepsilon_K^Y = \frac{wL_t}{Y_t} = \frac{W}{Y_t} = \alpha_L$$

- El mercado de recursos naturales se encuentra en competencia perfecta, por eso el producto marginal de los recursos naturales en igual a la tasa de la renta de los recursos naturales.

$$F_N = PmgN = R$$

$$\varepsilon_N^Y = \frac{\partial Y_t}{\partial N_t}\frac{N_t}{Y_t} \Longrightarrow \varepsilon_N^Y = PmgN\frac{N_t}{Y_t} \Longrightarrow \varepsilon_N^Y = \frac{RL_t}{Y_t} = \alpha_N$$

Reemplazando la participación de los factores en la ecuación (II)

$$g_Y = \alpha_K.g_K + \alpha_L.g_L + \alpha_N.g_N + m\ldots(III)$$

Esta ecuación nos quiere decir que la tasa de crecimiento del producto agregado o PBI es igual a la suma de las tasas de crecimiento de los factores ponderados respectivamente por su participación en el ingreso nacional más la tas de progreso tecnológico.

Residuo de Solow

En consecuencia, esta tasa puede ser calculada por diferencia como se presenta en la ecuación (III).

$$\boxed{m = g_Y - (\alpha_K.g_K + \alpha_L.g_L + \alpha_N.g_N)}$$

La ecuación (III) nos permite estimar lo que en la literatura del crecimiento económico se conoce como el *residuo de Solow*. Que vendría hacer la diferencia entre el crecimiento del producto agregado menos la tasa de crecimiento de los factores ponderados por su participación.

Donde m, representa la tasa reprogreso tecnológico o *residuo de Solow*, que es hallando de forma indirecta ya que para calcular se utiliza estadísticas de las cuentas nacionales, es una tarea de gran envergadura tratar de estimar la tasa de crecimiento del factor tecnológico.

Contabilidad de crecimiento con una función *Cobb-Douglas*

Para esto asumiremos aparte de los supuestos básicos que el progreso tecnológico es Harrod-neutral.

$$Y_t = K_t^{\alpha}\left(BL_t\right)^{1-\alpha} \ldots (FPA)$$
$$s.a: \quad 0<\alpha<1$$

Donde

Y_t : Producto total (PBI)

K_t : Unidades de capital físico.

L_t : Unidades de trabajo.

B : Factor aumentativo de la eficiencia del trabajo.

α : Elasticidad del producto respecto al capital.

$1-\alpha$: Elasticidad producto respecto a la fuerza de trabajo.

Propiedades de la función de producción

1º. $F\left(K_t, L_t\right) = B^{1-\alpha} K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$

Si multiplicamos a la función por un $\lambda > 0$

$F\left(\lambda K_t, \lambda L_t\right) = (\lambda K_t)^{\alpha} + B^{1-\alpha} (\lambda L_t)^{1-\alpha}$

$F\left(\lambda K_t, \lambda L_t\right) = \lambda.\left(B^{1-\alpha} K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}\right) = \lambda Y_t$

La función presenta rendimientos constantes a escala

2º. Los ratios (productos marginales del capital y trabajo) son constantes y positivos.

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = PmgK = \underbrace{\alpha B^{1-\alpha}}_{+}\underbrace{K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha}}_{+} > 0$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = PmgL = \underbrace{(1-\alpha)B^{1-\alpha}}_{+}\underbrace{K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha}}_{+} > 0$$

Recordemos que $0<\alpha<1$ entonces $-\alpha > -1 \ldots +1 \Rightarrow 1-\alpha > 0$, es un valor positivo

La derivada de los productos marginales es decreciente y negativa.

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial K_t^2}=\frac{\partial PmgK}{\partial K_t}=\underbrace{\alpha}_{+}\underbrace{(\alpha-1)}_{-}\underbrace{B^{1-\alpha}K_t^{\alpha-2}L_t^{1-\alpha}}_{+}<0$$

Recordemos $0<\alpha<1$, entonces $0<\alpha<1\ldots-1\Rightarrow-1<\alpha-1<0$ es una constante negativa.

