

**Ecuación de Friedmann modificada y cosmología sobre una
brane-world.**

Copyright 2009

by

Alexander Moreno Sánchez

Ecuación de Friedmann modificada y Cosmología sobre una Brane-World

Alexander Moreno Sánchez

Observatorio Astronómico Nacional

Requisito parcial para optar al título de Magíster en Ciencias Astronomía

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

2009

Ecuación de Friedmann modificada y Cosmología sobre una Brane-World

Alexander Moreno Sánchez
Observatorio Astronómico Nacional

Requisito parcial para optar al título de Magíster en Ciencias Astronomía

Director: Dr. Juan Manuel Tejeiro S.

Vo. Bo. Jurado

Carlos Quimbay

Vo. Bo. Jurado

Leonardo Castañeda

Vo. Bo. Jurado

Alexis Larrañaga

Bogotá D. C., 2009

A mis padres Misael Moreno y Bertha Sánchez, que han sido ejemplo de constante trabajo y perseverancia, a mis hermanos que me han acompañado y enseñado muchas fasetas desconocidas de los seres humanos. A Martha Botero, una estrella que iluminó mi vida durante varios años y a Elizabeth Erazo y María Alejandra Cuervo que han sido dos hermosos luceros en el horizonte.

Índice general

Índice de cuadros	4
1. Introducción	6
2. Dimensiones Adicionales	9
3. Modelo Randall-Sundrum	14
3.1. Modelo RSI (dos branes)	16
3.2. Modelo RSII (una brane)	19
3.3. Soluciones Cosmológicas	20
4. Ecuaciones de Einstein sobre una Brane	23
4.1. Ecuaciones de conservación	26
4.2. Descomposición covariante de los efectos volumétricos locales y no locales	28
4.3. Reducción a la ecuación de campo estándar	29
5. Ecuación de Friedmann modificada	32
6. Cosmología Estándar	40
6.1. Dinámica del modelo de Friedmann	40
6.2. Modelo estándar con $\Lambda_4 = 0$	41
6.2.1. Relación corrimiento al rojo-tiempo cósmico	42
6.2.2. Medida de distancia como función del corrimiento al rojo	43
6.3. Modelos con constante cosmológica $\Lambda_4 \neq 0$	44
6.3.1. Relación corrimiento al rojo-tiempo cósmico	46
6.3.2. Medida de distancias con $\Lambda_4 \neq 0$	46
6.4. Medida de distancias en cosmología	47
6.4.1. Distancia Comóvil (Línea de Visión)	47
6.4.2. Distancia Comóvil (Transversal)	48
6.4.3. Distancia Diametral Angular	48
6.4.4. Distancia de Luminosidad	48
6.4.5. Volumen Comóvil	49

6.4.6. El tiempo retrospectivo (lookback time)	49
6.4.7. Probabilidad de intersección de objetos	50
6.5. Escala de distancias en cosmología	50
7. Cosmología sobre una membrana	52
7.1. Cosmología sobre una membrana con $\Lambda_4 = 0$	52
7.1.1. Medida de distancias en función del corrimiento al rojo	55
7.2. Cosmología sobre una membrana con $\Lambda_4 \neq 0$	55
7.3. Cosmometría de Membranas	58
8. Caracterización del modelo braneworld	62
8.1. Modelos Canónicos	63
8.2. Coordenada radial comóvil	69
8.3. Sensibilidad de la distancia propia	71
8.4. Edad del Universo	74
9. Braneworld bajo Supernovas Ia	78
9.1. Relación magnitud-corrimento al rojo para membranas	78
9.1.1. Modelo estándar bajo datos de SN Ia	80
9.1.2. Modelo brane hiperbólico bajo dominio de Materia	86
9.1.3. Modelo brane plana bajo dominio de Materia	100
9.1.4. Modelo brane esférico bajo dominio de Materia	104
9.1.5. Modelo brane hiperbólica bajo dominio de Radiación	109
9.1.6. Modelo brane hiperbólica bajo dominio de ‘paredes de dominio’	113
9.1.7. Modelo brane hiperbólica bajo dominio de cuerdas cósmicas	116
9.1.8. Modelo brane hiperbólica bajo dominio de Energía Oscura	120
9.2. Cosmometría del braneworld bajo SN Ia	125
9.2.1. Volumen Comóvil de braneworld bajo dominio de materia	125
9.2.2. Distancia de Luminosidad bajo dominio de materia	128
9.2.3. Distancia Diametral Angular bajo dominio de materia	131
10. Braneworld y observaciones cosmológicas	135
11. Conclusiones	140
A. Ecuación de campo para Randall-Sundrum	144
B. Solución de la ecuación de Einstein	148
C. Obtención ecuación de campo efectiva para RSII	152
D. Generalización ecuaciones de campo para RSI	159

E. Términos no nulos de la métrica RS-FRW	162
F. Métrica Randall-Sundrum	165
G. Soluciones exactas, ajuste fino y relaciones entre constantes	168
H. Máxima Verosimilitud	172
Bibliografía	184

Índice de cuadros

8.1. Tabla de parámetros de algunos modelos cosmológicos	63
9.1. Valores Óptimos Modelo Estándar: tabla con los respectivos valores obtenidos de la rutina de máxima verosimilitud, se ha obtenido un valor de chi-cuadrado pequeño, es decir cercano a cien, el cual corresponde con valores reportados en la literatura, esto permite considerar la bondad del ajuste, como también los respectivos valores mínimos de los parámetros del modelo. En la literatura se reporta para la densidad de materia valores cercanos a 0.3, para la densidad de constante cosmológica reportan valores cercanos a 0.7, y para la densidad de curvatura valores cercanos a 0, es decir se considera hoy día un universo plano.	81
9.2. Tabla con los respectivos valores obtenidos de la rutina de máxima verosimilitud, se ha obtenido un valor de chi-cuadrado pequeño que muestra la bondad del ajuste, como también los respectivos valores mínimos de los parámetros del modelo. . .	99
9.3. Tabla con los respectivos valores obtenidos de la rutina de máxima verosimilitud, se ha obtenido un valor de chi-cuadrado pequeño que muestra la bondad del ajuste, como también los respectivos valores mínimos de los parámetros del modelo. Se observa que el valor para el parámetro de densidad de curvatura no es exactamente cero, en principio tal discrepancia puede adjudicarse al programa de cálculo que se ha desarrollado. Igualmente se observa un menor valor de densidad de radiación oscura.	100
9.4. Tabla con los respectivos valores obtenidos de la rutina de máxima verosimilitud, se ha obtenido un valor de chi-cuadrado pequeño que muestra la bondad del ajuste, como también los respectivos valores mínimos de los parámetros del modelo. . .	108
9.5. Tabla con los respectivos valores obtenidos de la rutina de máxima verosimilitud, se ha obtenido un valor de chi-cuadrado pequeño que muestra la bondad del ajuste, como también los respectivos valores mínimos de los parámetros del modelo. . .	112
9.6. Tabla con los respectivos valores obtenidos de la rutina de máxima verosimilitud, se ha obtenido un valor de chi-cuadrado pequeño que muestra la bondad del ajuste, como también los respectivos valores mínimos de los parámetros del modelo. . .	116

9.7. Tabla con los respectivos valores obtenidos de la rutina de máxima verosimilitud, se ha obtenido un valor de chi-cuadrado pequeño que muestra la bondad del ajuste, como también los respectivos valores mínimos de los parámetros del modelo. . .	117
9.8. Tabla con los respectivos valores obtenidos de la rutina de máxima verosimilitud, se ha obtenido un valor de chi-cuadrado pequeño que muestra la bondad del ajuste, como también los respectivos valores mínimos de los parámetros del modelo. . .	121
10.1. Tabla comparativa para los datos reportados en la literatura y obtenidos en el presente trabajo	139
H.1. Tabla con los respectivos valores observacionales	183

Capítulo 1

Introducción

A partir de la década de los 80's se ha presenciado el surgimiento de nuevas teorías basadas en ideas que antes eran consideradas heréticas: dimensiones extras, universos paralelos, multiversos, nuevas y extrañas simetrías, etc [1] [11] [55] [56].

Todos estos elementos, ideas y conceptos emergentes brindan la posibilidad de aproximarnos a un conocimiento más amplio del mundo físico, por ello se debe mantener abierta la mente a todas estas nuevas concepciones hasta que los experimentos y datos observacionales determinen que tipo de modelos son los más ajustados a la descripción del Universo. Entre tanto deben estudiarse los esquemas convencionales a profundidad, para demarcar el camino que debe conducir a un conocimiento mucho más amplio y real de la naturaleza [2].

La cosmología estándar es un paradigma en la ciencia moderna, nos ofrece un panorama global del Universo como un todo, hoy día se acepta al Big-Bang, con Inflación, junto con el modelo Lambda-Materia Oscura Fría, como el mejor modelo que describe los datos astronómicos observados hasta ahora [3] [4]. El Big-Bang original tiene muchos problemas, los cuales todavía siguen vigentes ya que aún no se tiene una comprensión completa de varios aspectos como el origen del mismo, de la etapa Inflacionaria, de la evolución y destino del Universo, de sus contenidos, entre otros. La Inflación, la cual es la solución para varias de las dificultades que presenta el modelo [5] [49], se considera que es causada por la dinámica de un 'campo escalar', el dilatón [6], permite la solución de algunos de los problemas fundamentales del Big-Bang [6], pero, crea otros varios problemas teóricos, para los cuales no se ha logrado una explicación completa a partir de física fundamental, por ejemplo soluciona el problema de horizontes, pero la expansión exponencial del Universo no es completamente clara [49].

De otra parte el modelo de Materia Oscura Fría, que se usa para describir el contenido de materia del Universo (aproximadamente, 70% de Energía Oscura (EO), un 25% de Materia Oscura Fría (MO), 4% de Materia Visible Normal (MV), 1% de Neutrinos de las tres clases) [7] [11] y a la formación de estructuras (galaxias, cúmulos, supercúmulos de galaxias, filamentos y vacíos, etc.) [7] presenta varios problemas: se desconoce la naturaleza de la EO y de la MOF, las simulaciones computacionales del modelo predicen una sobre-producción de sub-estructuras galácticas las cuales no se observan [7], además se encuentra que el centro de los halos de MO (la MO se condensa formando regiones , en forma de halos esféricos o elípticos, en el centro de los cuales se forman las galaxias a partir de la materia ordinaria visible) son demasiado densos entrando en contradicción con los datos observacionales [8] [11].

Es claro que aún falta mucho por hacer y por investigar si se desea tener un modelo que describa de manera más completa y coherente el Universo en toda su complejidad y que este libere del mayor número posible de problemas. No obstante, el Modelo Estándar de la Cosmología es el que mejor describe globalmente a nuestro Universo [9], sin entrar en los detalles de la evolución del mismo, aunque es importante enfatizar que tal modelo presenta muchos aspectos y resultados incompletos, por lo que cabe la posibilidad que en el futuro surjan observaciones y avances teóricos que incorporen ideas y planteamientos no convencionales que permitan conocer mucho mejor la historia y dinámica del Universo [10] [11].

Dentro de estos nuevos esquemas teóricos, ha surgido la cosmología de membranas, en la cual el hecho fundamental es la introducción de una dimensión espacial adicional no compacta, la cual ofrece la posibilidad de ampliar los grados de libertad gravitacionales para permitir incorporar explicaciones diferentes a fenómenos y observaciones recientes [54].

Debido a la gran cantidad de observaciones con las que se cuenta en la actualidad (observaciones de radiación cósmica de fondo, nucleosíntesis del Big-Bang, observaciones de Supernovas Ia, expansión acelerada del Universo, curvas de rotación galácticas, anomalía Pioner, etc) [4] [56], se ha venido mostrando que muchas de ellas no se ajustan a los esquemas convencionales, por lo cual se hace necesario profundizar e indagar el alcance de los planteamientos existentes, como el de considerar nuevos elementos fundamentales que permitan hacer mejores desarrollos y predicciones sobre la verdadera dinámica del Universo [12] [16] [28] [48].

El cuerpo principal de esta tesis, ateniéndose al objetivo general del trabajo, consiste en el estudio de la ecuación de Friedmann modificada bajo el modelo braneworld, mediante la obtención de manera explícita de las ecuaciones de campo y de Friedmann modificada para una

membrana en el caso del modelo Randall-Sundrum, y entre otros objetivos específicos, se considerará un desarrollo comparativo entre la cosmología de membranas y la cosmología estándar; se implementará y obtendrán valores, regiones de confianza, y gráficas de buen ajuste para datos de Supernovas tipo Ia, edad del universo, distancia de luminosidad, entre otros, todo ello se hará mediante la implementación de la técnica de máxima verosimilitud (*maximum likelihood*); igualmente, se desarrollarán gráficas comparativas de diferentes parámetros cosmográficos (distancia de luminosidad, distancia diametral angular, y otros), se obtendrán algunas relaciones cosmológicas importantes en el marco del modelo en cuestión, como también se estudiarán varias implicaciones cosmológicas deducidas del desarrollo del trabajo; de igual forma, se analizará la compatibilidad del modelo braneworld con el modelo cosmológico estándar.

Con algún detalle, en los últimos tiempos se han elaborado trabajos en los cuales se estudia la cosmología sobre una membrana, se ha aplicado la técnica de máxima verosimilitud, se han obtenido las regiones de confianza y las curvas de mejor ajuste en consideración de las observaciones de Supernovas Ia, pero se observa que en algunos de ellos se limitan a considerar branes planas, en este trabajo se hace una generalización al considerar branes Randall-Sundrum con curvatura, es decir las gráficas y análisis propuestos son un poco más generales que los resultados mostrados en otros trabajos [33].

El desarrollo de este trabajo sigue la siguiente división: en los capítulos 1, 2 se hace una introducción general y se consideran algunos elementos propios de las dimensiones adicionales, en los capítulos 3, 4, 5 se desarrollan los conceptos básicos del modelo braneworld, en el capítulo 6 se desarrolla los elementos de la cosmología estándar, en los capítulos 7, 8 se construye la cosmología sobre una membrana y se obtiene una caracterización general del modelo braneworld, en los capítulos 9, 10 se aplica la técnica de máxima verosimilitud y se comparan algunos valores reportados con los obtenidos, finalmente se resumen algunas conclusiones obtenidas y se ilustran en los apéndices algunos cálculos y elementos técnicos propios del modelo braneworld.

A lo largo del texto los sub o super-índices latinos recorren una dimensión temporal y cuatro dimensiones espaciales, por ejemplo $a, b = 0, 1, 2, 3, 4$ entonces cualquier expresión o término con sub o super-índices latinos representa una expresión en cinco dimensiones, mientras que los sub o super-índices griegos recorren una dimensión temporal y tres dimensiones espaciales, por ejemplo $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ por lo tanto una expresión o término con sub o super-índices griegos representa una cantidad en cuatro dimensiones.

Capítulo 2

Dimensiones Adicionales

Dentro del marco de las teorías convencionales permanecen muchos interrogantes sin respuesta. ¿Por qué existen tres dimensiones espaciales y no 4, 5 o 26?, ¿Por qué el valor de la constante cosmológica es tan pequeño?, ¿Qué sucedió realmente en el Big-Bang?, ¿Cuál será el destino final del Universo?, estas y muchas otras cuestiones surgen de la observación y del análisis del comportamiento del universo.

Por ello encontramos algunas razones para introducir y estudiar dimensiones extras. Vivimos en un universo de, aparentemente, una dimensión temporal y tres dimensiones espaciales [13]. Puede ser, sin embargo, que el universo tenga efectivamente, un espacio de alta dimensionalidad, solamente que nos encontramos limitados en nuestra capacidad para experimentar y comprender todas estas dimensiones.

La idea de introducir otras dimensiones y de involucrarlas en la física, tiene propósitos tales como:

1. Para sumergir el espacio-tiempo curvo de la relatividad general (es decir nuestro Universo físico) en un espacio plano de altas dimensiones. En este contexto, las dimensiones extras son introducidas solamente, para ayudar a visualizar, por ejemplo nuestras cuatro dimensiones como una superficie curva en un espacio de altas dimensiones [14] [15].

2. Para unificar el electromagnetismo (posteriormente las otras interacciones) con la gravedad, identificando algunas de las componentes extras del tensor métrico con los campos gauge cuatridimensionales de la física convencional. Esta fue la idea original de Kaluza-Klein [14] [16].

3. Para ayudar con los problemas de no-localidad de la mecánica cuántica. La sugerencia es que los intervalos espacio-temporales grandes que se miden en física, deben ser más pequeños,

cuando se miden en la métrica apropiada de altas dimensiones [14].

4. Para obtener un valor concordante de la constante cosmológica, puede ser que la constante cosmológica, distinta de cero en cuatro dimensiones pero con un valor pequeño, cuando se obtiene en altas dimensiones ‘automáticamente’ tome un valor pequeño cuando se visualiza desde un espacio de baja dimensionalidad [14].

5. Para facilitar la construcción de lagrangianos SUSY y SUGRA. Por ejemplo, N=1 SUGRA en 10 u 11 dimensiones. El introducir altas dimensiones crea un poderoso método de construir lagrangianos para $N > 1$ [17] [20].

6. Para construir teorías de cuerdas consistentes. Se ha mostrado que las teorías de cuerdas unificadas en la teoría-M deben involucrar muchas más dimensiones para lograr un esquema coherente [14] [20] [50] [51].

7. En algunos modelos se supone que las partículas observadas son los modos inferiores (modos de energía cero) de ciertos generadores en dimensiones extras. Es posible que las propiedades geométricas de estas dimensiones extras den origen a varios modos equivalentes que pueden ser identificados con las diferentes familias de partículas elementales [14].

8. Para suministrar explicaciones y aproximaciones alternas a los resultados convencionales, incorporar ideas novedosas y ampliar el escenario de fenómenos conspicuos como la expansión acelerada del Universo, la energía oscura, la materia oscura, entre otros [14] [16] [47].

Las teorías de supercuerdas y membranas son candidatas prometedoras para crear una teoría unificada de todas las fuerzas y partículas de la Naturaleza. Una construcción consistente de cuerdas cuánticas es sólo posible en más de cuatro dimensiones espacio-temporales. Entonces, para hacer una conexión directa de éstas teorías con nuestro familiar espaciotiempo no-compacto (dimensiones extendidas), cuadri-dimensional, se consideraba, que estábamos compelidos a compactificar las dimensiones espaciales extras a un tamaño finito, o alternativamente, encontrar un mecanismo para localizar campos materiales y gravitacionales en sub-variedades de baja dimensionalidad, pero en los nuevos esquemas de altas dimensiones lo anterior no necesariamente es cierto [17] [18] [54].

El énfasis en desarrollar teorías con más de tres dimensiones espaciales, se ha desplazado hacia la imagen del ‘brane-world’, la cual asume que la materia ordinaria, con posible excepción de los gravitones y de otras hipotéticas partículas debilmente acopladas con la materia, está atrapada en una sub-variedad tri-dimensional, llamada brane y sumergida en un espacio multidimensional.

El modelo de universo membrana es una construcción teórica que involucra dimensiones adi-

cionales extensas, y que trata de conservar los principios y leyes físicas plenamente conocidas [54]. Estos modelos ofrecen algunas novedosas e interesantes perspectivas en la explicación de algunos aspectos del universo observable. Varios autores consideran la posibilidad de que alguna de las dimensiones adicionales pueda ser extensa e incluso infinita, contrario a lo que se consideraba antes, es decir, dimensiones compactas, en dichas dimensiones extensas la interacción gravitacional tiene lugar en todo el espacio de alta dimensionalidad mientras que las otras interacciones quedan restringidas a las dimensiones convencionales [17] [18]. Lo anterior tiene como consecuencia que en un futuro cercano, se puedan encontrar posibles evidencias de las dimensiones adicionales en los colisionadores de partículas a energías de TeV.

En los modelos de membranas o brane-world, se considera un espaciotiempo de altas dimensiones, con una topología particular, el cual es llamado el bulk (volumen), y donde las hipersuperficies (subvariedades) constituyen las brane o membranas, de tal forma que, en los modelos de brane, se asume que el universo observable, descrito en buena aproximación por el modelo estándar de la cosmología, queda restringido a la brane, y sobre las cuales las interacciones gauge actúan [50] [51].

De los varios modelos de brane o membranas, tenemos uno en particular, el modelo Randall-Sundrum, cuya motivación original fué la solución del problema de jerarquías de la física de altas energías [52]. Este modelo consiste en un espacio-tiempo Anti-de Sitter de cinco-dimensiones, de máxima simetría espacial (es decir, que conserve la simetría esférica), con constante cosmológica negativa; dicho modelo en principio no parecía un modelo prometedor, pero en los últimos desarrollos teóricos se ha visto que ha tenido un gran impacto, sobre todo en teoría de cuerdas, física de partículas y cosmología [17] [18]. Randall y Sundrum introdujeron dos modelos, en el primero consideraron dos branes con tensión opuesta, sumergidas en un espaciotiempo de cinco dimensiones con constante cosmológica negativa, pero, debido a un factor en el tensor métrico, las partículas se localizan en la brane de tensión negativa, adquiriendo una gran masa, en comparación a la escala fundamental de masas, con lo cual la cosmología sobre esta brane, es insatisfactoria, porque la densidad de energía de la materia presente en la brane debe ser negativa, violando la condición de energía débil [34]. En el segundo modelo propuesto, únicamente se considera una brane, de tensión positiva y la dimensión extra se hace infinita, siendo consistente este modelo con experimentos gravitacionales actuales, prediciendo correcciones al potencial gravitacional Newtoniano a cortas distancias, como también algunas desviaciones de la evolución estándar del Universo, como por ejemplo, edad del Universo o, abundancia de elemen-

tos livianos [53] [54]. Todo ello ha despertado el interés de investigar y desarrollar estos modelos como posible alternativa de explicación teórica para la fenomenología reciente [13] [53] [54]. Uno de los logros del modelo de Randall y Sundrum ha sido mostrar que para geometrías no factorizables en cinco-dimensiones¹, allí existen estados simples, acotados sin masa, en paredes de dominio o en branes de tres dimensiones [17]. Estos, estados acotados son el modo cero de la reducción dimensional de Kaluza-Klein y corresponden al gravitón cuatri-dimensional. El marco de este escenario es un espacio de cinco-dimensiones Anti-de Sitter (bulk) con una tri-brane, donde los campos de materia están confinados y la gravedad Newtoniana se recupera a grandes distancias. Aunque recientemente era convencional asumir que tales dimensiones extras estuviesen compactificadas en variedades con un pequeño radio del orden del inverso de la escala de Planck, $\ell_p = M_P^{-1} = G_N^{1/2} \sim 10^{-33}$ cm, de tal forma que permaneciesen ocultas a los experimentos. Sólo, recientemente es que ha surgido el interés de investigar que tan grandes son estas dimensiones sin que entren en conflicto con la observación, y todavía más interesante, cuando y como estas dimensiones extras pueden manifestarse en si mismas. Se han desarrollado modelos en los cuales las dimensiones extras estan en el orden de los milímetros permaneciendo sin embargo ocultas a los experimentos, o quizá la alternativa más viable sea el modelo de dimensiones extras no compactas o de tamaño infinito como es el caso ya mencionado del modelo de Randall-Sundrum [38].

Algunas otras cuestiones que surgen son: Por qué y cómo el tamaño de la dimensión extra compacta o extendida permanece estable, como es la localización del gravitón sobre la brane, a que tipo de cosmología conduce realmente la consideración de branes, como se puede someter a prueba uno de estos modelos, cuales son las nuevas consecuencias físicas de estos modelos, estas y otras cuestiones son las que se indagan bajo este nuevo esquema teórico.

Las teorías de dimensiones extras en general, y los modelos de Brane-world en particular, son un camino indispensable para aproximarnos al entendimiento de la gravedad, post-Einstein. Las dimensiones extras suministran una aproximación a la gravedad modificada sin abandonar la relatividad general de Einstein. Además el paradigma del braneworld permite construir modelos que hacen posible incorporar las restricciones físicas del modelo estándar de partículas y del modelo estándar de la cosmología, y entre muchas otras cosas permite realizar una aproximación a la solución de problemas como el de la constante cosmológica, y de jerarquías, problema de

¹Geometrías en las cuales se considera que la métrica depende de todas las coordenadas de las dimensiones adicionales.

la materia oscura y de la energía oscura, entre otros posibles temas. El estudio de los modelos braneworld ha llegado a ser un tema muy fructífero, involucrando varias áreas de la física teórica. Es justo decir, sin embargo, que muchas de las principales corrientes de investigación obedecen a ideas especulativas más que a hechos bien establecidos, no obstante, pasa como con cualquier otra especulación física, el estudio del braneworld es guiado por los principios de la física y de la consistencia matemática, y por las posibilidades de conectar estos modelos con teorías más fundamentales y así con experimentos en un futuro cercano [20] [46] [53].

Capítulo 3

Modelo Randall-Sundrum

El éxito experimental de la ley inversa del cuadrado y de la Teoría General de la Relatividad, es que parecen implicar cuatro dimensiones espacio-temporales no compactas [17] [18]. Las dimensiones adicionales pueden ser aceptadas tan sólo si ellas son compactas y suficientemente pequeñas para ser consistentes con las pruebas gravitacionales corrientes, otro hecho es que si existen n -dimensiones adicionales compactas, la escala de Planck, debe relacionarse con la escala gravitacional en altas dimensiones, mediante : $M_{Pl}^2 = M^{2+n} V_n$, donde V_n , es el volumen del espacio n -dimensional.

El modelo Randall-Sundrum, muestra que nada de lo establecido anteriormente, es necesariamente cierto, ya que lo fundado esta basado en las propiedades de una geometría factorizable (el espacio-tiempo puede considerarse como un producto de un espacio Minkowskiano y una variedad compacta de dimensión adicional), esto es, la métrica del subespacio-tiempo en el que vivimos no depende de las coordenadas en las dimensiones adicionales. Si aceptamos una geometría no factorizable y dejamos que la métrica general dependa de todas las coordenadas podemos conseguir dimensiones extras no compactas en plena concordancia con los experimentos realizados para la gravedad, también se puede conseguir una nueva relación para la escala de Planck en la que ésta no dependa del tamaño de las dimensiones extras sino de la curvatura de tales dimensiones. La historia puede cambiar significativamente cuando tal consideración sea aceptada, talvéz la consecuencia más dramática es que podemos vivir en $4 + n$ dimensiones no compactas, en perfecta compatibilidad con la gravedad experimental. Se muestra que la masa de Planck esta determinada por la curvatura de las altas dimensiones más que por el tamaño de las dimensiones adicionales. Esta curvatura no entra en conflicto con la invarianza cuatridimensional de

Poincaré¹. En su primer artículo Randall y Sundrum mostraron que la jerarquía entre la escala fundamental de TeV y la aparente escala de Plank de $10^{19}GeV$, puede ser explicada por el factor de curvatura, aún si el tamaño de la dimensión extra es relativamente pequeña (distancia entre branes). Pero en su segundo artículo mostraron que si no existía una segunda brane, y la dimensión extra se extendía al infinito, la gravedad permanece efectivamente localizada sobre la única brane, ya que el volumen integrado permanece finito cuando $y \rightarrow \infty$, donde y es la coordenada de la dimensión adicional, por ello propusieron este modelo como una alternativa a la compactificación. La razón que sustenta lo anterior, puede ser cierta si la curvatura del espacio cinco-dimensional puede soportar un “estado acotado” de un gravitón en altas dimensiones, de tal forma que pueda permanecer confinado a una pequeña región del espaciotiempo².

Si la densidad de energía de la brane se toma en consideración, se encuentra que induce una interesante geometría en el espacio multidimensional, y que emergen novedosas propiedades en este escenario. Cuando consideramos escalas de distancia mayores que el ‘grosor’ de la brane, se puede visualizar la brane como una función-delta fuente del campo gravitacional. En el caso más simple, la brane gravitante está caracterizada por un parámetro, la densidad de energía por unidad de tri-volumen λ . Esta cantidad es también llamada tensión de la brane.

Para construir una teoría con una 3-brane simple, es decir plana, con tensión positiva, sumergida en un espaciotiempo de cinco dimensiones AdS, y en orden de poder cuantificar el sistema, es decir poder expandir las fluctuaciones gravitacionales en modos normales y que permita la normalización, que aparece en la reducción Kaluza-Klein (KK)³, se escoge un volumen finito introduciendo otra brane a una ‘distancia’ πr_c desde la brane de interés, donde las fronteras del espacio finito de cinco-dimensiones queda atrapado entre las branes [17] [18]. Para tal fin se consideran los siguientes esquemas teóricos.

¹Esto consiste en que los elementos o componentes de la métrica no cambian o permanecen invariantes bajo las transformaciones del grupo de Poincaré.

²Es decir, que las fluctuaciones o interacciones gravitacionales descritas mediante los gravitones permanezcan acotadas o constreñidas a las vecindades de la brane, para evitar que la energía de dichas interacciones termine escapando.

³El modelo RS está hecho en un espacio AdS₅, se puede demostrar que si se considera por ejemplo espacios dS₅, no se obtienen soluciones cosmológicas o por lo menos compatibles con la cosmología estándar.

3.1. Modelo RSI (dos branes)

Randall y Sundrum propusieron este modelo con el fin de solucionar el problema de jerarquías, ya que la interacción gravitacional es mucho más débil que las otras interacciones, para lograr una explicación alterna introdujeron dos membranas o branes 4D, inmersas en un espaciotiempo AdS_5 , donde una de las membranas representa el universo físico observable o brane visible y la otra la llaman oculta, aquí se llamaran brane 1 y brane 2. Para realizar un aproximación teórica al esquema ilustrado anteriormente se sigue el siguiente esquema teórico, donde se propone la siguiente acción

$$S = S_B + S_{b1} + S_{b2} , \quad (3.1)$$

$$S_B = \int d^4x \int dy \sqrt{-g} [2M^3 R - \Lambda] , \quad (3.2)$$

$$S_{b1} = \int d^4x \sqrt{-g^{(b1)}} [V_{b1} + \mathcal{L}_{b1}] , \quad (3.3)$$

$$S_{b2} = \int d^4x \sqrt{-g^{(b2)}} [V_{b2} + \mathcal{L}_{b2}] , \quad (3.4)$$

donde S_{b1} y S_{b2} denotan las acciones sobre las branes, y S_B representa la acción en el *bulk* (espacio 5D), R es el escalar de Ricci 5D, g_{uv} , Λ , V_b , M son el tensor métrico en cinco-dimensiones, la constante cosmológica en el volumen, la energía del vacío en la brane, y la masa de Planck 5D respectivamente. Las branes están localizadas sobre la coordenada y , de tal forma que la métrica inducida sobre cada brane es

$$g_{\alpha\beta}^{(b1)} = g_{uv} |_{y=0} , \quad g_{\alpha\beta}^{(b2)} = g_{uv} |_{y=y_0} . \quad (3.5)$$

Se puede construir una solución en un espacio no compacto, tal que la solución sea periódica en $y = \phi + 2\pi$. En el modelo anterior se han introducido dos tri-branes, que en general se pueden considerar ubicadas en $\phi = 0$ y la otra en $\phi = \pi$, y donde se hace la identificación (x^μ, ϕ) con $(x^\mu, -\phi)$, esto quiere decir que se considera un orbifold S^1/Z_2 en la dimensión adicional ϕ , el cual tiene un dominio $0 \leq \phi \leq \pi$. Un orbifold es un espacio obtenido por división de una variedad

con algún grupo discreto y el cual contiene puntos fijos, que son puntos que se transforman en ellos mismos bajo la aplicación de la transformación discreta. El orbifold S^1/Z_2 se obtiene dividiendo un círculo de radio r_c , con la transformación $Z_n : \phi \rightarrow -\phi$, por consiguiente la coordenada ϕ es identificada con la coordenada $-\phi$, entonces S^1/Z_2 se puede considerar como un segmento de línea recta cuya longitud es πr_c , y donde los extremos $\phi = 0$ y $\phi = \pi$ son puntos fijos bajo la transformación Z_2 , de tal forma que las branes se encuentran ubicadas en estos puntos fijos que a su vez constituyen los contornos del espaciotiempo en cinco dimensiones⁴. Como se ha mencionado anteriormente nuestro universo 4D está contenido en una brane, el cual podría ser alguna de las dos branes consideradas, bajo esta consideración, desde el punto de vista formal, las componentes cuatri-dimensionales de la métrica se acoplan a las componentes cinco-dimensionales de la métrica, por lo tanto las métricas inducidas se pueden obtener de la siguiente manera

$$g_{\alpha\beta}^{(b1)} = g_{uv}(x^\mu, \phi = \pi) \quad , \quad g_{\alpha\beta}^{(b2)} = g_{uv}(x^\mu, \phi = 0) \quad , \quad (3.6)$$

de otra parte, tenemos que \mathcal{L}_{b1} y \mathcal{L}_{b2} son los lagrangianos contenidos en las branes, cuyo valor esperado del vacío es cero, y los términos V_{b1} y V_{b2} son las contribuciones a la energía del vacío de campos cuyo valor esperado del vacío es distinto de cero, estos actúan como fuentes gravitatorias incluso en ausencia de excitaciones de las partículas. Por lo tanto, la forma explícita de los lagrangianos no es necesario para determinar la métrica 5D en el estado fundamental, solución de vacío.

