SERIE DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO Nº 14

# CUADRILÁTEROS Y OTROS POLÍGONOS. SIMETRÍAS

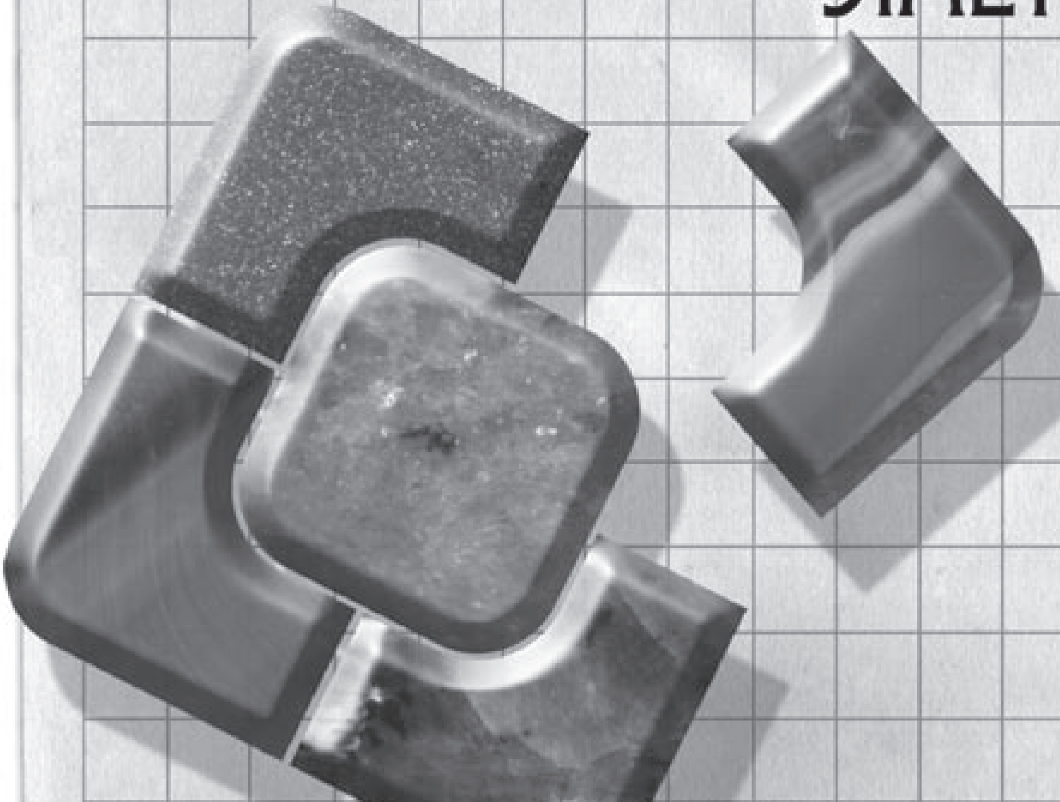
FE Y ALEGRIA

CAF

UNESCO
IESALC

SERIE DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO Nº 14

# CUADRILÁTEROS Y OTROS POLÍGONOS. SIMETRÍAS



FE Y ALEGRÍA

CAF

UNESCO
IESALC

POR MARTÍN ANDONEGUI ZABALA

372.7
And.
Cuaderno N° 14
Cuadriláteros y otros polígonos. Simetrías
Federación Internacional Fe y Alegría,
2006
32 p.; 21,5 x 19 cm.
ISBN: 978-980-6418-91-2
Matemáticas, Geometría

"Los contenidos que se enseñen en la escuela deberán ser aquellos que fortalezcan en los alumnos la capacidad para razonar con claridad, fomentar su curiosidad y desarrollar esquemas mentales que le permitan asumir las nuevas realidades que se presentarán en el futuro lleno de incertidumbre"

HUGO PARRA S.

*EQUIPO EDITORIAL*
*Beatriz Borjas y Carlos Guédez*

*Dimensión: Desarrollo del pensamiento matemático*
***Cuaderno N° 14***
***Cuadriláteros y otros polígonos. Simetrías***
***Autor: Martín Andonegui Zabala***

*Este libro se ha elaborado con el propósito de apoyar la práctica educativa de los cientos de educadores de Fe y Alegría. Su publicación se realizó en el marco del* ***Programa Internacional de Formación de Educadores Populares*** *desarrollado por la Federación Internacional Fe y Alegría desde el año 2001.*

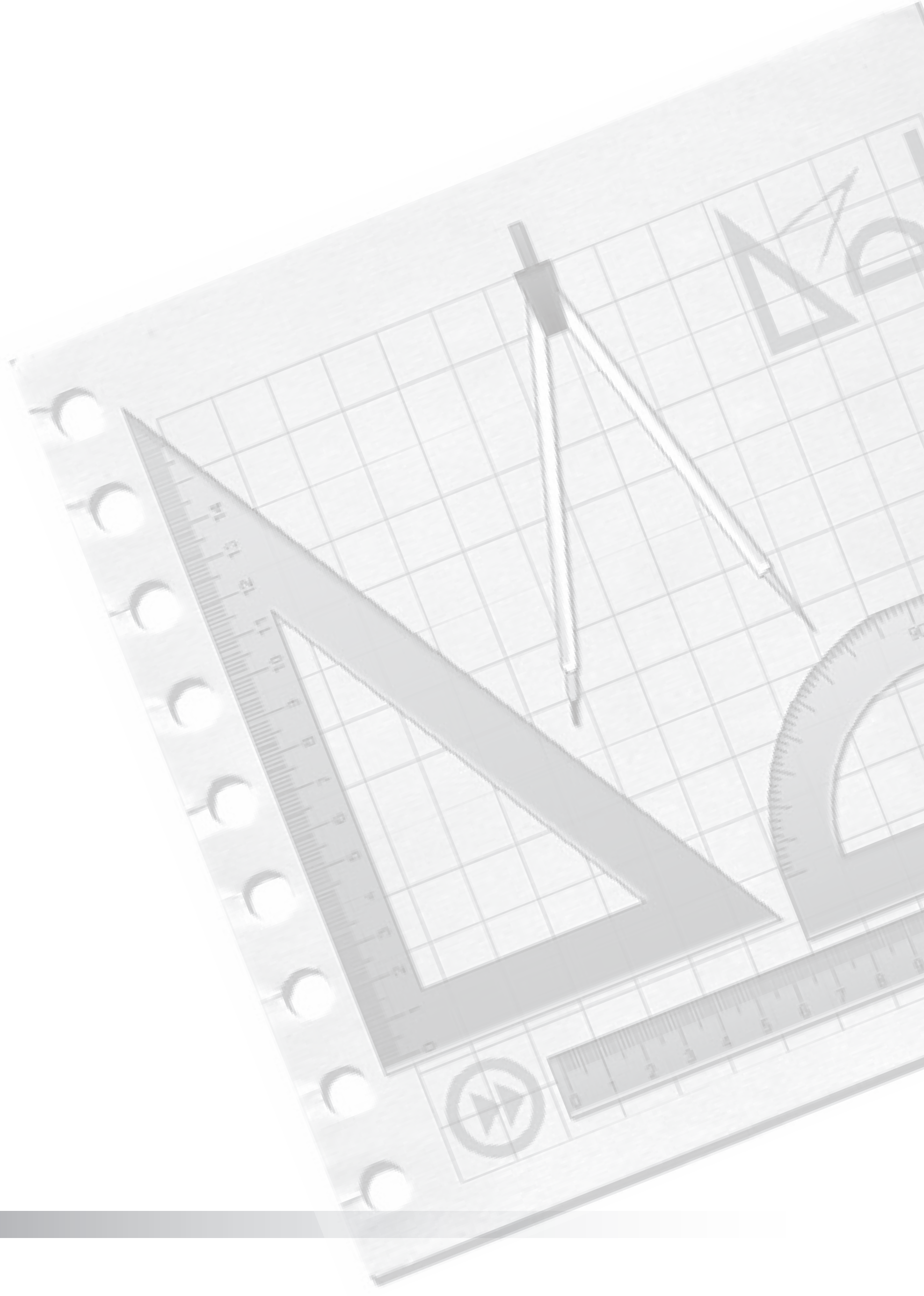
*Diseño y Diagramación:* ***Moira Olivar***
*Ilustraciones:* ***Corina Álvarez***
*Concepto gráfico:* ***Juan Bravo***
*Corrección de textos:* ***Carlos Guédez y Martín Andonegui***

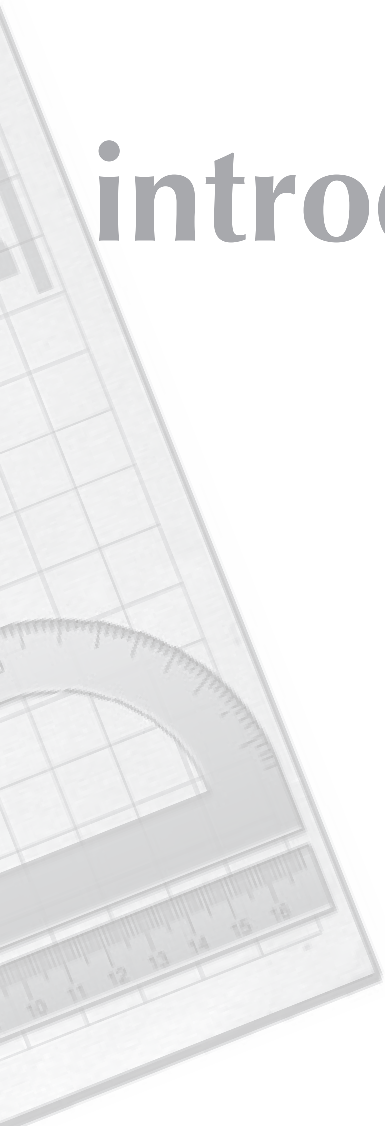
*Edita y distribuye: Federación Internacional de Fe y Alegría. Esquina de Luneta. Edif. Centro Valores, piso 7 Altagracia, Caracas 1010-A, Venezuela.*
*Teléfonos: (58) (212)5631776 / 5632048 / 5647423.*
*Fax: (58) (212) 5645096*
*www.feyalegria.org*



Depósito legal: lf 60320075101108
Caracas, abril 2006

Publicación realizada con el apoyo de:
Centro Magis - Instituto Internacional para la Educación Superior en América Latina y el Caribe (IESALC) - Corporación Andina de Fomento (CAF)





# introducción

## A modo de introducción..., nuestro recordatorio

La sugerencia que proponíamos en el Cuaderno No 1 y que siempre presidirá los demás Cuadernos: Vamos a estudiar matemática, pero no lo vamos a hacer como si fuéramos simplemente unos alumnos que posteriormente van a ser evaluados, y ya. No. Nosotros somos docentes –docentes de matemática en su momento- y este rasgo debe caracterizar la forma de construir nuestro pensamiento matemático. ¿Qué significa esto?

• La presencia constante de la meta última de nuestro estudio: alcanzar unos niveles de conocimiento tecnológico y reflexivo, lo cual debe abrir ese estudio hacia la búsqueda de aplicaciones de lo aprendido, hacia el análisis de los sistemas que dan forma a nuestra vida y utilizan ese conocimiento matemático, y hacia criterios sociales y éticos para juzgarlos.

• Construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo enseñamos en el aula, además de reflexionar acerca de cómo nuestro conocer limita y condiciona nuestro trabajo docente. De esta forma, integrar nuestra práctica docente en nuestro estudio.

• Como complemento a lo anterior, construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo podemos llevar al aula. Para ello, tomar conciencia del proceso que seguimos para su construcción, paso a paso, así como de los elementos –cognitivos, actitudinales, emocionales...- que se presenten en dicho proceso. Porque a partir de esta experiencia reflexiva como estudiantes, podremos entender y evaluar mejor el desempeño de nuestros alumnos –a su nivel- ante los mismos temas.

• En definitiva, entender que la matemática es la base de su didáctica: la forma en que se construye el conocimiento matemático es una fuente imprescindible a la hora de planificar y desarrollar su enseñanza.

Y ahora, vamos al tema de este Cuaderno, la circunferencia y el círculo.

# 1. Cuadriláteros

## 1.1. Concepto y elementos

Un cuadrilátero es un ***polígono de cuatro lados***. En la figura 1 se presentan dos ejemplos de cuadriláteros, ***convexo*** el de la izquierda y ***cóncavo*** el de la derecha. Para designarlos utilizamos letras mayúsculas en los vértices.

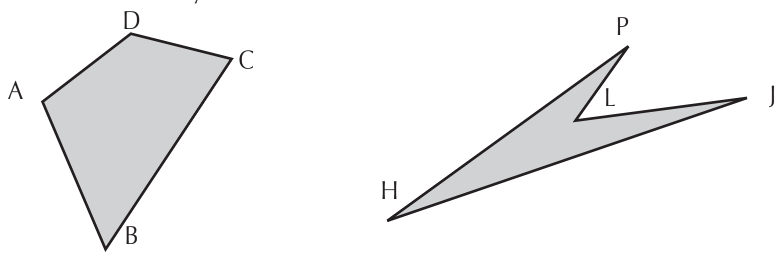



*Fig. 1: Cuadriláteros*

Entre los elementos de un cuadrilátero mencionamos sus ***lados*** y ***ángulos***, entendiendo por estos últimos los que se hallan en la región interna del polígono. Observamos que cuando el cuadrilátero es convexo, todos sus ángulos miden menos de 180º, mientras que en un cuadrilátero cóncavo hay un ángulo –y sólo uno- que mide más de 180º (< L).