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial L_{tt}^2}=\frac{\partial PmgL}{\partial L_t}=\underbrace{(-\alpha)}_{-}\underbrace{(1-\alpha)}_{+}\underbrace{B^{1-\alpha}K_t^{\alpha}L_t^{-(1+\alpha)}}_{+}>0$$

Recordemos que $0<\alpha<1$, entonces $0<\alpha<1\ldots x-1\Rightarrow-1<-\alpha<0\ldots+1$ es una constante positiva $0<1-\alpha<1$.

3º. Veremos que los límites requeridos por las condiciones de INADA se cumplen:

$$\lim_{K\to\infty} PmgK=\alpha B^{1-\alpha}\frac{1}{K_t^{1-\alpha}}.L_t^{1-\alpha}=0 \qquad (1/\infty)\approx 0$$

$$\lim_{K\to 0} PmgK=\alpha B^{1-\alpha}\frac{1}{K_t^{1-\alpha}}.L_t^{1-\alpha}=\infty \qquad (1/0)\approx\infty$$

$$\lim_{L\to\infty} PmgL=(1-\alpha)B^{1-\alpha}K_t^{\alpha}\frac{1}{L_t^{\alpha}}=0 \qquad (1/\infty)\approx 0$$

$$\lim_{L\to 0} PmgL=(1-\alpha)B^{1-\alpha}K_t^{\alpha}\frac{1}{L_t^{\alpha}}=\infty \qquad (1/0)\approx\infty$$

Aplicando logaritmo a la función de producción agregada y derivado con respecto al tiempo

$$Ln(Y_t)=\alpha Ln(K_t)+(1-\alpha)LnB_t+(1-\alpha)LnL_t$$

$$\underbrace{\frac{dLn(Y_t)}{dt}}_{g_Y}=\alpha\underbrace{\frac{dLn(K_t)}{dt}}_{g_K}+(1-\alpha)\underbrace{\frac{dLnB_t}{dt}}_{g_B}+(1-\alpha)\underbrace{\frac{dLnL_t}{dt}}_{g_L}$$

$$g_Y = \alpha.g_K + (1-\alpha)g_B + (1-\alpha)g_L\ldots(\varpi)$$

Donde

g_B: Tasa de progreso tecnológico debido a la eficiencia del trabajo.

$\alpha = \varepsilon_K^Y = \alpha_K$: Elasticidad del producto respecto al capital.
$(1-\alpha) = \varepsilon_L^Y = \alpha_L$: Elasticidad del producto respecto al trabajo.

Esta ecuación nos quiere decir que el crecimiento del PBI agregado es igual a la suma del crecimiento del capital multiplicado por su participación en el PBI $\alpha . g_K$, el crecimiento tecnológico multiplicado por su participación en el PBI $(1-\alpha)g_B$ y la tasa de crecimiento del trabajo multiplicado por su participación en el PBI $(1-\alpha)g_L$.

Despejando g_B de la ecuación (ϖ)

$$\boxed{g_B = \frac{g_Y - (\alpha_K g_K + \alpha_L g_L)}{\alpha_L} = \frac{residuo\_de\_Solow}{\alpha_L}}$$

Esta ecuación nos quiere decir que la tas de progreso tecnológico es igual a la diferencia o residuo entre el crecimiento observado del PBI y el crecimiento ponderado de los factores directamente observables dividido entre la elasticidad producto respecto al trabajo.

- Como no interesa expresar la tasa de crecimiento del PBI por trabajador (per cápita) reemplazaremos las tasas agregadas por sus equivalentes.

- Sabemos que el PBI por trabajador es igual al PBI agregado dividido por el número de trabajadores.