Bajo este análisis, realizando una variación sobre la acción S , se obtiene la ecuación de campo (para los detalles del cálculo ver apéndice A)

$$\sqrt{-g}(R_{uv} - \frac{1}{2}g_{uv}R) = -\frac{1}{4M^3} \left[\Lambda\sqrt{-g}g_{uv} + \sum_{i=1}^2 V_{bi}\sqrt{-g^{(bi)}}g_{\mu\nu}^{(bi)}\delta_u^\mu\delta_v^\nu(\phi - \phi_i) \right] . \quad (3.7)$$

Puede observarse que la parte derecha corresponde al término de fuente y la izquierda al tensor de curvatura. Se ha propuesto como solución de la ecuación de campo la métrica en cinco dimensiones, dada por

⁴Lo anterior ilustra la simetría Z_2 , que en términos simples puede pensarse como una simetría de espejo, pero lo que en realidad toma en consideración la simetría es la invarianza de algunos puntos de la geometría, que como se han dicho son llamados puntos fijos.

$$ds^2 = e^{-2\sigma(\phi)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2, \quad \mu = \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (3.8)$$

donde $\sigma(\phi)$ es una función de la coordenada adicional, r_c es el radio de compactificación independiente de ϕ , esta métrica no es factorizable, aunque parece describir un escenario Kaluza-Klein usual, no es el producto de un espacio Minkowskiano con una variedad compacta, en realidad corresponde a dos parches de espacio anti-de Sitter unidos a lo largo de la dimensión adicional, y donde las hipersuperficies cuadi-dimensionales son planas, en particular la métrica inducida es la métrica Minkowskiana $\eta_{\mu\nu}$. Es importante mencionar en esta parte una propiedad de la métrica, la cual tiene que ver con la invarianza cuadi-dimensional de Poincaré, debido a esto cada campo en este background puede ser descompuesto en ondas planas cudri-dimensionales, se puede encontrar que los modos de vibración ‘suaves’ o inferiores están sobre la brane o en una vecindad de la brane en tanto que los modos ‘duros’ o superiores están lejos de la brane. Esta propiedad esta detrás de muchas de las peculiaridades físicas que emergen de la métrica de Randall-Sundrum.

Llevando esta métrica de prueba a la ecuación de campo anterior, se obtiene el siguiente sistema

$$\frac{6\sigma'^2}{r_c} = -\frac{\Lambda}{4M^3}, \quad (3.9)$$

$$\frac{3\sigma''}{r_c^2} = \frac{V_{b1}}{4M^3 r_c} \delta(\phi) + \frac{V_{b2}}{4M^3 r_c} \delta(\phi - \pi), \quad (3.10)$$

obteniendo como solución para $\sigma(\phi)$, consistente con la simetría $\phi \rightarrow -\phi$

$$\sigma(\phi) = r_c |\phi| \sqrt{-\frac{\Lambda}{24M^3}}, \quad (3.11)$$

evidentemente, esta solución sólo tiene sentido si $\Lambda \leq 0$, lo que a su vez muestra que el espacio-tiempo entre las tri-branes debe ser una tajada de la geometría AdS_5 . Además, puede encontrarse que para obtener una solución consistente, se deben cumplir las siguientes relaciones

$$V_{b1} = -V_{b2} = 24M^3 k^2, \quad \text{con } k^2 = -\frac{\Lambda}{24M^3}, \quad (3.12)$$

esta restricción se puede pensar como la condición de ajuste fino para una constante cosmológica efectiva en cuatro dimensiones. Igualmente, se encuentra que la solución obtenida para $\sigma(\phi)$

implica la siguiente expresión

$$\sigma'' = 2r_c \sqrt{-\frac{\Lambda}{24M^3}} [\delta(\phi) - \delta(\phi - \pi)] . \quad (3.13)$$

Si asumimos que $k \leq M$, esto quiere decir que la curvatura del bulk es menor comparada con la escala de Planck en altas dimensiones, por lo tanto la solución final es (ver apéndice F)

$$ds^2 = e^{-2kr_c|\phi|} \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + r_c^2 d\phi^2 , \quad (3.14)$$

considerando que M , Λ , r_c son del orden de la escala de Planck, se debe verificar cuándo se obtiene la masa correcta de Planck 4D. Para ello, se toma una pequeña perturbación alrededor de la métrica Randall-Sundrum

$$ds^2 = e^{-2kr_c|\phi|} (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) dx^\alpha dx^\beta + r_c^2 d\phi^2 , \quad (3.15)$$

reemplazando esta métrica en la acción e integrando sobre ϕ se obtiene la acción efectiva para la gravedad 4D

$$S_{ef} = M_P^2 \int dx^4 \sqrt{-g} R^{(4)} , \quad (3.16)$$

donde $R^{(4)}$ se obtiene de $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$, efectuando esto la masa de Planck 4D es dada por

$$M_P^2 = M^3 r_c \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-2kr_c|\phi|} = \frac{M^3}{k} (1 - e^{-2kr_c\pi}) , \quad (3.17)$$

esto muestra que escogiendo la escala 5D del orden de la escala de Planck dará el orden correcto de magnitud para la escala de Planck 4D [17] [18] [19].

3.2. Modelo RSII (una brane)

En el modelo RSII se mueve la segunda brane hasta el infinito, quedando una brane y el bulk, teniendo como consecuencia esto una posible solución al problema de jerarquías ya que se logra explicar la disminución de la intensidad gravitacional sobre la brane y entre otras cosas permite deducir una cosmología satisfactoria. Entonces la escala de energías se relaciona mediante

$$M_p^2 = M_5^3 l , \quad (3.18)$$

donde l se identifica con la escala de curvatura del espacio AdS_5 . Definiendo $r_c = 1$, $k = \frac{1}{l}$ la métrica toma la forma

$$ds^2 = e^{-2k|y|} \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + dy^2 , \quad (3.19)$$

cuando tomamos el límite $r_c \rightarrow \infty$, el gravitón sobre la brane permanece acotado o cudridimensional (modo cero de la reducción KK sin masa), aún a grandes distancias de ella, aunque la dimensión adicional no sea compacta [53]. Además se encuentra que para el caso de $r_c \ll l$, el potencial gravitacional 4D llega a ser

$$V(r) \approx \frac{GMl}{r^2} , \quad (3.20)$$

esto muestra que el potencial completo 5D se comporta como un potencial 4D a grandes distancias. En el caso $r_c \gg l$, se obtiene como potencial gravitacional

$$V(r) \approx \frac{GM}{r} \left(1 + \frac{2l^2}{3r^2}\right) , \quad (3.21)$$

esto muestra que se obtienen pequeñas correcciones al potencial gravitacional 4D a bajas energías debido al efecto de la dimensión adicional [20] [26].

3.3. Soluciones Cosmológicas

Se puede realizar un análisis más general si tomamos una métrica, que permita obtener soluciones cosmológicas en general (ver apéndice B),

$$ds_5^2 = -n^2(t, y) dt^2 + a^2(t, y) \gamma_{ij} dx^i dx^j + b^2(t, y) dy^2 , \quad (3.22)$$

donde γ_{ij} es una métrica en tres dimensiones de máxima simetría, en la cual podemos hacer $b^2(y) \rightarrow 1$, para liberar la coordenada adicional de la función que la re-escala, si consideramos que las funciones solo dependen de la coordenada adicional puede lograrse un esquema 4+1 obteniendo [21, 22]

$$ds_{4+1}^2 = -n^2(y) dt^2 + a^2(y) \gamma_{ij} dx^i dx^j + dy^2 , \quad (3.23)$$

la cual se puede simplificar a

$$ds_{4+1}^2 = [n^2(y)\delta_{\mu\nu} + a^2(y)\gamma_{\mu\nu}] dx^\mu dx^\nu + dy^2 , \quad (3.24)$$

donde podemos definir⁵ o identificar $[n^2(y)\delta_{\mu\nu} + a^2(y)\gamma_{\mu\nu}] = e^{\frac{-2|y|}{l}} \eta_{\mu\nu}$.

El modelo Randall-Sundrum presentado anteriormente, muestra la realización de un modelo de dimensiones adicionales, con un espaciotiempo volumétrico AdS_5 , y una braneworld tipo FRW.

Ahora bien, la ecuación de campo en cinco-dimensiones toma la forma usual

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = \kappa^2 T_{ab} , \quad (3.25)$$

donde los índices $a, b = 0, 1, 2, 3, 4$, la constante κ se relaciona con la constante de Newton en cinco-dimensiones y la masa de Planck reducida en cinco-dimensiones $M_{(5)}$, según la siguiente relación

$$\kappa^2 = 8\pi G_{(5)} = M_{(5)}^{-3} , \quad (3.26)$$

el tensor momentum-energía, puede ser descompuesto en dos partes

$$T_b^a = \tilde{T}_b^a |_{bulk} + T_b^a |_{brane} , \quad (3.27)$$

donde $\tilde{T}_b^a |_{bulk}$ es el tensor momentum-energía en el bulk, será distinto de cero en el caso de considerar campos o materia contenidos sobre el bulk, de hecho se puede asumir que tiene la siguiente forma

$$\tilde{T}_b^a |_{bulk} = \text{diag}(-\rho_B, P_B, P_B, P_B, P_T) , \quad (3.28)$$

donde la densidad de energía en el bulk ρ_B , la presión en el bulk P_B , y la presión transversal (presión brane-bulk) P_T son independientes de la coordenada y .

El segundo término $T_b^a |_{brane}$ corresponde al contenido de materia en la brane ($y = 0$), y donde consideramos estrictamente geometrías homogéneas e isotrópicas en la brane o dentro de la brane, expresandose con bastante generalidad en la forma [21] [22]

⁵En realidad la métrica Randall-Sundrum tiene su origen en la teoría de cuerdas, propiamente dicha, y es allí donde se encuentra plenamente justificado el factor de curvatura exponencial.

$$T_b^a |_{brane} = \frac{1}{b} \text{diag}(-\rho_b, p_b, p_b, p_b, 0) \delta(y) , \quad (3.29)$$

donde la densidad de energía en la brane ρ_b y la presión en la brane p_b son independientes de la posición sobre la brane, es decir son funciones sólo del tiempo, además se encuentra que está normalizada por la función que escala en la dimensión adicional. Se puede asumir que $T_{a4} = 0$, lo cual significa físicamente que no existe flujo de materia a lo largo de la quinta dimensión, al igual que se puede asumir que la quinta dimensión es estática, en el sentido que la función $b^2(t, y)$ [21] no cambia con el tiempo, es decir

$$\dot{b} = 0 , \quad (3.30)$$

es entonces posible solucionar la métrica espacio-temporal completa, es decir determinar explícitamente la dependencia de la métrica con la coordenada y , lo cual nos lleva a que

$$b = 1 . \quad (3.31)$$

Igualmente, se puede fijar una calibración temporal, imponiendo la condición $n(0, y) = 1$, es decir se escoge como tiempo al que corresponde al tiempo cósmico en la brane, se puede encontrar bajo estas consideraciones una expresión completa para el factor de escala $a(y, t)$, dado por (ver apéndice B)

$$a(y, t) = \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\kappa^2 \rho_b^2}{6\rho_B} \right) a_0^2 + \frac{3C}{\kappa^2 \rho_B a_0^2} - \frac{\kappa \rho_b}{\sqrt{-6\rho_B}} a_0^2 \text{Senh}(\mu y) \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\kappa^2 \rho_b^2}{6\rho_B} \right) a_0^2 - \frac{3C}{\kappa^2 \rho_B a_0^2} \right] \text{Cosh}(\mu y) \right\}^{1/2} , \quad (3.32)$$

donde $a_0 = a(0, y)$, $\mu = \sqrt{\frac{2\kappa^2}{3}\rho_B}$, $C = cte$.

La cosmología surgida de la consideración de que nuestro Universo está confinado a una tri-brane dentro de un espaciotiempo extendido nos conduce a los resultados propios del modelo estándar, esto quiere decir que los resultados obtenidos generales deben en un límite adecuado ser concordantes con los resultados convencionales [21] [22] [23].

Capítulo 4

Ecuaciones de Einstein sobre una Brane

En esta sección se mostrará el fundamento teórico covariante que subyace a la teoría de brane-world¹ y se derivará la ecuación de campo sobre una 3-brane. Por simplicidad, el volumen espaciotemporal se asume que tiene cinco dimensiones, sin asumir ninguna condición especial sobre el bulk. Posteriormente, se asumirá la simetría Z_2 y se confinará el tensor momentum-energía de la materia sobre la brane [23]. En el escenario brane-world, nuestro mundo 4-dimensional es descrito por una pared de dominio, 3-brane $(M, e_{\mu\nu})$, en un espaciotiempo de 5-dimensiones bulk (V, g_{uv}) . Se denota el vector normal unitario a la brane M por n^α , el vector tangente a curvas contenidas en la hipersuperficie por $e_\alpha^a = \left(\frac{\partial x^a}{\partial x^\alpha}\right)$, y la métrica inducida sobre M por $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu$. El punto de inicio formal es la ecuación de Gauss, de la teoría de variedades y donde $u, v = 0, 1, 2, 3, 4$, y $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. (Para más detalles ver apéndice B).

$$R_{uvps}e_\alpha^u e_\beta^v e_\gamma^p e_\delta^s = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + K_{\alpha\gamma}K_{\beta\delta} - K_{\alpha\delta}K_{\beta\gamma}, \quad (4.1)$$

donde R_{uvps} es el tensor de Riemann en cinco dimensiones, $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ es el tensor de Riemann en cuatro dimensiones, y $K_{\alpha\beta}$ es el tensor de curvatura extrínseca.

En lo atinente a las consideraciones dinámicas del modelo se hace uso de la ecuación de Codazzi [23]

$$R_{ab}n^b e_\alpha^a = \partial_\nu K_\alpha^\nu - \partial_\alpha K, \quad (4.2)$$

¹En esta sección se sigue la notación del libro ‘General Relativity’ de Eric Poisson

donde ∂_α es la derivada covariante. Realizando un proceso algebraico de contracción de índices se obtiene

$$R_{\beta\delta} = R_{vps}^u e_u^p e_\beta^v e_\delta^s + K K_{\beta\delta} - K_\delta^\alpha K_{\beta\alpha} , \quad (4.3)$$

y considerando la métrica inducida, sobre la hipersuperficie, se puede obtener $h_u^p = g_u^p - n^p n_u$, donde se puede identificar h_u^p como la métrica inducida, para obtener

$$R_{\beta\delta} = R_{vps}^u e_\beta^v e_\delta^s - R_{vps}^u n_u n^p e_\beta^v e_\delta^s + K K_{\beta\delta} - K_\delta^\alpha K_{\beta\alpha} , \quad (4.4)$$

tomando el tensor de Einstein en cuatro dimensiones, tenemos

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} R , \quad (4.5)$$

según lo anterior de la ecuación de Gauss contraída, se puede obtener el tensor de Ricci y el escalar de curvatura, obteniéndose la siguiente expresión para el tensor de Einstein

$$G_{\alpha\beta} = G_{ab} e_\alpha^a e_\beta^b + \frac{h_{\alpha\beta}}{2} R_{\nu}^u n_u n^\nu + K K_{\alpha\beta} - K_\beta^\delta K_{\alpha\delta} - \frac{h_{\alpha\beta}}{2} (K^2 - K^{\beta\delta} K_{\beta\delta}) - E'_{\alpha\beta} , \quad (4.6)$$

donde $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}$, $E'_{\alpha\beta} = R_{\rho\nu\gamma}^\mu n_\mu n^\nu e_\alpha^\rho e_\beta^\gamma$,

Haciendo uso de la ecuación de campo de Einstein en cinco dimensiones

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = \kappa^2 T_{ab} , \quad (4.7)$$

y descomponiendo el tensor de Riemann en el tensor de curvatura de Weyl, el tensor de Ricci y el escalar de curvatura, podemos obtener la siguiente expresión [23]

$$G_{\alpha\beta} = \frac{2\kappa^2}{3} \left[T_{ab} e_\alpha^a e_\beta^b + \left(T_{ab} n^a n^b - \frac{T}{4} \right) h_{\alpha\beta} \right] + K K_{\alpha\beta} - K_\beta^\delta K_{\alpha\delta} - \frac{h_{\alpha\beta}}{2} (K^2 - K^{\beta\delta} K_{\beta\delta}) - E_{\alpha\beta} , \quad (4.8)$$

donde $E_{\alpha\beta} = C_{avb}^u n_u n^v e_\alpha^a e_\beta^b$,

De la ecuación de Codacci y con la ecuación de Einstein en cinco dimensiones, se encuentra

$$\partial_v K_u^v - \partial_u K = \kappa^2 T_{ab} n^b h_u^a , \quad (4.9)$$

Hasta aquí no se ha asumido ninguna simetría ni forma particular del tensor momentum-energía. Asumiendo, desde ahora el escenario brane-world, tomamos por conveniencia una coordenada y adicional, de tal forma que la hipersuperficie $y = 0$ coincide con la brane-world y donde además se tiene la siguiente condición $n_u dx^u = dy$, lo cual implica que $n^v \partial_v n^u = 0$, que es una condición sobre la coordenada en la dirección de la dimensión extra.

En forma genérica se asume, una métrica en cinco dimensiones, esto es

$$ds^2 = h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + dy^2 , \quad (4.10)$$

y manteniendo el espíritu del brane-word en mente, tenemos que el tensor momentum-energía en cinco dimensiones, se puede escribir de la siguiente forma

$$T_{ab} = -\Lambda g_{ab} + (\tau_{ab} - \lambda g_{ab}) \delta(y) , \quad (4.11)$$

donde Λ es la constante cosmológica del espaciotiempo en cinco dimensiones o volumétrico, λ es la energía del vacío de la brane, τ_{ab} es el tensor momentum-energía del bulk sobre la brane. El parámetro λ se puede asociar con la tensión de la brane en cinco dimensiones.

Dentro del marco del brane-world, el tensor momentum-energía, solamente se manifiesta sobre la brane, por ello su carácter singular, el cual se representa mediante la función delta que aparece en la expresión anterior, lo cual permite localizar la energía-momentum sobre la brane, en consideración de lo anterior, se encuentra la condición de frontera sobre la brane, que debe cumplir la métrica inducida y la curvatura extrínseca

$$[h_{ab}] = \lim_{y \rightarrow +0} h_{ab} - \lim_{y \rightarrow -0} h_{ab} = 0 , \quad (4.12)$$

$$[K_{ab}] = -\kappa^2 [(\tau_{ab} - \lambda h_{ab}) - \frac{1}{3} h_{ab} (\tau - \lambda)] . \quad (4.13)$$

Imponiendo la simetría Z_2 (ver apéndice C), es decir cuando pasamos de un lado de la membrana al otro, con la brane como superficie fija, la simetría unicamente determina la curvatura extrínseca de la brane en términos del tensor momentum-energía

$$K_{ab}^+ = -K_{ab}^- = -\frac{1}{2}\kappa^2 \left[(\tau_{ab} - \lambda h_{ab}) - \frac{1}{3}h_{ab}(\tau - \lambda) \right], \quad (4.14)$$

Sustituyendo esta ecuación en la expresión del tensor de Einstein, se obtiene la ecuación gravitacional 4D sobre la brane, y considerando la simetría Z_2 , la forma particular del tensor momentum-energía y las condiciones de frontera anteriores

$$G_{\alpha\beta} = -\Lambda_4 h_{\alpha\beta} + 8\pi G_N \tau_{\alpha\beta} + \kappa^4 \Pi_{\alpha\beta} - E_{\alpha\beta}, \quad (4.15)$$

donde $\Lambda_4 = \frac{1}{2}\kappa^2 (\Lambda + \frac{1}{6}\kappa^2 \lambda^2)$, $G_N = \frac{\kappa^4 \lambda}{48\pi}$, y los tensores

$$\Pi_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}\tau_{\alpha\gamma}\tau_{\beta}^{\gamma} + \frac{1}{12}\tau\tau_{\alpha\beta} + \frac{1}{8}h_{\alpha\beta}\tau_{\gamma\delta}\tau^{\gamma\delta} - \frac{1}{24}h_{\alpha\beta}\tau^2, \quad (4.16)$$

$$E_{\alpha\beta} = C_{vps}^a n_a n^p e_{\alpha}^v e_{\beta}^s. \quad (4.17)$$

La ecuación gravitacional de la brane describe la curvatura de ella en términos de su contenido de materia-energía, su energía de vacío, la constante cosmológica en cinco dimensiones, y de la curvatura extrínseca de la brane en el espacio de cinco dimensiones. Este es el usual modelo de Brane-World Randall-Sundrum, desde el punto de vista covariante de las ecuaciones de campo. La anterior relación se puede reducir a la descripción estándar tomando el límite $\kappa \rightarrow 0$ (será considerado más adelante), es importante notar que el hecho de haber introducido una dimensión adicional, nos conduce a una ecuación de campo modificada, en la cual surgen dos términos adicionales, conocidos en la literatura como, el término de energía del vacío (tensión sobre la brane) y el término de radiación oscura (proyección del tensor de Weyl sobre la brane) [23] [24] [25] [26].

4.1. Ecuaciones de conservación

Se puede obtener, según lo anterior, la siguiente expresión

$$\partial^b T_{ab} = -2T_{\alpha\beta} n^{\alpha} g_a^{\beta}, \quad (4.18)$$

quiere decir esto que en general existe intercambio de energía-momentum entre el volumen y la brane. Pero esta condición general se puede relajar, haciendo que el volumen (bulk), no tenga

contenidos de materia-energía, $T_{ab} = 0$, lo cual lleva a la ecuación de Einstein 5D reducida a

$$G_{ab} = -\Lambda g_{ab} , \quad (4.19)$$

de tal manera que la ecuación de intercambio de energía-momentum, entre el bulk y la brane, se reduce a

$$\partial^b T_{ab} = 0 , \quad (4.20)$$

esto significa que no existe intercambio de energía-momentum entre el bulk y la brane; su interacción es puramente gravitacional. Entonces, la identidad de Bianchi 4D contraída $G_{;b}^{ab} = 0$, aplicada en la ecuación de campo efectiva sobre la brane, conduce a

$$\partial^b E_{ab} = \frac{6\kappa^2}{\lambda} \partial^b \tau_{ab} , \quad (4.21)$$

lo cual muestra que el término de radiación oscura es el responsable de establecer la interacción gravitacional entre el bulk y la brane [25].

Como una consecuencia de la ecuación de Codazzi, el tensor momentum-energía volumétrico, junto con la simetría Z_2 , implican que se conserva el tensor momentum-energía, es decir [23] [25]

$$\partial^b T_{ab} = 0 , \quad (4.22)$$

cuando tengamos campos escalares u otra clase de campos en el volumen, la afirmación anterior en general no es cierta, es decir que T_{ab} no se conserva, produciéndose un intercambio de energía-momentum entre la brane y el volumen. En el caso de que exista sólo una constante cosmológica en el volumen, no se daría tal intercambio de energía. Considerando la anterior expresión, encontramos que la identidad de Bianchi contraída $\partial^b G_{ab} = 0$, conduce nuevamente a que la proyección del tensor de Weyl, obedece a la restricción $\partial^\beta E_{\alpha\beta} = \frac{6\kappa^2}{\lambda} \partial^\beta \Pi_{\alpha\beta}$, esto muestra que $E_{\alpha\beta}$, se comporta como una fuente del tensor momentum-energía volumétrico, lo cual en general incluye gradientes espaciales y derivadas temporales. Entonces la evolución e inhomogeneidades en los campos de materia puede generar efectos gravitacionales no locales en el volumen, produciendo una reacción de la brane.

Finalmente se recalca, aunque ya se mostró anteriormente, que las ecuaciones dinámicas sobre la brane son

$$G_{\alpha\beta} = -\Lambda_4 h_{\alpha\beta} + 8\pi G_N \tau_{\alpha\beta} + \kappa^4 \Pi_{\alpha\beta} - E_{\alpha\beta} , \quad (4.23)$$

$$\partial^b T_{ab} = 0 , \quad (4.24)$$

$$\partial^\beta E_{\alpha\beta} = \frac{6\kappa^2}{\lambda} \partial^\beta \Pi_{\alpha\beta} . \quad (4.25)$$

Es importante notar que, en general, este sistema de ecuaciones no constituyen un sistema cerrado sobre la brane, ya que la ecuación $\partial^\beta E_{\alpha\beta} = \frac{6\kappa^2}{\lambda} \partial^\beta \Pi_{\alpha\beta}$ no determina $E_{\alpha\beta}$ de forma general, reflejando el hecho de que los grados de libertad volumétricos no pueden ser predichos de los datos disponibles sobre la brane, principio holográfico [12] [52], pero el efecto del bulk sobre la brane si se manifiesta, por ejemplo si se incorpora radiación gravitacional afecta la brane, de tal manera que se requiere solucionar la ecuación de campo en el volumen para después determinar completamente $E_{\alpha\beta}$ sobre la brane [26].

4.2. Descomposición covariante de los efectos volumétricos locales y no locales

La forma general para el tensor momentum-energía sobre la brane para cualquier campo de materia (campo escalar, fluido perfecto, cinética de gases, fluidos disipativos, etc), incluyendo una combinación de diferentes campos, puede ser escrito en forma covariante como [25]

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + p h_{\alpha\beta} + \pi_{\alpha\beta} + q_\alpha u_\beta + q_\beta u_\alpha , \quad (4.26)$$

aquí, ρ y p son la densidad de energía y presión isotrópica, q_α es el flujo de energía y $\pi_{\alpha\beta}$ es la tensión anisotrópica. Bajo algunas consideraciones, el tensor $\Pi_{\alpha\beta}$, el cual involucra los efectos volumétricos locales sobre la brane, puede ser escrito de forma bastante general como [25]

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\beta} = & \frac{1}{24} [2\rho^2 - 3\pi_{\mu\nu}\pi^{\mu\nu}] u_\alpha u_\beta + \frac{1}{24} [2\rho^2 + 4\rho p + \pi_{\mu\nu}\pi^{\mu\nu} - 4q_\mu q^\mu] h_{\alpha\beta} \\ & - \frac{1}{12} (\rho + p)\pi_{\alpha\beta} + \pi_{\sigma(\alpha}\pi_{\beta)}^\sigma + q_{(\alpha}q_{\beta)} + \frac{1}{3}\rho q_{(\alpha}u_{\beta)} - \frac{1}{12}q^\sigma\pi_{\sigma(\alpha}u_{\beta)} , \end{aligned} \quad (4.27)$$

y donde bajo algunas consideraciones se se puede simplificar, en el caso de un fluido perfecto o un campo escalar mínimamente acoplado, para obtener

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{1}{12}\rho^2 u_\alpha u_\beta + \frac{1}{12}\rho(\rho + 2p)h_{\alpha\beta} . \quad (4.28)$$

Los efectos no-locales, es decir efectos de interacción brane-bulk descritos por el tensor de Weyl, del volumen están incorporados en $E_{\alpha\beta}$ sobre la brane, el cual se puede descomponer en

$$E_{\alpha\beta} = -\frac{6}{\kappa^2\lambda} \left[U(u_\alpha u_\beta + \frac{1}{3}h_{\alpha\beta}) + P_{\alpha\beta} + Q_\alpha u_\beta + Q_\beta u_\alpha \right] , \quad (4.29)$$

expresión que muestra el tensor de Weyl volumétrico como un tensor efectivo, el cual imprime sobre la brane una densidad de energía efectiva, un flujo de energía y un flujo de esfuerzo (stresses). La densidad de energía efectiva no local sobre la brane surge del campo gravitacional libre en el volumen, es decir

$$U = -\left(\frac{1}{6}\kappa^2\lambda\right)E_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta, \quad (4.30)$$

donde la densidad de energía no local no necesariamente es positiva, y la presión no local efectiva es $\frac{1}{3}U$. De igual forma, el esfuerzo anisotrópico no local surgido del campo gravitacional libre en el volumen, es

$$P_{\alpha\beta} = -\left(\frac{1}{6}\kappa^2\lambda\right)E_{(\alpha\beta)} , \quad (4.31)$$

y el flujo de energía no-local sobre la brane es

$$Q_\alpha = -\left(\frac{1}{6}\kappa^2\lambda\right)(E_{\alpha\beta}u^\beta + E_{\beta\alpha}u^\alpha) , \quad (4.32)$$

Este es el esquema completo covariante al considerar un tensor momentum-energía suficientemente general sobre la brane [25] [26].

4.3. Reducción a la ecuación de campo estándar

El modelo físico modificado, objeto de este trabajo, si pretende ser un modelo factible, debe cumplir el requisito de reducción al modelo estándar, bajo algunas simplificaciones coherentes, además debe hacer algunas predicciones físicas observables o medibles experimentalmente, que no se puedan predecir o determinar del modelo estándar. La ecuación de campo ilustrada an-

teriormente se puede reducir a la ecuación de campo convencional si se considera $\kappa \rightarrow 0$, mientras G_N permanezca finito. Sin embargo existen algunas diferencias importantes, ya que la constante gravitacional de Newton $G_N = \frac{\kappa^4 \lambda}{48\pi}$ está fuertemente ligada a la energía del vacío λ , sobre la membrana, en otros términos se hace imposible definir la constante gravitacional de Newton en una era donde la distinción entre energía del vacío y la energía de la materia normal sea ambigua. Además, el término $E_{\mu\nu}$ es parte del tensor de Weyl en cinco dimensiones el cual lleva la información del campo gravitacional fuera de la membrana, este se puede despreciar si el espaciotiempo volumétrico es un espacio puramente anti-d Sitter además que su magnitud esta restringida al movimiento de la materia sobre la brane [23]. Considerando $\kappa^{-2} = M_G^3$, $\lambda = M_\lambda^4$ y $\Lambda \approx \kappa^2 \lambda^2$, estas no son cantidades a la escala de Planck, asumiendo que M_G , M_λ son suficientemente grandes comparadas con la escala de energía fundamental denotada por M , es decir $M_G \gg M$ y $M_\lambda \gg M$, de esta forma tenemos que el primer término de la ecuación de campo, sobre la brane (e.c. 4.23), es la constante cosmológica neta en cuatro dimensiones, donde $\Lambda < 0$, para que Λ_4 pueda tomar valores arbitrarios, especificando los valores de Λ y λ . El segundo término, corresponde a la contribución de la materia normal la cual debe satisfacer la condición de energía local. El tercer término, que es cuadrático en $\tau_{\alpha\beta}$ se espera sea despreciable en el límite de baja energía, esto se puede mostrar obteniendo la razón de éste término con el segundo término, lo cual es aproximadamente

$$\frac{\kappa^4 |\Pi_{\alpha\beta}|}{G_N |\tau_{\alpha\beta}|} \sim \frac{\kappa^4 |\tau_{\alpha\gamma} \tau_\beta^\gamma + \dots|}{G_N |\tau_{\alpha\beta}|} \sim \frac{M^4}{M_\lambda^4} \sim 0, \quad (4.33)$$

por último, considerando el término correspondiente al tensor de Weyl, en particular su parte ‘longitudinal’ $E_{\alpha\beta}^L$, es decir la componente ‘tangencial’ del tensor de Weyl, tenemos

$$\frac{|E_{\alpha\beta}^L|}{G_N |\tau_{\alpha\beta}|} \sim \frac{\kappa^4 |\tau_{\alpha\gamma} \tau_\beta^\gamma + \dots|}{G_N |\tau_{\alpha\beta}|} \sim \frac{M^4}{M_\lambda^4} \sim 0, \quad (4.34)$$

luego tiene el mismo orden de magnitud del tercer término de la ecuación de campo. Posteriormente se considera, la parte transversal del tensor de Weyl, el cual esta directamente relacionado con la excitación de materia sobre la brane. De acuerdo a lo estimado anteriormente se puede concluir que la ecuación gravitacional efectiva, a bajas energías, sobre la brane se reduce a la ecuación gravitacional en cuatro dimensiones efectiva

$$G_{\alpha\beta} = -\Lambda_4 h_{\alpha\beta} + 8\pi G_N \tau_{\alpha\beta}. \quad (4.35)$$

La cantidad Λ_4 es la constante cosmológica en cuatro dimensiones sobre la brane, la cual es una combinación de la constante cosmológica en cinco dimensiones y de la tensión sobre la brane. El caso $\Lambda_4 = 0$ corresponde a la condición de ajuste fino citada en (3.11), (ver apéndice G), e igualmente se había encontrado que la constante de Newton G_N está dada por la constante de acople gravitacional y la tensión en la brane. Los términos inusuales $\Pi_{\alpha\beta}$, $E_{\alpha\beta}$, juegan un rol importante en el universo brane temprano, pero pueden ser omitidos hoy día. De tal forma que en el límite de baja energía se recupera completamente la ecuación de Einstein [23].

Capítulo 5

Ecuación de Friedmann modificada

En cosmología las ecuaciones que permiten una interpretación y asociación directa con los parámetros observables, son las ecuaciones de Friedmann, que consisten en una ecuación para la conservación de energía y una ecuación de movimiento, siguiendo el análisis convencional y en el marco del brane-world, es posible obtener tales ecuaciones, las cuales permitirán modelar e interpretar fenómenos y parámetros del universo observable.

Tomando en consideración la isotropía y homogeneidad de nuestro universo, requerimos que (M^5, g_{ab}) contenga un subespacio de tres dimensiones de máxima simetría $(V, \gamma_{\alpha\beta})$, es decir que conserve la simetría esférica, de tal forma que se puedan obtener soluciones cosmológicas, entonces se puede formular el siguiente *ansatz*, (considerado anteriormente)¹ [27] [28]

$$ds_5^2 = -n^2(t, y)dt^2 + a^2(t, y)\gamma_{ij}dx^i dx^j + b^2(t, y)dy^2, \quad (5.1)$$

donde, como se ha dicho anteriormente y es la coordenada de la dimensión adicional, sin especificar cuando es compacta o extensa. Además, si nuestro universo es una hipersuperficie en $y = 0$, el factor de escala es dado por $a(t, y = 0)$. Como en el modelo RS esta métrica no es factorizable, se asume una parametrización diferente de ella, la cual se muestra más adelante.