Otro elemento a considerar son las ***diagonales***. Todo cuadrilátero convexo posee dos, mientras que si es cóncavo, posee una sola diagonal. Cuando se traza una diagonal, el cuadrilátero se descompone en dos triángulos. De aquí deducimos que ***la suma de las medidas de los ángulos de todo cuadrilátero es 360º.***

Otros dos aspectos a destacar son el ***perímetro*** (suma de las longitudes de los lados) y el ***área*** (medida de la región interior del cuadrilátero). Su cálculo tiene particular interés en algunos casos especiales de cuadriláteros que se estudiarán más adelante. En términos generales, el área de un cuadrilátero puede obtenerse a partir de la suma de las áreas de los dos triángulos en que se descompone al trazarse una diagonal. En este punto puede ser muy útil la fórmula de Herón de Alejandría (Cuaderno 13) para el cálculo de las áreas de los triángulos, a partir de las medidas de los lados y de una diagonal del cuadrilátero.

También resulta de interés histórico recordar que los babilonios daban la siguiente fórmula para un cálculo aproximado (Eves, 1969): Si $a$, $b$, $c$ y $d$ son las longitudes de los cuatro lados consecutivos de un cuadrilátero, el área viene dada por: $A = ¼ (a + c) x (b + d)$.

## 1.2. Construcción de un cuadrilátero

Tratemos de construir un cuadrilátero con cuatro segmentos que midan 4 cm, 3 cm, 2 cm y 11 cm, respectivamente. ¿A qué conclusión llegamos?

Que no se puede construir. De aquí se deduce una condición necesaria para la construcción de cualquier cuadrilátero: la longitud del segmento mayor debe ser menor que la suma de las longitudes de los otros tres segmentos.

Si se cumple esta condición, ¿cómo podemos ***construir un cuadrilátero convexo, dadas las medidas de cuatro segmentos***? Podemos tomar dos de ellos y hacerlos coincidir en uno de sus respectivos extremos; queda formado así un ángulo. Ahora, desde uno de los extremos libres trazamos un arco cuya amplitud sea la medida de uno de los otros dos segmentos. Y desde el otro extremo libre trazamos otro arco cuya amplitud sea la medida del cuarto segmento. El punto en que se cortan ambos arcos es el cuarto vértice del cuadrilátero.

Reúnanse varios compañeros(as) y construya, cada quien, un cuadrilátero cuyos lados midan, respectivamente: 7 cm, 5 cm, 13 cm y 8 cm. ¿Qué conclusión extraen al observar las figuras construidas por todos(as)?

La conclusión es clara: con esas medidas pueden obtenerse tantos cuadriláteros diferentes como personas intenten construirlo. ¿Por qué? Fundamentalmente, porque hay varias opciones para seleccionar los dos primeros segmentos y porque, una vez hecha esa selección, la amplitud del ángulo formado por ellos puede variar, aunque tiene un límite que no puede sobrepasar: la distancia que separa los extremos libres de ambos lados del ángulo tiene que ser menor que la suma de las longitudes de los dos segmentos no utilizados (¿por qué?).

Como vemos, no basta con dar las longitudes de los cuatro lados, ya que con solo este dato podemos construir infinitos cuadriláteros. Con el fin de averiguar todas las condiciones que necesitamos para construir un cuadrilátero determinado, lo mejor es pasar por la siguiente experiencia: Tome un cuadrilátero cualquiera (por ejemplo, dibujado por otra persona) y trate de dibujar otro que sea congruente (sin calcarlo, claro) utilizando regla y compás.

### 1.3. Clasificación de los cuadriláteros

Hemos visto que si se toma como referencia la existencia, o no, de algún ángulo interno cuya medida sea mayor que 180º, los cuadriláteros se clasifican en cóncavos o convexos, respectivamente.

Pero hay otro criterio que tiene que ver con los lados de un cuadrilátero y, en particular, con la condición de paralelismo entre ellos. Así,

| Si un cuadrilátero posee | Se denomina |
|---|---|
| Dos pares de lados paralelos | Paralelogramo |
| Un solo par de lados paralelos | Trapecio |
| Ningún par de lados paralelos | Trapezoide |

En lo que resta trabajaremos en estas clases de cuadriláteros, particularmente en las dos primeras.

## 2. Paralelogramos

### 2.1. Concepto y elementos

Un paralelogramo ([parallelos] = paralelo + [gramme] = línea) es un ***cuadrilátero que posee dos pares de lados paralelos***. Por esta razón, son polígonos convexos. En la figura 2 se presentan algunos ejemplos.

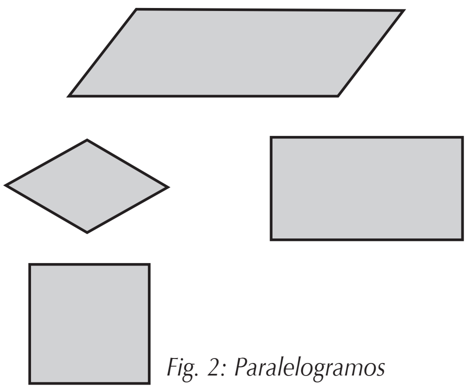
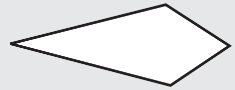


*Fig. 2: Paralelogramos*

*Si un cuadrilátero posee dos pares de lados congruentes, ¿es un paralelogramo?*

Pues no necesariamente. Véase la siguiente figura:



En un paralelogramo, ***los lados opuestos son congruentes***. Análogamente, ***los ángulos opuestos son congruentes***. Y como la suma de las medidas de los cuatro ángulos es 360º, se sigue que ***dos ángulos contiguos son suplementarios*** (¿por qué?). De este modo, dada la medida de un ángulo, se conocen las de todos los demás.

Otro elemento de interés son las ***diagonales***. Las dos diagonales de un paralelogramo no tienen por qué ser congruentes, pero siempre ***se cortan en sus puntos medios***.

A partir de estas características se puede definir a un paralelogramo de cualquiera de estas tres maneras: Un paralelogramo es un cuadrilátero:

- Que posee dos pares de lados paralelos
- Cuyos lados opuestos son congruentes
- Cuyas diagonales se cortan en sus puntos medios

**1.** Dibuje un cuadrilátero convexo cualquiera. Una los puntos medios de todos sus lados. ¿Qué figura obtiene? ¿Y si el cuadrilátero es cóncavo? ¿Por qué razón ocurre esto?

## 2.2. Clasificación de los paralelogramos

Tenemos varios ***criterios*** para clasificar a los paralelogramos:

***a) Según sus lados y ángulos:***

• Si posee los ***4 lados congruentes***, se trata de un ***rombo***

• Si posee los ***4 ángulos*** congruentes, es decir, ***rectos***, se trata de un ***rectángulo***

• Si posee ambas características (***los 4 lados congruentes y los 4 ángulos rectos***), se trata de un ***cuadrado***

• Si no posee ninguna de ambas características, se trata de un ***romboide***

En la figura 2 se representan, en este orden, un romboide, un rombo, un rectángulo y un cuadrado. Observamos que un cuadrado puede definirse como un rombo cuyos ángulos son rectos, o como un rectángulo cuyos lados son todos congruentes.

***b) Según sus diagonales:***

Ya sabemos que en todos los paralelogramos las diagonales se cortan en sus puntos medios. Veamos ahora qué tienen de particular en cada una de las clases de paralelogramo:

• Si son ***perpendiculares***, se trata de un ***rombo***

• Si son ***congruentes***, se trata de un ***rectángulo***

• Si son ***perpendiculares y congruentes***, se trata de un ***cuadrado.***

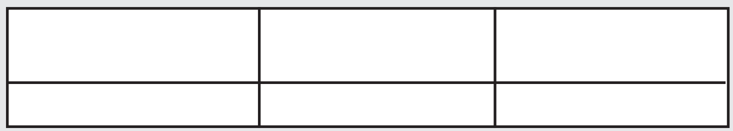
• Si no son ni perpendiculares ni congruentes, se trata de un ***romboide***

Como puede apreciarse, ***la aplicación de los dos criterios de clasificación desemboca en las mismas clases de paralelogramos***.

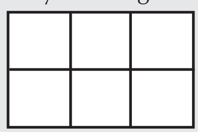
**2.** Determine si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Ayúdese trazando las figuras que crea pertinentes.

a) Si un cuadrilátero es un rombo, entonces sus diagonales son perpendiculares
b) Si en un cuadrilátero las diagonales son perpendiculares, entonces es un rombo
c) Si en un cuadrilátero las diagonales son congruentes, entonces es un rectángulo
d) Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan en sus puntos medios, entonces es un romboide
e) Si en un cuadrilátero los lados son todos congruentes, así como los ángulos, entonces se trata de un cuadrado
f) Si en un paralelogramo las diagonales son congruentes, entonces es un rectángulo
g) Puede haber paralelogramos cuyas diagonales no se cortan en sus puntos medios
h) Si un cuadrilátero es un rectángulo, entonces sus diagonales son congruentes
i) Todo cuadrado es un rectángulo
j) Es posible un cuadrilátero con sólo dos ángulos rectos no contiguos
k) Es posible un cuadrilátero con sólo tres lados congruentes
l) Todo rombo es un cuadrado

**3.** Indique cuántos rectángulos hay en la siguiente figura:

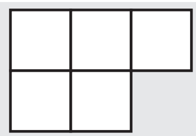


**4.** Indique cuántos rombos hay en la siguiente figura:

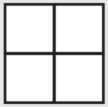


**5.** ¿Cuál es el menor número de palitos que se pueden retirar para que queden sólo 3 cuadrados?

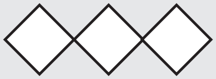
¿Y para que queden sólo 3 cuadrados congruentes?



**6.** Forme 6 cuadrados moviendo sólo 2 de los 12 palitos de la figura.

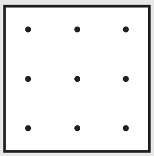


**7.** Obtenga 10 cuadrados moviendo sólo 4 palitos de los 12 de la figura:



**8.** Y ahora obtenga 5 cuadrados moviendo también 4 palitos de la figura.

**9.** En el cuadrado de la figura hay 9 objetos colocados a igual distancia horizontal y vertical unos de otros. Trace dos cuadrados interiores, de modo que cada objeto quede aislado de todos los demás.



## 2.3. Relación entre triángulos y paralelogramos

En el Cuaderno 13 decíamos que si se traza cualquiera de las dos diagonales de un paralelogramo, su región interior queda dividida en dos triángulos que resultan ser congruentes, ya que los tres pares de lados correspondientes son congruentes.

Y agregábamos que ***todo triángulo puede considerarse derivado de la bisección de un paralelogramo por cualquiera de sus diagonales***. Vamos a ver este aspecto con más detalle, analizando cómo se origina cada uno de los diferentes tipos de triángulos, a partir de cierta clase de paralelogramo en particular.

| **Tipo de $\Delta$** | **Paralelogramo** | **Elementos considerados** |
|---|---|---|
| Acutángulo | Rombo (no cuadrado) y algunos romboides | 2 lados y la diagonal corta |
| Rectángulo | Rectángulo | 2 lados y una diagonal |
| Obtusángulo | Rombo (no cuadrado) y romboide | 2 lados y la diagonal larga |
| Equilátero | Rombo (un ángulo de 60º) | 2 lados y la diagonal corta |
| Isósceles | Rombo | 2 lados y cualquier diagonal |
| Isósceles | Romboide (diagonal corta = lado largo) | 2 lados y la diagonal corta |
| Escaleno | Romboide (diagonal corta ≠ lado largo) y rectángulo (no cuadrado) | 2 lados y cualquier diagonal |
| Rectángulo e isósceles | Cuadrado | 2 lados y cualquier diagonal |

Verifique cada una de las situaciones propuestas en la tabla anterior; es decir, trace cada uno de los paralelogramos propuestos y la diagonal indicada, y observe cómo se obtiene cada uno de los tipos de triángulos señalados.

**10.** Considere los cuatro triángulos en que se divide el interior de un paralelogramo cuando se trazan las dos diagonales.

a) ¿Pueden formarse cuatro triángulos equiláteros?
b) ¿Y cuatro triángulos isósceles? ¿En qué caso(s)?
c) ¿Y cuatro triángulos escalenos? ¿En qué caso(s)?
d) ¿Y cuatro triángulos rectángulos? ¿En qué caso(s)?
e) ¿Y cuatro triángulos rectángulos e isósceles? ¿En qué caso(s)?