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} \quad \Rightarrow \quad Ln(y_t) = Ln(Y_t) - Ln(L_t)$$

$$\frac{dLn(y_t)}{dt} = \frac{dLn(Y_t)}{dt} - \frac{dLn(L_t)}{dt}$$

$$\frac{\dot{y}_t}{y_t} = \frac{\dot{Y}_t}{Y_t} - \frac{\dot{L}_t}{L_t} \quad \Rightarrow \quad g_y = g_Y - g_L \quad \Rightarrow \quad g_Y = g_y + g_L \ldots (IV)$$

- Sabemos que el capital por trabajadores igual al PBI agregado dividido por el numero de trabajadores

$$k_t = \frac{K_t}{L_t} \quad \Rightarrow \quad Ln(y_t) = Ln(K_t) - Ln(L_t)$$

$$\frac{dLn(y_t)}{dt} = \frac{dLn(K_t)}{dt} - \frac{dLn(L_t)}{dt}$$

$$\frac{\dot{y}_t}{y_t} = \frac{\dot{K}_t}{K_t} - \frac{\dot{L}_t}{L_t} \quad \Rightarrow \quad g_y = g_K - g_L \quad \Rightarrow \quad g_K = g_y + g_L \ldots (V)$$

Reemplazando (IV) y (V) en la ecuación (ϖ)

$$g_y + g_L = \alpha\left(g_k + g_L\right) + (1-\alpha)g_B + (1-\alpha)g_L$$

$$\boxed{g_y = (1-\alpha)g_B + \alpha g_k \ldots (VI)}$$

La ecuación (VI) nos quiere decir que la tasa de crecimiento del PBI por trabajador se puede descomponer entre la contribución del progreso tecnológico y la tasa de crecimiento del capital por trabajador, de hay que ha esta descomposición se le lama contabilidad de crecimiento.

Ejercicios resueltos

Problema Nº1

En el año 2008 se sabe que un país tiene una tasa de crecimiento del PBI per cápita que es 4%, la tasa de crecimiento del capital agregado fue 2%, la tasa de crecimiento de las horas de trabajo per cápita fue del -1% y la tasa de crecimiento de la población fue 1.5%. La participación de capital en el PBI era de 45% ¿Cuál fue la tasa de crecimiento de la productividad agregada?

Rpt

De la función: $\frac{dLn(y_t)}{dt} = (1-\alpha)\frac{dLn(B)}{dt} + \alpha\frac{dLn(k_t)}{dt} + (1-\alpha)\frac{dLn(l_t)}{dt}$

$$g_y = (1-\alpha)g_B + \alpha g_k + (1-\alpha)g_l$$

Datos: $g_y = 0.04$ $g_K = 0.02$ $g_l = -0.01$ $g_K = 0.015$ $\alpha = 0.45$

Sabemos: $g_k = g_K - g_N = 0.02 - 0.015 = 0.005$

$$g_B = \frac{g_y - \alpha g_k - (1-\alpha)g_l}{(1-\alpha)} = \frac{0.04 - 0.45x0.005 - 0.55(-0.01)}{0.55}$$

$$\boxed{g_B = 0.0786 \approx 7.86\%}$$

Problema Nº2

Se sabe que un país "Z" tiene una tasa de crecimiento del PBI 5%, la tasa de crecimiento del capital por trabajador es 1.5% la tasa de crecimiento de las horas de trabajo fue de -1%, la tasa de crecimiento de la población per cápita fue del 1% y la participación del capital en el PBI era del 30%. ¿Cual fue la tasa de crecimiento de la productividad agregada?

Rpt

De la función: $\frac{dLn(y_t)}{dt} = (1-\alpha)\frac{dLn(B)}{dt} + \alpha\frac{dLn(k_t)}{dt} + (1-\alpha)\frac{dLn(l_t)}{dt}$

$$g_y = (1-\alpha)g_B + \alpha g_k + (1-\alpha)g_l$$

Datos: $g_Y = 0.05$ $g_k = 0.01$ $g_L = 0.015$ $g_N = 0.01$ $\alpha = 0.30$

Sabemos: $g_k + g_N = g_K = 0.01 + 0.01 = 0.02$

$$g_B = \frac{g_y - \alpha g_k - (1-\alpha)g_l}{(1-\alpha)} = \frac{0.05 - 0.30x0.02 - 0.70(-0.015)}{0.70}$$

$$\boxed{g_B = 0.0778 \approx 7.78\%}$$