De la ecuación de Einstein 4D, inducida sobre la brane $G_{\alpha\beta} = -\Lambda_4 h_{\alpha\beta} + 8\pi G_N T_{\alpha\beta} + \kappa^4 \Pi_{\alpha\beta} - E_{\alpha\beta}$, donde $\Pi_{\alpha\beta}$ se relaciona con el tensor momentum-energía, y $E_{\alpha\beta}$ es la corrección que surge del tensor de Weyl en el volumen, la cual introduce una densidad de energía no local U , es decir una densidad de energía propia del bulk, por lo tanto en consideración del modelo Randall-

¹Este *ansatz* corresponde al mismo que se consideró en el modelo Randall-Sundrum, y como ya se mencionó anteriormente permite obtener soluciones cosmológicas coherentes con el modelo estándar de la cosmología.

Sundrum, con una brane localizada en $y = 0$, se pueden obtener cantidades observables.

Para determinar la ecuación de Friedmann se procede según lo anterior y considerando la siguiente forma de la métrica (escrita de forma general)

$$ds^2 = -e^{2\beta(y,t)} dt^2 + e^{2\beta(y,t)} dy^2 + e^{2\alpha(y,t)} \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (5.2)$$

la métrica sólo depende de (t, y) y es plana en el espacio 3D. Por simplicidad también se restringe α, β al caso de funciones pares de y , para esta métrica las componentes no-cero del tensor de Einstein son (ver apéndice E) [29]

$$G_{00} = 3 \left[\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} - \alpha'' - 2\alpha'^2 + \alpha'\beta' \right], \quad (5.3)$$

$$G_{ij} = \delta_{ij} e^{2(\alpha-\beta)} \left[-2\ddot{\alpha} - 3\dot{\alpha}^2 - \ddot{\beta} + 2\alpha'' + 3\alpha'^2 + \beta'' \right], \quad (5.4)$$

$$G_{44} = 3 \left[-\ddot{\alpha} - 2\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} + \alpha'^2 + \alpha'\beta' \right], \quad (5.5)$$

$$G_{04} = 3 \left[\beta'\dot{\alpha} + \alpha'\dot{\beta} - \dot{\alpha}' - \dot{\alpha}\alpha' \right], \quad (5.6)$$

asumiendo que α, β son funciones suaves de $|y|$ y de t , se puede considerar $\alpha(y, t) = \hat{\alpha}(|y|, t)$ y $\beta(y, t) = \hat{\beta}(|y|, t)$, que representan funciones suaves en una vecindad de $|y|$, de tal forma que se puede demostrar lo siguiente

$$\alpha_1(t) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\partial \alpha(y, t)}{\partial y} = \left[\frac{\partial \hat{\alpha}(|y|, t)}{\partial |y|} \right]_{|y|=0}, \quad (5.7)$$

$$\beta_1(t) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\partial \beta(y, t)}{\partial y} = \left[\frac{\partial \hat{\beta}(|y|, t)}{\partial |y|} \right]_{|y|=0}, \quad (5.8)$$

sustituyendo en $G_{00}, G_{04}, G_{ij}, G_{44}$, e introduciendo adecuadamente el tensor momentum-energía en la siguiente forma

$$T_{\beta}^{\alpha} = \text{diag} \left[(-\rho, p, p, p, 0) e^{-\beta} \delta(y) + (\Lambda_B, \Lambda_B, \Lambda_B, \Lambda_B, \Lambda_B) \right], \quad (5.9)$$

donde ρ y p son la densidad de energía y presión de materia sobre la brane, Λ_B es la constante cosmológica volumétrica.

Esto lleva a encontrar una serie de ecuaciones que definen el acople dinámico entre los grados de libertad de la brane y el volumen, para $y = 0$, es decir sobre la brane, tenemos

$$\alpha_1 = -\frac{\kappa^2 \rho}{6} e^{\beta(0,t)} , \quad (5.10)$$

$$\beta_1 = \frac{\kappa^2(2\rho + 3p)}{6} e^{\beta(0,t)} , \quad (5.11)$$

para $y > 0$, es decir en el volumen o espacio 5D, tenemos

$$\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} - \alpha'' - 2\alpha'^2 + \alpha'\beta' = -\frac{\kappa^2}{3}\Lambda_B e^{2\beta} , \quad (5.12)$$

$$-2\ddot{\alpha} - 3\dot{\alpha}^2 - \ddot{\beta} + 2\alpha'' + 3\alpha'^2 + \beta'' = \kappa^2\Lambda_B e^{2\beta} , \quad (5.13)$$

$$-\ddot{\alpha} - 2\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} + \alpha'^2 + \alpha'\beta' = \frac{\kappa^2}{3}\Lambda_B e^{2\beta} , \quad (5.14)$$

$$\beta'\dot{\alpha} + \alpha'\dot{\beta} - \dot{\alpha}' - \dot{\alpha}\alpha' = 0 , \quad (5.15)$$

y debido a la consideración de suavidad respecto de y de las funciones α , β , se puede realizar una expansión en serie de potencias de las mismas y haciendo uso del sistema acoplado, se logra determinar, a orden cero, la siguiente ecuación

$$-\ddot{\alpha}_0 - 2\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\alpha}_0\dot{\beta}_0 = \left(\frac{1}{3}\kappa^2\Lambda_B + \frac{1}{36}\kappa^2(\rho + 3p)\rho \right) e^{2\beta_0} , \quad (5.16)$$

y definiendo una nueva variable temporal \widehat{t} , por $d\widehat{t} = e^{\beta_0} dt$, el cual representa el tiempo propio cosmológico convencional, esto es el tiempo propio medido por observadores comóviles (es decir observadores que se mueven con la expansión del universo) sobre la brane, se obtiene

$$-\frac{d^2\alpha_0}{d\widehat{t}^2} - 2\left(\frac{d\alpha_0}{d\widehat{t}}\right)^2 = \frac{\kappa^2\Lambda_B}{3} + \frac{\kappa^4\rho(\rho + 3p)}{36} , \quad (5.17)$$

y donde se puede asumir que $\rho = \lambda + \rho_m$, $p = -\lambda + p_m$, con λ representando la energía del vacío

o tensión sobre la brane, con esto se obtiene la siguiente expresión

$$-\frac{d^2\alpha_0}{d\widehat{t}^2} - 2\left(\frac{d\alpha_0}{d\widehat{t}}\right)^2 = \frac{\kappa^2\Lambda_B}{3} - \frac{\kappa^4\lambda^2}{18} + \frac{\kappa^4\lambda(3p_m - \rho_m)}{36} + \frac{\kappa^4\rho_m(\rho_m + 3p_m)}{36}, \quad (5.18)$$

esto conduce a encontrar una ecuación para H^2 , definida por $H^2 = \left(\frac{d\alpha_0}{d\widehat{t}}\right)^2$, la cual es

$$\frac{d[H^2 e^{4\alpha_0}]}{d\alpha_0} = e^{4\alpha_0} \left[\frac{\kappa^4\lambda^2}{9} - \frac{2\kappa^2\Lambda_B}{3} + \frac{\kappa^4\lambda(\rho_m - 3p_m)}{18} + \frac{\kappa^4\rho_m(\rho_m + 3p_m)}{18} \right]. \quad (5.19)$$

La ecuación anterior representa una ecuación lineal a primer orden para H^2 , si se considera el lado derecho como un término fuente que es una función de α_0 . Implícitamente, el haber cambiado las variables de t a α_0 , es la restricción a fases de evolución del universo en las cuales las dos variables están relacionadas una a otra de manera monótona [29].

Para solucionar la ecuación anterior, se re-escrive la ecuación de conservación de energía, como $\frac{d\rho_m}{d\alpha_0} + 3(\rho_m + p_m) = 0$, lo cual implica $p_m = -\rho_m - \frac{1}{3}\frac{d\rho_m}{d\alpha_0}$, sustituyendo este resultado en la ecuación anterior, se obtiene

$$\frac{d[H^2 e^{4\alpha_0}]}{d\alpha_0} = e^{4\alpha_0} \left[\frac{\kappa^4\lambda^2}{9} - \frac{2\kappa^2\Lambda_B}{3} + \frac{\kappa^2\lambda}{18} \left(4\rho_m + \frac{d\rho_m}{d\alpha_0} \right) + \frac{\kappa^4}{36} \left(4\rho_m^2 + \frac{d\rho_m^2}{d\alpha_0} \right) \right], \quad (5.20)$$

expresión que nos conduce a [29]

$$H^2 = \frac{\kappa^4\lambda^2}{36} - \frac{\kappa^2\Lambda_B}{6} + \frac{\kappa^4\lambda\rho_m}{18} + \frac{\kappa^4\rho_m^2}{36} + J e^{-4\alpha_0}, \quad (5.21)$$

donde J es una constante de integración que puede ser positiva o negativa, la expresión anterior representa la ecuación de Friedmann modificada, objeto central en el desarrollo de este trabajo.

En una brane la ecuación para H^2 tiene una estructura diferente por tres razones. Primero existen dos términos adicionales que resultan de la tensión en la brane y de la constante cosmológica negativa en el volumen. En el escenario RS, estos términos se pueden escoger para que se cancelen exactamente. Segundo, en adición al término normal proporcional a ρ_m existe un término proporcional a ρ_m^2 , llegando a ser despreciable si $\rho_m \ll \lambda$. Tercero, el término $J e^{-4\alpha_0}$ que surge solamente de condiciones iniciales, muestra un nuevo hecho cualitativamente distinto

del escenario RS, como consecuencia de la reducción de $5D$ a $4D$ en la cual H^2 puede ser libremente especificado en algún tiempo inicial.

En el análisis anterior se consideró que no existe energía en el volumen sólo Λ_5 [21] [22], y que la brane es plana $k = 0$, pero se puede hacer un análisis más general, considerando una densidad de energía y presión en el volumen, y en general una brane no plana, de tal manera que el tensor-momentum, se puede escribir de la siguiente forma

$$T_{\beta}^{\alpha} = \text{diag} [(-\rho, p, p, p, 0)e^{-\beta}\delta(y) + (\rho_B, P_B, P_B, P_B, P_T)] , \quad (5.22)$$

donde P_T , es la componente de flujo de energía en la quinta dimensión, pero se puede considerar, que no existe flujo, luego $P_T = 0$. De igual manera se obtiene un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales, de segundo orden, no-lineales. Aún así, es posible encontrar una solución en la que $\rho_B = P_B = P_T$, es decir que el volumen actúa como si tuviera una constante cosmológica $\Lambda_B = \kappa^2 \rho_B$, lo cual corresponde al caso ya considerado anteriormente.

Se pueden reescribir las condiciones de frontera o de empalme de la siguiente manera

$$[\alpha'] = \lim_{y \rightarrow 0} [\alpha'(t, y) - \alpha'(t, -y)] , \quad (5.23)$$

por lo tanto en un volumen Z_2 -simétrico, se tiene [21]

$$\alpha'(t, y = 0) = \frac{1}{2} [\alpha'] , \quad (5.24)$$

lo cual establece las condiciones de empalme o de frontera de Israel, que indica que el salto de una región a otra, a través de un hipersuperficie con algún contenido de energía en $y = 0$, siendo no cero. Aquí, la hipersuperficie es nuestro universo brane, el cual afecta la geometría volumétrica debido a su contenido de radiación y materia. Además se tiene que

$$-\ddot{\alpha} - 2\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} + \alpha'^2 + \alpha'\beta' = \frac{\kappa^2}{3} \Lambda_B e^{2\beta} , \quad (5.25)$$

y junto con el tensor momentum-energía, conduce a las siguientes condiciones [22]

$$\frac{[\alpha']}{\alpha_0 \beta_0} = -\frac{\kappa^2}{3} \rho, \quad \frac{[\beta']}{\beta_0^2} = -\frac{\kappa^2}{3} (3p + 2\rho) , \quad (5.26)$$

donde $\alpha_0 = \alpha(t, y = 0)$, $\beta_0 = \beta(t, y = 0)$.

Si se consideran las relaciones entre las constantes (ver apéndice G), se logra obtener una forma más natural para la ecuación de Friedmann $\kappa^2\lambda^2 = 6\Lambda_B$, $\kappa^2\lambda = 48\pi G$, $\kappa_4^2 = 8\pi G$, $\Lambda_4 = \frac{1}{2}\kappa^2(\Lambda_B + \frac{1}{6}\kappa^2\lambda^2)$, $U = \frac{1}{12}\kappa_4^4\lambda^3$.

Según, las relaciones anteriores, se obtiene la ecuación de Friedmann modificada, para el modelo RSII

$$H^2 = \frac{\kappa_4^2}{3}\rho_m + \frac{\kappa_4^2}{6\lambda}\rho_m^2 - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda_4}{3} + \frac{2U}{\lambda\kappa_4^2}, \quad (5.27)$$

en la cual se ha identificado $a \equiv R$, expresión que presenta, dos términos adicionales como se mencionó anteriormente, el término cuadrático en la densidad de energía sobre la brane, y el término correspondiente a la radiación oscura.

La ecuación anterior, se puede relacionar directamente con la masa de Planck, lo cual permitirá obtener la escala de energías, que introduce el modelo de brane-world; se tiene que la relación de la constante de acople gravitacional, con la masa de Planck o los parámetros de la brane, en cuatro dimensiones es: $\kappa_4^2 = 8\pi G_{(4)} = \frac{8\pi}{(4)M_P^2} = \frac{1}{6}\kappa^4\lambda$, cuyo valor numérico, toma el valor, $\kappa_4^2 = 8\pi G_{(4)} = 8\pi \times 10^{-38} (GeV)^{-2}$. De igual manera se obtiene la relación de la constante de acople gravitacional y la masa de Planck, en cinco dimensiones, $\kappa^2 = 8\pi G = \frac{8\pi}{M_P^3}$, conduciendo a $M_P \ll^{(4)} M_P = 1,2 \times 10^{19} GeV$, en tanto que $M_P \sim TeV$, lo cual haría que el modelo de brane-world pueda ser explorado en aceleradores de partículas convencionales [29].

Según lo anterior la ecuación de Friedmann modificada, en términos de la masa de Planck, toma la siguiente forma

$$H^2 = \frac{8\pi}{3(4)M_P^2}\rho_m - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda_4}{3} + \frac{16\pi^2}{9M_P^6}\rho_m^2 + \frac{2U}{\lambda\kappa_4^2}, \quad (5.28)$$

donde las limitaciones sobre M_P , y el término de radiación oscura, se basan en los requerimientos de que los cambios en la tasa de expansión debido al término cuadrático, y al de radiación oscura, sean suficientemente pequeños, para que la abundancia de 4He , observada, ajuste con la predicción del modelo de brane-world (en este trabajo no se discute las restricciones de nucleosíntesis).

Bajo la consideración de una ecuación de estado $p = (\gamma - 1)\rho$, donde γ es el índice barotrópico, se puede expresar, la ecuación de Friedmann modificada para una membrana con algún contenido físico, de la siguiente forma

$$H^2 = \frac{C_{GR}}{R^{3\gamma}} + \frac{C_\lambda}{R^{6\gamma}} - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda_4}{3} + \frac{C_u}{R^4}, \quad (5.29)$$

donde podemos definir las constantes de la siguiente forma $C_{GR} = \frac{\kappa_{(4)}^2}{3} R^{3\gamma} \rho$, $C_\lambda = \frac{\kappa_{(4)}^2}{6\lambda} R^{6\gamma} \rho^2$, $C_U = \frac{2}{\kappa_{(4)}^2 \lambda} R^4 U$, e involucrar diferentes contenidos sobre la brane, asignando valores distintos al índice barotrópico γ [30], por ejemplo, brane con materia no relativista $\gamma = 1$, con radiación $\gamma = 4/3$, con dominio de constante cosmológica $\gamma = 0$, con paredes de dominio $\gamma = 1/3$, con cuerdas cósmicas $\gamma = 2/3$, o con energía oscura $\gamma = -1/3$, entre otros casos [30]. La ecuación de Friedmann modificada, escrita en estos términos, es la que permitirá estudiar, en este trabajo, algunos hechos y consecuencias de la cosmología de membranas.

En la anterior expresión si hacemos tender $\lambda \rightarrow \infty$, los términos adicionales desaparecen conduciendo a la ecuación de Friedmann estándar o convencional

$$H^2 = \frac{C_{GR}}{R^{3\gamma}} - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda_4}{3}, \quad (5.30)$$

si $\gamma = 1$, y considerando la definición de la constante de Hubble, se obtiene la forma clásica de la ecuación de Friedmann

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G_{(4)} R^2}{3} \rho + \frac{\Lambda_4}{3} R^2 - k, \quad (5.31)$$

ecuación cuya incógnita fundamental es la evolución del factor de escala R , a partir de la densidad y la presión, conocida la ecuación de estado.

La dinámica del universo se estudia a partir de la ecuación de Friedmann y de la ecuación de evolución para un fluido, sin presión, y sin interacción, es decir

$$\dot{\rho}_i + 3H(\rho_i + p_i) = 0, \quad (5.32)$$

cuya solución para materia es

$$\rho_i = \rho_{i0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3, \quad (5.33)$$

y donde el sub-índice i se refiere a las componentes del fluido ideal. De tal manera que si el universo es dominado por materia no relativista con presión despreciable, entonces la densidad de energía se comporta como

$$\rho \propto R^{-3}, \quad \text{para } p \ll \rho, \quad (5.34)$$

en tanto que si la densidad de energía es dominada por partículas relativistas, como fotones, la presión no es despreciable $p = \frac{\rho}{3}$, lo cual conduce a

$$\rho \propto R^{-4}, \quad \text{para } p = \frac{\rho}{3}, \quad (5.35)$$

por consiguiente, las ecuaciones fundamentales de la dinámica cosmológica son la ecuación de Friedmann, la ecuación de conservación de la energía, y la ecuación de estado.

Entre muchas otras cosas, con un análisis similar al anterior, puede encontrarse que la radiación oscura evoluciona de acuerdo a la siguiente ecuación [30]

$$\dot{U} = -4HU, \quad (5.36)$$

cuya solución es

$$U = U_0 R^{-4}, \quad (5.37)$$

lo cual muestra que decaé como la radiación convencional.

Con los elementos anteriores y considerando el modelo estándar de la cosmología como un referente fundamental para el desarrollo de este trabajo, en la siguiente sección se desarrollaran los elementos básicos de la cosmología estándar.

Capítulo 6

Cosmología Estándar

6.1. Dinámica del modelo de Friedmann

La siguiente descripción de la cosmología estándar ilustra el modelo de universo de Friedmann basado en los siguientes principios:

1. El principio cosmológico, el cual, según las observaciones el Universo es isotrópico, homogéneo, y se expande uniformemente a gran escala, lo cual conduce a la métrica Robertson-Walker.
2. Postulado de Weyl, de acuerdo al cual las líneas de universo de partículas se encuentran en un punto singular en el pasado finito o infinito. Significa esto que existe una única línea de universo pasando por cada punto del espacio tiempo.
3. La Relatividad General, la cual relaciona el tensor momentum-energía, con las propiedades geométricas del espacio-tiempo.

En consideración de las ecuaciones de campo y de los principios anteriores tenemos [31]

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3}R \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{1}{3}\Lambda_4 R, \quad (6.1)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}R^2 - \frac{c^2}{\mathfrak{R}^2} + \frac{1}{3}\Lambda_4 R^2, \quad (6.2)$$

aquí, \mathfrak{R} es el radio de curvatura presente o actual $R_c(t_0) = \mathfrak{R}$, además, ρ densidad de energía del Universo, p la presión debida a la densidad de energía, y Λ_4 corresponde a la constante cosmológica sobre el Universo introducida para obtener una solución estática.

6.2. Modelo estándar con $\Lambda_4 = 0$

Considerando el modelo estándar con materia no relativista conocida como polvo, donde cosmológicamente significa un fluido sin presión es decir $p = 0$, $\Lambda = 0$. La densidad de energía del fluido cambia con la expansión del universo según $\rho = \rho_0 R^{-3}$, con lo cual se obtiene

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G\rho_0}{3R^2}, \quad (6.3)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3R} - \frac{c^2}{\mathfrak{R}^2}, \quad (6.4)$$

definiendo la densidad crítica y los parámetros de densidad por

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1,88 \times 10^{-26} h^2 \text{ Kgm}^{-3}, \quad (6.5)$$

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_0, \quad (6.6)$$

obtenemos

$$\ddot{R} = -\frac{\Omega_0 H_0^2}{3R^2}, \quad (6.7)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{\Omega_0 H_0^2}{R} - \frac{c^2}{\mathfrak{R}^2}. \quad (6.8)$$

Para la época actual tenemos $t = t_0$, $R_0 = 1$, $\dot{R}_0 = H_0$, esto permite obtener

$$H_0^2 (1 - \Omega_0) = -\frac{c^2}{\mathfrak{R}^2}, \quad (6.9)$$

lo cual conduce a

$$\mathfrak{R}^2 = \frac{-c^2}{H_0^2 (1 - \Omega_0)}, \quad (6.10)$$

$$\mathfrak{R} = \frac{c/H_0}{(\Omega_0 - 1)^{1/2}}, \quad \kappa = \frac{(\Omega_0 - 1)}{(c/H_0)^2}, \quad (6.11)$$

esto último muestra que existe una relación uno-a-uno entre la densidad de energía del Universo

y su curvatura espacial, que es una de los mejores resultados del modelo de Friedmann sin constante cosmológica. Si la curvatura espacial es cero, tenemos

$$\Omega_0 = 1 , \quad (6.12)$$

y la ecuación dinámica de Friedmann se pueden expresar como

$$\dot{R}^2 = H_0^2 \left[\Omega_0 \left(\frac{1}{R} - 1 \right) + 1 \right] , \quad (6.13)$$

si R toma valores grandes, se puede escribir la relación anterior como

$$\dot{R}^2 = H_0^2 [1 - \Omega_0] , \quad (6.14)$$

donde tenemos los siguientes casos:

1. Modelos con $\Omega_0 < 1$, tienen geometrías abiertas hiperbólicas y se expanden con $R \rightarrow \infty$, y su velocidad de expansión se puede expresar como $\dot{R} = H_0 [1 - \Omega_0]^{1/2}$.

2. Modelos con $\Omega_0 > 1$, tienen geometrías esféricas cerradas y la expansión se frena con algún valor finito de $R = R_{\text{máx}}$, alcanzando una rata de expansión imaginaria en el infinito.

3 Modelos con $\Omega_0 = 1$, separan los modelos abiertos de los cerrados. La velocidad de expansión tiende a cero cuando R tiende a infinito.

Sabemos que H_0 mide la rata de expansión global de la distribución de galaxias, luego se puede definir la desaceleración local del universo en la época actual, por [31] [32]

$$q_0 = - \left(\frac{\ddot{R}\dot{R}}{\dot{R}^3} \right)_{t_0} , \quad (6.15)$$

que de forma simplificada es

$$q_0 = \frac{1}{2} \Omega_0 . \quad (6.16)$$

6.2.1. Relación corrimiento al rojo-tiempo cósmico

Se puede encontrar que el factor de escala se relaciona con el corrimiento al rojo mediante las siguientes expresiones [5]

$$R = (1 + z)^{-1} , \quad (6.17)$$

$$\frac{dz}{dt} = -R^{-2} \frac{dR}{dt} , \quad (6.18)$$

con esto se obtiene

$$\frac{dz}{dt} = -H_0(1+z)^2 (\Omega_0 z + 1)^{1/2} , \quad (6.19)$$

y donde además, el tiempo cósmico medido desde el Big-Bang se obtiene de

$$t = \int_0^t dt = -\frac{1}{H_0} \int_\infty^z \frac{dz}{(1+z)^2 (\Omega_0 z + 1)^{1/2}} , \quad (6.20)$$

igualmente, se puede encontrar la edad del universo para diferentes modelos integrando desde $z = 0$ a $z = \infty$

$$t_0 = \frac{\Omega_0}{H_0 (\Omega_0 - 1)^{3/2}} \left[\text{Sen}^{-1} \left(\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} \right)^{1/2} - \frac{(\Omega_0 - 1)^{1/2}}{\Omega_0} \right] , \quad \text{si } \Omega_0 > 1 , \quad (6.21)$$

$$t_0 = \frac{\Omega_0}{H_0 (\Omega_0 - 1)^{3/2}} \left[\frac{(1 - \Omega_0)^{1/2}}{\Omega_0} - \text{Senh}^{-1} \left(\frac{1 - \Omega_0}{\Omega_0} \right)^{1/2} \right] , \quad \text{si } \Omega_0 < 1 , \quad (6.22)$$

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} , \quad \text{si } \Omega_0 = 1 . \quad (6.23)$$

6.2.2. Medida de distancia como función del corrimiento al rojo

De igual forma podemos hallar la expresión para la distancia coordenada radial comóvil y la distancia diamétral angular comóvil, en función del corrimiento al rojo, con $dr = \frac{cdt}{R(t)} = -c(1+z)dt$. Es importante aclarar que t es el tiempo cósmico, esto es, el tiempo medido por el reloj de un observador fundamental, es decir observadores que se mueven de tal manera que el Universo siempre se muestra isotrópico a ellos y r la distancia coordenada radial comóvil la cual está fija (ver apéndice E), a por ejemplo una galaxia, para todo tiempo, ésta es la distancia propia que tendría la galaxia si su línea de mundo fuera proyectada hacia la época actual t_0 y su distancia medidad en esta época [31]. Según lo anterior se obtiene

$$r = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{(1+z)(\Omega_0 z + 1)^{1/2}}, \quad (6.24)$$

y en el caso de curvatura positiva, se puede encontrar la medida de distancia diámetro angular cómovil

$$D = \Re \text{Sen} \left(\frac{r}{\Re} \right), \quad (6.25)$$

y como la integral se puede hacer analíticamente, se pueden deducir las siguientes expresiones

$$r = \frac{2c}{H_0(\Omega_0 - 1)^{1/2}} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\Omega_0 z + 1}{\Omega_0 - 1} \right)^{1/2} - \tan^{-1} (\Omega_0 - 1)^{-1/2} \right], \quad (6.26)$$

$$D = \frac{2c}{H_0 \Omega_0^2 (1+z)} \left\{ \Omega_0 z + (\Omega_0 - 2) [(\Omega_0 z + 1)^{1/2} - 1] \right\}, \quad (6.27)$$

estas expresiones son válidas para cualquier valor de Ω_0 . En el caso de un Universo vacío, o modelo de Milne, $\Omega_0 = 0$, se obtiene, como caso particular [30] [31].

$$D = \frac{cz}{H_0} \frac{(1 + \frac{z}{2})}{(1+z)}. \quad (6.28)$$

6.3. Modelos con constante cosmológica $\Lambda_4 \neq 0$

Si consideramos que la constante cosmológica es distinta de cero, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} R \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{1}{3} \Lambda_4 R, \quad (6.29)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} R^2 - \frac{c^2}{\Re^2} + \frac{1}{3} \Lambda_4 R^2, \quad (6.30)$$

y nuevamente si asumimos que tenemos materia no relativista en el Universo, tenemos $\frac{3p}{c^2} = 0$, con lo cual se obtiene

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G R \rho}{3} + \frac{1}{3} \Lambda_4 R = -\frac{4\pi G \rho_0}{3R^2} + \frac{1}{3} \Lambda_4 R. \quad (6.31)$$

Se puede deducir una expresión similar sólo considerando que la densidad de energía se puede

descomponer en una densidad de energía proveniente de la materia y una densidad de energía proveniente del vacío, y que satisfaga la ecuación $\rho = \rho_0 R^{-3}$, de tal forma que podemos escribir

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} R \left(\rho_m + \rho_v + \frac{3p_v}{c^2} \right), \quad (6.32)$$

donde $p_v = -c^2 \rho_v$, con esto se obtiene

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho_m - 2\rho_v), \quad (6.33)$$

y cuando el universo se expande $\rho_m = \frac{\rho_0}{R^3}$, y $\rho_v = Cte$, de tal forma que se obtiene

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G \rho_0}{3R^2} + \frac{8\pi G \rho_v}{3} R, \quad (6.34)$$

y donde se puede definir $\Lambda_4 = 8\pi G \rho_v$.

En el caso de $t = t_0$, $R(t_0) = 1$, se obtiene

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G \rho_0}{3} + \frac{8\pi G \rho_v}{3}, \quad (6.35)$$

definiendo $\Omega_{\Lambda_4} = \frac{8\pi G \rho_v}{3H_0^2}$, $\Lambda_4 = 3H_0^2 \Omega_{\Lambda_4}$, obtenemos

$$q_0 = \frac{1}{2} \Omega_0 - \Omega_{\Lambda_4}, \quad (6.36)$$

de tal forma que las ecuaciones dinámicas se pueden escribir como

$$\ddot{R} = -\frac{\Omega_0 H_0^2}{2R^2} + \Omega_{\Lambda_4} H_0^2 R^2, \quad (6.37)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{\Omega_0 H_0^2}{R} - \frac{c^2}{\mathfrak{R}^2} + \Omega_{\Lambda_4} H_0^2 R^2, \quad (6.38)$$

nuevamente en el caso de $t = t_0$, $R(t_0) = 1$, $\dot{R} = H_0$, se encuentra

$$\dot{R}^2 = \Omega_0 H_0^2 - \frac{c^2}{\mathfrak{R}^2} + \Omega_{\Lambda} H_0^2, \quad (6.39)$$

lo cual conduce a

$$\kappa = \frac{[(\Omega_0 + \Omega_\Lambda) - 1]}{\left(\frac{c^2}{H_0^2}\right)}, \quad (6.40)$$

y si la curvatura espacial es cero, es decir plana euclídeana, encontramos

$$(\Omega_0 + \Omega_\Lambda) = 1. \quad (6.41)$$

6.3.1. Relación corrimiento al rojo-tiempo cósmico

Se puede deducir que la expresión para el cambio de z con t es [31]

$$\frac{dz}{dt} = -H_0(1+z) [(1+z)^2(\Omega_0 z + 1) - \Omega_\Lambda z(z+2)]^{1/2}, \quad (6.42)$$

de tal forma que el tiempo cósmico transcurrido desde el Big-Bang hasta la época actual, se obtiene de

$$t = -\frac{1}{H_0} \int_\infty^z \frac{dz}{(1+z) [(1+z)^2(\Omega_0 z + 1) - \Omega_\Lambda z(z+2)]}. \quad (6.43)$$

6.3.2. Medida de distancias con $\Lambda_4 \neq 0$

De igual forma que en la sección anterior, se puede encontrar la distancia coordenada radial comóvil, con

$$\dot{R} = H_0(1+z)^{-1} [(1+z)^2(\Omega_0 z + 1) - \Omega_\Lambda z(z+2)]^{1/2}, \quad (6.44)$$

y con la cual se puede deducir la expresión para la coordenada radial

$$r = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{[(1+z)^2(\Omega_0 z + 1) - \Omega_\Lambda z(z+2)]^{1/2}}, \quad (6.45)$$

y de forma similar se deduce la expresión para la distancia D . Generalmente las soluciones se dan en términos de funciones elípticas [31] [32].

6.4. Medida de distancias en cosmología

En cosmología existen muchas maneras distintas de especificar la distancia entre dos puntos, debido a la expansión del Universo, las distancias entre objetos comóviles está cambiando según cambia el factor de escala. La constante de Hubble H_0 es la constante de proporcionalidad entre la velocidad de recesión v (velocidad con la que se alejan las galaxias) y la distancia d en la expansión del Universo (distancia a la que se encuentra una galaxia) [33],

$$v = H_0 d , \quad (6.46)$$

las dimensiones de H_0 son inversas del tiempo, usualmente se escribe

$$H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} , \quad (6.47)$$

donde h es un factor que parametriza el desconocimiento del valor exacto de H_0 , se considera $0,6 < h < 0,9$. El inverso de la constante de Hubble es el llamado tiempo de Hubble,

$$t_H = \frac{1}{H_0} = 9,78 \times 10^9 \text{ h}^{-1} \text{ yr} = 3,09 \times 10^{17} \text{ h}^{-1} \text{ s} , \quad (6.48)$$

igualmente se define la distancia de Hubble como la distancia que recorre la luz en el tiempo de Hubble

$$D_H = c \times t_H = \frac{c}{H_0} = 3000h^{-1} \text{ Mpc} = 9,26 \times 10^{25} h^{-1} \text{ m} . \quad (6.49)$$

Estas cantidades determinan la escala del Universo, es decir que permiten parametrizar cualquier distancia o tiempo. Además, es convencional en cosmología trabajar en unidades geométricas con $c = t_H = D_H = 1$ [33].

6.4.1. Distancia Comóvil (Línea de Visión)

Se define como la distancia entre dos objetos en el Universo que permanece constante con la época, si los dos objetos se mueven con el flujo de Hubble. En cosmología estándar se define la función de Hubble, que corresponde a la ecuación de Friedman en términos de densidades [33]

$$H(z) = \sqrt{\Omega_0(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda} . \quad (6.50)$$

La distancia comóvil total se obtiene de

$$D_c = D_H \int_0^z \frac{dz}{H(z)}, \quad (6.51)$$

esta medida de distancia se puede considerar como la medida fundamental de distancia, ya que permite obtener las otras medidas de distancia en términos de ésta.