## 2.4. Construcción de paralelogramos

***a) Mediante el uso de las herramientas geométricas***

Observamos que, *en cuanto a lados y ángulos:*

| Para construir | Es suficiente conocer |
|---|---|
| Un cuadrado | La longitud del lado |
| Un rectángulo | Las longitudes de dos lados diferentes |
| Un rombo | La longitud del lado y la medida de un ángulo |
| Un romboide | La longitud de dos lados diferentes y la medida de un ángulo |

Si utilizamos regla y compás, o regla y escuadra, podemos servirnos de las técnicas de construcción descritas en el Cuaderno 12. En particular, de las siguientes:

• Trazar segmentos cuya medida nos es dada
• Trazar perpendiculares a un segmento en sus puntos extremos
• Construir ángulos cuya medida nos es dada
• Trasladar ángulos sobre la recta en que se asienta uno de los lados

Pero también podemos observar que, *en cuanto a diagonales:*

| Para construir | Es suficiente conocer |
|---|---|
| Un cuadrado | La longitud de una diagonal |
| Un rectángulo | La longitud de una diagonal y la medida de uno de los ángulos que forman las diagonales |
| Un rombo | La longitud de las dos diagonales |
| Un romboide | La longitud de las dos diagonales y la medida de uno de los ángulos que forman las diagonales |

También en este caso, si utilizamos regla y compás, o regla y escuadra, podemos servirnos de las técnicas de construcción descritas en el Cuaderno 12. En particular, de las siguientes:

• Trazar segmentos cuya medida nos es dada
• Obtener el punto medio de un segmento
• Trazar la mediatriz de un segmento
• Construir ángulos cuya medida nos es dada
• Trazar segmentos que unen pares de puntos dados

Ármese de paciencia y construya los siguientes paralelogramos. Hágalo como lo desee.

a) Un cuadrado de 5 cm de lado
b) Un cuadrado cuya diagonal mide 6 cm
c) Un rombo de 4 cm de lado y uno de cuyos ángulos mide 60º
d) Un rombo cuyas diagonales miden 3 y 5 cm
e) Un rectángulo cuyas diagonales miden 8 cm, tal que el ángulo formado entre ellas mide 60º
f) Un romboide cuyos lados miden 3 y 7 cm y uno de cuyos ángulos mide 150º
g) Un rectángulo cuyos lados miden 4 y 6 cm
h) Un romboide cuyas diagonales miden 6 y 8 cm, tal que el ángulo formado entre ellas mide 45º

**11.** Si las diagonales de un rectángulo forman un ángulo de 90º, ¿de qué figura se trata?

a) Construya un rectángulo sabiendo que uno de los lados mide 5 cm y una de las diagonales, 13 cm.

b) Construya un rombo sabiendo que su lado mide 5 cm y una de las diagonales, 6 cm.

c) Construya un romboide sabiendo que su lado mayor mide 5 cm, 6 cm su diagonal mayor, y que ambos segmentos forman un ángulo de 20º.

Si usted toma dos varillas o palitos rectilíneos de diferente longitud y los utiliza como diagonales, ¿qué paralelogramos puede construir (al unir los extremos de las varillas)? Hágalo. Y si ahora toma dos varillas o palitos rectilíneos de igual longitud y los utiliza como diagonales, ¿qué paralelogramos puede construir (al unir los extremos de las varillas)? Hágalo también.

**b) *Mediante la yuxtaposición de los correspondientes tipos de triángulos***

Si nos referimos a la tabla propuesta en el párrafo **2.3.** (obsérvela un momento), encontramos que al yuxtaponer por la “diagonal” dos triángulos congruentes indicados en cada caso, se obtendrá el paralelogramo correspondiente. Por ejemplo, yuxtaponer por la hipotenusa dos triángulos rectángulos congruentes, nos genera un rectángulo; o dos triángulos obtusángulos congruentes, por su lado más largo, nos genera un romboide:

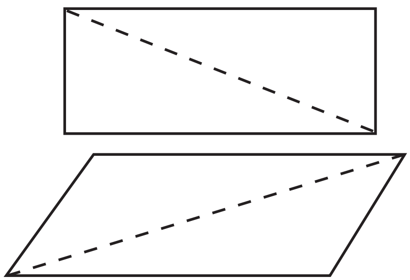


*Fig. 3: Construcción de paralelogramos a partir de triángulos*

Trate de construir los demás paralelogramos por una vía similar; lo puede hacer recortando pares congruentes de diversos triángulos y yuxtaponiéndolos, según lo indicado en la tabla del punto 2.3. De esta forma se termina de advertir la relación que existe entre triángulos y paralelogramos.

***c) Mediante el uso de cintas o bandas que se intersectan***

Al superponer dos bandas, como se muestra en la figura 4, la zona de intersección de ambas forma un paralelogramo. Los cuatro puntos de intersección son los vértices.

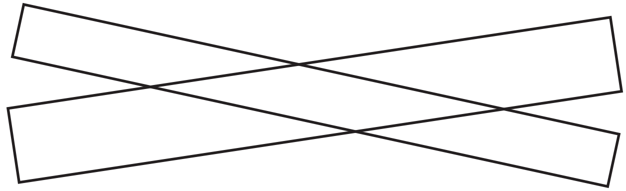


*Fig. 4: Construcción de un paralelogramo a partir de dos bandas*

Las distintas clases de paralelogramos se construyen de esta manera (hágalo por su cuenta):

| Anchura de las bandas | Ángulo de intersección | Paralelogramo |
|---|---|---|
| Diferente | Cualquiera ≠ 90º | Romboide |
| Diferente | 90º | Rectángulo |
| Igual | cualquiera ≠ 90º | Rombo |
| Igual | 90º | Cuadrado |

### 2.5. Perímetro y área de paralelogramos

*a) **El perímetro** de los distintos tipos de paralelogramos se calcula así:*

- ***En un rombo o en un cuadrado de lado l: perímetro = 4 x l***
- ***En un rectángulo o en un romboide de lados a y b: perímetro = 2 x (a + b)***

***b) El área de un paralelogramo***

Recordemos que el área de un polígono se define como la ***medida de la superficie de su región interior***. Para llegar a una expresión que relacione esta medida con la de los elementos de un paralelogramo, empezamos por considerar un cuadrado cuyo lado mide 1 unidad (u) de longitud (puede ser 1 cm, 1 m, etc.). Se dice que este ***cuadrado unitario*** tiene un área de 1 unidad cuadrada (1 $u^2$).

Y esta es la ***unidad para medir las áreas*** de cualquier superficie plana y, en particular, de cualquier polígono. Medir el área de un paralelogramo consiste en averiguar cuántas veces su superficie contiene a un cuadrado unitario, en las unidades dadas.

En el Cuaderno 13 observamos que las figuras cuya área resulta más sencilla de medir son los rectángulos. Para calcular, por ejemplo, el área de un rectángulo cuyos lados miden 4 y 3 cm, nos imaginamos la figura "fraccionada" en 12 cuadrados unitarios de 1 cm de lado y 1 $cm^2$ de área:

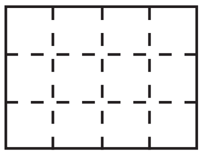


*Fig. 5: Área de un rectángulo*

El área del rectángulo es de 12 $cm^2$. E inferimos que si las dimensiones de sus lados son *b* (base) y *h* (altura), su área vendrá dada por $A = b \times h$. Como un caso particular, el área de un cuadrado de lado ***l*** vendrá dada por: $A = l^2$.

Si ahora consideramos un romboide como el de la izquierda, observamos que siempre es posible "pasar" a un rectángulo como el de la derecha (igual ocurre con un rombo), de la misma área, ya que la "pestaña" triangular simplemente se ha desplazado de lugar de una figura a otra:

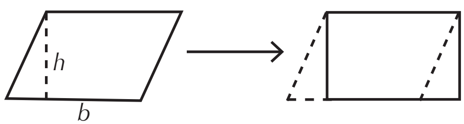



*Fig. 6: Área de un romboide*

En definitiva, ***el área*** del romboide y, en general, ***de cualquier paralelogramo viene dada por A = b x h***, que describe ***el producto de las medidas de su base y de su altura.***

Vale la pena hacer una mención especial en el caso del rombo, ya que su área puede determinarse a partir de las medidas de sus diagonales. Observe que si se multiplican ambas medidas, se obtendría el área de un rectángulo que duplicaría la del rombo (trace la figura correspondiente). Por lo tanto, ***si las diagonales miden a y b, el área del rombo*** viene dada por ***A = ½ (a x b)***. En el caso particular de un cuadrado de diagonal ***d***, su área es: $A = \frac{1}{2} d^2$.

Verifique que la fórmula manejada por los babilonios para el cálculo aproximado del área de un cuadrilátero: $A = \frac{1}{4}(a + c) \times (b + d)$, siendo a, b, c y d las longitudes de los cuatro lados consecutivos del cuadrilátero, se ajusta exactamente al caso de los rectángulos, pero no al de los rombos (no cuadrados) y romboides.

La relación establecida por el teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$ (ver Cuaderno 13), puede interpretarse así: el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa ($c^2$) equivale a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre cada uno de los catetos ($a^2 + b^2$) [Si desea una visualización dinámica de esta interpretación, puede acudir a la red en la dirección *http://www.walter-fendt.de/m11s/index.html* y llegar a la sección "Teorema de Pitágoras"].

### *c) Las unidades para medir los perímetros y las áreas*

***c.1)*** Aunque hasta ahora nos hemos referido con cierta frecuencia a la ***medida de longitudes*** –de segmentos, lados, perímetros de polígonos, distancias...-, no hemos dicho nada acerca de las unidades en que tales medidas se refieren. Las unidades universalmente reconocidas conforman el ***sistema decimal de medidas de longitud***. Las que se utilizan habitualmente son:

| Kilómetro | Hectómetro | Decámetro | metro | decímetro | centímetro | milímetro |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Km | Hm | Dm | m | dm | cm | mm |

La unidad fundamental de este sistema es el metro. Sus múltiplos aparecen a su izquierda en la tabla y sus submúltiplos, a la derecha. El carácter *decimal* de este sistema significa que cada unidad de un orden dado equivale a 10 unidades del orden inmediatamente inferior; y que 10 unidades de cualquier orden equivalen a 1 unidad del orden inmediatamente superior.

Existen otras unidades dentro de este sistema, que se utilizan en aquellas aplicaciones que tienen que manejar longitudes muy pequeñas; por ejemplo, la micra (millonésima parte de un metro), el ángstrom (diezmilmillonésima parte de un metro), etc.

Cuando se trata de medir distancias entre puntos de la superficie terrestre se utiliza habitualmente el kilómetro. También tiene uso la *milla*. Inicialmente esta unidad correspondía a la distancia que una legión romana recorría al dar mil (de ahí el nombre) pasos "dobles" (dos pasos sucesivos), y que equivalía casi a 1,5 Km. Actualmente está vigente la *milla marina*, utilizada en navegación marítima y aérea; corresponde a la longitud, sobre la esfera terrestre, de un minuto de arco de un meridiano y equivale a 1.852 m.

Para medir distancias mayores, como en astronomía, se utilizan otras medidas no decimales; por ejemplo, el año luz (distancia recorrida por la luz solar en un año, a la velocidad de 300.000 Km/s), el parsec (3,26 años luz), etc.

Estime (en metros) la longitud de los siguientes objetos:
a) la altura de una pared del aula de clase    b) la anchura de esa misma pared
c) la anchura de la puerta del aula    d) la altura de una de las ventanas del aula

Todas las culturas han creado y manejado sus propios sistemas de medida de longitudes, con sus unidades correspondientes, algunas de las cuales todavía pueden estar vigentes. Conocerlas y valorarlas tiene que formar parte de nuestro bagaje matemático.

**12.** Complete la tabla siguiente:

| La medida | Equivale a |
|---|---|
| 13 m | ___________cm |
| 0,4 Km | ___________m |
| 3.000 cm | 30___________ |
| 2,60 m | 2.600________ |

| La medida | Equivale a |
|---|---|
| 0,01 Hm | ___________dm |
| 23,5 Dm | 0,235________ |
| 600 mm | ___________m |
| 36 Km | 360_________ |

***c.2)*** En cuanto a la ***medida de superficies***, ya hemos mencionado que la unidad básica siempre es un cuadrado cuyo lado mide una unidad de longitud. Así se forman las unidades del ***sistema decimal de medidas de superficie o área***. Las que se utilizan habitualmente son:

| Kilómetro cuadrado | Hectómetro cuadrado | Decámetro cuadrado | metro cuad. | decímetro cuadrado | centímetro cuadrado | milímetro cuadrado |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Km$^2$ | Hm$^2$ | Dm$^2$ | m$^2$ | dm$^2$ | cm$^2$ | mm$^2$ |

La unidad fundamental de este sistema es el metro cuadrado. Sus múltiplos aparecen a su izquierda en la tabla y sus submúltiplos, a la derecha. El carácter *decimal* de este sistema significa que cada unidad de un orden dado equivale a 100 unidades del orden inmediatamente inferior; y que 100 unidades de cualquier orden equivalen a 1 unidad del orden inmediatamente superior.

También en la medida de superficies existen otras unidades vigentes. Entre ellas destaca la *hectárea* (Ha), que es el área de un cuadrado de 100 m de lado; coincide, pues, con el hectómetro cuadrado. En muchos núcleos urbanos la hectárea suele aproximarse al tamaño del solar ocupado por una manzana de casas. Un submúltiplo de la Ha es el *área* (a), que coincide con 1 Dm$^2$.

También deben conocerse y valorarse las unidades de medida de superficies propias de nuestras culturas locales o regionales.

**13**. a) ¿A qué equivale la centésima parte de un Km$^2$?
b) ¿Es cierto que la décima parte de un m$^2$ equivale a un dm$^2$?
c) ¿Por qué cantidad debe multiplicarse un Dm$^2$ para obtener un m$^2$?
d) ¿Es cierto que 100 Ha equivalen a 1 km$^2$?

**14.** Complete la tabla siguiente:

| La medida | Equivale a |
|---|---|
| 1,57 Ha | ___________m$^2$ |

| La medida | Equivale a |
|---|---|
| 7,4 Km$^2$ | ___________Ha |
| 800 cm$^2$ | 8___________ |
| 0,04 m$^2$ | ________cm$^2$ |
| 65 m$^2$ | 0,65_________ |
| 5.000 m$^2$ | _________Ha |
| 400 Ha | _________Km$^2$ |
| 732 dm$^2$ | 73.200______ |

Escriba la extensión de la superficie de su país en hectáreas.