6.4.2. Distancia Comóvil (Transversal)

La distancia comóvil entre dos eventos con el mismo corrimiento al rojo o distancia pero separados por algún ángulo permite definir la distancia comóvil transversal, la cual se define mediante las siguientes expresiones [33]

$$D_M = D_H \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} \text{Senh}\left[\sqrt{\Omega_k} \frac{D_c}{D_H}\right]; \quad \Omega_k > 0, \quad (6.52)$$

$$D_M = D_H \quad ; \quad \Omega_k = 0, \quad (6.53)$$

$$D_M = D_H \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} \text{Sen}\left[\sqrt{\Omega_k} \frac{D_c}{D_H}\right] \quad ; \quad \Omega_k < 0. \quad (6.54)$$

6.4.3. Distancia Diametral Angular

Esta distancia se define como la razón del tamaño físico transversal de un objeto a su tamaño angular. Es usada para convertir separaciones angulares en las imagenes de telescopios en separaciones en las fuentes. La distancia diametral angular se relaciona con la distancia comóvil transversal mediante [33]

$$D_A = \frac{D_M}{1+z}. \quad (6.55)$$

6.4.4. Distancia de Luminosidad

La distancia de luminosidad se define como la relación entre el flujo bolométrico S y la luminosidad bolométrica L ,

$$D_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi S}}, \quad (6.56)$$

se relaciona con la distancia comóvil transversal y la distancia diametral angular de la siguiente forma [33]

$$D_L = (1 + z)D_M = (1 + z)^2 D_A . \quad (6.57)$$

6.4.5. Volumen Comóvil

Se define como el volumen de un flujo de Hubble que encierra una cierta cantidad de objetos que no evolucionan y que permanece constante con el corrimiento al rojo. El elemento de volumen comóvil en un ángulo sólido $d\Omega$ y en un intervalo de corrimiento al rojo dz es [33]

$$dV_C = D_H \frac{(1 + z)^2 D_A^2}{E(z)} d\Omega dz . \quad (6.58)$$

La integral del elemento de volumen comóvil desde el presente hasta un corrimiento al rojo z da el volumen comóvil total

$$V_C = \left(\frac{4\pi D_H^3}{2\Omega_k} \right) \left[\frac{D_M \sqrt{1 + \frac{\Omega_k D_M^2}{D_H^2}}}{D_H} - \frac{\text{Senh}^{-1} \frac{\sqrt{|\Omega_k|} D_M}{D_H}}{\sqrt{|\Omega_k|}} \right] ; \quad \Omega_k > 0 , \quad (6.59)$$

$$V_C = \frac{4\pi D_M^3}{3} ; \quad \Omega_k = 0 , \quad (6.60)$$

$$V_C = \left(\frac{4\pi D_H^3}{2\Omega_k} \right) \left[\frac{D_M \sqrt{1 + \frac{\Omega_k D_M^2}{D_H^2}}}{D_H} - \frac{\text{Sen}^{-1} \frac{\sqrt{|\Omega_k|} D_M}{D_H}}{\sqrt{|\Omega_k|}} \right] ; \quad \Omega_k < 0 . \quad (6.61)$$

El volumen comóvil y su integral son usados frecuentemente para predecir el número de conteos o las densidades de luminosidad.

6.4.6. El tiempo retrospectivo (lookback time)

El tiempo retrospectivo de un objeto es la diferencia entre la edad del Universo hoy y la edad del Universo en el tiempo en que fueron emitidos los fotones. Es usado para predecir propiedades de objetos de alto corrimiento al rojo, es decir objetos muy viejos o edad temprana del Universo, con modelos de evolución. Se puede obtener la expresión [33]

$$t_L = t_H \int_0^z \frac{dz}{(1+z)H(z)}. \quad (6.62)$$

6.4.7. Probabilidad de intersección de objetos

Dada una población de objetos con densidad de número comóvil $n(z)$ y sección eficaz $\sigma(z)$, el diferencial de probabilidad dP de que una línea de visión interseccione uno de estos objetos en un intervalo de corrimiento al rojo dz a un corrimiento al rojo z , está dado por [33]

$$dP = n(z)\sigma(z)D_H \frac{(1+z)^2}{H(z)} dz. \quad (6.63)$$

Se puede definir $n(z)\sigma(z)D_H = 1$ para obtener una expresión adimensional.

6.5. Escala de distancias en cosmología

La causa fundamental de incertidumbre en la medida de distancias a objetos lejanos estriba en que no puede usarse un mismo método o indicador de distancia para todas las distancias, sino que hay que usar indicadores distintos según la lejanía. Aunque algunos indicadores pueden utilizarse para un amplio rango de distancias, deben calibrarse previamente mediante otros indicadores. Los indicadores más precisos, pero que sólo se pueden utilizar en cortas distancias, son los llamados calibradores, los cuales permiten determinar los demás indicadores, en particular los llamados indicadores primarios, que se utilizan para medir distancias a objetos muy lejanos como para emplear los calibradores. Los indicadores primarios sirven, a su vez, para calibrar los indicadores secundarios, los cuales permiten medir distancias lejanas como para utilizar indicadores primarios. Finalmente, los indicadores primarios y secundarios se utilizan para calibrar los indicadores terciarios, los cuales se emplean para medir las distancias de los objetos más lejanos [39].

El indicador más destacado y que cubre un mayor rango de distancias lo constituyen las supernovas tipo Ia (SN Ia). A diferencia de las otras supernovas, cuyos progenitores son estrellas de gran masa, las SN Ia proceden de sistemas binarios compuestos por una enana blanca y una gigante roja que se encuentran suficientemente próximas como para que se produzca captura de masa de la gigante roja por parte de la enana blanca, conduciendo a un mecanismo de explosión. La gran luminosidad del máximo, su relativa uniformidad, junto con la posibilidad de determinar

si se ha observado el mismo o no, sitúa a las supernovas Ia como indicadores privilegiados para determinación de grandes distancias, de tal forma que pueden calificarse de indicadores ideales (candelas estándar), permitiendo ser observadas a grandes distancias de forma casi independiente de la escala de distancias.

A finales de los años noventa se encontró que las SN Ia situadas a escalas cosmológicas eran más débiles (menos brillantes) de lo esperado, es decir que se hallaban más lejos de lo que correspondería a su corrimiento al rojo, lo cual llevó a concluir que el universo se halla en un estado de expansión acelerada [47], por tal razón estos objetos constituyen un referente privilegiado para estudiar y discriminar modelos cosmológicos [39], se mostrará posteriormente como se puede utilizar la información proveniente de las SN Ia para restringir los modelos cosmológicos (técnica de máxima verosimilitud, ver apéndice H).

En el siguiente capítulo, se desarrollará la cosmología sobre una membrana, no obstante, se tendrá como referente principal la cosmología estándar ilustrada en este capítulo, de igual forma las relaciones cosmológicas presentadas aquí, asumimos se conservan en su esencia y en su forma.

Capítulo 7

Cosmología sobre una membrana

7.1. Cosmología sobre una membrana con $\Lambda_4 = 0$

Siguiendo de forma paralela los desarrollos considerados previamente¹, pero donde asumimos el Universo como un membrana tipo Randall-Sundrum (Brane-World), y partiendo de la ecuación de Friedmann modificada [34] [35], obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}R^2 + \frac{8\pi G\rho^2}{6\lambda}R^2 + \frac{1}{3}\Lambda_4 R^2 + \frac{U}{4\pi G\lambda}R^2 - k, \quad (7.1)$$

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi GR}{3}(3p + \rho) - \frac{4\pi G\rho^2}{3\lambda}\left(\frac{3p}{\rho} + 2\right)R - \frac{U}{4\pi G\lambda}R + \frac{1}{3}\Lambda_4 R, \quad (7.2)$$

cuando se hace $\lambda \rightarrow \infty$, se obtienen las ecuaciones dinámicas de la cosmología estándar. Al igual que en la cosmología estándar, se puede considerar el caso en el cual la constante cosmológica en cuatro dimensiones es despreciable $\Lambda_4 = 0$, y la materia sobre la brane es no relativista, es decir $p = 0$, y la cual evoluciona como $\rho = \rho_0 R^{-3}$, con lo cual se obtiene

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3R} + \frac{8\pi G\rho_0^2}{6\lambda R} + \frac{U}{4\pi G\lambda}R^2 - k, \quad (7.3)$$

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G\rho_0}{3R^2} - \frac{8\pi G\rho_0^2}{3\lambda R^5} - \frac{U}{4\pi G\lambda}R, \quad (7.4)$$

¹Estos desarrollos corresponden a un desarrollo y tratamiento similar a lo hecho en cosmología estándar, los resultados obtenidos aquí no se reportan de esta forma en la literatura convencional, usualmente se presentan en forma covariante o de manera mucho más genérica.

y donde definimos $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$, obteniendo las ecuaciones dinámicas en términos de la densidad crítica como fue tratada anteriormente,

$$\dot{R}^2 = \frac{H_0^2\Omega_0}{R} + \frac{3H_0^4\Omega_0^2}{16\pi G^2\lambda R} + \frac{U}{4\pi G\lambda}R^2 - k, \quad (7.5)$$

$$\ddot{R} = -\frac{H_0^2\Omega_0}{2R^2} - \frac{3H_0^4\Omega_0^2}{8\pi G\lambda R^5} - \frac{U}{4\pi G\lambda}R, \quad (7.6)$$

igualmente, en la época actual se puede definir, $t = t_0$, $R(t_0) = 1$, $\dot{R}(t_0) = H_0$, $\ddot{R}(t_0) = -q_0H_0^2$, con lo que se obtiene expresiones para el término de energía oscura² y para el índice de curvatura,

$$U = 4\pi G\lambda H_0^2(1 - \Omega_0) - \frac{3}{4}H_0^4\Omega_0^2, \quad \text{si } k = 0, \quad (7.7)$$

$$U = 4\pi G\lambda H_0^2\left(q_0 - \frac{\Omega_0}{2}\right) - \frac{3}{2}H_0^4\Omega_0^2, \quad \text{si } k \neq 0, \quad (7.8)$$

$$k = H_0^2(\Omega_0 - 1) + \frac{3H_0^4\Omega_0}{16\pi G\lambda} + \frac{U}{4\pi G\lambda}, \quad (7.9)$$

lo que nos lleva a obtener

$$\dot{R}^2 = H_0^2 \left[\Omega_0 \left(\frac{1}{R} - 1 \right) + 1 \right] + \frac{3H_0^2\Omega_0^2}{4\pi G} + \frac{3H_0^4\Omega_0^2}{16\pi G^2\lambda R} - \frac{3H_0^4\Omega_0}{16\pi G^2\lambda} + \lambda H_0\Omega_0 - R^2 H_0\Omega_0, \quad (7.10)$$

en el caso de membranas con constante cosmológica la relación entre el índice de curvatura y el factor de escala está dada por

$$\frac{k}{R^2} = \frac{\dot{R}^2}{R^2} \left[\frac{8\pi G\rho}{3} \frac{R^2}{\dot{R}^2} - \frac{8\pi G\rho^2}{6\lambda} \frac{R^2}{\dot{R}^2} + \frac{2U}{8\pi G\lambda} \frac{R^2}{\dot{R}^2} - 1 \right], \quad (7.11)$$

donde, tenemos $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2$, $\frac{1}{\rho_c} = \frac{8\pi G R^2}{3\dot{R}^2}$, $\frac{R^2}{R} = \frac{3}{8\pi G\rho_c}$, con lo cual se deduce

² Siguiendo el desarrollo formal covariante para encontrar el término de radiación oscura, se obtiene $U = -\frac{4}{3}\pi G\lambda E_{\mu\nu}V^\mu V^\nu$, donde $E_{\mu\nu}$ es el tensor de Weyl, y V^μ es la cuadrivelocidad sobre la membrana, se evidencia la relación directa de U con λ . Si λ tiende a ser muy grande igualmente lo es U [29].

$$\frac{k}{R^2} = \frac{\dot{R}^2}{R^2} \left[\frac{\rho}{\rho_c} - \frac{1}{2\lambda} \frac{\rho}{\rho_c} + \frac{6U}{64\pi^2 G^2 \lambda} \frac{1}{\rho_c} - 1 \right], \quad (7.12)$$

y expresando en términos de densidades $\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_c}$, $\Omega_c = \frac{\rho}{\rho_c}$, se encuentra

$$\frac{k}{R^2} = \frac{\dot{R}^2}{R^2} \left[\Omega_c - \frac{1}{2\lambda} \Omega_c + \Omega_U - 1 \right], \quad (7.13)$$

definiendo $\Omega_\lambda = \frac{1}{2\lambda} \Omega_c$, obtenemos

$$\frac{k}{R^2} = \frac{\dot{R}^2}{R^2} [\Omega_c - \Omega_\lambda + \Omega_U - 1], \quad (7.14)$$

es decir que la geometría del universo (membrana) dependerá de las siguientes relaciones

$$k = -1, \quad \text{entonces} \quad \Omega_c - \Omega_\lambda + \Omega_U < 1, \quad (7.15)$$

$$k = 1, \quad \text{entonces} \quad \Omega_c - \Omega_\lambda + \Omega_U = 1, \quad (7.16)$$

$$k = +1, \quad \text{entonces} \quad \Omega_c - \Omega_\lambda + \Omega_U > 1, \quad (7.17)$$

igualmente en el caso de $t = t_0$, y si $k \neq 0$

$$R_0 = \left(\frac{k}{H_0^2} \right)^{1/2} [\Omega_c - \Omega_\lambda + \Omega_U - 1]^{-1/2}, \quad (7.18)$$

y en $t = t_0$, $R_0 = 1$, $\dot{R} = H_0$, $\ddot{R} = -q_0 H_0$, lo cual conduce a

$$1 = \Omega_0 + \frac{3H_0^2 \Omega_0^2}{16\pi G \lambda} + \frac{U}{4\pi \lambda H_0^2} - \frac{k}{H_0^2}, \quad (7.19)$$

$$q_0 = \frac{\Omega_0}{2} + \frac{3H_0^2 \Omega_0^2}{8\pi G \lambda} + \frac{U}{4\pi G \lambda H_0^2}, \quad (7.20)$$

donde se puede expresar el parámetro de desaceleración, en términos de densidades con $\Omega_\lambda = \frac{3H_0^2 \Omega_0^2}{8\pi G \lambda}$, $\Omega_U = \frac{U}{4\pi G \lambda H_0^2}$

$$q_0 = \frac{\Omega_0}{2} + \Omega_\lambda + \Omega_U , \quad (7.21)$$

expresión concordante con la expresión estándar. Aquí, tenemos densidad de materia, densidad de tensión sobre la brane y densidad de radiación oscura, es decir tenemos una membrana interactuante con el bulk, en principio habría intercambio de energía de la membrana con el bulk.

7.1.1. Medida de distancias en función del corrimiento al rojo

Se puede encontrar que la relación de corrimiento al rojo-tiempo cósmico se puede expresar como

$$\frac{dz}{dt} = H_0(1+z)^2 \left[(\Omega_0 z + 1) + \frac{3\Omega_0^2}{4\pi G} - \frac{\Omega_0}{H_0(1+z)^2} + \frac{3H_0^2\Omega_0(1+z)}{16\pi G^2\lambda} - \frac{3\Omega_0}{16\pi G^2\lambda} + \frac{\lambda\Omega_0}{H_0} \right]^{1/2} , \quad (7.22)$$

y como en cosmología estándar se puede considerar que $dr = -c(1+z)dt$, se obtiene

$$r = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{(1+z) \left[(\Omega_0 z + 1) + \frac{3\Omega_0^2}{4\pi G} - \frac{\Omega_0}{H_0} \left(\frac{1}{(1+z)^2} + \lambda \right) + \frac{3H_0^2\Omega_0(1+z)}{16\pi G^2\lambda} - \frac{3\Omega_0}{16\pi G^2\lambda} \right]^{1/2}} , \quad (7.23)$$

expresión mucho más compleja, la cual involucra el contenido de materia sobre la brane, como también la tensión sobre la brane y donde el término de radiación oscura se ha expresado en términos de la tensión, es decir que en esta expresión se fusiona la tensión sobre la membrana con la radiación oscura, lo cual haría pensar que se debe tener una sólo forma de energía adicional en el braneworld (ello habría que explorarlo desde el punto de vista formal, es decir desde el punto de vista covariante).

7.2. Cosmología sobre una membrana con $\Lambda_4 \neq 0$

Nuevamente si consideramos un modelo de membrana con constante cosmológica no despreciable $\Lambda_4 \neq 0$, con materia no relativista sobre la brane $\rho = \rho_0 R^{-3}$, obtenemos el sistema

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0}{R} + \frac{8\pi G}{6\lambda} \frac{\rho_0^2}{R^4} + \frac{1}{3} \Lambda_4 R^2 + \frac{U}{4\pi G \lambda} R^2 - k, \quad (7.24)$$

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \frac{\rho_0}{R^2} - \frac{8\pi G}{3\lambda} \frac{\rho_0^2}{R^5} - \frac{U}{4\pi G \lambda} R + \frac{1}{3} \Lambda_4 R, \quad (7.25)$$

de igual forma que lo hecho anteriormente se puede obtener la constante cosmológica si asumimos que la densidad de energía se puede expresar por $\rho_0 = \rho_m + \rho_v$, donde ρ_v es la densidad de energía del vacío y con $p_v = -\rho_v$, cuando el universo se expande (membrana en expansión) se tienen las relaciones $\rho = \rho_0 R^{-3}$, $\rho_v = Cte$, $p_m = 0$, $p_v = -\rho_v$ que conducen a

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3R^2} (\rho_m + \rho_v) - \frac{8\pi G}{3\lambda R^5} (\rho_m + \rho_v)^2 - \frac{U}{4\pi G \lambda} R, \quad (7.26)$$

y siguiendo algunos desarrollos obtenemos la siguiente expresión

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G \rho_0}{3R^2} + \frac{8\pi G \rho_v}{3} - \frac{4\pi G}{3\lambda} \left[\frac{2\rho_0}{R^3} - \frac{3\rho_0 \rho_v}{\rho_0 + R^3 \rho_v} - \frac{3\rho_v R^3}{\rho_0 + R^3 \rho_v} + 2\rho_v \right] - \frac{U}{4\pi G \lambda} R, \quad (7.27)$$

la cual bajo algunas simplificaciones puede escribirse como

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G \rho_0}{3R^2} - \frac{8\pi G \rho_0^2}{3\lambda R^5} - \frac{UR}{4\pi G \lambda} + \frac{1}{3} 8\pi G \rho_v R, \quad (7.28)$$

con esto podemos definir $\Omega_{\Lambda_4} = \frac{8\pi G \rho_v}{3H_0^2}$, $\Omega_0 = \frac{8\pi G \rho_0}{3H_0^2}$, $\Omega_U = \frac{U}{4\pi G \lambda H_0^2}$, $\Omega_\lambda = \frac{4\pi G \rho_0}{3\lambda H_0^2}$, junto con $\Lambda_4 = 3H_0^2 \Omega_{\Lambda_4}$ se obtiene

$$\ddot{R} = -\frac{1}{2} \frac{H_0^2 \Omega_0}{R^2} - \frac{H_0^2 \Omega_0}{\lambda R^5} - H_0^2 \Omega_U + R H_0^2 \Omega_\lambda, \quad (7.29)$$

relación que permite obtener el parámetro de desaceleración

$$q_0 = \frac{1}{2} \Omega_0 - \Omega_\lambda + \Omega_U + \Omega_\lambda. \quad (7.30)$$

De igual manera, podemos obtener la relación entre corrimiento al rojo y tiempo cósmico

$$\frac{dz}{dt} = - (1+z)^2 \left[\frac{\Omega_0}{R} + \frac{\rho_0 \Omega_0}{3\lambda R^4 H_0} + \Omega_\lambda R^2 + \Omega_U R^2 - \frac{k}{H_0^2} \right]^{1/2} H_0, \quad (7.31)$$

también podemos encontrar la distancia coordenada radial comóvil, la distancia comóvil transver-

sal (para $\Omega_{0k} < 0$) y el volumen comóvil en el caso de sólo contar con materia sobre la brane, sin constante cosmológica, y sin radiación oscura.

$$r = -\frac{1}{H_0} \int_{\infty}^z [(1+z)(\Omega_0 z + 1) - \frac{\Omega_0}{H_0(1+z)} + \frac{3H_0^2 \Omega_0 (1+z)^2}{16\pi G^2 \lambda} + (1+z) \left(\frac{3\Omega_0^2}{4\pi G} - \frac{3\Omega_0}{16\pi G^2 \lambda} + \frac{\lambda \Omega_0}{H_0} \right)]^{-1/2} dz, \quad (7.32)$$

$$D = \Re Sen \left(\frac{r}{\Re} \right), \quad (7.33)$$

$$V(r) = 2\pi \Re^3 \left(Sen^{-1} \frac{D}{\Re} - \frac{D}{\Re} \sqrt{1 - \frac{D^2}{\Re^2}} \right), \quad (7.34)$$

de la misma forma, se puede calcular la edad del universo membrana mediante

$$t = \int_0^t dt = -\frac{1}{H_0} \int_{\infty}^z (1+z)^{-2} \left[\frac{\Omega_0}{R} + \frac{\rho_0 \Omega_0}{3\lambda R^4 H_0} + \Omega_{\Lambda} R^2 + \Omega_U R^2 - \frac{k}{H_0^2} \right]^{-1/2}. \quad (7.35)$$

De forma mucho más general para una membrana con materia no relativista, constante cosmológica, radiación oscura y tensión sobre la membrana podemos definir $\Omega_{\Lambda_4} = \frac{8\pi G \rho_v}{3H_0^2}$, $\Omega_0 = \frac{8\pi G \rho_0}{3H_0^2}$, $\Omega_U = \frac{U}{4\pi G \lambda H_0^2}$, $\Omega_{\lambda} = \frac{4\pi G \rho_0}{3\lambda H_0^2}$, junto con $\Lambda_4 = 3H_0^2 \Omega_{\Lambda}$. Así, obtenemos

$$\dot{R}^2 = \frac{H_0^2 \Omega_0}{R} + \frac{H_0^2 \Omega_{\lambda}}{R^4} + H_0^2 \Omega_{\Lambda} R^2 + H_0^2 \Omega_U R^2 - k, \quad (7.36)$$

$$\ddot{R} = -\frac{1}{2} \frac{H_0^2 \Omega_0}{R^2} - \frac{H_0^2 \Omega_0}{\lambda R^5} - H_0^2 \Omega_U + R H_0^2 \Omega_{\Lambda}, \quad (7.37)$$

y en consideración de la época actual se obtiene

$$k = H_0 [(\Omega_0 + \Omega_{\lambda} + \Omega_{\Lambda} + \Omega_U) - 1],$$

y donde, en el caso de curvatura nula $k = 0$ se tiene

$$\Omega_0 + \Omega_{\lambda} + \Omega_{\Lambda} + \Omega_U = 1, \quad (7.38)$$

de tal forma que la constante k se puede reemplazar en la expresión general para obtener

$$\begin{aligned} \dot{R}^2 &= H_0^2 \left[\Omega_0 \left(\frac{1}{R} - 1 \right) + \Omega_\Lambda (R^2 - 1) \right. \\ &\quad \left. + \Omega_\lambda \left(\frac{1}{R^4} - 1 \right) + \Omega_U (R^2 - 1) + 1 \right], \end{aligned} \quad (7.39)$$

ahora, expresando la relación anterior en términos del corrimiento al rojo z , obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{R}^2 &= H_0 (1+z)^{-1} \left[(1+z)^2 (\Omega_0 z + 1) - \Omega_\Lambda z (z+2) - \Omega_U z (z+2) \right. \\ &\quad \left. + \Omega_\lambda (1+z)^2 (4z + 6z^2 + 4z^3 + z^4) \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (7.40)$$

y haciendo uso de $\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{R^2} \dot{R}$, y de la distancia coordenada radial comóvil $dr = -(1+z) dt$, deducimos

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{H_0} \int_0^z \left[(1+z)^2 (\Omega_0 z + 1) - \Omega_\Lambda z (z+2) - \Omega_U z (z+2) \right. \\ &\quad \left. + \Omega_\lambda (1+z)^2 (4z + 6z^2 + 4z^3 + z^4) \right]^{-1/2} dz, \end{aligned} \quad (7.41)$$

expresión que permite obtener la distancia radial comóvil en términos del corrimiento al rojo y de los parámetros de densidad adicionales. Obsérvese, que si los parámetros adicionales son cero se obtiene la coordenada radial estándar con constante cosmológica.

7.3. Cosmometría de Membranas

Por el término *cosmometría* se designa la parte de la cosmología que trata de la medición de distancias y volúmenes, las variaciones de la velocidad de recesión con el tiempo, los objetos que pueden o podrán y no pueden o no podrán observarse, la relación entre las distribuciones espectrales observadas y emitidas, entre otros aspectos. Como se ha dicho en los apartados anteriores, sobre una membrana que contiene el Universo físico total, se puede recrear una cosmología análoga a la cosmología estándar. En términos mucho más generales, en el sentido de involucrar una ecuación de estado, que permita considerar cualquier contenido de materia-energía en el

universo, podemos escribir para la función $H(z)$ la siguiente expresión

$$H(z) = \sqrt{\Omega_{GR}(1+z)^{3\gamma} + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\lambda(1+z)^{6\gamma} + \Omega_U(1+z)^4 + \Omega_\Lambda} , \quad (7.42)$$

donde en general Ω_{GR} representa la densidad de energía relativista, para el caso de una membrana plana con materia no relativista $\gamma = 1$, se encuentra la función de Hubble

$$H(z) = \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\lambda(1+z)^6 + \Omega_U(1+z)^4 + \Omega_\Lambda} , \quad (7.43)$$

y por ejemplo, la distancia comóvil transversal para un universo membrana no-plano, con una densidad de energía relativista, se siguen las siguientes relaciones

$$D_M = D_H \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} \text{Senh} \left[\sqrt{\Omega_k} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_{GR}(1+z)^{3\gamma} + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\lambda(1+z)^{6\gamma} + \Omega_U(1+z)^4 + \Omega_\Lambda}} \right];$$

$$\Omega_k > 0 , \quad (7.44)$$

$$D_M = D_H \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} \text{Sen} \left[\sqrt{\Omega_k} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_{GR}(1+z)^{3\gamma} + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\lambda(1+z)^{6\gamma} + \Omega_U(1+z)^4 + \Omega_\Lambda}} \right] ;$$

$$\Omega_k < 0 . \quad (7.45)$$

De forma similar se pueden construir las relaciones cosmológicas importantes, sobre una brane, claro esta que considerando que las relaciones convencionales se conservan en este esquema, es decir, manteniéndolo la cosmometría convencional.

La medida de distancias en un universo estático, como puede considerarse a las distancias locales en la Tierra, el Sistema Solar o dentro de la Galaxia, que no están afectadas por la expansión, es conceptualmente más sencilla que la medida de distancias en un universo en expansión. En este último caso, es preciso definir distintos tipos de distancias con diferentes aplicaciones. Es decir, la distancia no es un concepto unívoco. Para cada tipo de distancia existirá una dependencia funcional con el desplazamiento al rojo distinta, que dependerá del modelo cosmológico. Las distancias utilizadas en cosmología no corresponden propiamente a distancias radiales, ya que no vienen dadas por la coordenada radial como en el caso estático, por ello la necesidad de las

expresiones anteriores. Cabe señalar que, con independencia del modelo cosmológico que se admita, a distancias suficientemente pequeñas o, equivalentemente, a pequeños desplazamientos al rojo, la expansión y curvatura del universo pueden despreciarse y todas las distancias son iguales entre sí e iguales a las distancias euclídeas. Las discrepancias, dependen del modelo, surgen a desplazamientos al rojo suficientemente elevados. En este caso, las distancias que proporcionan los indicadores de distancia basados en la luminosidad, que seran por consiguiente distancias de luminosidad, diferirán de las distancias obtenidas con indicadores tales como los diámetros de las mayores galaxias de un cúmulo o las regiones HII de galaxias espirales, que proporcionan distancias diametrales angulares. Por ello es preciso tener en cuenta estas consideraciones al trabajar con indicadores basados en distintos tipos de distancias.

Uno de los hallazgos más importantes de la cosmología moderna ha sido el descubrimiento de la expansión acelerada del universo deducido de la observación de SN Ia a distancias cosmológicas. Con la observación y análisis de SN Ia se puede encontrar la luminosidad, y con el flujo observado en el máximo o cerca de él, se obtiene la distancia de luminosidad experimental u observacional. De otra parte, el espectro de la galaxia huésped de la supernova permite determinar el desplazamiento al rojo de la misma. Ambos resultados, para una cierta cantidad de supernovas situadas en un amplio rango de desplazamientos al rojo suficientemente elevados permite obtener un conjunto de puntos en el plano $mag - z$ (diagrama de Hubble), al cual se pueden ajustar las curvas teóricas de distancia de luminosidad o de magnitud aparente, para los diferentes modelos cosmológicos. A largo plazo, con una cantidad suficiente de datos, será posible determinar el desplazamiento al rojo al cual el universo empieza a acelerarse, el llamado punto de inflexión. Este dato permitirá determinar si la ecuación de estado de presión negativa corresponde a una constante cosmológica, a quintaesencia, o a otro efecto de tipo gravitacional (en este trabajo se ha determinado un punto de inflexión desde el punto de vista formal, es decir se han encontrado los valores óptimos mediante un proceso de minimización de la función chi-cuadrado) [46].

Para el caso de membranas tipo RSII planas encontramos las siguientes expresiones para el cálculo de las distancias, por ejemplo, la distancia comóvil (línea de visión), distancia diametral angular, y distancia de luminosidad

$$\frac{D_c}{D_H} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\lambda (1+z)^6 + \Omega_U (1+z)^4 + \Omega_\Lambda}}, \quad (7.46)$$

$$\frac{D_A}{D_H} = \frac{1}{1+z} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\lambda (1+z)^6 + \Omega_U (1+z)^4 + \Omega_\Lambda}}, \quad (7.47)$$

$$\frac{D_L}{D_H} = (1+z) \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\lambda (1+z)^6 + \Omega_U (1+z)^4 + \Omega_\Lambda}}, \quad (7.48)$$

Para el cálculo del volumen comóvil, la probabilidad de intersección, el tiempo retrospectivo (lookback time), y la edad del universo, se siguen las siguientes expresiones

$$\frac{V_C}{D_H^3} = \frac{V_C}{V_H} = \frac{4\pi}{3} \left(\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\lambda (1+z)^6 + \Omega_U (1+z)^4 + \Omega_\Lambda}} \right)^3, \quad (7.49)$$

$$\frac{1}{D_H} \frac{dP}{dz} = n(z)\sigma(z)(1+z)^2 \frac{1}{\sqrt{\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\lambda (1+z)^6 + \Omega_U (1+z)^4 + \Omega_\Lambda}}, \quad (7.50)$$

$$\frac{t_L}{t_H} = \int_0^z \frac{dz}{(1+z)\sqrt{\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\lambda (1+z)^6 + \Omega_U (1+z)^4 + \Omega_\Lambda}}, \quad (7.51)$$

$$\frac{t}{t_H} = \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)\sqrt{\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\lambda (1+z)^6 + \Omega_U (1+z)^4 + \Omega_\Lambda}}, \quad (7.52)$$

Las expresiones anteriores, son muy importantes en el momento de considerar las respectivas gráficas, en la siguiente sección se obtendrán las gráficas de forma comparativa con otros modelos físicos. Esto permite caracterizar el comportamiento de los modelos brane frente a otros modelos cosmológicos

Capítulo 8

Caracterización del modelo braneworld

En esta sección se obtendrán gráficas correspondientes a la cosmografía de membranas contrastandolas con las curvas cosmograficas canónicas¹. El fin de desarrollar lo mencionado anteriormente es el de realizar una caracterización comparativa entre modelos y de esta forma observar la compatibilidad del modelo bajo discusión con algunos resultados cosmológicos clásicos. Se consideran modelos canónicos [33], algunos modelos especiales de brane (modelos planos RSII), y se asignaran valores particulares para los parámetros relevantes.

Los distintos modelos cosmológicos, también llamados cosmologías, se distinguen por el valor de la constante de Hubble, y por el valor de los parámetros de densidad, en este trabajo se consideraran modelos con el mismo valor de constante cosmológica $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Los modelos que se estudiarán, están basados en la relatividad general, la homogeneidad e isotropía del espacio y en todos los casos se han supuesto soluciones en expansión partiendo de una ‘gran explosión’ inicial. La evolución macroscópica de un universo, es decir, su origen, la evolución de su expansión y su estado final, está dada por la evolución del factor de escala, aquí se obtienen parámetros cosmológicos en función del corrimiento al rojo el cual guarda una estrecha relación con el factor de escala. Por consiguiente, el objeto de esta sección es estudiar algunas posibles cosmologías, entre ellas la de braneworld. El universo en el que vivimos es un caso particular de ese conjunto de cosmologías. Sin excluir, desde luego, la posibilidad antrópica de que el universo en el que vivimos sea el único posible, en el sentido de que las leyes físicas que lo gobiernan y los parámetros cosmológicos que lo definen no podrían ser de otra manera para dar lugar a la

¹Las gráficas fueron desarrolladas utilizando el programa MATHEMATICA V4.0, donde se desarrollo un algoritmo que permitiera realizar numéricamente las integrales que aparecen en las expresiones de distancias.

existencia de estrellas y planetas que puedan sostener la vida. Por consiguiente planteamos los siguientes modelos cosmológicos canónicos

8.1. Modelos Canónicos

MODELO	Ω_m	Ω_Λ	Ω_λ	Ω_U
Einstein-de Sitter	1	0	0	0
Baja densidad	0.5	0	0	0
Alto lambda	0.2	0.8	0	0
Modelo Estándar	0.28	0.72	0	0
Brane baja densidad	0.28	0.72	0.01	0.01
Brane alta densidad	0.28	0.72	0.1	0.1
Brane Einstein-de Sitter	0.1	0	0.1	0.1
Brane alto lambda	0.2	0.8	0.1	0.1

Cuadro 8.1: Tabla de parámetros de algunos modelos cosmológicos

Los primeros tres modelos no son modelos realistas, los modelos Einstein-de Sitter y de baja densidad corresponden a modelos sin constante cosmológica, que son importantes por razones históricas y como referente a otros modelos. Es importante aclarar que los modelos de braneworld que se están comparando, en esta sección, son planos, es decir modelos de braneworld tipo RSII.

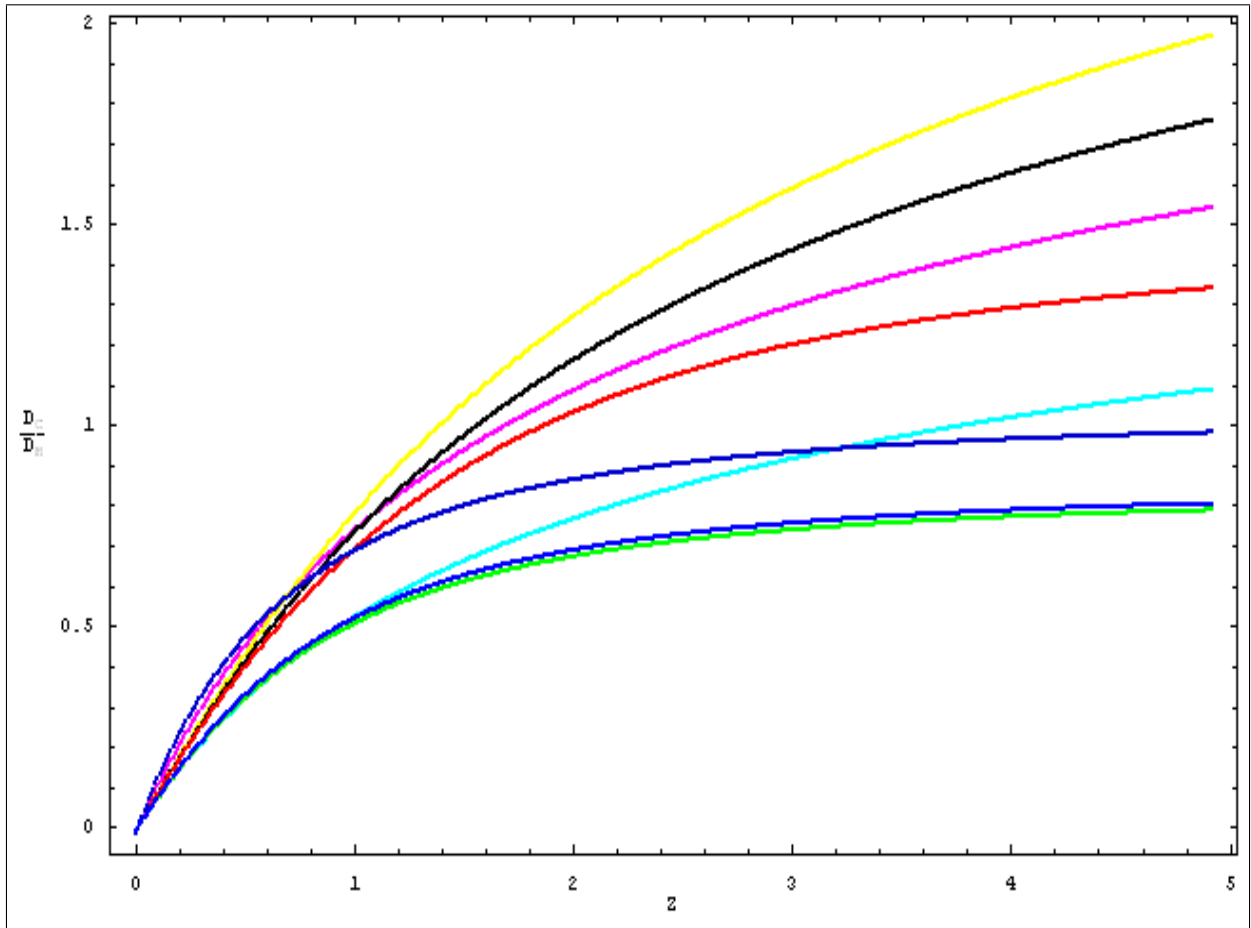


Figura 1: **Distancia Propia**; en su orden *Einstein-de Sitter* (cian), baja densidad(magenta),alto lambda(amarillo),modelo estándar(negro),brane baja densidad(rojo),brane alta densidad(verde),brane *Einstein-de Sitter*(azul),brane alta lambda(azul claro). Se observa claramente que la distancia radial comóvil para membranas es menor que la distancia obtenida en cosmología estándar, lo cual modifica sustancialmente las distancias comóviles en el Universo, esto puede ser probado con nuevos datos astronómicos. Se observa que para corrimientos cercanos a 1 el modelo brane *Einstein-de Sitter* supera al modelo estándar, es decir que predice una mayor distancia propia.

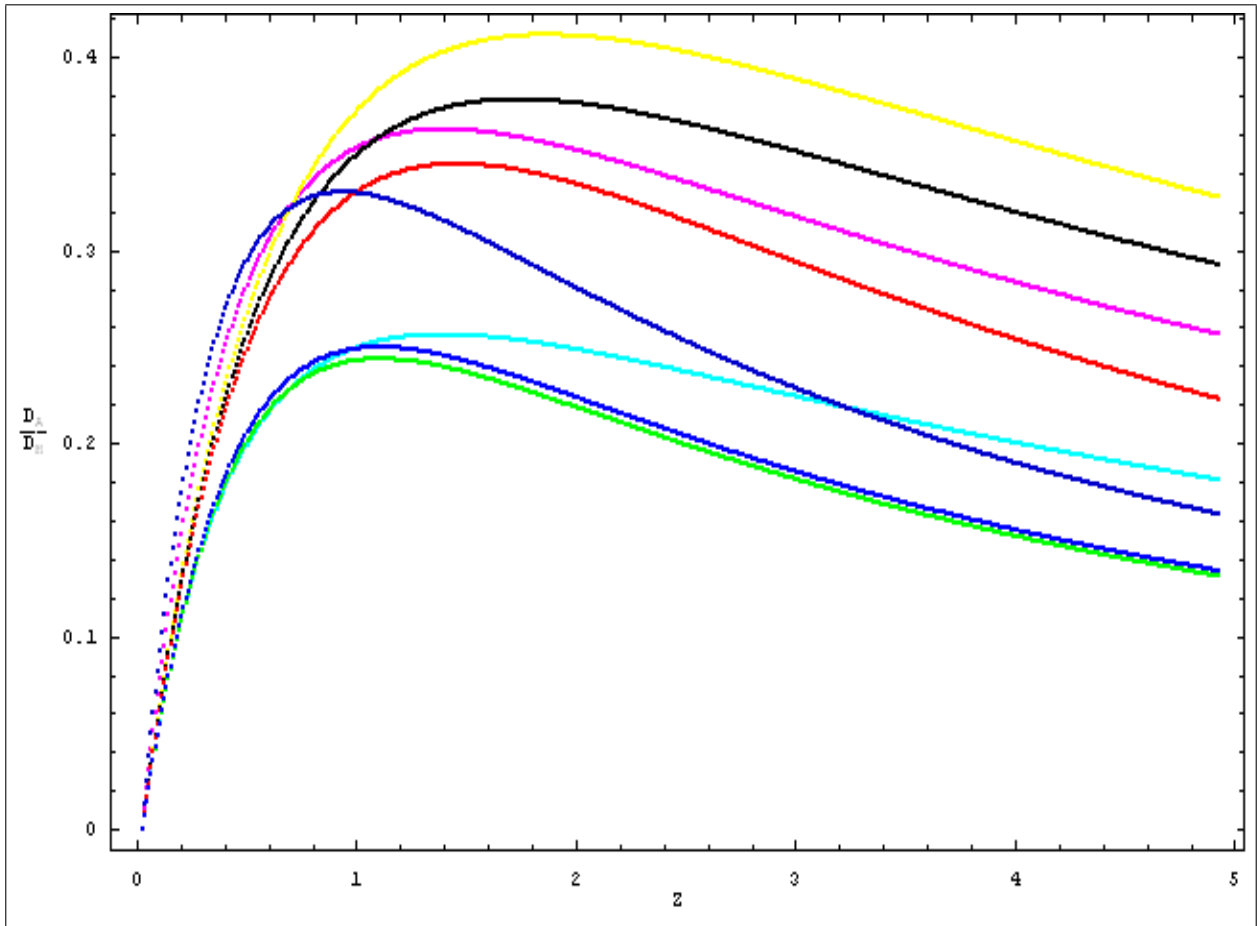


Figura 2: **Distancia Diametral Angular** ;en su orden *Einstein-de Sitter* (cian), *baja densidad*(magenta), *alto lambda*(amarillo), *modelo estándar*(negro), *brana baja densidad*(rojo), *brana alta densidad*(verde), *brana Einstein-de Sitter*(azul), *brana alta lambda*(azul claro). De igual forma la distancia diamétrica angular es menor para el caso de membranas, de la misma forma podría probarse con nuevos datos astronómicos, en particular con datos de alto corrimiento al rojo. El modelo *Einstein-de Sitter* predice un valor mayor que el modelo estándar para corrimientos cercanos a 1.

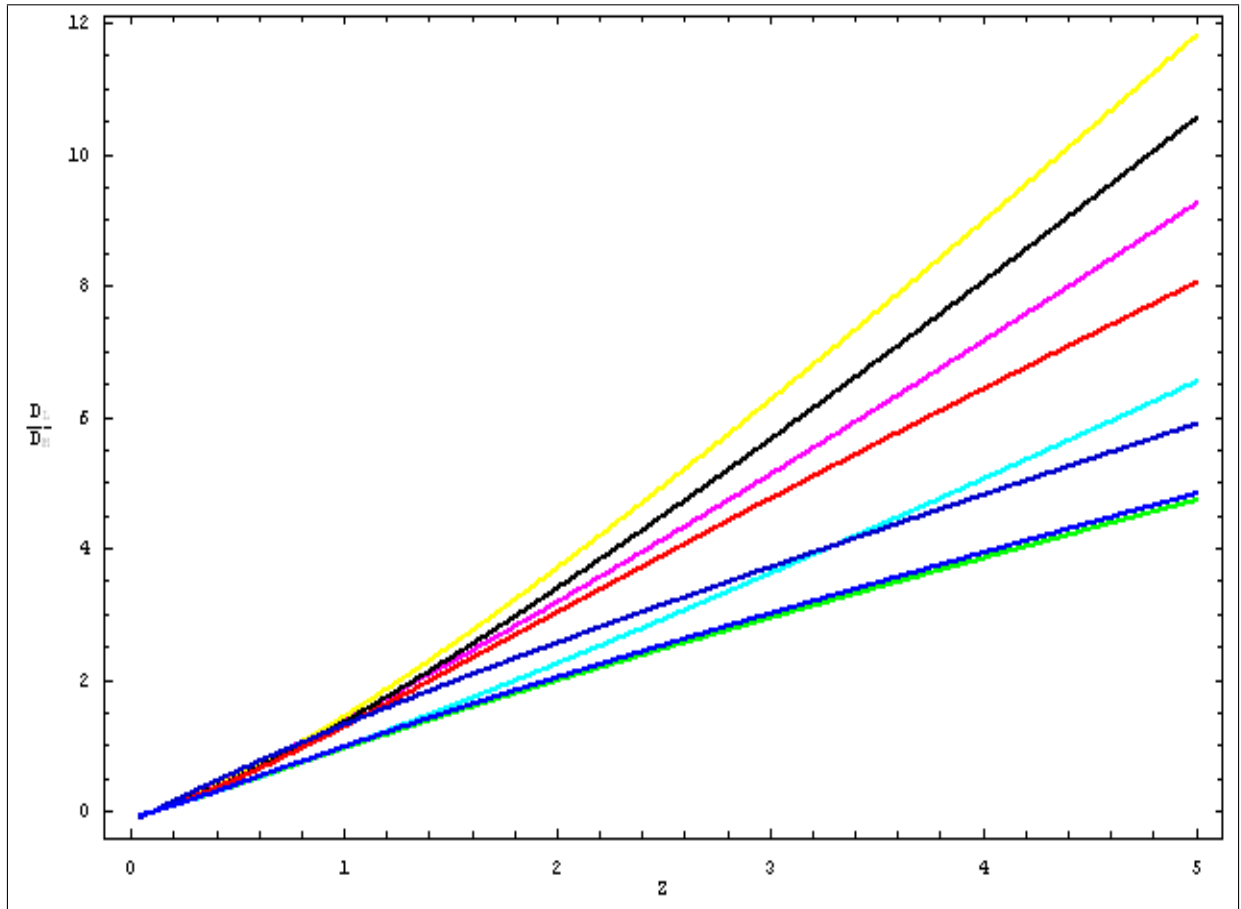


Figura 3: **Distancia de Luminosidad**; en su orden Einstein-de Sitter (cian), baja densidad(magenta),alto lambda(amarillo),modelo estándar(negro),brane baja densidad(rojo),brane alta densidad(verde),brane Einstein-de Sitter(azul),brane alta lambda(azul claro). Para este tipo de distancia se tienen los datos de SNIa, se conocen muy bien en el caso de $z < 1$, en cuyo caso las curvas de membranas muestran una mayor distancia de luminosidad, es decir una mayor distancia radial. Pero igual que las curvas anteriores se predice para grandes corrimientos al rojo una menor distancia de luminosidad.

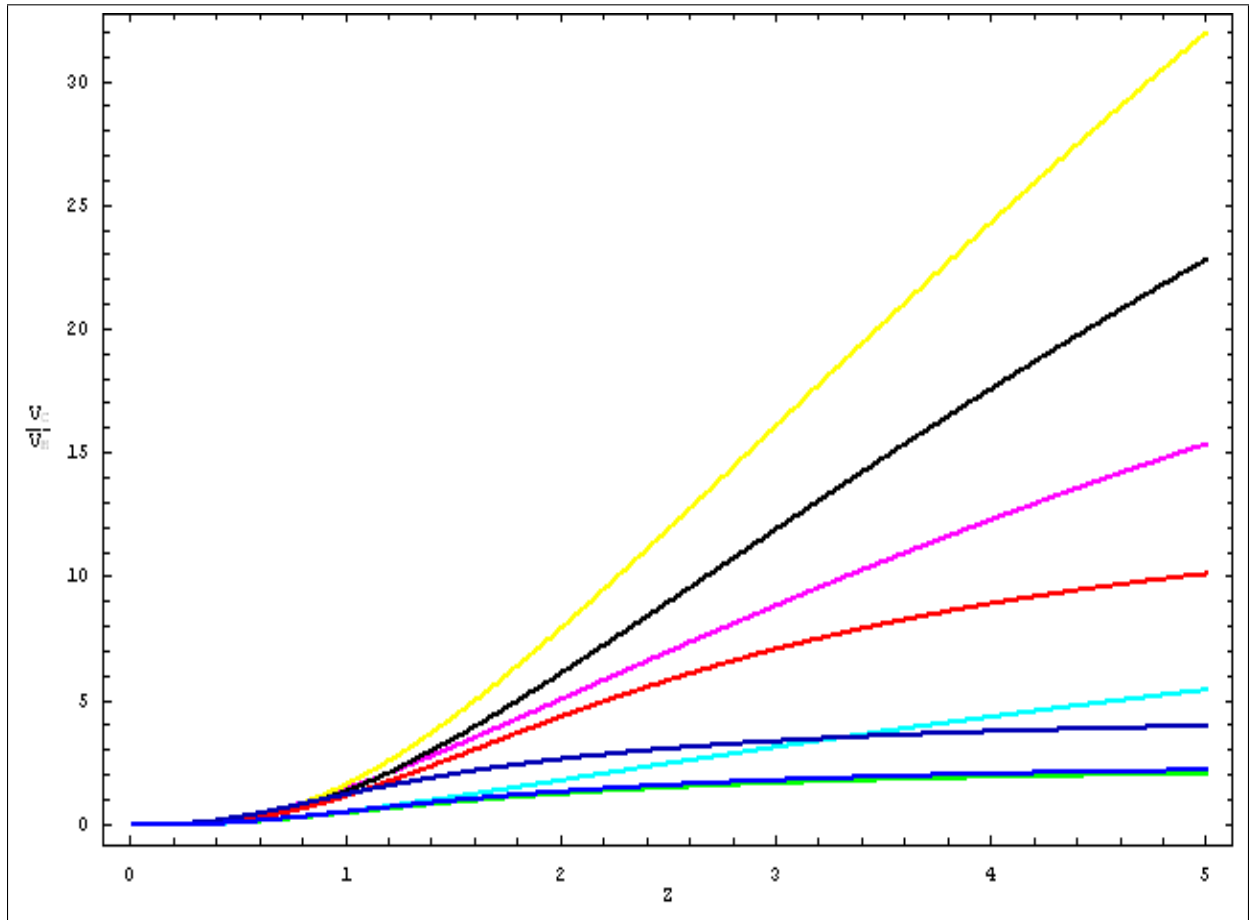


Figura 4: **Volumen Comóvil**; en su orden *Einstein-de Sitter* (cian), *baja densidad* (magenta), *alto lambda* (amarillo), *modelo estándar* (negro), *brane baja densidad* (rojo), *brane alta densidad* (verde), *brane Einstein-de Sitter* (azul), *brane alta lambda* (azul claro). Se observa que para grandes corrimientos al rojo, el volumen comóvil se hace muy pequeño, podría pensarse que se observa el Universo en una época muy temprana. Igualmente, se observa que en la época actual coinciden todos los modelos.

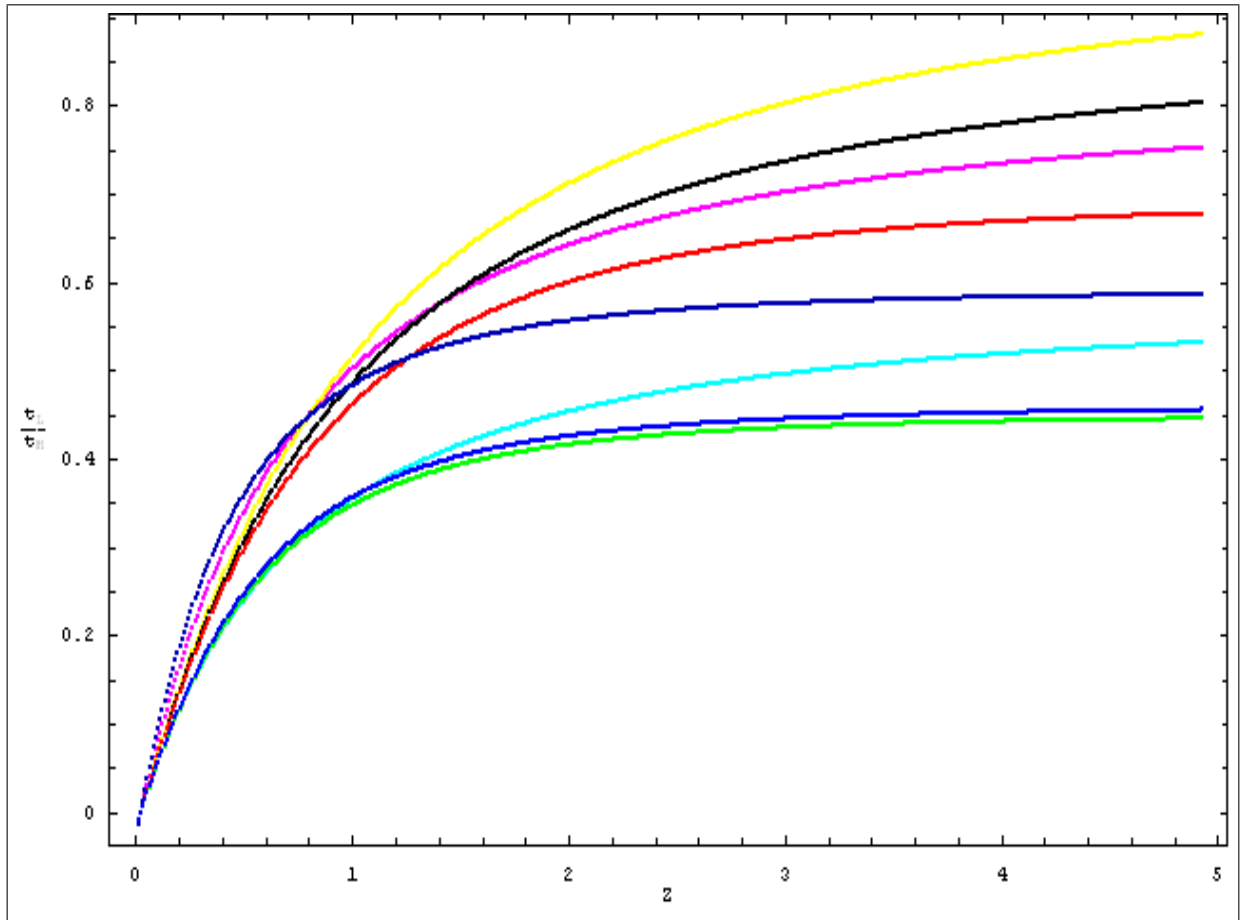


Figura 5: **Lookback time (tiempo retrospectivo)**; en su orden Einstein-de Sitter (cian), baja densidad(magenta),alto lambda(amarillo),modelo estándar(negro),brane baja densidad(rojo),brane alta densidad(verde),brane Einstein-de Sitter(azul),brane alta lambda(azul claro). En estas gráficas se observa que el tiempo retrospectivo para modelos brane es menor que para otros modelos, esto corresponde al universo brane temprano, se observa que en la época actual todos los modelos coinciden y predicen un valor negativo y en el caso de redshift menor que 1 el modelo de brane Einstein-de Sitter, predice un valor mayor que el modelo estándar.

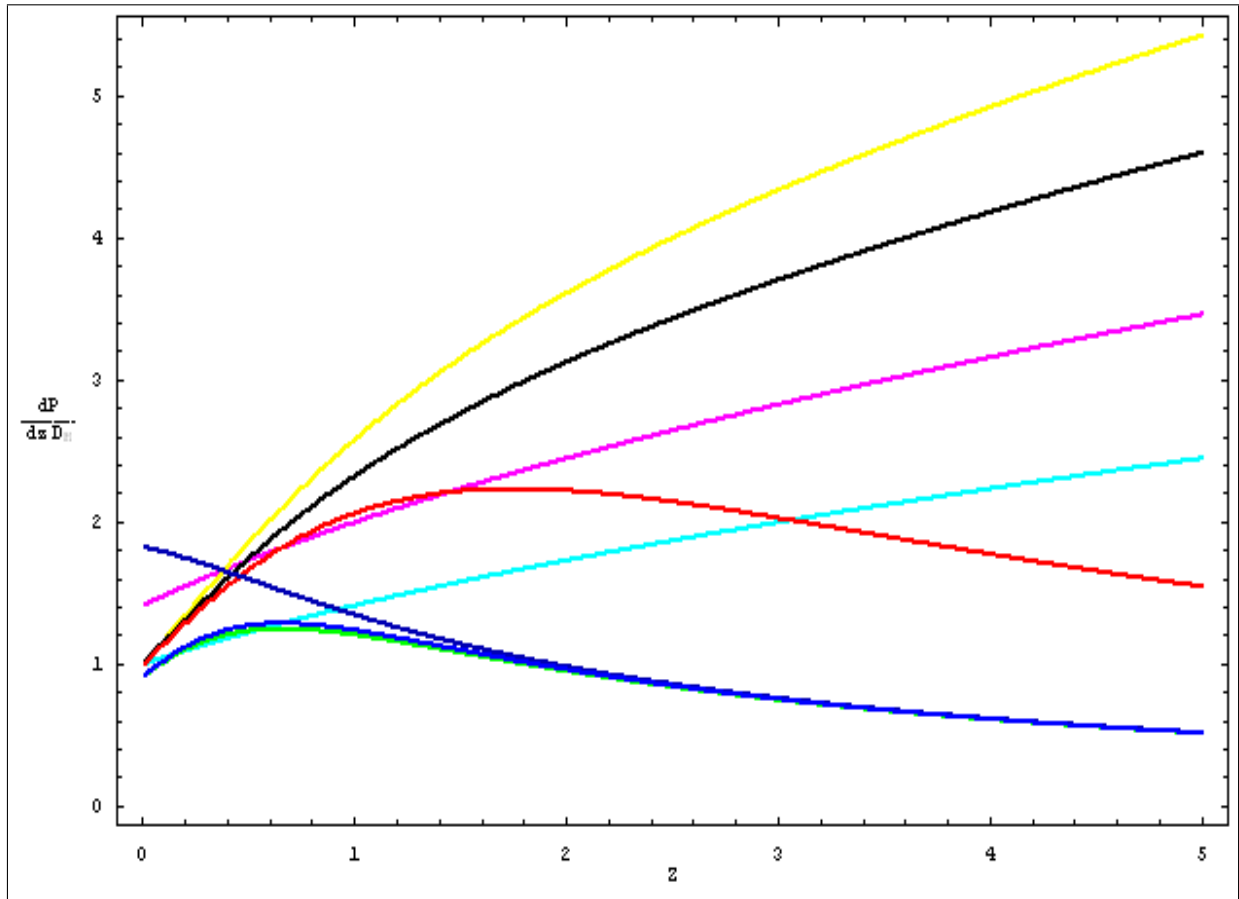


Figura 6: **Probabilidad de Intersección;** en su orden *Einstein-de Sitter* (cian), *baja densidad* (magenta), *alto lambda* (amarillo), *modelo estándar* (negro), *brana baja densidad* (rojo), *brana alta densidad* (verde), *brana Einstein-de Sitter* (azul), *brana alta lambda* (azul claro). Nuevamente se observa que para modelos brane la probabilidad de intersectar un objeto de alto redshift es menor que para otros modelos, esto corresponde a un universo temprano, pero en la época actual el modelo brane Einstein-de Sitter, predice una mayor probabilidad de intersección que el modelo estándar.

8.2. Coordenada radial comóvil

En esta parte se obtiene la representación gráfica de la coordenada radial comóvil, y algunas gráficas comparativas que muestran su comportamiento en el modelo en cuestión, es decir el modelo de membranas que involucra términos adicionales introducidos por la dimensión espacial extra, corresponde esta coordenada a lo que se ha llamado distancia propia, se ha graficado la

expresión (7.41)(ver apéndice E)

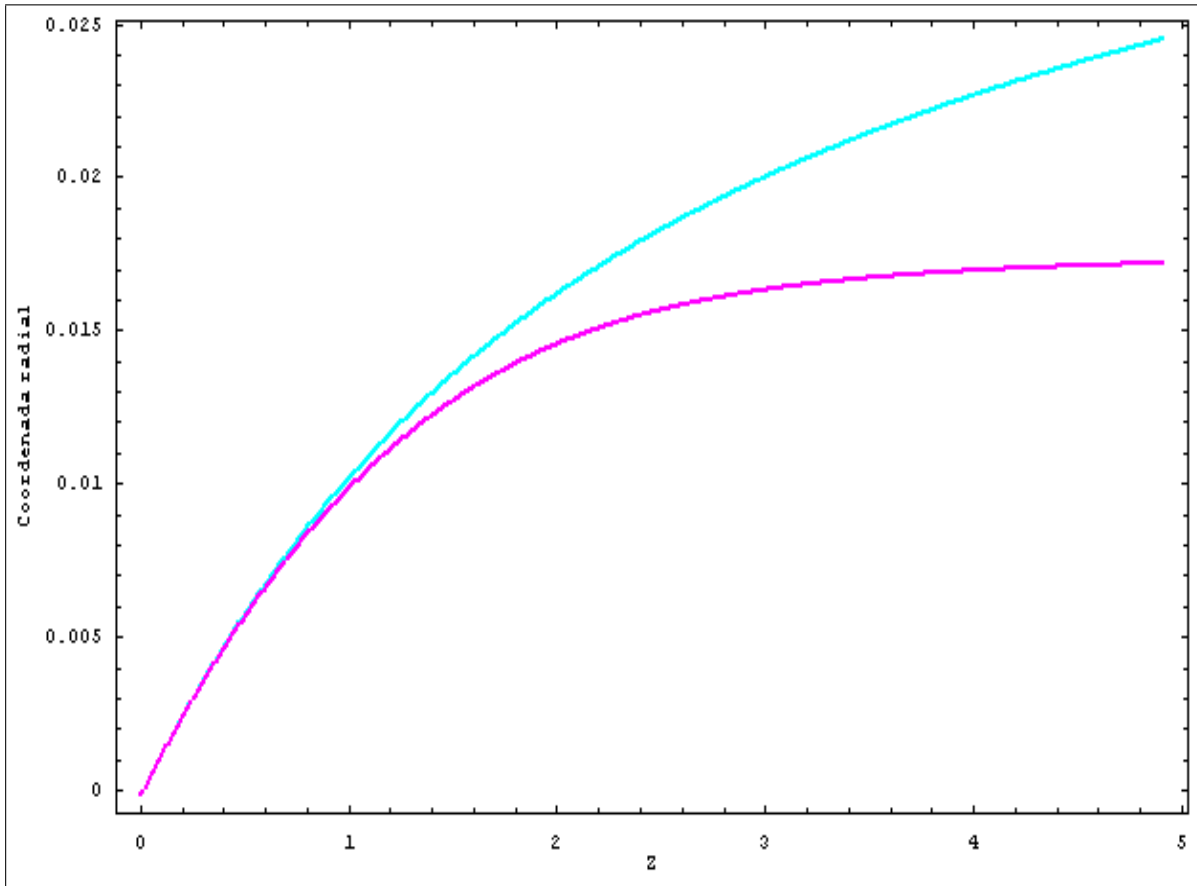


Figura 7: **Coordenada radial comóvil**; la curva de color cian, corresponde a la coordenada radial comóvil estándar con $\Omega_{0m} = 0,28$, $\Omega_{0\Lambda} = 0,72$. La curva magenta corresponde a la coordenada radial comóvil con $\Omega_{0m} = 0,28$, $\Omega_{0\Lambda} = 0,72$, $\Omega_{0\lambda} = 0,01$, $\Omega_{0U} = 0,01$, se observa que es mucho menor que la coordenada radial estándar, es decir que el modelo brane se comporta como un modelo de universo temprano.

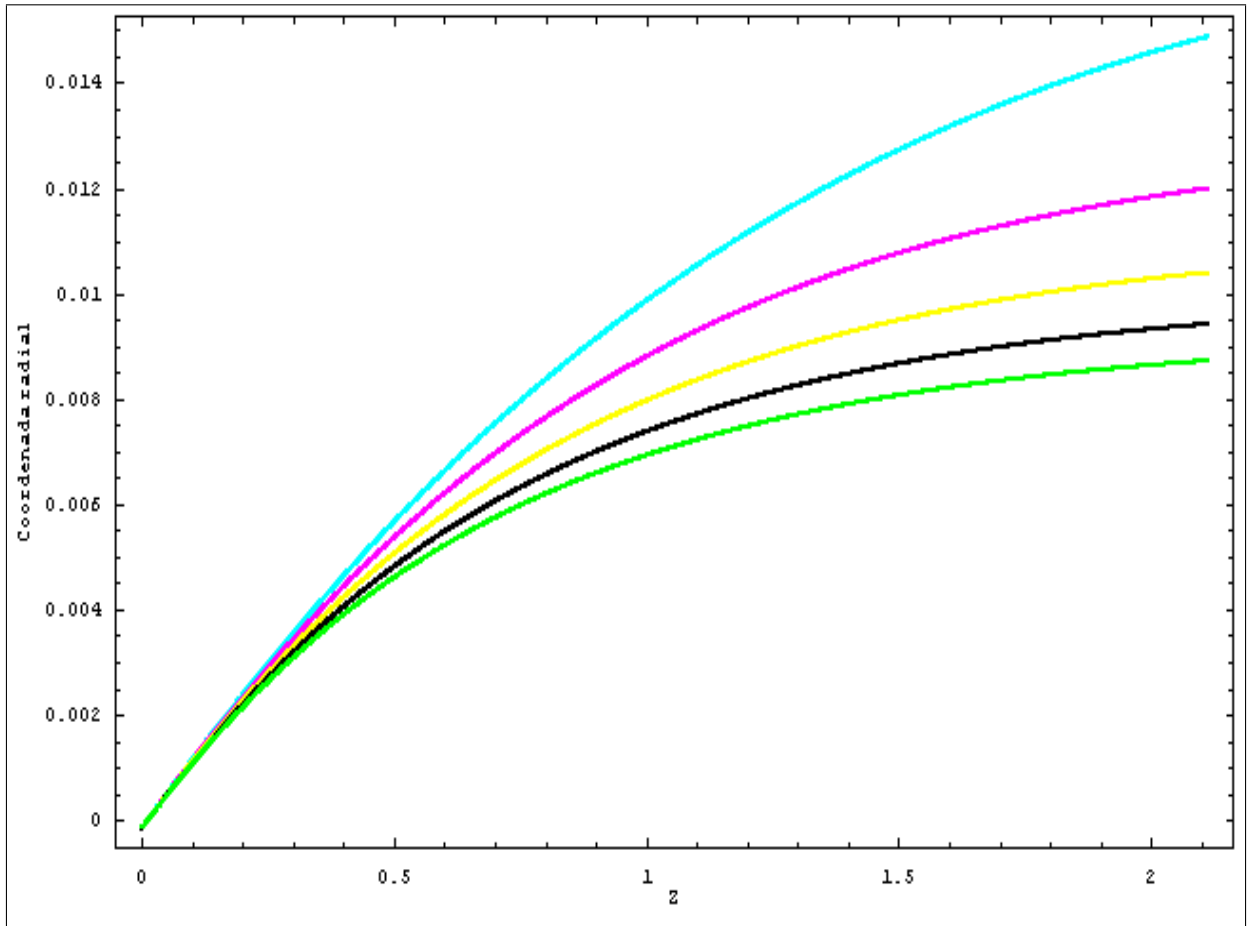


Figura 8: **Coordenada radial comóvil**; para modelo de brana puro, con valores crecientes en la densidad de tensión, con $\Omega_m = 0,28$, $\Omega_\Lambda = 0,72$, $\Omega_U = 0$, $\Omega_\lambda = 0,01$ (cian), $\Omega_\lambda = 0,05$ (magenta), $\Omega_\lambda = 0,1$ (amarillo), $\Omega_\lambda = 0,15$ (negro), $\Omega_\lambda = 0,20$ (verde). Nuevamente en el caso de $\Omega_\lambda = 0,01$ tendremos el modelo estándar y para valores crecientes en la tensión se observa que la coordenada radial se hace cada vez menor.