Estime (en m$^2$) el área de las siguientes superficies y verifíquelo después:

a) el piso del aula de clase
b) la pared más grande del aula de clase
c) la cancha de deporte de la escuela
d) la pizarra del salón de clase
e) la puerta del aula de clase
f) la ventana más pequeña del salón

***d) La resolución de problemas referidos a perímetros y áreas de paralelogramos***

*Calcule el perímetro de un cuadrado cuya área mide 64 cm$^2$.*

Si el área es de 64 cm$^2$, el lado mide 8 cm ($64 = 8^2$) y el perímetro: 4 x 8 cm = 32 cm. ¿Se puede concluir que siempre el perímetro de un cuadrado es la mitad de la medida de su área (cada una en sus correspondientes unidades)?

*Calcule el área de un rectángulo sabiendo que uno de los lados mide 5 cm y una de las diagonales, 13 cm.*

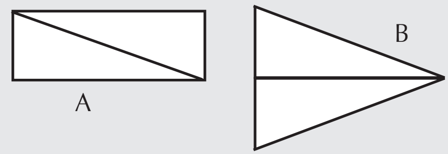
Si hace la figura verá que se forma un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos mide 5 cm, y la hipotenusa, 13 cm. Aplicamos el teorema de Pitágoras para obtener la medida del otro cateto: $x^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 = 12^2$. Por lo tanto, el otro cateto mide 12 cm, y el perímetro: 2 x (5 + 12) = 34 cm.

*De todos los rectángulos que tienen 36 cm$^2$ de área, ¿cuál es el que tiene menor perímetro?*

La idea es ir recorriendo todos los pares de factores (base y altura) cuyo producto sea 36, y calcular el perímetro correspondiente. Por ejemplo, si son 1 y 36, el perímetro será de 74 cm; si son 3 y 12, el perímetro será 30 cm; y será de 26 cm cuando sean 4 y 9. Por esta vía se llega a que el menor perímetro se obtiene cuando se trata de los factores 6 y 6: 24 cm; es decir, cuando se trata del cuadrado de 6 cm de lado. ¿Puede generalizarse el resultado para todo rectángulo? ¿Cómo formularía esa generalización?

*Considere las dos figuras A y B (A es un rectángulo de base 12 cm y altura 5 cm):*

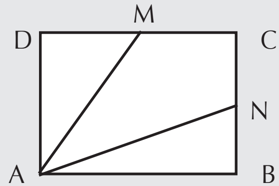
La figura B se obtiene separando los dos trozos del rectángulo A y B volviéndolos a unir de la forma indicada.




*¿Las dos figuras tienen la misma área? ¿El mismo perímetro?*

Puede verse que las dos figuras tienen la misma área. En cuanto al perímetro, el del rectángulo A es 2 x (5 + 12) = 34 cm. La figura B es un triángulo isósceles; los dos lados congruentes son las diagonales del rectángulo, cuya medida es de 13 cm, según acabamos de calcular. El otro lado mide el doble de la altura del rectángulo, 10 cm. El perímetro de B es, pues, 10 + 13 + 13 = 36 cm, mayor que el de A. Esta es *una transformación que conserva el área, pero no el perímetro.*

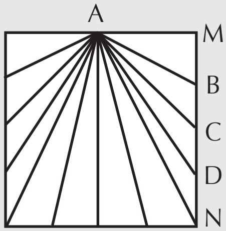
*En el rectángulo ABCD de la figura, AB = 20 cm, BC = 16 cm; M y N son los puntos medios de sus respectivos lados. ¿Cuánto mide el área del cuadrilátero ANCM?*




No existen fórmulas sencillas para calcular directamente el área del cuadrilátero. Es preferible obtenerla indirectamente, es decir, calcular el área del rectángulo ABCD y restarle la suma de las áreas de Δ ABN y Δ AMD:

Área ABCD = 20 cm x 16 cm = 320 $cm^2$
Área Δ ABN = ½ (AB x BN) = ½ (20 cm x 8 cm) = 80 $cm^2$
Área Δ ADM = ½ (AD x DM) = ½ (16 cm x 10 cm) = 80 $cm^2$
Área cuadrilátero ANCM = 320 – (80 + 80) = 160 $cm^2$

*¿Qué fracción del área total del cuadrado representa el área del Δ ABC, si la distancia entre dos puntos extremos consecutivos de los segmentos que parten de A, es igual a la cuarta parte del lado a del cuadrado?*



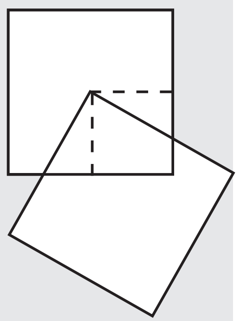

En la figura se han determinado 12 secciones triangulares; a primera vista, pareciera que cada una de ellas representa 1/12 del área total del cuadrado. Veamos. El área del Δ ABC es igual a la mitad del producto de las medidas de su base y de su altura. Si consideramos BC como su base, la altura viene dada por el segmento AM (observe que los Δ ABM, Δ
ABC, Δ ACD y Δ ADN tienen la misma altura AM; y también la misma medida de la base).

Así, pues, área Δ ABC = ½ (BC x AM) = ½ $(\frac{a}{4} \times \frac{a}{2})$ = $a^2/16$. Y como el área del cuadrado es $a^2$, el área de Δ ABC es 1/16 del área total. ¿Las 12 secciones triangulares tienen la misma área?

*El área de una figura se mide con unidades cuadradas cuyo lado tiene una longitud u, y se obtiene como resultado 36 $u^2$. Si ahora se utiliza como unidad de medida un cuadrado cuyo lado tiene la mitad de esa longitud, v = u/2, ¿cuánto medirá el área de la figura en estas nuevas unidades?*

La longitud del cuadrado que se toma ahora como unidad de medida del área se ha reducido a la mitad; esto significa que su área se ha reducido a la cuarta parte (no a la mitad): $v^2 = u^2/4$. Por consiguiente, si la unidad de medida de área se ha reducido a la cuarta parte, el área medida con estas unidades se habrá cuadruplicado y medirá 144 $v^2$.

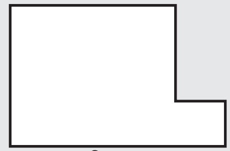
*La figura está formada por dos cuadrados congruentes de lado a. Uno de ellos parece "colgar" del centro del otro cuadrado. ¿Cuál es el área del cuadrilátero formado por la intersección de ambos cuadrados?*



Ya hemos dicho que no hay fórmulas sencillas para calcular el área de un cuadrilátero. Vamos a plantearnos el problema de otra manera.

En la figura, los dos segmentos punteados determinan, con los lados de los cuadrados, dos triángulos rectángulos congruentes, uno en el interior del cuadrilátero cuya área buscamos, y el otro en la parte superior externa. Si el primero se desplaza sobre el segundo, el área del cuadrilátero no ha variado. Pero la figura se ha convertido ahora en un cuadrado, equivalente a la cuarta parte de los cuadrados dados, es decir, de área $a^2/4$. Esa es el área buscada.

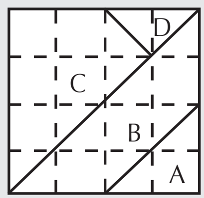
*Calcule el perímetro de la figura:*




Evidentemente, el perímetro mide 30 cm. Para obtenerlo, basta "desplazar" los dos segmentos de la parte cóncava de la figura, el horizontal hacia arriba y el vertical hacia la derecha, para ver que se forma un rectángulo del mismo perímetro.

*Trabajando sobre un geoplano se han delimitado las regiones A, B, C y D. Obtenga el valor de la siguiente expresión:*

$$\frac{\text{área de A}}{\text{área de D}} + \frac{(\text{área de B} + \text{área de D})}{\text{área de C}}$$



Calculemos las áreas de cada una de las regiones indicadas. Para ello contamos los cuadrados unitarios (área = 1 $u^2$) y sumamos las áreas de los "medio-cuadrados" (área = ½ $u^2$) que cada región incluye: Área de la región A = 2 $u^2$; área de la región B = 6 $u^2$; área de la región C = 7 $u^2$; área de la región D = 1 $u^2$.

De aquí se sigue:

$$\frac{\text{área de A}}{\text{área de D}} + \frac{\text{área de B} + \text{área de D}}{\text{área de C}} =$$

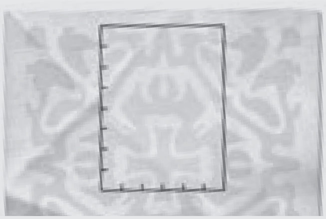
$$\frac{2\,u^2}{1\,u^2} + \frac{6\,u^2 + 1\,u^2}{7\,u^2} = 2 + 1 = 3$$

**He aquí otros problemas para que intente resolverlos por su cuenta:**

**15**. Calcule el área de un rombo sabiendo que su lado mide 5 cm y una de las diagonales, 6 cm.

**16.** De todos los rectángulos que tienen 20 cm de perímetro, ¿cuál es el que tiene mayor área? ¿Puede llegar a alguna generalización a partir de este resultado?

**17.** Tenemos un rectángulo cuyos lados miden 6 y 8 cm. ¿Cuánto medirá la altura de otro rectángulo que tenga la misma área y una base de 12 cm? ¿Los dos rectángulos tienen el mismo perímetro?



**18.** Seguimos con el mismo rectángulo, cuyos lados miden 6 y 8 cm. ¿Cuánto medirá la altura de otro rectángulo que tenga el mismo perímetro y una base de 12 cm? ¿Los dos rectángulos tienen la misma área?

**19.** ¿Es cierto que los cuatro triángulos que las dos diagonales determinan en el interior de un rectángulo, tienen todos la misma área?

**20.** Un rectángulo tiene 114 cm de perímetro y un área de 810 cm2. ¿Cuál es el área del mayor cuadrado que puede estar contenido dentro del rectángulo?

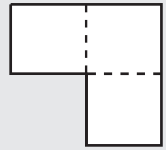
**21.** Un cuadrado de perímetro 16 cm está contenido dentro de otro cuadrado de perímetro 24 cm. ¿Cuánto mide el área de la región del cuadrado mayor que no está ocupada por el cuadrado menor? ¿Influye en el resultado la posición del cuadrado interior?

**22.** De todos los rombos cuyos lados miden 5 cm, ¿cuál es el de mayor área?

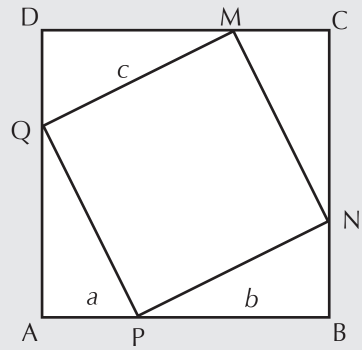
**23.** Dibuje un cuadrado de lado *a*; y de todos los cuadrados interiores cuyos vértices estén ubicados uno en cada uno de los lados del cuadrado inicial, trace aquel cuya área sea la menor posible. ¿Cuánto mide esta área?

Tenemos una lámina cuadrada de 60 cm de lado. ¿Cómo podemos cortarla en dos piezas iguales tales que, ensambladas adecuadamente, obtengamos un rectángulo de dimensiones 90 cm x 40 cm?

El terreno de la figura está formado por la yuxtaposición de tres cuadrados congruentes. Trate de dividirlo en cuatro partes congruentes.



Veamos ahora este resultado:




En el cuadrado ABCD insertamos el cuadrado MNPQ. Los cuatro triángulos rectángulos: $\Delta$ APQ, $\Delta$ BNP, $\Delta$ CMN y $\Delta$ DQM son congruentes, ya que sus ángulos agudos son congruentes (tienen sus lados respectivamente perpendiculares) y también sus hipotenusas.

Denotamos con:

*a* la medida de los catetos AP, BN, CM y DQ

*b* la medida de los catetos QA, PB, NC y MD

*c* la medida de las hipotenusas QP, PN, NM y MQ

El área del cuadrado mayor viene dada por el cuadrado de la medida de su lado, es decir, por $(a + b)^2$, cuyo desarrollo (ver Cuaderno 6) sabemos que es: $a^2 + b^2 + 2 \times a \times b$.

El área del cuadrado interno viene dada por: $c^2$.
El área de los 4 triángulos rectángulos interiores es: $4 \times \frac{1}{2} (a \times b) = 2 \times a \times b$.

Ahora bien, el área del cuadrado mayor es igual a la suma de las áreas del cuadrado interior y de los cuatro triángulos rectángulos; es decir:

$$a^2 + b^2 + 2 \times a \times b = c^2 + 2 \times a \times b$$

Podemos restar $2 \times a \times b$ en cada uno de los miembros de la igualdad, con lo que llegamos a una nueva igualdad: $c^2 = a^2 + b^2$. ***Acabamos de presentar una nueva demostración del teorema de Pitágoras...***

# *3. Trapecios*

### 3.1. Concepto y elementos

Como ya se dijo, un trapecio ([trapeza] = mesa de cuatro patas) ***es un cuadrilátero que posee un solo par de lados paralelos***. Por esta razón, son polígonos convexos. En la figura 7 se presentan algunos ejemplos.