8.3. Sensibilidad de la distancia propia

Para determinar que tan sensible es la curva de distancia propia se producen cambios crecientes en el valor de densidad de tensión y densidad de energía oscura, lo cual se muestra gráficamente en lo que sigue, ello permite encontrar algunos indicios para determinar cuales deberían ser los valores apropiados para los parámetros involucrados en el modelo, como también determinar por lo menos de forma gráfica el valor límite de la distancia propia.

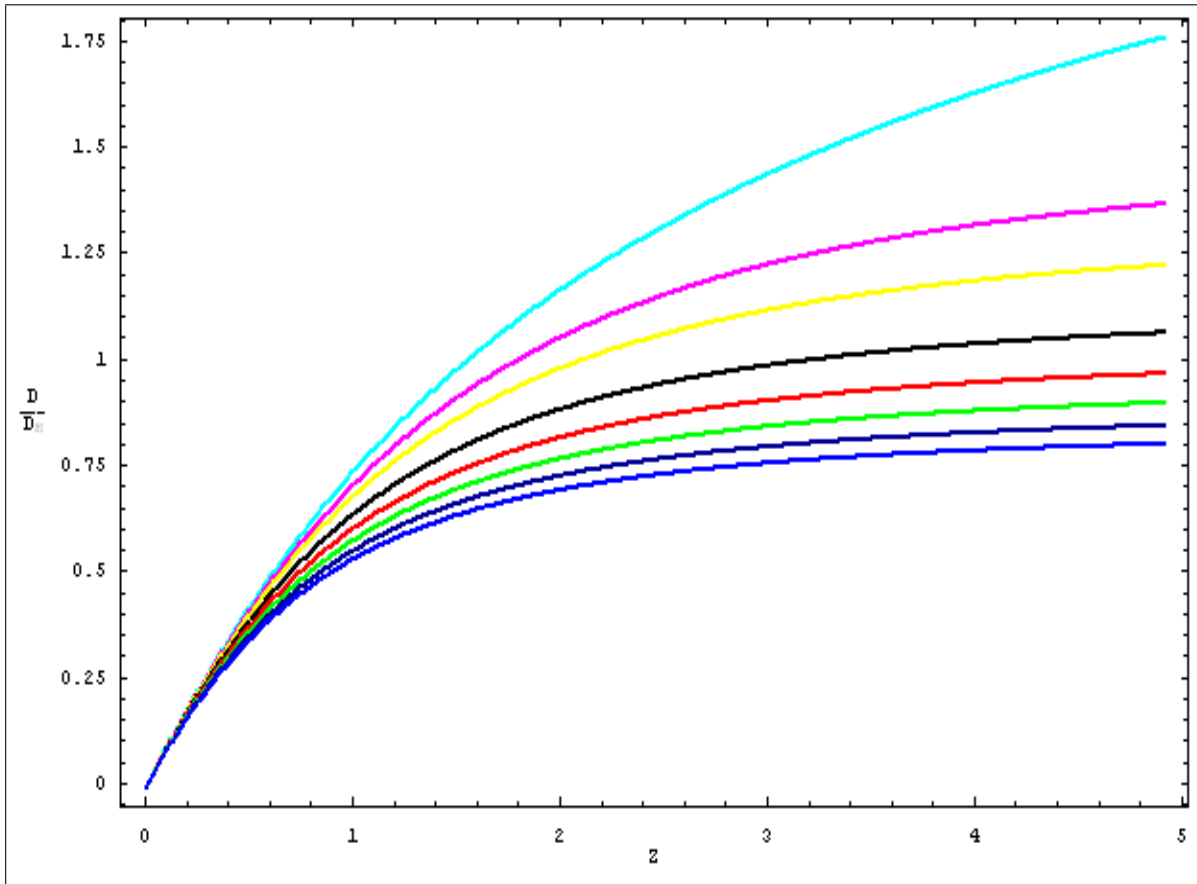


Figura 9: **Distancia Propia;** en su orden $\Omega_\lambda = 0$ (cian), $\Omega_\lambda = 0,01$ (magenta), $\Omega_\lambda = 0,02$ (amarillo), $\Omega_\lambda = 0,04$ (negro), $\Omega_\lambda = 0,06$ (rojo), $\Omega_\lambda = 0,08$ (verde), $\Omega_\lambda = 0,1$ (azul), $\Omega_\lambda = 1,2$ (azul). En todos los casos se ha considerado que $\Omega_m = 0,28$, $\Omega_\Lambda = 0,72$, $\Omega_U = 0$. Puede observarse que en el caso de $\Omega_\lambda = 0$, reproduciríamos el modelo estándar, es decir la curva de color cian es un modelo brane reducido al modelo estándar, también, se observa que en la medida que aumenta la densidad de tensión sobre la membrana, se hace más pequeña la distancia propia, puede asociarse esto con un modelo de universo temprano.

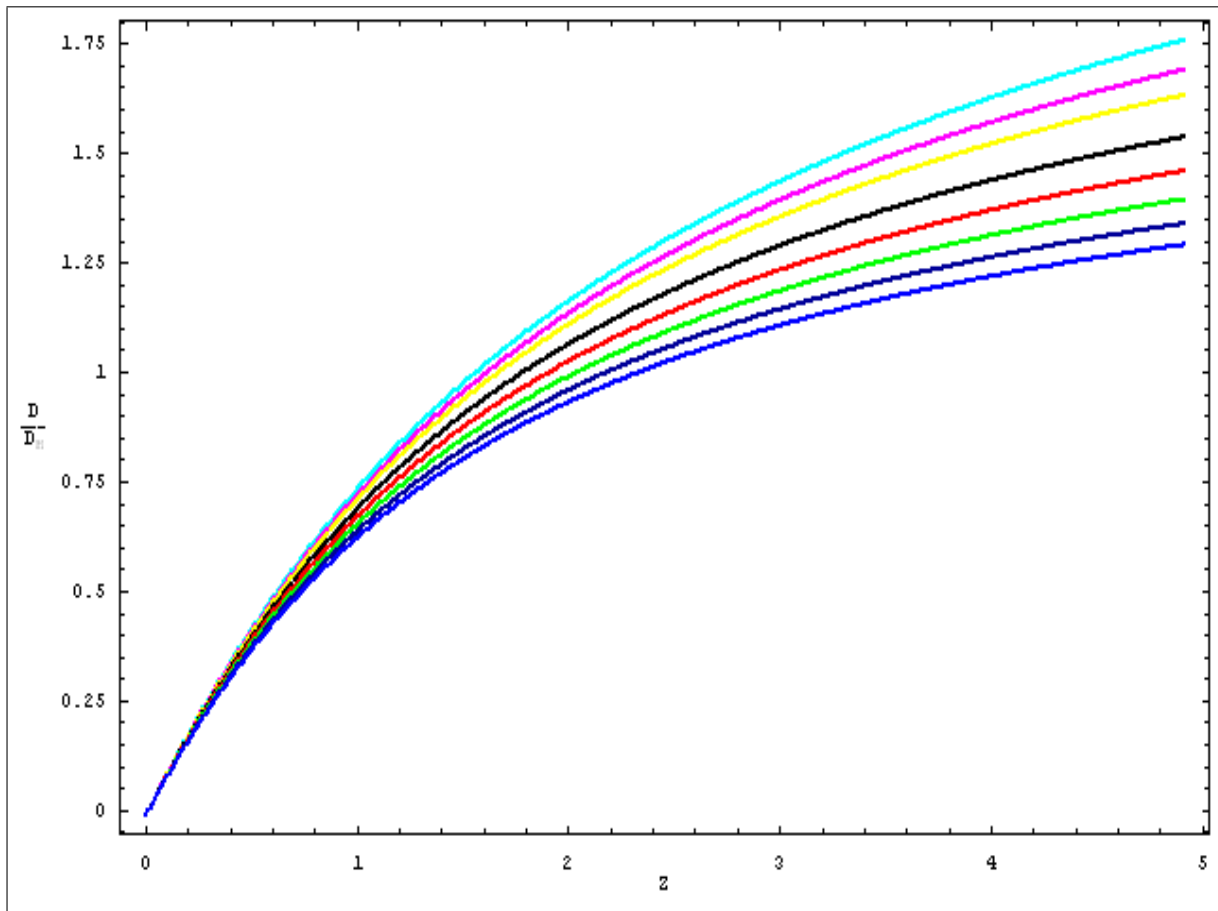


Figura 10: **Distancia Propia**; en su orden $\Omega_U = 0$ (cian), $\Omega_U = 0,01$ (magenta), $\Omega_U = 0,02$ (amarillo), $\Omega_U = 0,04$ (negro), $\Omega_U = 0,06$ (rojo), $\Omega_U = 0,08$ (verde), $\Omega_U = 0,1$ (azul), $\Omega_U = 1,2$ (azul). En todos los casos se ha considerado que $\Omega_m = 0,28$, $\Omega_\Lambda = 0,72$, $\Omega_\lambda = 0$. Puede observarse que en el caso de $\Omega_U = 0$, reproduciríamos el modelo estándar, es decir la curva de color cian es un modelo brane reducido al modelo estándar, igualmente, se observa que en la medida que aumenta la densidad de radiación oscura sobre la membrana, se hace más pequeña la distancia propia, con menor variación que en el caso anterior.

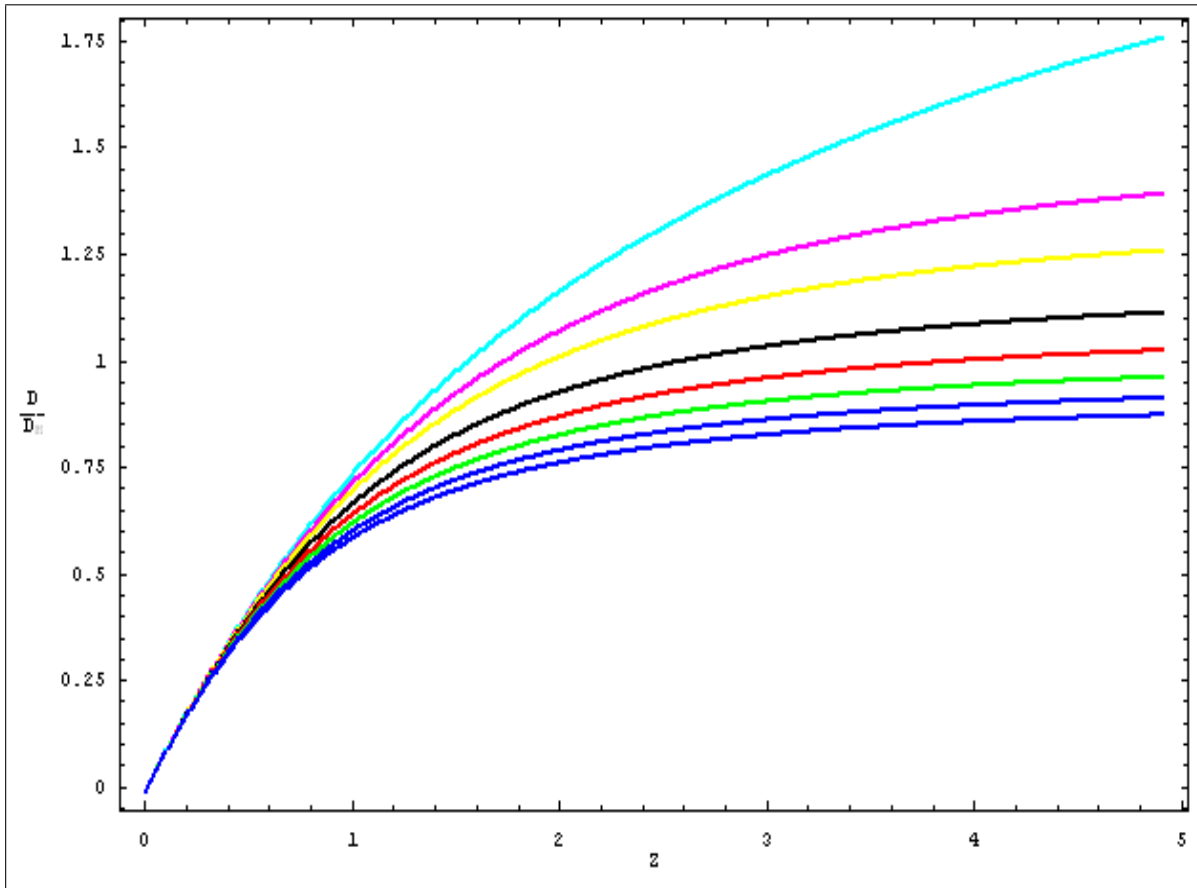


Figura 11: **Distancia Propia**; en su orden $\Omega_\lambda = 0$ (cian), $\Omega_\lambda = 0,01$ (magenta), $\Omega_\lambda = 0,02$ (amarillo), $\Omega_\lambda = 0,04$ (negro), $\Omega_\lambda = 0,06$ (rojo), $\Omega_\lambda = 0,08$ (verde), $\Omega_\lambda = 0,1$ (azul), $\Omega_\lambda = 1,2$ (azul). En todos los casos se ha considerado que $\Omega_m = 0,28$, $\Omega_\Lambda = 0,72$, y donde hace uso de $\Omega_U = 1 - \Omega_m - \Omega_\lambda - \Omega_\Lambda$. Puede observarse que en el caso de $\Omega_\lambda = 0$, reproduciríamos el modelo estándar, es decir la curva de color cian es un modelo brane reducido al modelo estándar, igualmente, se observa que en la medida que aumenta la densidad de radiación oscura sobre la membrana, se hace más pequeña la distancia propia, pero aquí las variaciones o el cambio en la curva es cada vez menor. Es importante resaltar que en este caso tenemos un modelo brane plano, donde la densidad de tensión y de radiación oscura se manifiesta.

8.4. Edad del Universo

En el marco de los modelos de membranas se puede encontrar la edad del Universo conforme la siguiente expresión

$$t = t_H \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{x^2} + \Omega_m x + \Omega_k x^2 + \Omega_\Lambda x^4 + \Omega_U}} , \quad (8.1)$$

donde se ha definido $x = \frac{1}{1+z}$, con lo cual se obtiene que para $z = 0$, $x = 1$, y para $z \rightarrow \infty$, $x = 0$.

Las gráficas que se muestran corresponden a un modelo de membrana plano $\Omega_k = 0$.

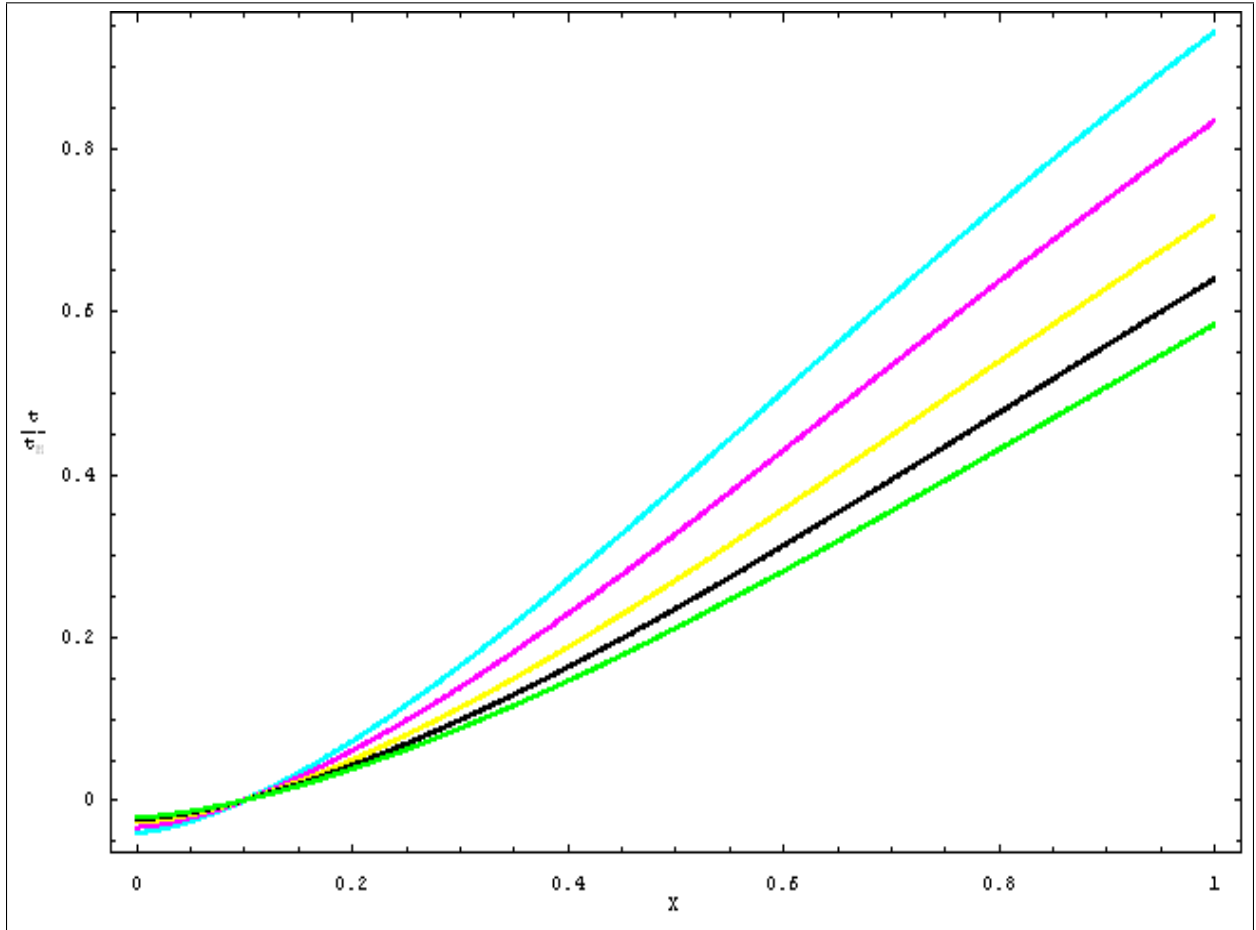


Figura 12: **Edad del Universo Estándar;** con $\Omega_k = 0, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_U = 0, \Omega_\Lambda = 0,72$ pero diferentes valores en la densidad de materia, en su orden $\Omega_m = 0,28$ (cian), $\Omega_m = 0,4$ (magenta), $\Omega_m = 0,6$ (amarillo), $\Omega_m = 0,8$ (negro), $\Omega_m = 1,0$ (verde). Se observa que la edad del Universo se hace mucho menor en la medida que aumenta el contenido de materia. El valor obtenido en el eje marcado Edad, se debe multiplicar por el valor correspondiente al tiempo de Hubble, es decir por $9,78 \times 10^9 h^{-1} \text{ yr}$. La curva cian representa el modelo estándar, el valor de la curva correspondiente a $x = 1$ es de 0,875, de tal forma que $0,875 \times 9,78 \times 10^9$

$\times 0,6^{-1} = 14,26 \times 10^9 \text{ yr}$, valor concordante con la edad del universo.

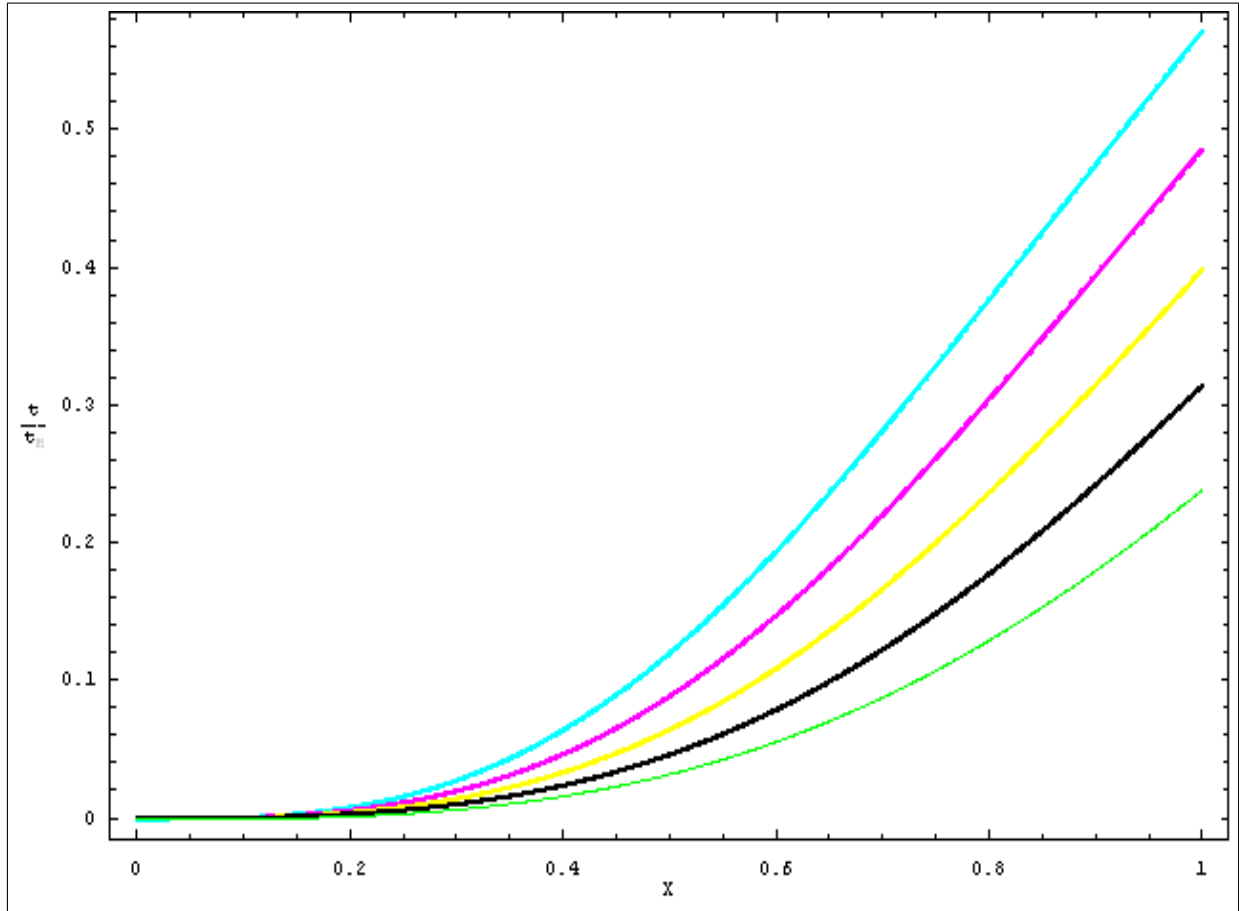


Figura 13: **Edad del Universo con tensiones crecientes;** con

$\Omega_k = 0, \Omega_m = 0,28, \Omega_U = 0, \Omega_\Lambda = 0,72$ pero diferentes valores en la densidad de tensión, en su orden $\Omega_\lambda = 0,1$ (cian), $\Omega_\lambda = 0,2$ (magenta), $\Omega_\lambda = 0,4$ (amarillo), $\Omega_\lambda = 0,8$ (negro), $\Omega_\lambda = 1,6$ (verde). Para el caso de una brana con tensión, la edad se haría menor en la medida que se incrementa la tensión, lo cual lleva a pensar que el valor de la densidad de tensión debe ser pequeño para tener concordancia con la edad obtenida de forma estándar. El valor obtenido en el eje marcado Edad, se debe multiplicar por el valor correspondiente al tiempo de Hubble, es decir por $9,78 \times 10^9 \text{ h}^{-1} \text{ yr}$.

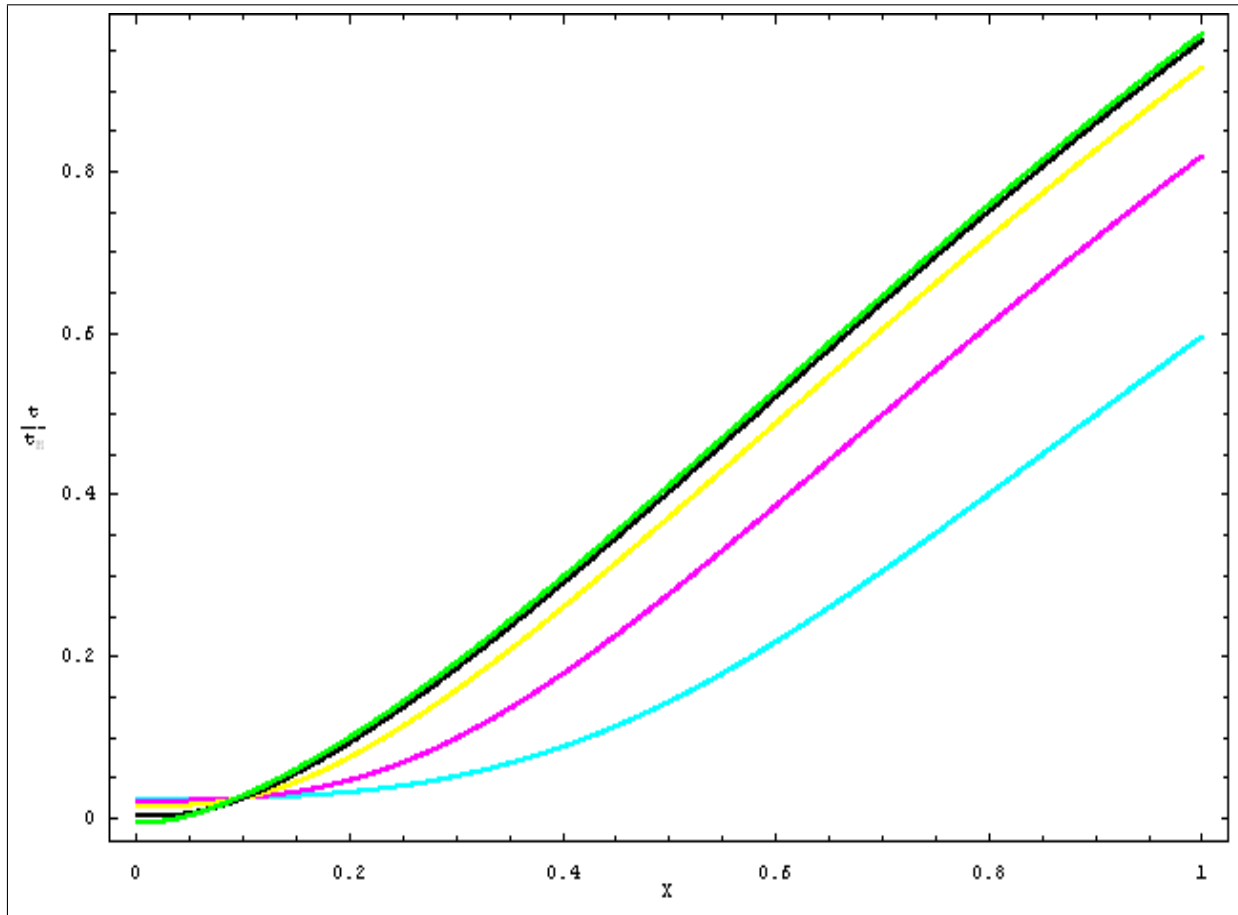


Figura 14: **Edad del universo para tensiones decrecientes;** con $\Omega_k = 0, \Omega_m = 0,28, \Omega_U = 0, \Omega_\Lambda = 0,72$ pero diferentes valores en la densidad de tensión, con $\Omega_\lambda = 0,1$ (cian), $\Omega_\lambda = 0,01$ (magenta), $\Omega_\lambda = 0,001$ (amarillo), $\Omega_\lambda = 0,0001$ (negro), $\Omega_\lambda = 0,00001$ (verde). El valor obtenido en el eje marcado Edad, se debe multiplicar por el valor correspondiente al tiempo de Hubble, es decir por $9,78 \times 10^9 h^{-1} yr$. La curva verde representa el modelo brane cuya edad es concordante con la edad estándar.

De lo anterior se puede inferir que si se quiere tener una edad del Universo, concordante con la edad estándar del Universo, es decir de aproximadamente $13,5 \times 10^9 yr$, el valor de densidad de tensión sobre la brane debe ser muy pequeño, pero si el valor es muy pequeño el ajuste de la magnitud-corrimiento al rojo a SN Ia de alto corrimiento al rojo podría alejarse.

En el siguiente capítulo se hará uso de una de las relaciones cosmológicas más importantes, relación magnitud corrimiento al rojo, y esta constituirá uno de los ejes centrales del presente trabajo.

Capítulo 9

Braneworld bajo Supernovas Ia

9.1. Relación magnitud-corrimiento al rojo para membranas

En el presente existen dos métodos prácticos de determinar la distancia de un objeto lejano. Si conocemos su luminosidad absoluta, podemos comparar esta con su luminosidad aparente observada; o si conocemos su diámetro verdadero, podemos comparar este al diámetro angular observado; ahora, si el cuerpo se encuentra bastante cerca, su distancia se puede determinar mediante el paralaje astronómico, que consiste en el corrimiento de la posición aparente en el cielo causado por la revolución de la Tierra alrededor del Sol; o si se conoce su movimiento propio, el corrimiento en la posición aparente en el cielo causada por el movimiento real de objetos relativo al Sol. Las distancias determinadas por estos métodos, es idéntica para objetos cercanos, alrededor de 10^9 yr l , más allá de este rango, las mediciones difieren entre ellos.

En el caso de un universo membrana tenemos en consideración de la ecuación de Friedmann modificada, expresiones generales que permiten conocer la relación corrimiento al rojo-magnitud [36]

$$m(z) = 5 \log[D(z)] + \mathbf{M} , \quad (9.1)$$

donde $D(z) = H_0 D_L(z)$ es la distancia de luminosidad sin dimensiones, $\mathbf{M} = M - 5 \log H_0 + 25$, H_0 constante de Hubble actual, $m(z)$ es la magnitud aparente. En el caso de universos homogéneos e isotrópicos, tenemos

$$D(z) = \frac{(1+z)}{\sqrt{|\Omega_k|}} S_k [\chi(z)] , \quad (9.2)$$

donde se define la función S_k de la siguiente manera, según la curvatura del espaciotiempo

$$S [\chi(z)] = \text{sen}\chi(z) \quad ; \quad \Omega_{k0} < 0 , \quad (9.3)$$

$$S [\chi(z)] = \chi(z) \quad ; \quad \Omega_{k0} = 0 , \quad (9.4)$$

$$S [\chi(z)] = \text{senh}\chi(z); \quad \Omega_{k0} > 0 , \quad (9.5)$$

donde la función¹ $\chi(z)$ es la función de distancia coordenada comóvil, tenemos

$$\chi(z) = \frac{1}{R_0 H_0} \int_0^z [f_\gamma(z)]^{-1/2} dz , \quad (9.6)$$

con la función $f_\gamma(z)$ (argumento de la función de Hubble) definida de la siguiente forma

$$f_\gamma(z) = \{ \Omega_{\lambda 0}(1+z)^{6\gamma} + \Omega_{GR0}(1+z)^{3\gamma} + \Omega_{k0}(1+z)^6 + \Omega_{U0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda 0} \} , \quad (9.7)$$

expresión en la cual se puede introducir la restricción $\Omega_{U0} = 1 - \Omega_{GR0} - \Omega_{\lambda 0} - \Omega_{\Lambda 0} - \Omega_{k0}$, de tal forma que en el caso de una membrana plana $\Omega_{k0} = 0$, con materia no relativista $\gamma = 1$, obtenemos

$$\chi(z) = \frac{1}{R_0 H_0} \int_0^z [\Omega_{\lambda 0}(1+z)^6 + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{U0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda 0}]^{-1/2} dz , \quad (9.8)$$

y donde la función de distancia de luminosidad adimensional llega a ser

$$D(z) = \frac{(1+z)}{R_0 H_0} \int_0^z [\Omega_{\lambda 0}(1+z)^6 + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{U0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda 0}]^{-1/2} dz , \quad (9.9)$$

esto permite expresar la relación corrimiento al rojo-magnitud, en el caso de una membrana plana como [32]

¹Está función corresponde a la coordenada radial comóvil, sólo que por algunas razones se utiliza esta notación, es decir, que en algunos contextos es mejor usar esta notación.

$$m(z) = 5 \log \frac{(1+z)}{H_0} \int_0^z [\Omega_{\lambda 0}(1+z)^6 + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{U0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda 0}]^{-1/2} dz + \mathbf{M} , \quad (9.10)$$

para el caso de un universo brane no-plano $\Omega_{k0} \neq 0$, con curvatura negativa, la relación para la magnitud aparente se puede expresar como

$$m(z) = 5 \log \frac{(1+z)}{\sqrt{|\Omega_{k0}|}} \text{senh}[\sqrt{|\Omega_{k0}|} \int_0^z [\Omega_{\lambda 0}(1+z)^6 + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{U0}(1+z)^4 + \Omega_{k0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda 0}]^{-1/2} dz] + \mathbf{M} , \quad (9.11)$$

y en el caso de curvatura positiva, tendríamos la siguiente expresión

$$m(z) = 5 \log \frac{(1+z)}{\sqrt{|\Omega_{k0}|}} \text{senh}[\sqrt{|\Omega_{k0}|} \int_0^z [\Omega_{\lambda 0}(1+z)^6 + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{U0}(1+z)^4 + \Omega_{k0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda 0}]^{-1/2} dz] + \mathbf{M} . \quad (9.12)$$

En las secciones siguientes se consideraran modelos de braneworld con curvatura negativa (brane hiperbólica), braneworld con curvatura nula (brane plana) y braneworld con curvatura positiva (brane esférica), y como referente en todo el trabajo el modelo estándar de la cosmología.