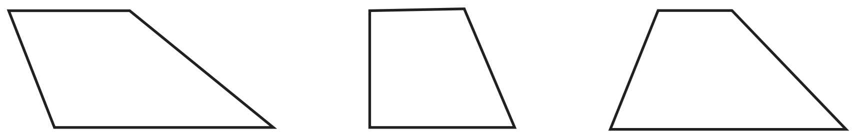
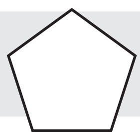


*Fig. 7: Trapecios*

Los elementos del trapecio son sus ***lados***, ***ángulos*** y ***diagonales***. Cabe señalar que los dos lados paralelos reciben el nombre de ***base mayor*** y ***base menor***, de acuerdo con su medida. Y la distancia que separa ambas bases se denomina la ***altura*** del trapecio.

La figura del trapecio es uno de los elementos arquitectónicos destacados en nuestras culturas americanas autóctonas. El frente de las pirámides tiene forma de trapecio, así como las ventanas y puertas de numerosos edificios, sobre todo a lo largo de la cordillera, de los valles y del altiplano andinos. Quizá su uso se debió a la mayor resistencia que tales estructuras presentan frente a los terremotos...

**24.** En el pentágono de la figura, trace todas las diagonales y determine cuántos trapecios se forman.



### 3.2. Clasificación de los trapecios

Los trapecios se clasifican de acuerdo al criterio de los ***ángulos que forman los lados no paralelos con la base mayor***. Si ambos ángulos son congruentes, el trapecio se denomina ***isósceles***; los lados no paralelos son también congruentes. Y si uno de estos lados forma un ángulo recto con la base mayor (y, por consiguiente, también con la base menor), se denomina trapecio ***rectángulo***. En los demás casos se habla de trapecios, sin más.

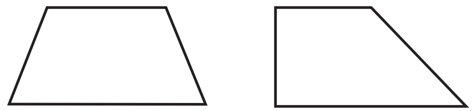


*Fig. 8: Trapecios isósceles y rectángulo*

### 3.3. Construcción de algunos trapecios

*a) Construir un trapecio rectángulo, conocidas las longitudes de ambas bases y la altura.*

Trazada la base mayor, en uno de sus extremos se levanta un segmento perpendicular cuya longitud coincida con la altura. Y por el extremo libre de este último segmento se levanta otro segmento perpendicular cuya longitud coincida con la base menor. Finalmente, se unen los extremos libres de ambas bases. Observe que siempre pueden construirse dos trapecios de esta manera...

*b) Construir un trapecio isósceles, conocidas las longitudes de los cuatro lados.*

Trazada la base mayor, sobre ella se

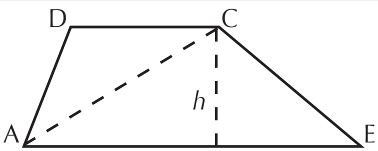
superpone un segmento congruente con la base menor, de tal forma que coincidan los puntos medios de ambos segmentos (¿cómo puede hacerlo?). Por los dos extremos de este segmento menor superpuesto sobre la base mayor, se levantan sendas perpendiculares. Ahora, desde los extremos de la base mayor se trazan sendos arcos, cuya amplitud sea igual a la longitud de los lados no paralelos. Los puntos de corte de estos arcos con las dos perpendiculares trazadas previamente determinan los vértices faltantes. Ahora se trazan la base menor y los dos lados faltantes.

Construya un trapecio conocidas las medidas de una de las bases, de sus lados no paralelos y de su altura.

### 3.4. Perímetro y área de trapecios

El cálculo del ***perímetro*** de un trapecio no responde a ninguna fórmula particular; simplemente se obtiene sumando las medidas de sus cuatro lados. En cuanto al ***cálculo de su área***, vamos a estudiar distintas alternativas de llegar a la fórmula que la expresa.

a) En el trapecio AECD hemos trazado la diagonal AC, que divide la región interior en dos triángulos: Δ AEC y Δ CDA.

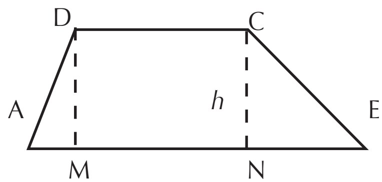



El área del trapecio viene dada por la suma de las áreas de los dos triángulos: ½ (AE x *h*) + ½ (DC x *h*). Esta altura *h* es la misma para ambos triángulos y coincide con la altura del trapecio. Observamos que AE y CD son las bases mayor y menor del trapecio, que designamos por *B* y *b*, respectivamente.

Por consiguiente: Área del trapecio = ½ (*B* x *h*) + ½ (*b* x *h*) = ½ (*B* + *b*) x *h*. En otras palabras, el área de un trapecio viene dada por el ***producto de la semisuma de las medidas de las bases por la medida de su altura***.

$$A = 1/2\ (B + b) \times h \quad \text{ó} \quad \frac{B+b}{2} \times h$$

b) Las dos perpendiculares a las bases trazadas en el trapecio determinan tres regiones en su interior: dos triángulos rectángulos y un rectángulo. La suma de sus respectivas áreas equivale al área del trapecio.



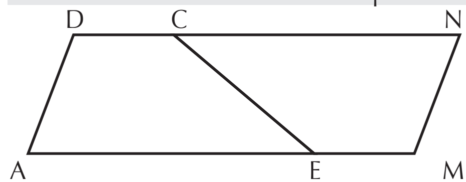

Área del trapecio = ½ (AM x *h*) + MN x *h* + ½ (NE x *h*). Si en esta suma aplicamos la propiedad distributiva (sacamos factor común ½ x *h*), llegamos a:

Área del trapecio = ½ x *h* x (AM + 2 x MN + NE). Ahora bien, 2 x MN puede interpretarse como MN + MN o, lo que es lo mismo, MN + DC (¿por qué?). Y así llegamos a:

Área del trapecio = ½ x *h* x (AM + MN + NE + DC). Ahora bien, AM + MN + NE = AE. Y si designamos a AE y CD por *B* y *b*, respectivamente, tenemos de nuevo:

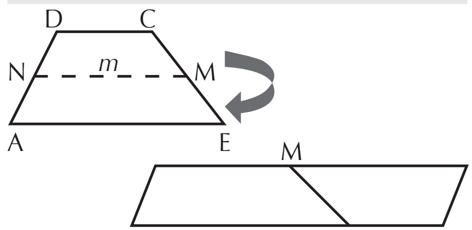
Área del trapecio = 1/2 x *h* x (*B* + *b*)

c) En la figura están yuxtapuestos dos trapecios congruentes, uno de ellos invertido con respecto al otro. La unión de ambas figuras produce un paralelogramo, cuya altura es la misma del trapecio, y cuya base es la suma de las dos bases del trapecio.



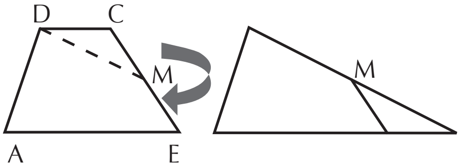

El área de este paralelogramo, que es el doble del área del trapecio, es (*B* + *b*) x *h*. Por consiguiente, el área del trapecio es la mitad: ½ (*B* + *b*) x *h*.

d) En la figura de la izquierda se muestra un trapecio con el segmento punteado *m* que une los puntos medios de los lados no paralelos; este segmento es paralelo a ambas bases.




Si se recorta el trapecio por *m* y se hace centro de giro en M, se obtiene la figura de la derecha, que es un paralelogramo cuya base es *B* + *b* y cuya altura es *h/2* (¿por qué?); el área de este paralelogramo es, pues, (*B* + *b*) x *h/2*. Como en esta transformación el área se ha conservado, se deduce que el área del trapecio es también (*B* + *b*) x *h/2*.

e) En la figura de la izquierda se muestra un trapecio con el segmento punteado *m* que une el vértice D con el punto medio M del lado CE.




Si se recorta el trapecio por *m* y se hace centro de giro en M, se obtiene la figura de la derecha, que es un triángulo cuya base es *B* + *b* y cuya altura es *h* (¿por qué?); el área de este triángulo es, pues, ½ (*B* + *b*) x *h*. Como en esta transformación el área se ha conservado, se deduce que el área del trapecio es también ½ (*B* + *b*) x *h*.

Como podemos ver, hay, al menos, cinco maneras diferentes de llegar a la fórmula que expresa el área de un trapecio en función de las longitudes de sus bases y de su altura; como para no olvidarse... Este es un buen ejemplo de la presencia de la diversidad en la construcción de los conocimientos matemáticos.

Además, así como hemos venido a la fórmula del área de un trapecio partiendo de las del triángulo y del paralelogramo, también es posible hacer el camino inverso.

Un ***triángulo*** puede definirse como ***un trapecio cuya base menor se ha reducido a un punto***; es decir, *b* = 0. Así, el área del triángulo, visto como un trapecio, es: *A = ½ (B + 0) x h = ½ (B x h)*.

Análogamente, un *paralelogramo* puede definirse como *un trapecio cuya base menor se ha hecho congruente con la base mayor*; es decir, *b* = *B*. Así, el área del paralelogramo, visto como un trapecio, es: *A = ½ (B + B) x h = ½ x 2 x B x h = B x h*.

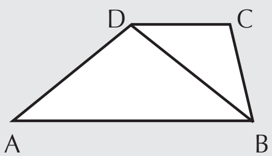
Curiosa la matemática, que nos permite recorrer caminos en ambos sentidos...

### 3.5. La resolución de problemas referidos a trapecios

**25**. Calcule la medida de la altura de un trapecio cuyas bases miden 18 y 10 cm y cuya área es de 154 cm².

**26**. Calcule la medida de la base menor de un trapecio cuya área es de 48 m², con una altura de 6 m y una base mayor de 10,5 m.

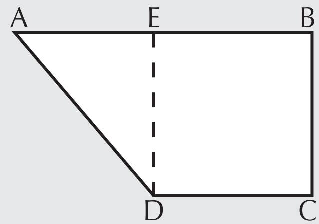
*En el trapecio ABCD de la figura, la diagonal BD es congruente con el lado AD; además, el < DCB mide 110º y el < DBC mide 30º. ¿Cuánto mide el < ADB?*




Como referencia para el problema, sabemos que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es de 180º. Así, en el Δ DCB: < DCB + < DBC + < BDC = 180º; es decir: 110º + 30º + < BDC = 180º; de donde < BDC = 40º.

Ahora bien, como DB es un segmento que corta a las paralelas AB y DC, los ángulos < BDC y < DBA son congruentes (¿por qué?); por lo tanto, < DBA mide también 40º. Por otro lado, como AD y DB son congruentes, el Δ ABD es isósceles, y el < DAB mide 40º. Luego, en este mismo Δ ABD, < ADB + 40º + 40º = 180º; de donde < ADB = 100º.

*En el trapecio rectángulo ADCB de la figura se tienen las siguientes medidas: AB = 7 cm; AD = 5 cm; y CD = 4 cm. Además, ED es perpendicular a AB. Calcule el perímetro del trapecio.*




Por construcción, la figura DCBE es un rectángulo. El segmento EB mide 4 cm (¿por qué?), de donde se infiere que AE mide 3 cm. En el Δ ADE, que es rectángulo, conocemos las medidas de AD (hipotenusa) y AE (cateto). Al aplicar el teorema de Pitágoras tenemos: ED² = 5² – 3² = 16; de donde, ED = 4 cm. Luego, en el rectángulo DCBE, BC = 4 cm (¿por qué?). El perímetro mide: 7 + 5 + 4 + 4 = 20 cm.

# 4. Polígonos regulares

## 4.1. Concepto y elementos

Un polígono se denomina regular cuando ***todos sus lados son congruentes, así como sus ángulos internos***. Observe que ambas condiciones son necesarias; puede verificar, con ejemplos adecuados, que no basta con una sola de ellas. Por esta razón, los polígonos regulares son convexos. El triángulo equilátero y el cuadrado son ejemplos de polígonos regulares de 3 y 4 lados, respectivamente. En los demás casos, se habla de pentágono regular, hexágono regular, etc.

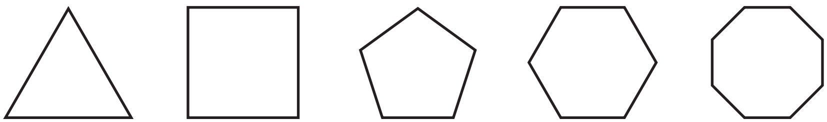


*Fig. 9: Algunos polígonos regulares*

Observe en su entorno (objetos, dibujos en revistas, periódicos y otros materiales escritos...) y trate de identificar figuras que tengan la forma de un polígono regular.

Todos los ***lados*** de un polígono regular son ***congruentes***; de aquí que, si la medida de un lado es *l*, el ***perímetro*** *p* de un polígono regular de *n* lados viene dado por: $p = n \times l$.

Los ***ángulos internos***, formados por dos lados consecutivos son también congruentes. Como la suma de los ángulos internos en un polígono de *n* lados es $(n - 2) \times 180^o$, de aquí se sigue que cada ángulo interno mide la suma anterior dividida entre n, es decir, $\frac{n-2}{n} \times 180^o$. Así, por ejemplo, la suma de los ángulos internos de un hexágono regular es $(6 - 2) \times 180^o = 720^o$. Y cada ángulo interno mide $720^o / 6 = 120^o$.

Las ***diagonales*** de un polígono regular (a excepción del triángulo equilátero, que no posee ninguna) son también ***congruentes***. Recordemos que el número de diagonales de un polígono regular de *n* lados viene dado por $\frac{nx(n-3)}{2}$. Así, un hexágono regular posee $\frac{6x(6-3)}{2}$ = 9 diagonales.