9.1.1. Modelo estándar bajo datos de SN Ia

Puede considerarse como se dijo previamente que el modelo estándar de la cosmología está contenido en el modelo braneworld, por lo cual se considerará este ajuste como un caso particular. El método formal para incorporar datos observacionales a un modelo cosmológico, o de restringir un modelo cosmológico bajo cierto tipo de observaciones, en particular las observaciones de SN Ia, consiste en el desarrollo de la técnica de máxima verosimilitud, en la cual se implementa el estadístico chi-cuadrado, y mediante un proceso de minimización y de obtención de contornos de nivel de este estadístico se obtiene, el valor óptimo de los parámetros involucrados, los niveles o regiones de confianza para cada parámetro y la curva de mejor ajuste para los datos observacionales (es decir se obtiene el diagrama de Hubble), entre otros (ver apéndice H). La función

central a estudiar es

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{m_{obs}(z_i) - m_{teo}(z_i)}{\sigma_i(z_i)} \right]^2, \quad (9.13)$$

donde m_{obs} es la magnitud aparente observada corregida por la curva de luz ancho-luminosidad, extinción galáctica, y la corrección K para las diferencias de los filtros en las bandas R y B; m_{teo} es la magnitud aparente teórica o esperada que puede ser alguna de las obtenidas anteriormente, σ_i es la desviación estándar de las observaciones, y la suma se realiza hasta el total de datos disponibles. La magnitud aparente teórica, se obtiene según la siguiente expresión

$$m_{teo}(z; \Omega_m, \Omega_\Lambda) = 5 \log D(z; \Omega_m, \Omega_\Lambda) + M - 5 \log H_0 + 25, \quad (9.14)$$

donde $D \equiv H_0 D_L$ es la distancia de luminosidad libre de la constante cosmológica, M es la magnitud absoluta, y donde el conjunto de datos que se utiliza corresponde a la muestra de 60 SN Ia denominados ‘Gold’, los cuales son datos reportados por Cerro Tololo y por el Proyecto de Supernovas Ia de Alto Corrimiento al rojo [39]. De tal forma que siguiendo el proceso de Máxima Verosimilitud (*maximum likelihood*)(ver apéndice H), y en el caso de materia no relativista, se obtiene los valores óptimos para los parámetros, la región de confianza para los parámetros considerados, el ajuste para los datos de supernovas, la magnitud residual y el parámetro de desaceleración. Los valores que se muestran en la tabla, obtenidos del proceso de minimización, son muy similares a los obtenidos a partir de otros tipos de mediciones y de consideraciones.

χ^2	Ω_m	Ω_Λ	Ω_k
103,131	0,327214	0,686599	-0,013813

Cuadro 9.1: Valores Óptimos Modelo Estándar: tabla con los respectivos valores obtenidos de la rutina de máxima verosimilitud, se ha obtenido un valor de chi-cuadrado pequeño, es decir cercano a cien, el cual corresponde con valores reportados en la literatura, esto permite considerar la bondad del ajuste, como también los respectivos valores mínimos de los parámetros del modelo. En la literatura se reporta para la densidad de materia valores cercanos a 0.3, para la densidad de constante cosmológica reportan valores cercanos a 0.7, y para la densidad de curvatura valores cercanos a 0, es decir se considera hoy día un universo plano.

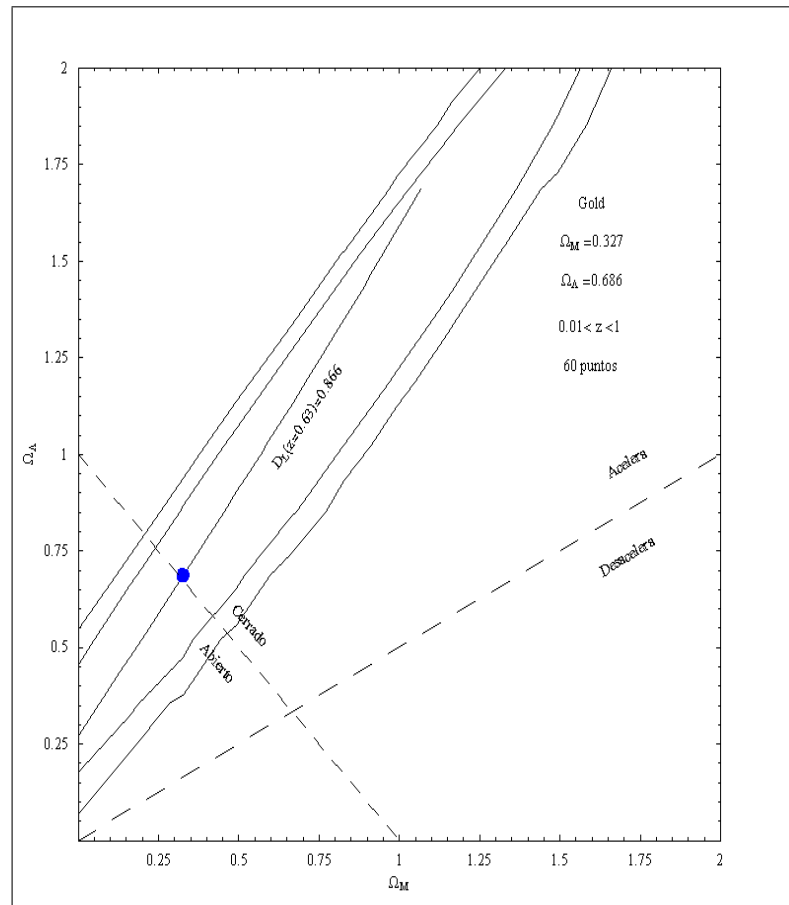


Figura 15: **Plano Estándar**: esta gráfica muestra el plano $\Omega_m - \Omega_\Lambda$, en el cual se ha colocado, los valores que minimizan el chi-cuadrado (el punto representa el mínimo), los contornos de confianza con un 68 %, para el más pequeño; 95 % el contorno mayor, la curva de distancia de luminosidad constante para $z = 0,63$, es decir la curva para la cual los valores de los parámetros determina una distancia de luminosidad constante. Adicionalmente, se muestran las curvas que separan un universo abierto, un universo cerrado y la curva de universo plano; asimismo, esta la curva de aceleración cero, y la región de universo acelerado y desacelerado. Según lo anterior, el análisis de máxima verosimilitud, muestra un universo cerrado, acelerado. Cabe mencionar, que el espacio o plano de parámetros $\Omega_m - \Omega_\Lambda$, es muy rico, y origina una gran variedad de posibilidades de modelos cosmológicos. Este es uno de los planos cosmológicos más importantes y recurrentes en la cosmología moderna ya que permite estudiar y contrastar muchos modelos cosmológicos, en este caso tenemos el plano cosmológico estándar en el cual se aprecia los posibles valores de los parámetros, las regiones importantes para la cosmología y los valores obtenidos en el proceso de minimización.

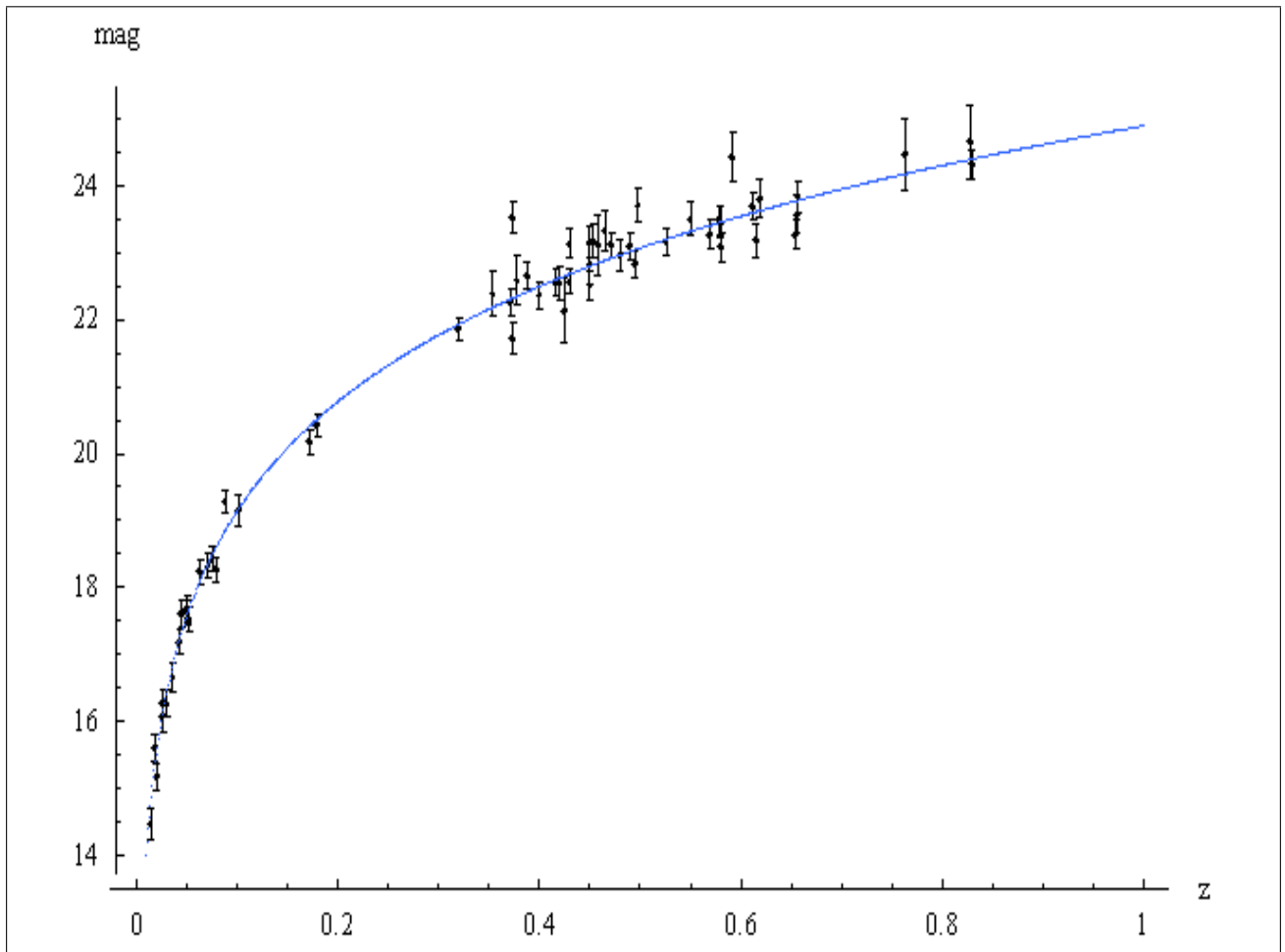


Figura 16: **Ajuste de datos SNIa:** En esta gráfica se muestra datos observacionales de SN Ia con sus correspondientes barras de error, la curva de magnitud teórica con los valores obtenidos por máxima verosimilitud, es decir la curva de mejor ajuste. Obsérvese el ajuste de datos de bajo corrimiento al rojo, el cual es bastante bueno e indica la factibilidad del método como del modelo teórico usado. Igualmente, se aprecia que la magnitud teórica cae dentro de las barras de error de SN Ia con redshift cercano a uno.

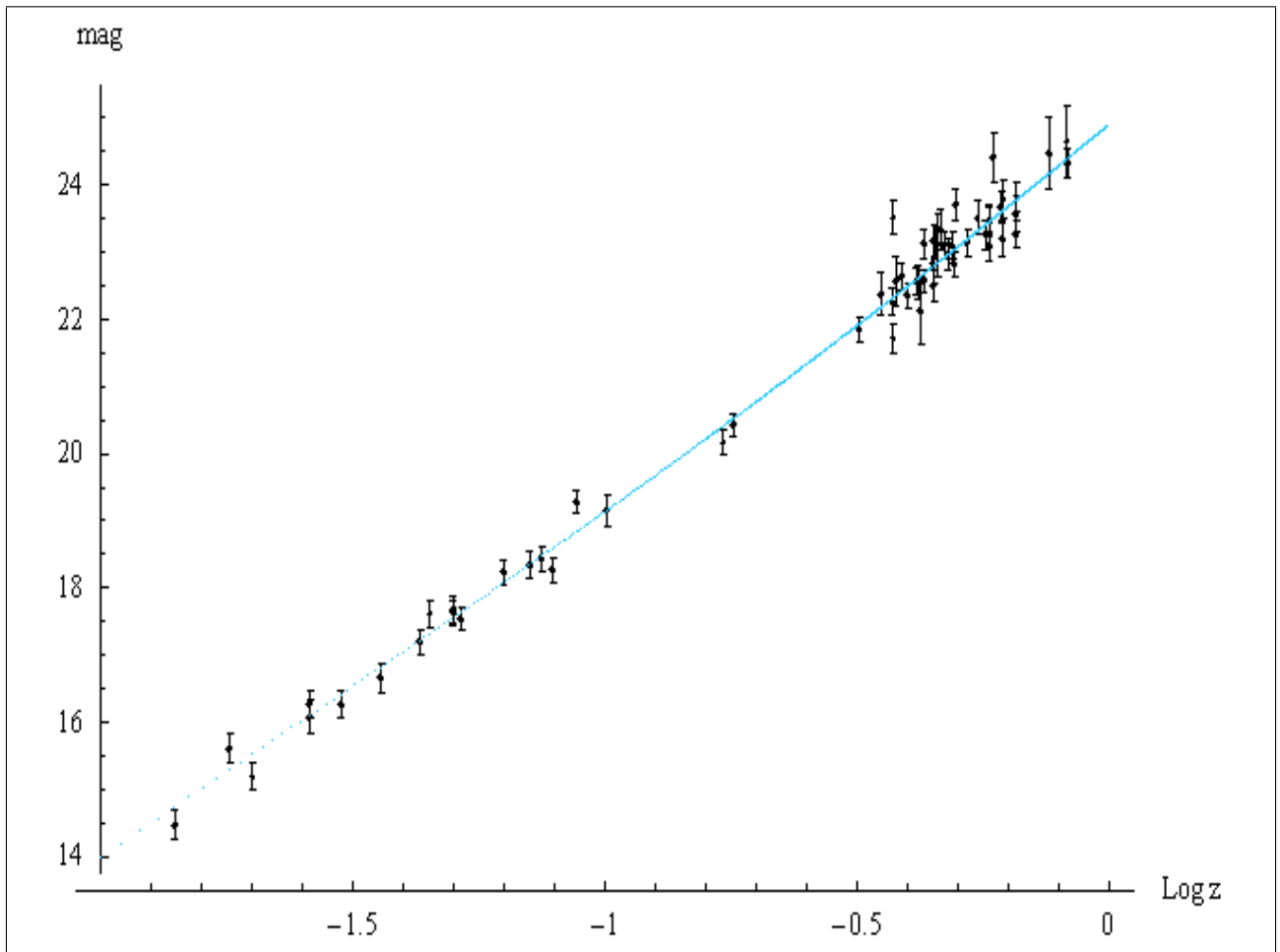


Figura 17: **Ajuste Logarítmico:** *Relación magnitud-redshift, en una escala logarítmica, se observa el ajuste de la relación teórica a los datos de supernovas. Los valores incorporados en la relación teórica son los obtenidos por el proceso de máxima verosimilitud. Aquí, nuevamente se observa como se da el ajuste para corrimientos al rojo pequeños y como se hace un poco más complicado con los datos de corrimiento al rojo cercanos a uno.*

Una gráfica importante en cosmología, es la gráfica de magnitud residual, la cual representa la diferencia entre la magnitud observada y la magnitud teórica, es decir el módulo de distancia, $\mu = m - M$. Si el módulo de distancia es negativo indica que las distancias son cada vez más pequeñas frente al desplazamiento al rojo, es decir nos encontraríamos en un universo desacelerado y por el contrario si el módulo de distancia es positivo las distancias serían cada vez mayores frente al desplazamiento al rojo, es decir que nos encontraríamos en un universo acelerado.

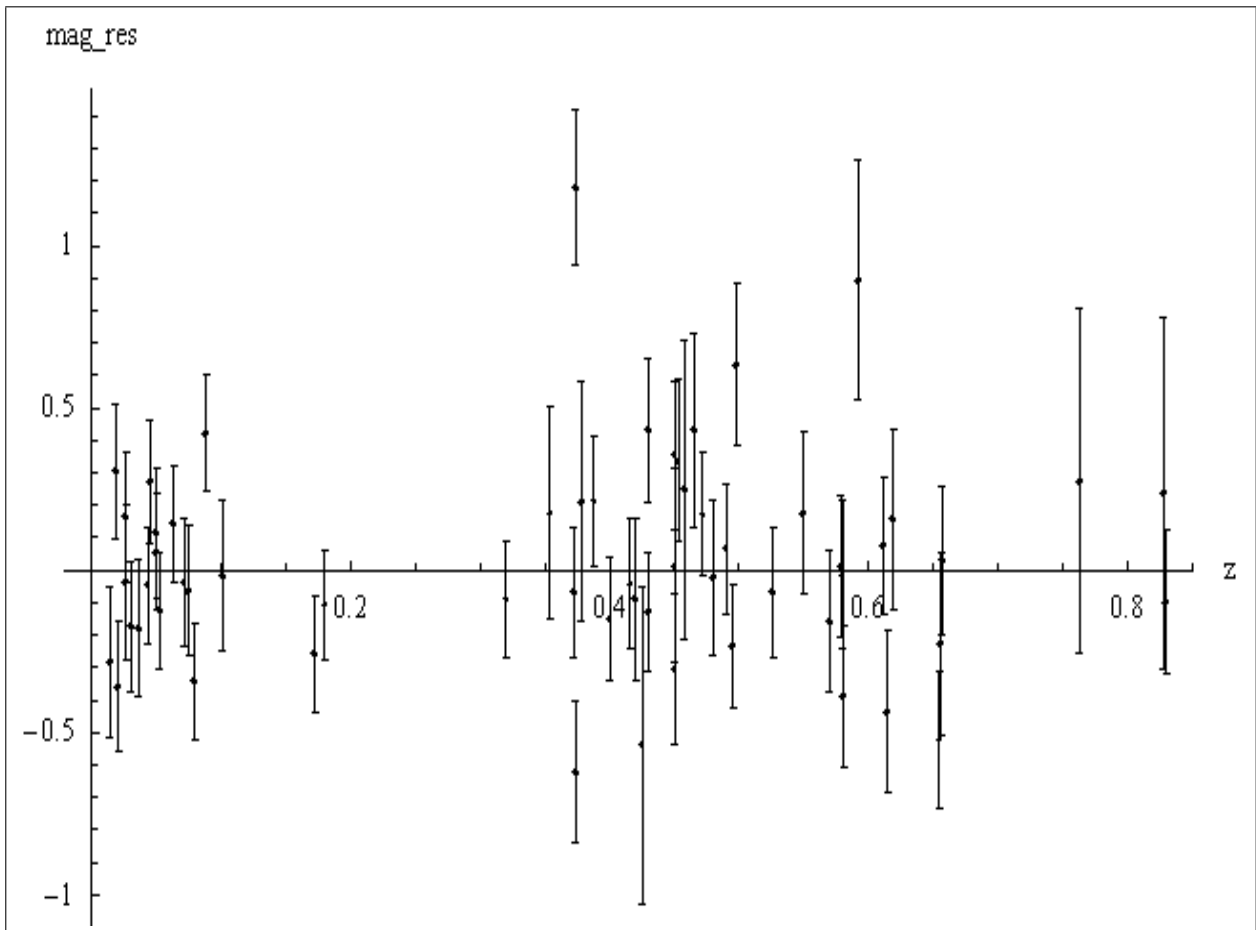


Figura 18: **Magnitud residual:** Se define la magnitud residual como $m_{res} = m_{obs} - m_{teo} = -5 \log\left(\frac{D_{L,teo}}{D_{L,obs}}\right)$. Si la magnitud residual es positiva indica que las supernovas se encuentran a mayor distancia de lo predicho, asimismo, si la magnitud residual es negativa, la distancia de las supernovas es menor que lo predicho por el modelo, igualmente, se puede considerar el promedio de valores residuales. Se observa que hay muchos más valores positivos, lo cual muestra que las supernovas se encuentran a mayor distancia de lo predicho.

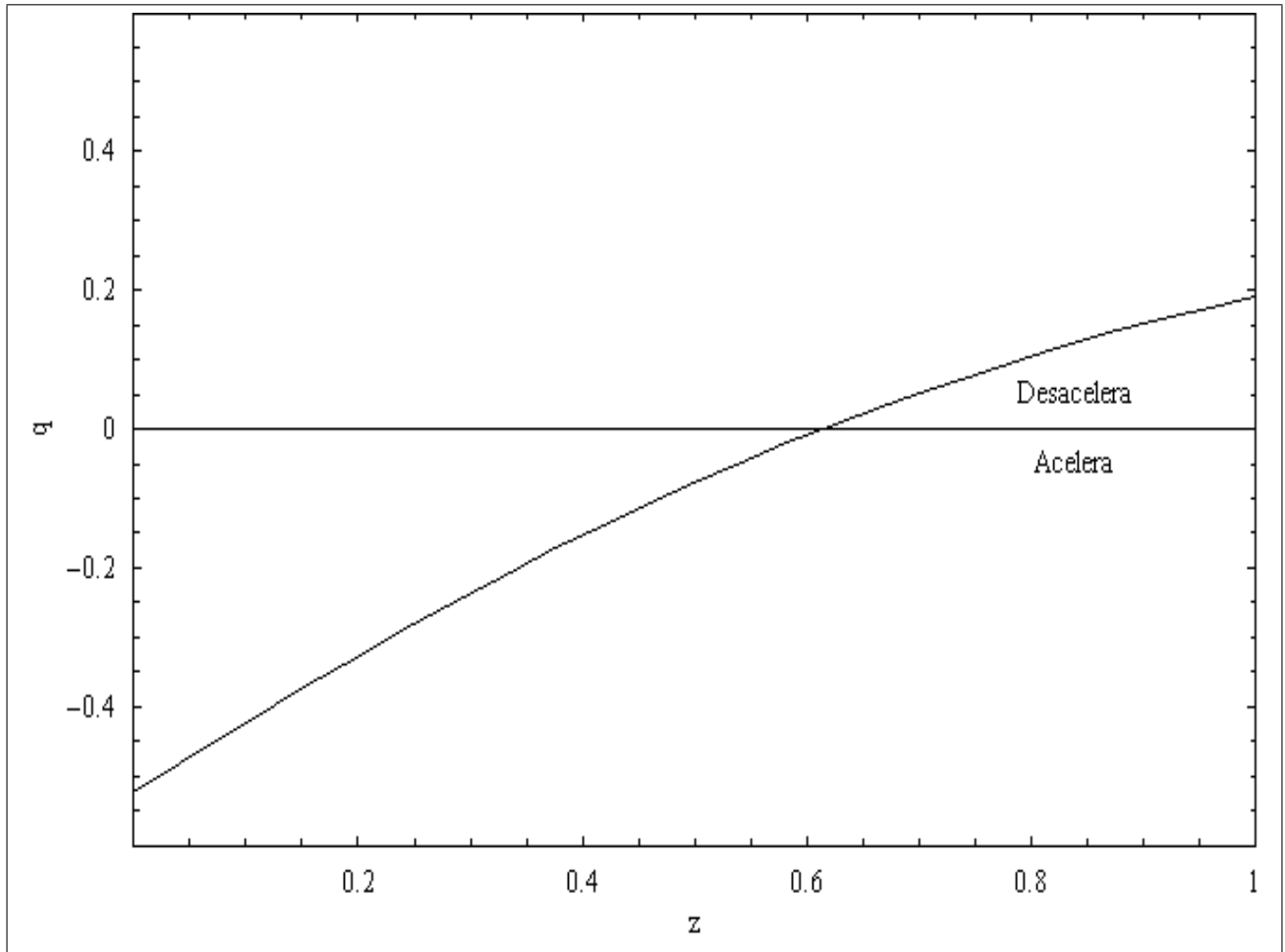


Figura 19: **Parámetro de desaceleración vs corrimiento al rojo:** *Se observa el cambio de la fase desacelerada a la fase acelerada, el llamado punto de inflexión, valor importante en la determinación de la ecuación de estado que gobierna el cambio de fase del universo. Con los datos de SN Ia, considerados aquí y bajo el modelo estándar, se obtiene un valor de $z \simeq 0,62$ como valor para el cual se inicio la expansión acelerada, de las observaciones de SN Ia se encuentra que el paso de una expansión desacelerada a una acelerada se da para $z \simeq 0,50$ [42]. Este valor corresponde al valor empírico obtenido de la observación de SN Ia.*

9.1.2. Modelo brane hiperbólico bajo dominio de Materia

De forma similar como se realizó el análisis de máxima verosimilitud para el modelo estándar, en el marco de universos membrana (brane-world), se obtuvieron los valores de los parámetros del modelo que hacen mínimo el chi-cuadrado, es decir los valores óptimos. Para el cálculo de máxima

verosimilitud se tomó en consideración el valor de $\mathbf{M} = \mathbf{24}$, para el índice barotrópico $\gamma = 1$, y se considero el caso $\Omega_k < 0$. De igual forma se consideraron los valores de SN Ia reportados por Perlmutter, se tomo la relación magnitud-redshift para una brane no plana, y se hizo un barrido de redshift desde cero a uno. Para el caso de braneworld y por el número de parámetros presentes se obtienen seis planos de regiones de confianza (o regiones de probabilidad) cuando se combinan los diferentes parámetros, pero el plano que en principio es más notable es el obtenido para el plano estándar (es decir el plano que reproduce la cosmología estándar), aunque los otros son bastante importantes ya que permiten visualizar la forma de la región de confianza como los valores admisibles a un 68 % y 95 % de confianza. Los contornos o regiones de confianza obtenidos son los siguientes

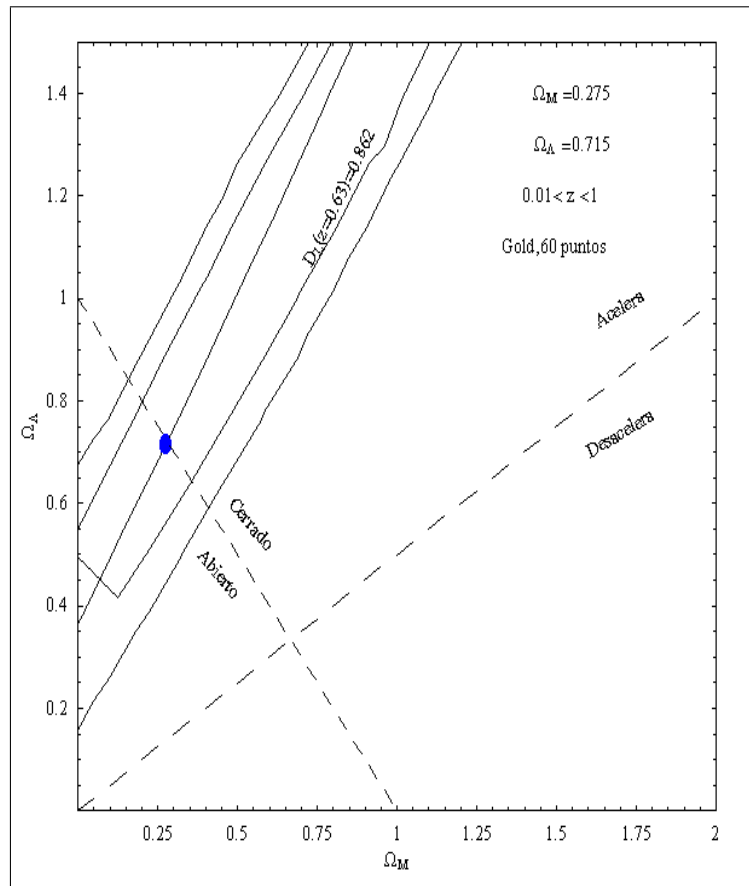


Figura 20: **Plano estándar-brane**; se observa claramente la similitud con el plano obtenido en el modelo estándar, de igual forma el contorno más pequeño corresponde a un nivel de confianza del 68 % , el más grande corresponde a un nivel de 95 %, se muestra también la curva de distancia de luminosidad constante, y las regiones en las cuales se ha dividido el plano

(acelerado-desacelerado, abierto-cerrado). El punto denota el valor óptimo y se observa una curva muy especial correspondiente a la curva de distancia de luminosidad constante, la cual se puede interpretar como la curva que para un z determinado la distancia permanece constante cuando los valores de los parámetros cambian a lo largo de la misma. Además, se predice un universo abierto o casi plano y acelerado aunque cercana a la predicción del modelo estándar para el universo, el cual aquí es cerrado y acelerado. Igualmente los valores obtenidos para los parámetros óptimos corresponden con los valores reportados para los mismos.

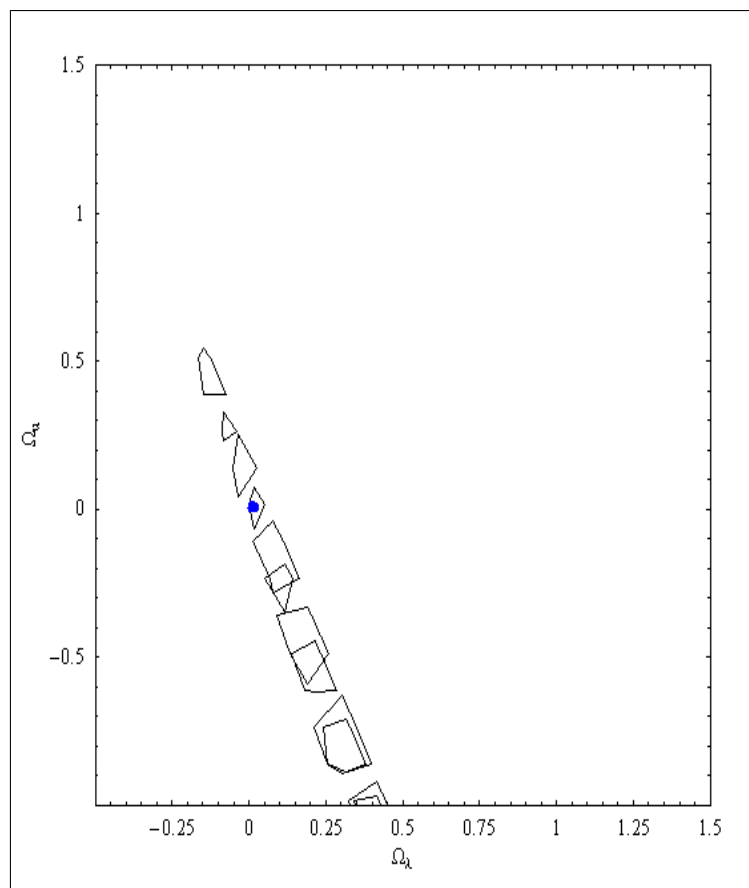


Figura 21: **Plano de densidad de tensión y de energía oscura;** las regiones de confianza más pequeñas corresponden a un nivel de confianza del 68 %, las más grandes corresponden a un nivel de 95 %, el punto indica el valor óptimo para estos dos parámetros. Los intervalos proporcionan la probabilidad de encontrar valores de los parámetros en esa región, fuera de esa región la probabilidad es cero. Aquí, se tiene una fragmentación de la región de confianza debido a que la función chi-cuadrado es bastante irregular en este plano, se puede considerar que la región que contiene el punto es una región del 68 % de confianza, y la región inmediatamente

superior a ella es una región del 95 % de confianza, solamente que en este caso no se interceptaron las dos, mostrando un desplazamiento una respecto de la otra. A priori, todas las regiones que se ilustran son igualmente equivalentes, ya corresponden a los mismos niveles de confianza.