Todo polígono regular posee un ***centro*** o punto central. Si el polígono tiene un número par de lados, el centro viene dado por la intersección de cualquier par de diagonales; y si el polígono tiene un número impar de lados, el centro viene dado por la intersección de dos segmentos que partan de sendos vértices y vayan hasta el punto medio de los lados "opuestos" a esos vértices.

Establecido el centro de un polígono regular podemos hablar de su ***ángulo central***, que es el ángulo formado por dos segmentos que parten del centro y van hasta dos vértices consecutivos. El valor de este ángulo central en un polígono regular de *n* lados viene dado por $360^o/n$. En la figura 10 se muestra el ángulo central < AOB de un hexágono regular, cuya medida es $360^o/6 = 60^o$.

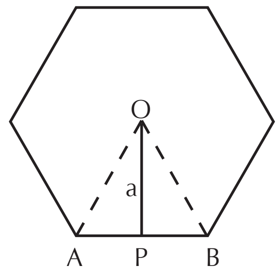



*Fig. 10: Angulo central y apotema de un polígono regular*

Finalmente, podemos hablar de la ***apotema*** (apotema = apo [desde afuera] + tithemi [colocar] = colocar desde afuera) de un polígono regular, que es el segmento (que es perpendicular) trazado desde el centro al punto medio de cualquiera de los lados del polígono. En la figura 10, el segmento OP representa la apotema del hexágono regular.

### 4.2. Área de un polígono regular de *n* lados

Si observamos la figura 10 apreciamos que al trazar los segmentos que van del centro a cada uno de los vértices del polígono regular, se forman *n* triángulos isósceles congruentes. El área de cada uno de ellos viene dada por ½ (*l x a*), siendo *l* la medida de un lado y *a* la de su apotema. El área total del polígono será: *n* x ½ (*l x a*), que nos lleva a ½ (*n x l*) x *a*. Ahora bien, como ½ (*n x l*) es la mitad del perímetro (semiperímetro), concluimos que ***el área de un polígono regular viene dada por el producto del semiperímetro por la apotema***.

Por ejemplo, en el caso de un cuadrado de 6 cm de lado, su perímetro mide 24 cm y su semiperímetro, 12 cm. La apotema coincide con la mitad de un lado, por lo que mide 3 cm. Y el área será de 12 cm x 3 cm = 36 $cm^2$. De haber utilizado la fórmula vista anteriormente ($A = l^2$), tendríamos: área = $(6\ cm)^2$ = 36 $cm^2$.

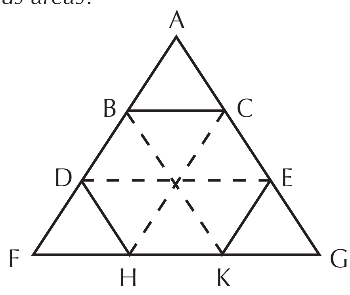
Una práctica provechosa es la de ***estimar el perímetro y el área de diversos polígonos***, sean regulares o no. En el caso del perímetro, la tarea se reduce a estimar las longitudes de cada lado y sumarlas todas después. En el caso del área, una manera de hacerlo consiste en "descomponer" la figura en regiones internas que tengan forma de paralelogramo o de triángulo (preferiblemente rectángulo), y aplicar las fórmulas correspondientes para el cálculo del área. Saber estimar longitudes, distancias y áreas constituye una destreza que puede ser útil para nuestra vida diaria.

Podemos resumir las características vistas hasta aquí de los polígonos regulares de *n* lados:

| Elemento | Representación y valor |
|---|---|
| Lado | *l* |
| Perímetro | *p* = *n* x *l* |
| Suma de ángulos internos | (*n* – 2) x 360º |
| Ángulo interno | 180º - 360º/*n* |
| Ángulo central | 360º/*n* |
| Número de diagonales | *n x (n* – 3)/2 |
| Apotema | *a* |
| Área | 1/2 (*p x a*) |

### 4.3. Resolución de problemas referentes a polígonos regulares

*La figura muestra el hexágono regular BDHKEC "inscrito" en el triángulo equilátero AFG. ¿Cuál es la razón entre los perímetros del triángulo y del hexágono? ¿Y la razón entre sus áreas?*




Cada lado del triángulo está integrado por tres segmentos menores; su perímetro mide el equivalente a 9 de estos segmentos. En cambio, el perímetro del hexágono equivale a 6 de estos segmentos. La razón entre los perímetros es, pues, de 9 a 6; es decir, 3 : 2.

En cuanto a las áreas, la del triángulo equivale a 9 triángulos equiláteros menores, mientras que la del hexágono equivale a 6 de estos triángulos. La razón entre las áreas es, también, de 9 a 6; es decir, 3 : 2.

**27.** Determine la medida del ángulo central de un pentágono, de un octógono y de un dodecágono regulares.

**28.** Determine la medida del ángulo interno de los polígonos regulares anteriores.

**29.** ¿Cuál es el polígono regular que tiene 14 diagonales congruentes?

**30.** ¿Cuántos triángulos equiláteros de 1 dm de lado caben en un hexágono regular de 2 dm de lado?

### 4.4. Semejanza y congruencia de polígonos regulares

Todos los polígonos regulares que poseen el mismo número de lados son semejantes: tienen la misma forma. Por ejemplo, todos los cuadrados son semejantes, así como lo son todos los triángulos equiláteros, etc. Todos los polígonos regulares que poseen el mismo número de lados poseen ángulos internos congruentes. Pero dos de tales polígonos serán congruentes sólo si los lados de ambos miden lo mismo.

En cambio, entre los polígonos no regulares puede haber variaciones en la forma y en el tamaño. Por ejemplo, dos rectángulos no necesariamente son semejantes (a pesar de que sus ángulos son todos rectos...); lo serán si las medidas de sus lados correspondientes forman una proporción. Y serán congruentes si las medidas de sus lados correspondientes son iguales.

## *5. Embaldosados o mosaicos con polígonos*

Un aspecto curioso que tiene que ver con los polígonos es el de la posibilidad de ***"embaldosar" o "enladrillar" una superficie plana con baldosas poligonales***, de modo que al irlas yuxtaponiendo no quede espacio libre entre ellas ni se superpongan unas con otras. En otras palabras, cubrir la superficie con un ***mosaico***. Cuando esto se hace con polígonos regulares, se puede pensar en el ***cuadrado***: con baldosas cuadradas se "llena" toda la superficie, sin que queden resquicios entre ellas.

¿Para qué otro tipo de polígonos regulares se presenta la misma situación? Si lo intenta con algunos de ellos descubrirá que sólo para el ***triángulo equilátero*** y para el ***hexágono regular***. ¿Y por qué sólo para estos tres tipos de polígonos regulares?

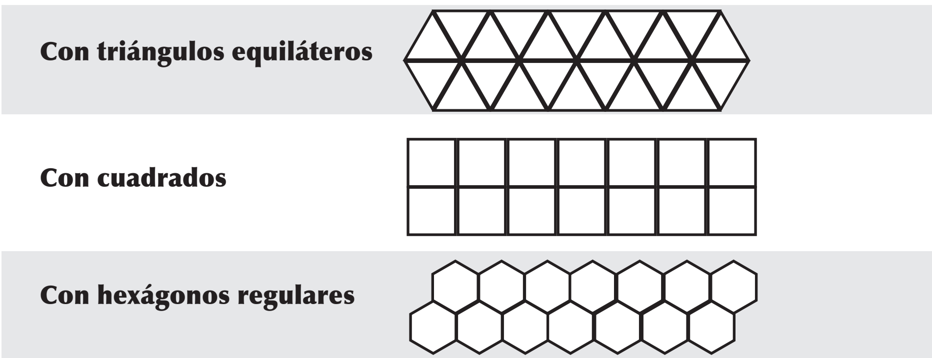
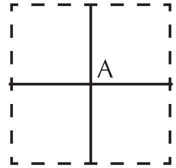


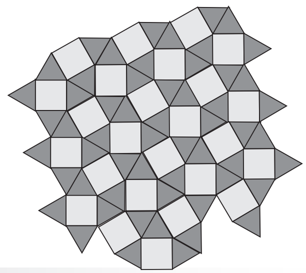

*Fig. 11: Mosaicos de polígonos regulares*

Pensemos en la situación. Si las baldosas no van a dejar resquicios entre ellas es porque alrededor de cada vértice A, la unión de los ángulos internos de los polígonos que concurren "cubre" los 360º del giro completo. Véase la figura para el caso del cuadrado.




Es decir, ***la medida del ángulo interno del polígono regular debe ser divisor de 360º***. En el caso del triángulo equilátero, del cuadrado y del hexágono regular, estas medidas son, respectivamente, 60º, 90º y 120º. Eso significa que en cada vértice concurren 6 triángulos equiláteros, 4 cuadrados y 3 hexágonos, respectivamente. Verifique ahora que en los demás tipos de polígonos regulares, la medida de los ángulos internos no es un número divisor de 360.

Fuera del caso de los polígonos regulares, existen otras figuras poligonales irregulares que producen el mismo efecto de embaldosado completo. Por ejemplo, cualquier tipo de paralelogramo, cualquier tipo de triángulo (al adosar dos triángulos congruentes se forma un paralelogramo, como se indicó en la Sección **2.3**.), todo hexágono que tenga sus lados opuestos congruentes, cualquier cuadrilátero (al adosar dos cuadriláteros congruentes por uno de sus lados iguales, estando en posiciones invertidas, se obtiene un hexágono con sus lados opuestos congruentes), y muchas otras figuras particulares. También se pueden combinar polígonos diferentes para producir el mismo efecto, como se aprecia en la figura:



Para los interesados en ampliar este punto, pueden entrar en un buscador de Internet e introducir las palabras “mosaico geométrico”, “tesela”, “teselación”, “embaldosado geométrico”. En particular sugerimos la siguiente dirección electrónica: http://www.pntic.mec.es/Descartes/3_eso/Teselacion_plano/Teselacion_del_plano.htm, que corresponde a la página “Recursos de Geometría para Primaria”, en la sección “Descartes”. Podrán observar mosaicos y su progresiva transformación a medida que se modifica la figura básica que los genera.

## 6. Simetría de figuras planas

Empecemos con las siguientes preguntas: ¿Qué nos suele llamar la atención cuando observamos desde encima una mariposa con sus alas extendidas? ¿Qué propiedad geométrica debe cumplir necesariamente la forma que se le da a una cometa (papagayo, papalote,...) para que pueda volar sin caerse?

De entrada, la primera pregunta es más fácil de responder: las alas se replican una a la otra, en todos sus detalles, produciéndonos una sensación de armonía, de belleza. Ahora bien, si se desplazara una sobre la otra, sobre el mismo plano en que se hallan las alas extendidas, no coincidirían; pero sí coinciden cuando una de ellas se “abate” sobre la otra al girar 180º en el espacio, tomando como “bisagra” el cuerpo de la mariposa.

Hablando en términos matemáticos, estamos en presencia de un caso de ***simetría*** (simetría = sun [con] + metron [medida] = comunidad de medida) ***en el plano*** (prescindimos del volumen de las alas y del cuerpo de la mariposa...). Si las colocamos sobre un plano, las dos alas son las ***figuras simétricas***, y la recta que pasa por el segmento rectilíneo que representaría la parte central del cuerpo de la mariposa sería el ***eje de simetría***. Decimos que estamos en presencia de un caso de ***simetría axial***. Los elementos característicos de una simetría axial son, pues, las figuras simétricas y el eje de simetría.

Observe en su entorno objetos cuyas fotografías presentarían situaciones de simetría axial. Igualmente, figuras de revistas, periódicos, carteles, libros, etc. que presenten simetría axial. Trate de identificar el eje de simetría en cada caso.

Vamos a revisar estas situaciones con detalle. ***Dos puntos P y P′ son simétricos con respecto a un eje e cuando este eje resulta ser la mediatriz del segmento que une ambos puntos***. Recordemos que esto significa que el segmento PP′ es perpendicular a *e* y que ambos puntos equidistan de *e*. Se dice que P y P′ son homólogos.

De manera análoga, dos figuras cualesquiera son simétricas con respecto a un eje cuando todos los puntos de la primera tienen su homólogo en la segunda. En la figura 12 se presentan las figuras A y A′, B y B′, y C y C′, simétricas, respectivamente, en relación con el eje de simetría *s*. Análogamente, M y M′ son simétricas respecto al eje de simetría *t*.

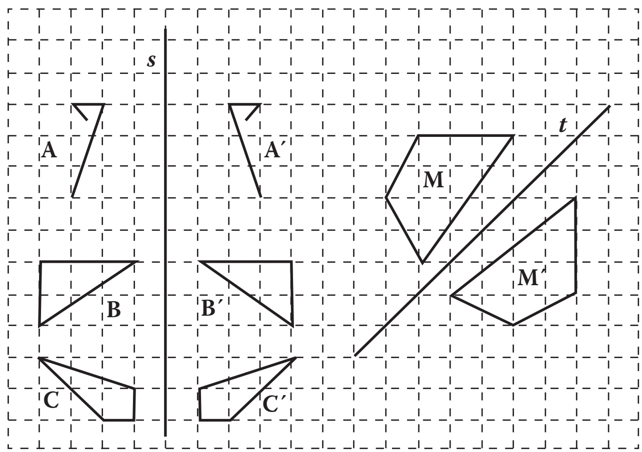


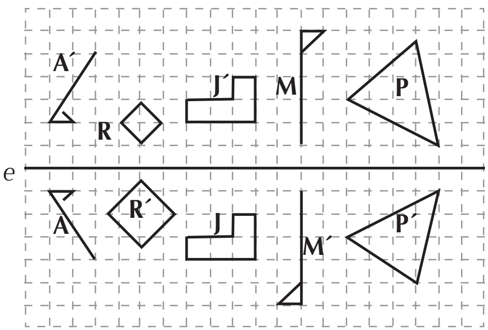

*Fig. 12: Ejemplos de simetría axial*

[Si desea una visualización dinámica de la simetría axial, puede acudir a la red en: *http://nti.educa.rcanaria.es/matematicas/Geometria/Actividades/Transformaciones/simetria_axial.htm* y llegar a la sección “Definición”].

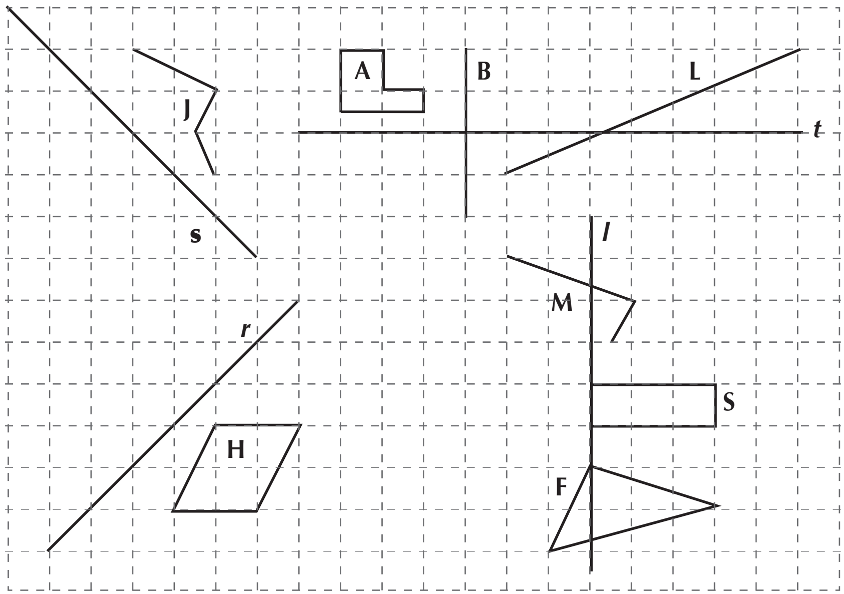
Observe que las ***figuras simétricas son congruentes***. Esto significa que las distancias entre dos puntos cualesquiera de una figura son iguales a las distancias entre los puntos homólogos de su figura simétrica. Por esta razón se dice que la ***simetría es una transformación que conserva las distancias internas de una figura en su homóloga***; es decir, ***es una isometría*** (isos [igual], metron [medida]).

Pero lo que ***sí cambia*** de una figura a su simétrica es el ***sentido de los ángulos internos*** de ambas. Por ejemplo, en el triángulo B de la figura 12, si se recorre el ángulo recto desde el cateto menor hasta el mayor, el giro procede en sentido positivo; pero este mismo giro en la figura B′ se hace en sentido negativo. Dicho con otras palabras, las figuras simétricas se recorren en sentido opuesto.

En el siguiente ejercicio, determine por qué no son simétricas respecto al eje *e* las figuras correspondientes (A y A′, R y R′, etc.):



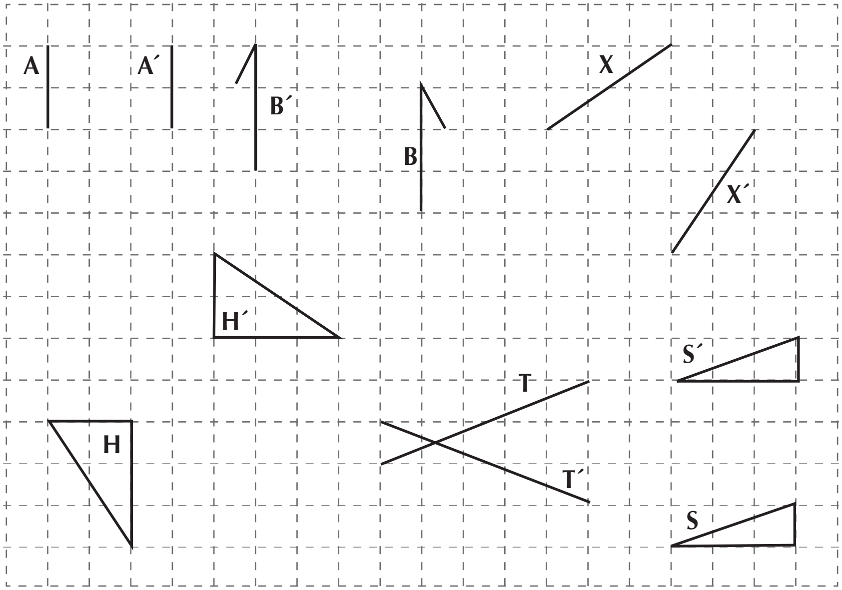

Ahora, dibuje la figura simétrica en cada caso, con respecto al eje de simetría que se indica (de J con respecto a *s*; de A, B y L, con *t*; de H, con *r*; y de M, S y F, con *l*):




Resulta interesante observar que hay figuras que no se modifican cuando se trata de hallar su simétrica con respecto a un eje dado. Tal es el caso del segmento B en el ejercicio anterior. Los ***elementos*** que verifican esta propiedad se denominan ***invariantes para la simetría***. Entre estos elementos invariantes podemos citar:

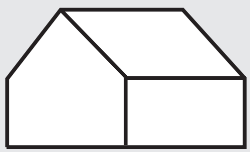
- Cualquier punto del eje de simetría, y el propio eje como tal.
- Toda recta perpendicular al eje de simetría.
- Todo segmento cuya mediatriz sea el eje de simetría.
- Todo ángulo cuya bisectriz sea el eje de simetría.
- Toda figura con respecto a sus ejes de simetría internos.
- Todo polígono regular de un número par de lados, siempre que el eje de simetría pase por dos vértices opuestos, o por los puntos medios de dos lados opuestos.
- Todo polígono regular de un número impar de lados, siempre que el eje de sime tría pase por un vértice y por el punto medio de su lado opuesto.
- Toda circunferencia cuyo centro pertenezca al eje de simetría.

Trate de dibujar en cada caso, si es posible, el eje de simetría de las figuras que se indican como posibles homólogas (A y A′, etc.):

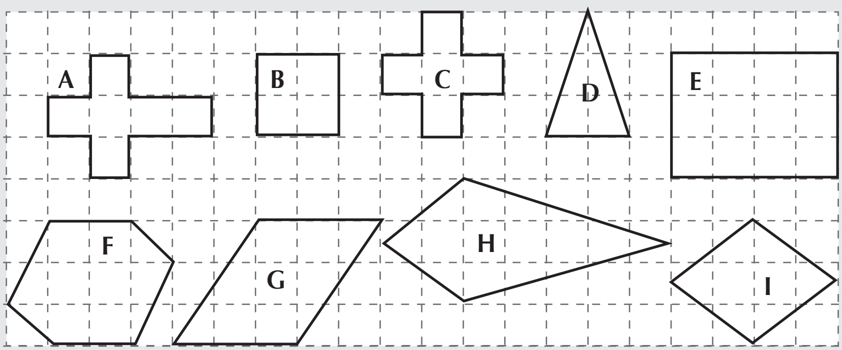




La figura representa una casa con la fachada orientada hacia la izquierda del observador. Mueva dos palitos y obtenga una casa simétrica con respecto a un eje vertical, con la fachada orientada hacia la derecha.



**31**. Determine cuántos ejes de simetría posee cada una de las figuras siguientes:





Haga la lista de todas las letras del alfabeto que posean un solo eje de simetría. Y una nueva lista con todas las que posean dos ejes de simetría. ¿Hay alguna que posea más de dos ejes de simetría?

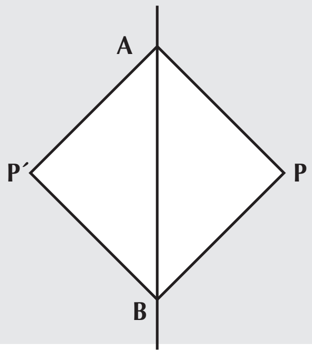
**32.** Indique los tipos de cuadriláteros que poseen: a) Cuatro ejes de simetría; b) Dos ejes; c) Un solo eje; d) Ningún eje de simetría

Es hora de dar respuesta a la pregunta planteada al comienzo de este apartado: *¿Qué propiedad geométrica debe cumplir necesariamente la forma que se le da a una cometa (papagayo, papalote,...) para que pueda volar sin caerse?*

Como todos hemos sido niños, tenemos el conocimiento práctico suficiente para saber cuáles de las figuras de la última ilustración (en la posición en que se muestran) podrían "volar" como cometas; son las figuras B, C, D, E e I. Las figuras F y G no podrían hacerlo. Pero las figuras A y H sí podrían hacerlo... si cambian de posición.

¿Cuál es la conclusión de este análisis de casos? Que si la figura no tiene ejes de simetría, no sirve para volar como cometa; y que si tiene un eje, pero no está en posición vertical, tampoco se mantiene en el aire. Así pues, la propiedad geométrica que debe cumplir necesariamente la forma que se le da a una cometa (papagayo, papalote,...) para que pueda volar sin caerse es que tenga un eje de simetría vertical. Curioso, ¿no? ¿Y si se trata de una cometa tridimensional?

Otra curiosidad. Podemos construir un artefacto para producir figuras simétricas, homólogas a otras que estemos dibujando simultáneamente.

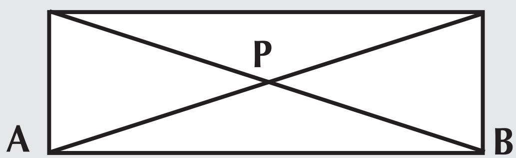



Es una especie de pantógrafo, es decir, un rombo articulado, cuyos vértices A y B se mueven con libertad a lo largo del eje que pasa por A y B, y que será el eje de simetría. En los extremos P y P′ se colocan sendos lápices. Al dibujar libremente cualquier figura con uno de los lápices, el otro reproducirá la figura simétrica al otro lado del eje. Inténtelo.

## *7. Y ahora, otros ejercicios "para la casa"...*

**33.** El siguiente rectángulo tiene una base de 24 cm y una altura de 10 cm.

¿Cuál es el perímetro del Δ ABP?

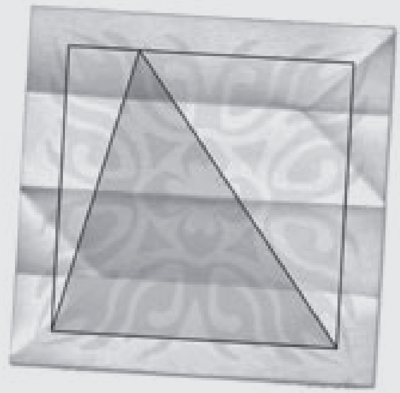



**34**. ¿Cuál es el área de un rectángulo cuyo perímetro es de 60 cm y cuya base mide el doble de la altura?

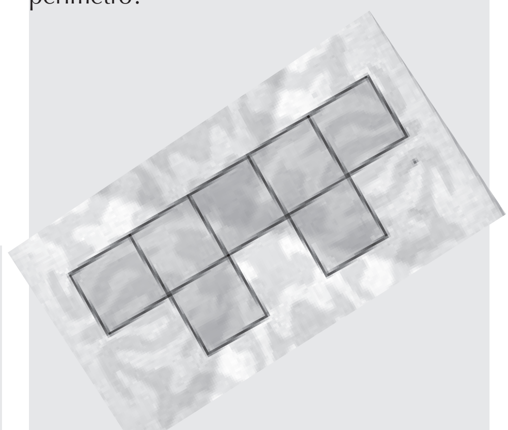
**35**. Al duplicar la longitud de los lados de un cuadrado, el área aumenta en 48 cm². ¿Cuánto mide el lado del primer cuadrado?

Tenemos una lámina rectangular de dimensiones 3 m x 4 m. ¿Cómo podemos cortarla en dos piezas iguales tales que, ensambladas adecuadamente, obtengamos un rectángulo de dimensiones 2 m x 6 m?

**36**. El cuadrado de la figura tiene un perímetro de 8 cm. En su interior se construye un triángulo con un vértice sobre uno de los lados, y los otros dos, en los extremos del lado opuesto. ¿Cuál es el área de la región interna del cuadrado que es externa al triángulo?

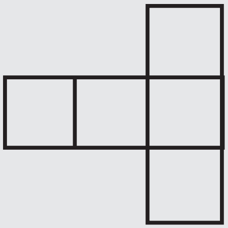


**37.** El área de la figura formada por 7 cuadrados es de 112 cm² . ¿Cuánto mide su perímetro?

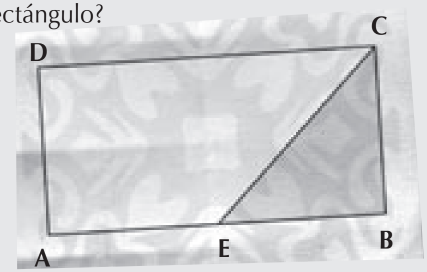


En el centro agrario comunal hay una alberca para riego que tiene forma cuadrada, con un árbol en cada esquina. ¿Cómo se puede duplicar la capacidad de la alberca, sin aumentar su profundidad y sin tener que cortar ninguno de los árboles de las esquinas?

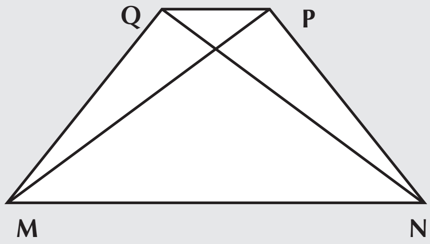
El terreno de la figura está formado por la unión de cinco cuadrados congruentes. Trate de dividirlo en cuatro partes congruentes.



**38**. El rectángulo ABCD de la figura tiene un área de 24 cm². E es el punto medio del segmento AB. ¿Cuál es el área del trapecio AECD? ¿Podemos saber la altura del rectángulo?



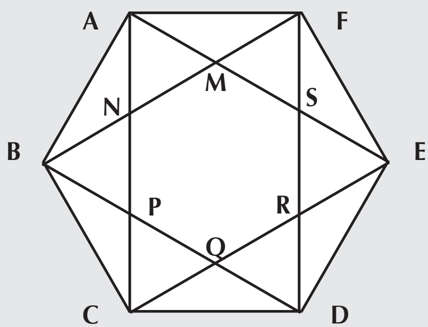

**39.** La base mayor del trapecio isósceles ABCD mide 25 cm, y los lados no paralelos, 15 cm. Además, la diagonal MP es perpendicular al lado PN, y la diagonal QN es perpendicular al lado MQ. ¿Cuánto mide el área del trapecio?



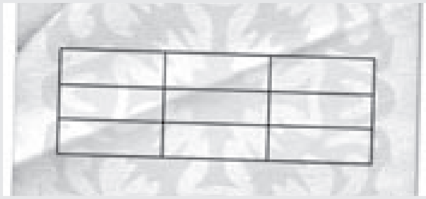

**40**. Calcule el perímetro de un trapecio isósceles cuyas bases miden 12 y 6 cm, y cuya área es de 36 cm².

Dibuje en un papel la forma en que pueden colocarse 10 postes en 5 filas de 4 postes cada una. Como sugerencia, dibuje un pentágono y trace sus diagonales...

**41.** La figura muestra el hexágono regular ABCDEF, dentro del cual se ha construido el hexágono regular MNPQRS, de tamaño menor. ¿Cuál es la razón entre las áreas del hexágono menor y del mayor?




**42**. El área de cada rectángulo pequeño mide 2 u². ¿Cuántos rectángulos de área ≤ 8 u² hay en la figura?

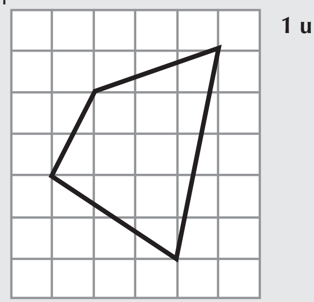


Demuestre que en cualquier rectángulo o rombo, la suma de los cuadrados de las medidas de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los cuatro lados.

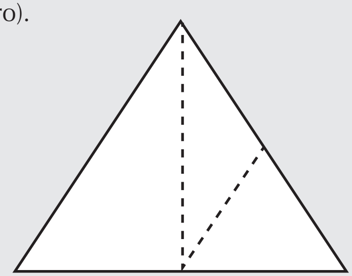
**43**. Calcule el perímetro y el área de la figura dada. Para lo primero, utilice el teorema de Pitágoras (considere los triángulos-rectángulos apropiados para cada lado).

Y para el cálculo del área, obténgala como diferencia de un área rectangular, menos las áreas de ciertos triángulos rectángulos.

Plantéese otros ejercicios similares en un geoplano...



Recorte el triángulo equilátero de la figura por los segmentos punteados. Con las tres piezas obtenidas, arme a) un paralelogramo; b) un triángulo isósceles (no equilátero).



En esta línea de desarmar una figura y componer otras diferentes, trate de averiguar (en libros o en la red) lo relativo al ***tangram***... Y juegue a elaborar figuras a partir de las 7 piezas básicas de las que está compuesto el cuadrado original. Las transformaciones que se producen al pasar a cada nuevo diseño son ejemplos de cómo se conserva el área, pero no el perímetro del cuadrado original.

Sobre una mesa rectangular hay un florero. ¿Cómo podemos asegurarnos fácilmente de que el florero está realmente en el centro de la mesa?

Averigüe cuáles son las unidades de medida de longitudes y distancias, propias de las culturas de su entorno. Igualmente para las unidades de medida de superficies. Establezca una tabla de equivalencias entre ellas y las del sistema decimal de medidas.

## Referencias Bibliográficas y electrónicas


- Eves, H. (1969). Estudio de las Geometrías. Tomo I. México: UTEHA.

- Fendt, W. (2003). Applets Java de Matemáticas. Disponible en:
http://www.walter-fendt.de/m11s/index.html

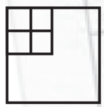
- Ministerio de Educación, Cultura y Deportes (2000). Descartes. Teselación del plano. Madrid: MECD. Disponible en: http://www.pntic.mec.es/Descartes/3_eso/Teselacion_plano/Teselacion_del_plano.htm

- Red Canaria de Educación (s.f.). Simetría axial. Disponible en:
http://nti.educa.rcanaria.es/matematicas/Geometria/Actividades/Transformaciones/simetria_axial.htm

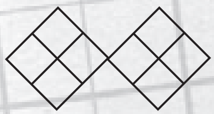

## Respuestas de los ejercicios propuestos

**1**. Un paralelogramo **2**. Verdaderas: a, e, f, h, i, j, k **3**. 18 rectángulos **4**. 8 rombos **5**. 2 palitos; 1 palito

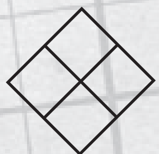
**6**.



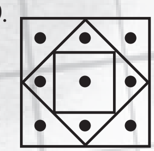
**7**.



**8**.



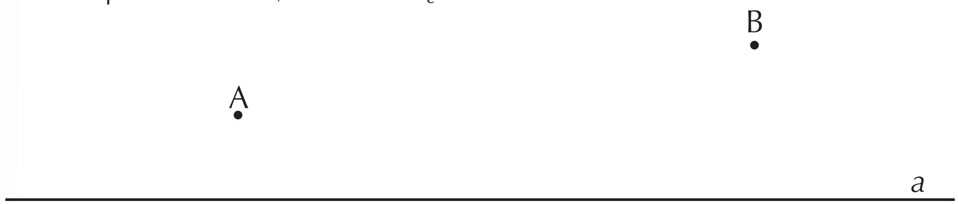
**9**.



**10**. a) No; b) Sí; en el caso de los rectángulos; c) Sí; en la mayoría de los rombos y romboides; d) Sí; en el caso de los rombos; e) Sí; cuando es un cuadrado **11**. Un cuadrado **12**. 1.300 cm; 400 m; 30 m; 2.600 mm; 10 dm; 0,235 Km; 0,6 m; 360 Hm **13**. a) 1 $Hm^2$; b) No; c) 0,01; d) Sí **14**. 15.700 $m^2$; 740 Ha; 8 $dm^2$; 400 $cm^2$; 0,65 $Dm^2$; 0,5 Ha; 4 $Km^2$; 73.200 $cm^2$ **15**. 24 $cm^2$ **16**. El cuadrado de 5 cm de lado **17**. 4 cm; no **18**. 2 cm; no **19**. Sí **20**. 729 $cm^2$ **21**. 20 $cm^2$; no **22**. El cuadrado de 5 cm de lado **23**. $a^2/4$ **24**. 10 trapecios **25**. 11 cm **26**. 5,5 m **27**. 72º; 45º; 30º **28**. 108º; 135º; 150º **29**. Heptágono **30**. 24 triángulos equiláteros **31**. A. 1; B. 4; C. 4; D. 1; E. 2; F.0; G. 0; H. 1; I. 2 **32**. a) Cuadrado; b) Rectángulo y rombo (no cuadrados), c) Trapecio isósceles y las figuras como la H del ejercicio 31; d) Los demás tipos de cuadriláteros **33**. 50 cm **34**. 200 $cm^2$ **35**. 4 cm **36**. 2 $cm^2$ **37**. 64 cm **38**. 18 $cm^2$; no **39**. 192 $cm^2$ (h = 12 cm; b = 7 cm) **40**. 28 cm **41**. ⅓ **42**. 31 rectángulos **43**. $(\sqrt{10} + \sqrt{5} + \sqrt{13} + \sqrt{26})$ u; 11 $u^2$

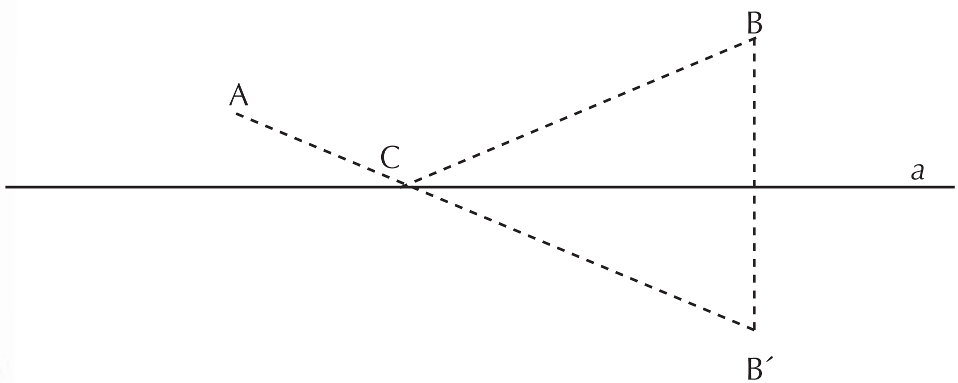
## *Postdata: Un problema fácil...*

El siguiente: Se quiere construir una ciudad deportiva C junto a una autopista *a* entre dos ciudades A y B  situadas al mismo lado de la carretera, con la condición de que esté lo más cerca posible de las dos ciudades, es decir, que la suma de las distancias desde el centro deportivo a ambas, sea mínima. ¿Cómo determinamos su ubicación?



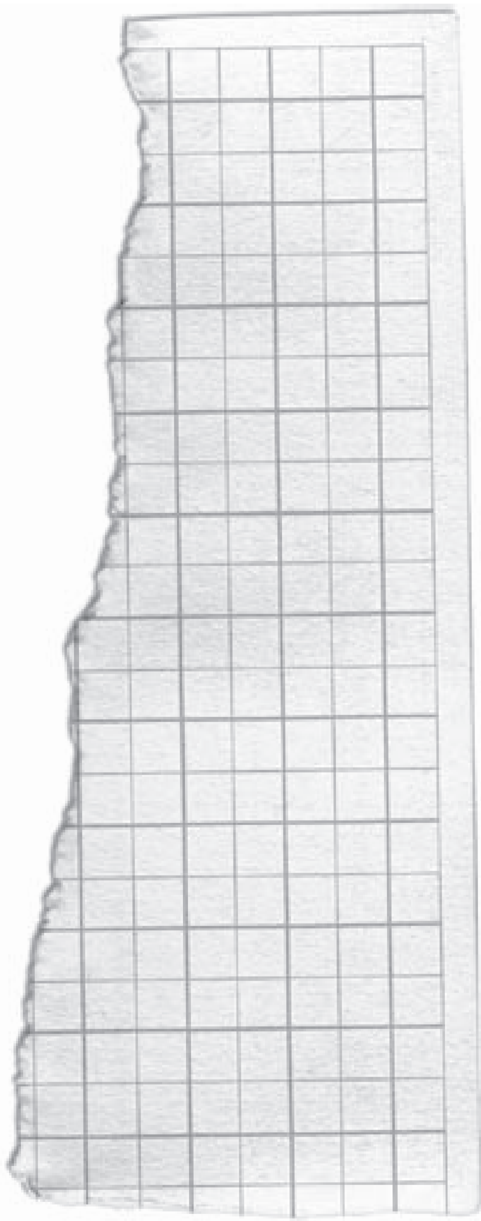

Podemos llegar a la solución por la vía del ensayo y error, colocando C en distintos puntos de *a*, midiendo las distancias desde C hasta A y B y sumándolas, hasta que consigamos la posición que da una suma mínima. Pero hay otra vía geométrica más sencilla y más exacta.

¿Qué pasaría si B estuviera del otro lado de la autopista? Simplemente, se trazaría el segmento que une A y B, y en el punto de corte con *a* se construiría la ciudad deportiva. En ese punto y sólo en él, la suma de las distancias a las dos ciudades sería mínima.



Pues bien, ésta es la idea: pensar en *a* como el eje de simetría para B, lo que nos lleva a B′; la distancia entre A y B′ es mínima sobre el segmento AB′; este segmento corta a *a* en C. Por consiguiente, como CB es simétrico a CB′, también la suma de las distancias entre A y B, pasando por C, es mínima. Problema resuelto. [Si desea una visualización dinámica de la resolución de este problema, puede ingresar en la red, en la referencia de la Red Canaria de Educación (s.f.). *Simetría axial*].

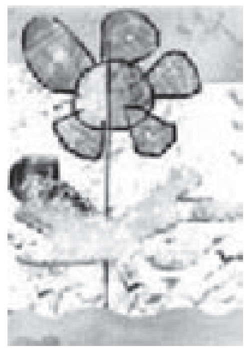
Otra cosa es si se busca que C quede a igual distancia de A y de B. En este caso se trazaría la mediatriz del segmento AB; C se construiría en el punto en que tal mediatriz corte a *a*.



# Índice







FE Y ALEGRIA