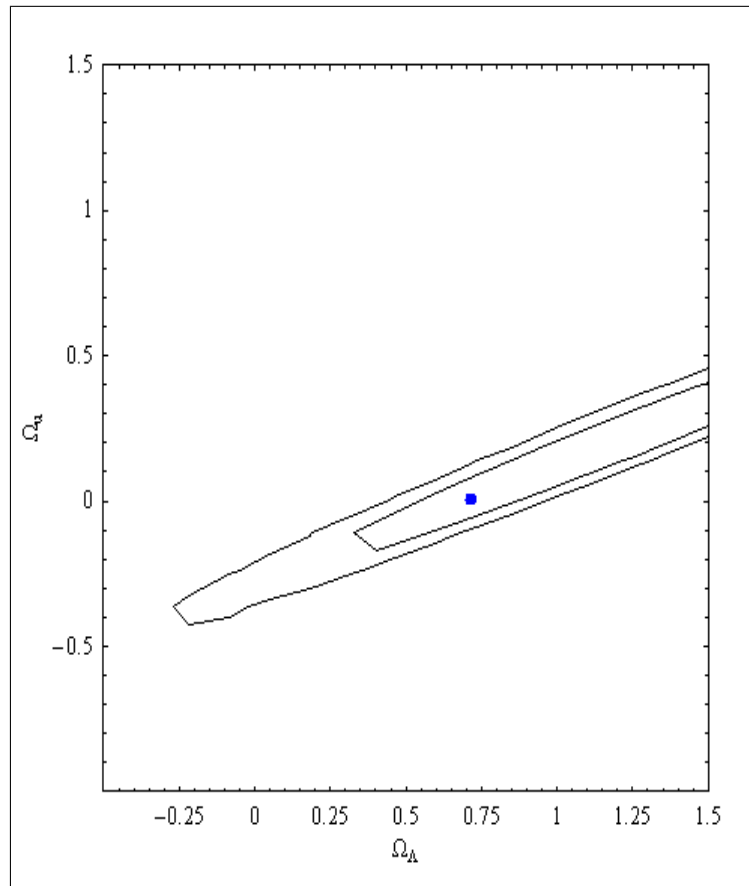


Figura 22: **Plano de densidad de constante cosmológica y de densidad de radiación oscura**; se observa la región del 68 % y 95 % de confianza. Como el punto con los valores óptimos. Claramente se observa que los posibles valores de los parámetros se obtienen moviéndose en los contornos definidos, se tiene una gran amplitud de valores para la densidad de constante cosmológica, en tanto que es más estrecho los posibles valores de densidad de radiación oscura.

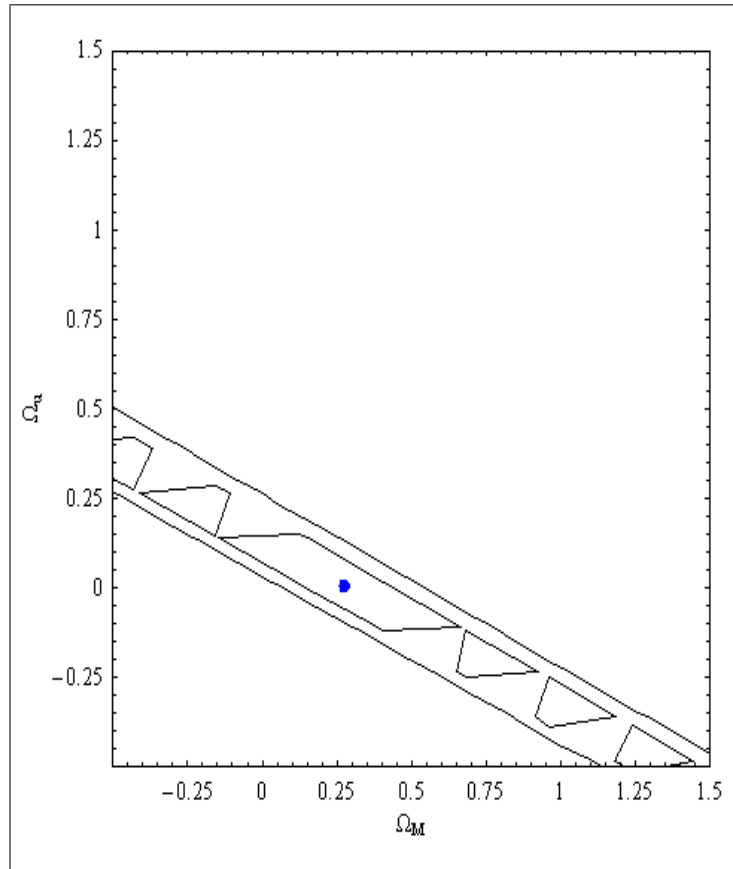


Figura 23: **Plano de densidad de materia y densidad de radiación oscura;** *las regiones pequeñas corresponden a un nivel del 68 % y otra región corresponde a un nivel de 95 %. Observese, que el punto que marca el valor óptimo queda en una región fraccionada del 68 %, puede considerarse que los posibles valores quedan circunscritos a la región donde está el punto, porque siempre se pretende obtener regiones de confianza pequeñas. Igualmente la región de confianza del 68 % se muestra fragmentada.*

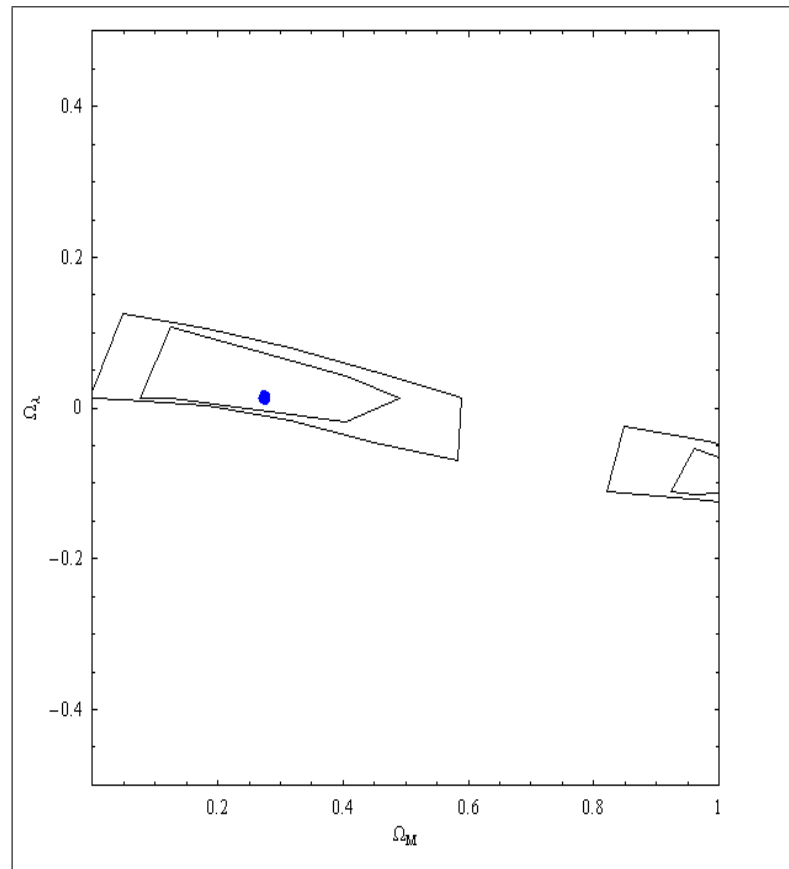


Figura 24: **Plano de densidad de materia y densidad de tensión**; las regiones pequeñas corresponden a un nivel de 68 %, las regiones mayores a un nivel de 95 %. El punto corresponde al valor óptimo de los parámetros y al igual que el gráfico anterior, se observan regiones fraccionadas, entonces, se debe considerar las regiones donde se presenta el valor óptimo.

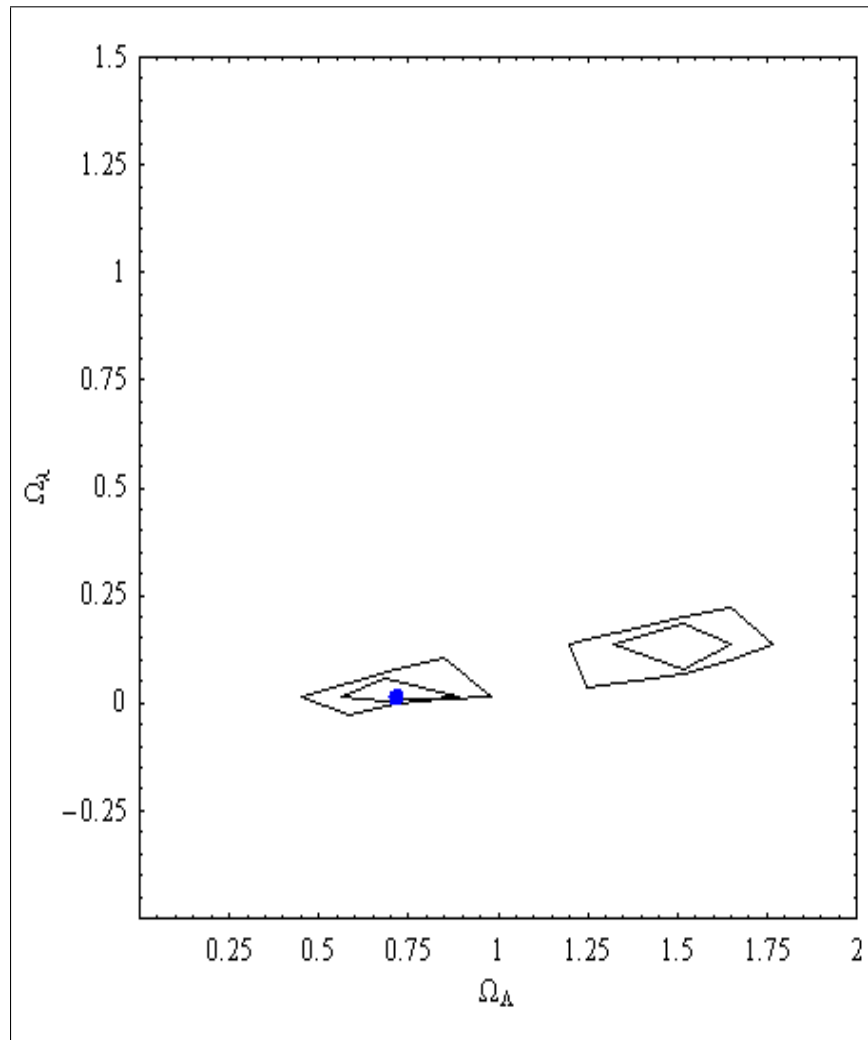


Figura 25: **Plano densidad de constante cosmológica y densidad de tensión;** *las regiones pequeñas corresponde a un nivel de 68 % y las regiones mayores corresponden a un nivel de 95 %. Igualmente se muestra el valor óptimo de estos parámetros. Aquí se puede considerar que las regiones que contienen el punto son las que permitirían restringir los posibles valores de los parámetros en cuestión.*

De forma semejante al análisis hecho para la cosmología estándar se obtuvieron las curvas teóricas de mejor ajuste, es decir con los valores obtenidos por máxima verosimilitud, las cuales son

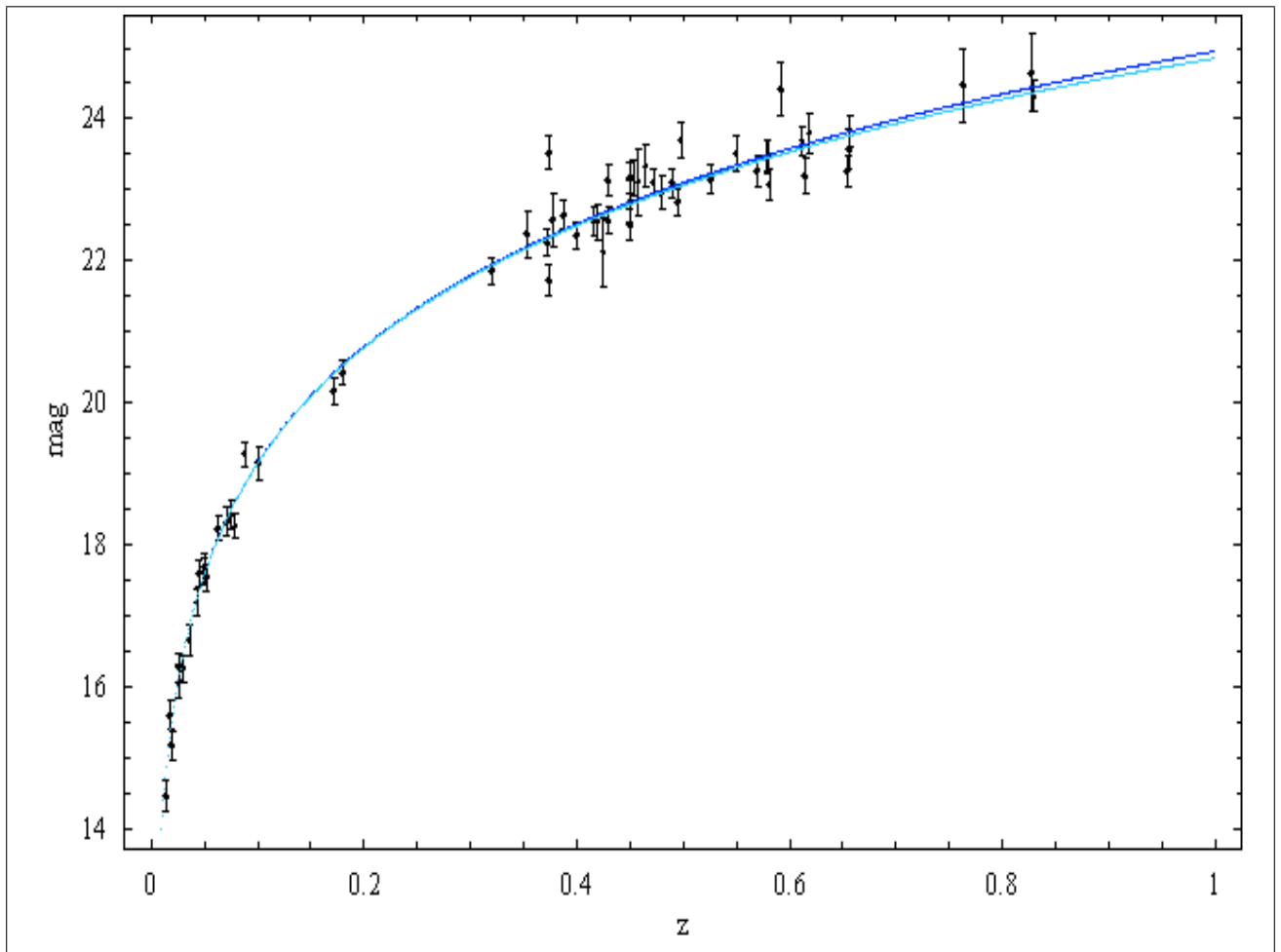


Figura 26: **Curva de mejor ajuste;** para los datos de supernovas Ia considerados anteriormente, la magnitud teórica para el modelo braneworld (curva cian) es inferior a la obtenida para el modelo estándar (curva azul), lo cual esta de acuerdo con los reportes de cosmología de membranas, en la cual se predice un menor valor teórico para la magnitud aparente, es decir, predice un menor brillo para las SN Ia, en tanto que el modelo estándar muestra un valor mayor, esto es un elemento que coloca en dificultades el modelo estándar, ya que no predice los resultados observacionales recientes, claro esta, que el modelo braneworld habría que someterlo a un mayor número de observaciones de alto corrimiento al rojo, para determinar que tan bueno es su ajuste o predicción, se sabe que ajusta supernovas de redshift 1,7 mejor que el modelo estándar.

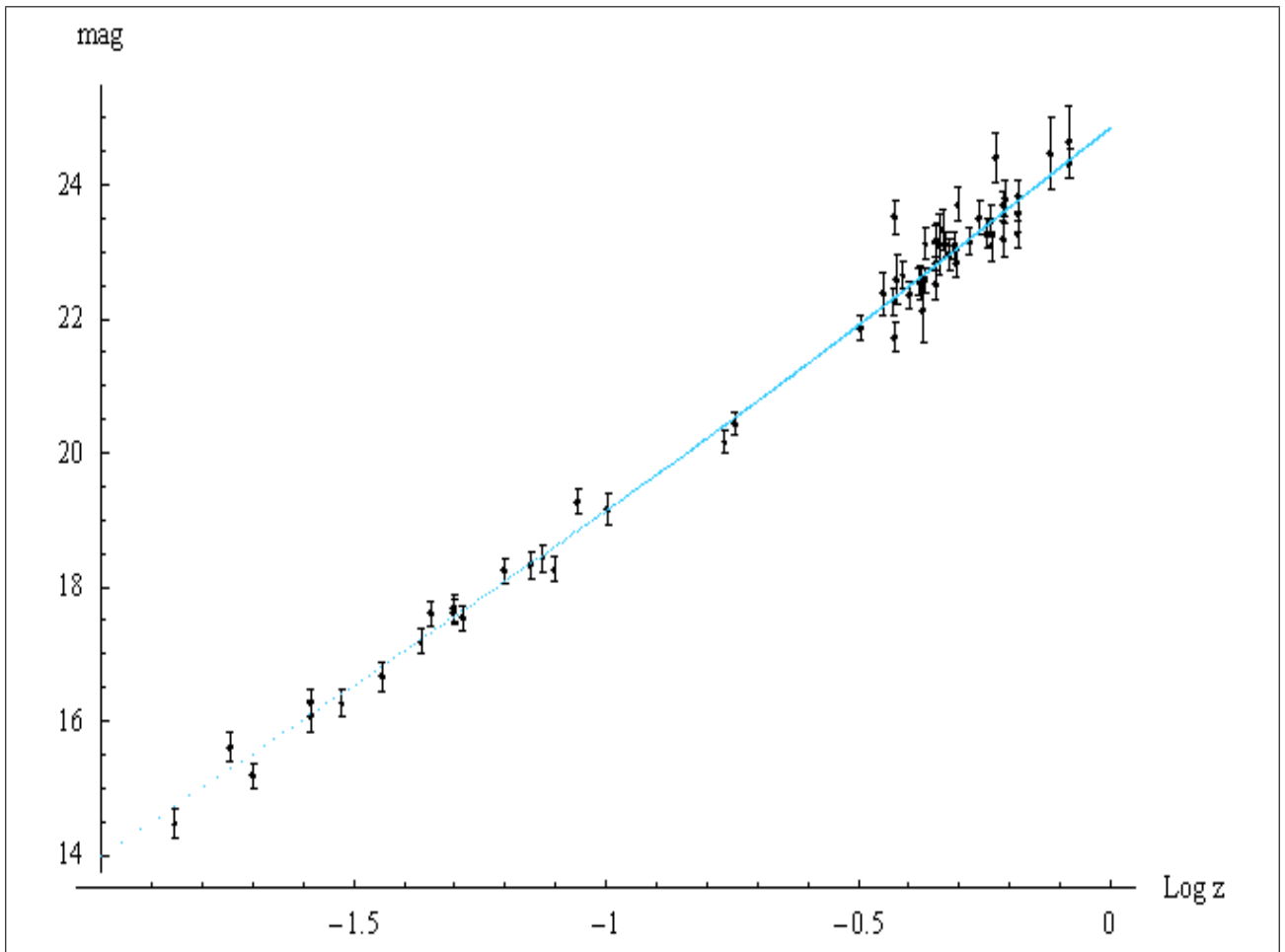


Figura 27: **Ajuste Logarítmico braneworld**; esta gráfica es análoga a la anterior, solo que en este caso se considero una escala logarítmica para el redshift. Esta es una de las curvas preferidas para ilustrar el ajuste de la curva teórica con los datos observacionales. Se observa que en este caso la curva ajusta correctamente los datos de bajo y alto corrimiento al rojo.

Reproduce los reportes publicados anteriormente.

Una representación del módulo de distancia frente al desplazamiento al rojo para distintas SN Ia se obtiene en la siguiente gráfica, la cual ilustra el hecho de que las SN Ia a distancias cosmológicas son más débiles de lo esperado, es decir se hallan más lejos de lo que corresponde a su desplazamiento al rojo para un universo desacelerado. Se observa una mayor cantidad de SN Ia en la región positiva, mostrando un indicio más de la expansión acelerada.

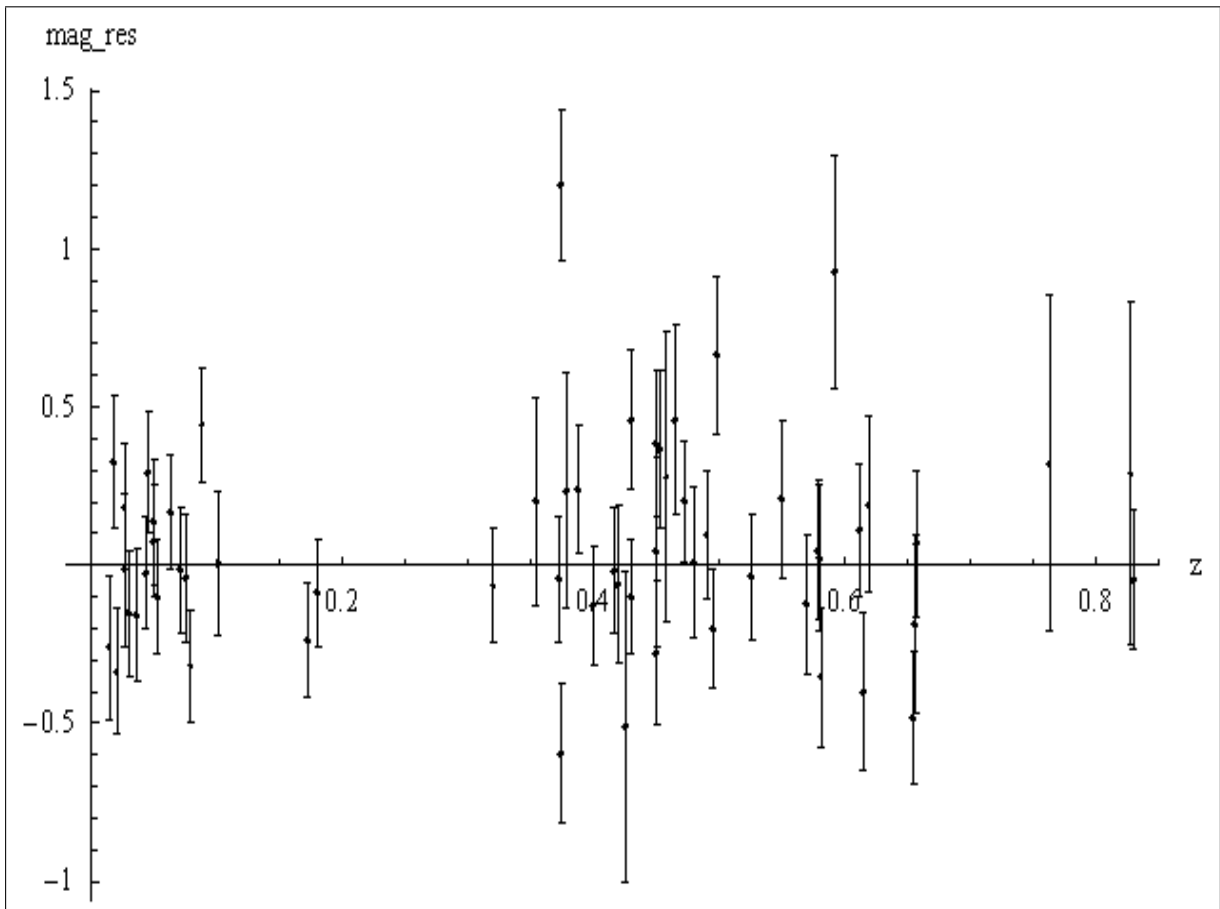


Figura 28: **Magnitud Residual**; esta gráfica muestra la magnitud residual para un braneworld con materia no relativista, en la cual se tiene mayores valores positivos, es decir el modelo predice una mayor distancia para las SN Ia, o mayor brillo para las SN Ia, en otros términos confirma nuevamente la expansión acelerada del universo.

Además, se obtuvo la curva para el parámetro de desaceleración, el cual muestra el valor de redshift para el cual se produce el cambio de fase de expansión desacelerada a la fase de expansión acelerada. Esto permite comparar el valor obtenido en el modelo estándar con el obtenido en el modelo braneworld. Se conoce por los resultados empíricos que tal cambio de fase se da para $z \simeq 0,5$ [43], este tipo de gráfica permite contrastar los resultados obtenidos teórica y observacionalmente.

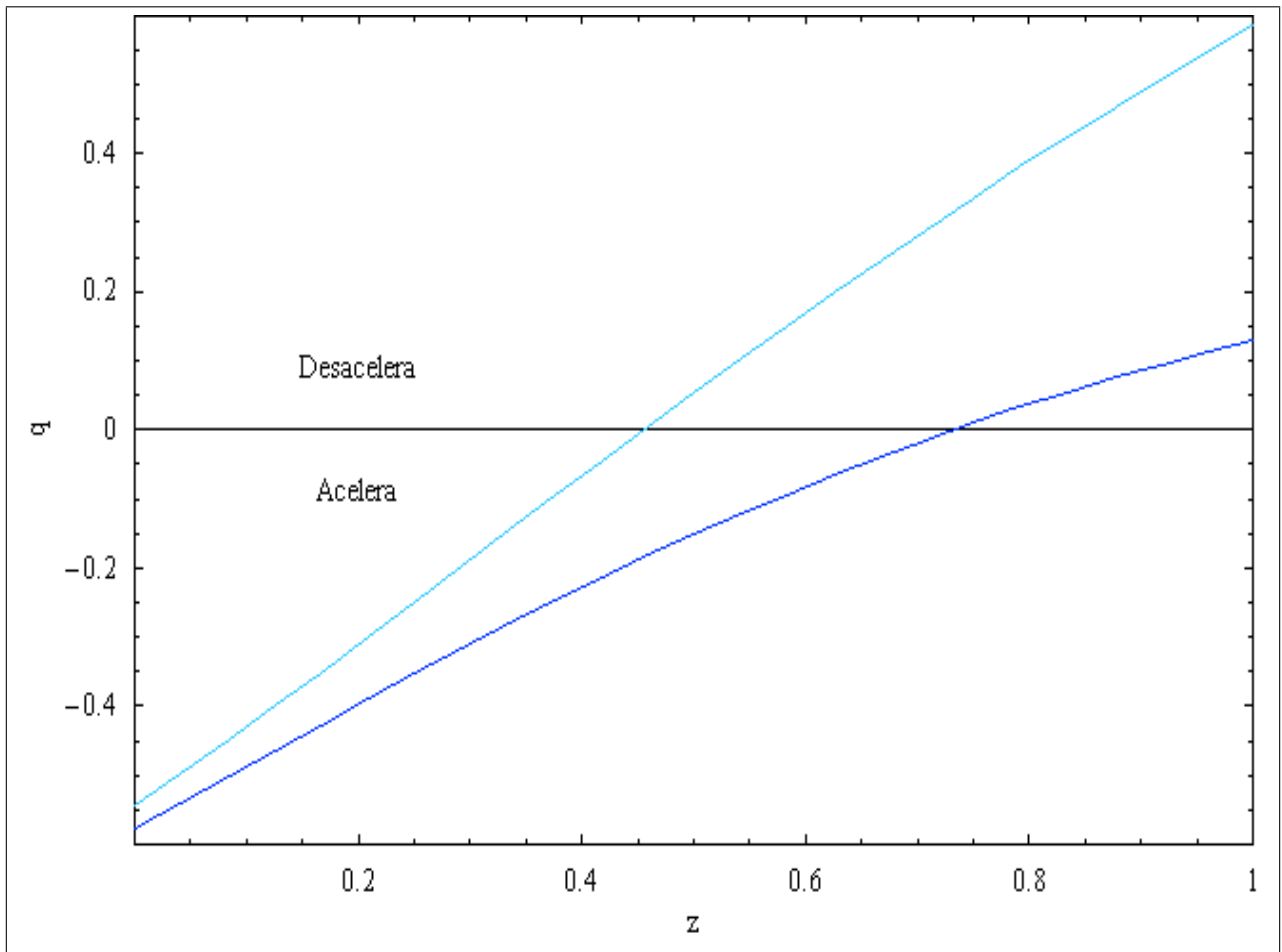


Figura 29: **Parámetro de desaceleración vs redshift**; se observa el cambio de la fase desacelerada a la fase acelerada. En consideración de los datos de SN Ia del conjunto Gold, y bajo el modelo de braneworld con materia no relativista sobre la brane (curva cian), se encuentra que el valor de corrimiento al rojo predicho para el cambio de fase desacelerada a fase acelerada ocurre para $z \simeq 0,45$ valor menor que el predicho por la cosmología estándar $z \simeq 0,75$ (curva azul), pero más de acuerdo con el valor obtenido de la observación de SN Ia el cual es de $z \simeq 0,50$. Se observa que el valor actual de desaceleración que predice el modelo braneworld es cercano al valor predicho por el modelo estándar.

Igualmente se puede obtener la curva que muestra la edad del universo, en la cual se aprecia que la edad predicha por el universo brane es inferior a la edad obtenida por la cosmología estándar, este hecho ocasiona problemas con la estimación de la edad de algunos objetos del universo físico, en general con la edad del universo aceptada hoy día.

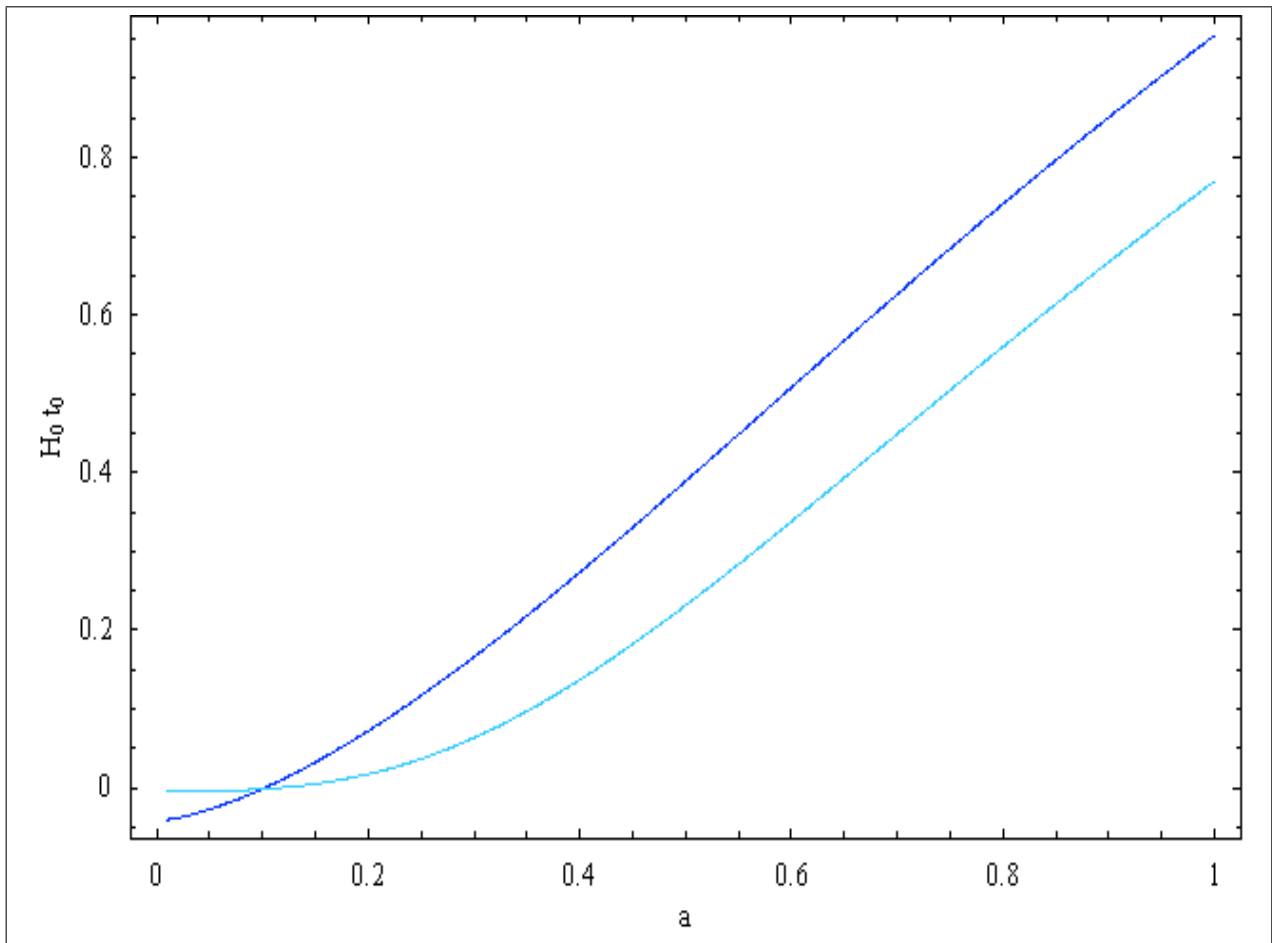


Figura 30: **Edad del universo braneworld con valores óptimos**; se muestran curvas comparativas de la edad del universo, se observa que la edad obtenida para el universo brane (curva cian) es inferior a la edad del universo predicha por la cosmología estándar (curva azul). Aquí, a es el factor de escala que corresponde al R considerado anteriormente. En las curvas de caracterización ya se había ilustrado esto. Para que la edad del universo brane sea concordante con la edad predicha por el modelo estándar se requiere una densidad de tensión muy pequeña.

Un aspecto bastante importante en el estudio y factibilidad de diferentes modelos cosmológicos, es la comparación de la distancia de luminosidad y la distancia diametral angular, las cuales proporcionan elementos de comparación y de discriminación de modelos cosmológicos. Se muestran las curvas comparativas entre el modelo brane y el modelo estándar, para las distancias mencionadas.

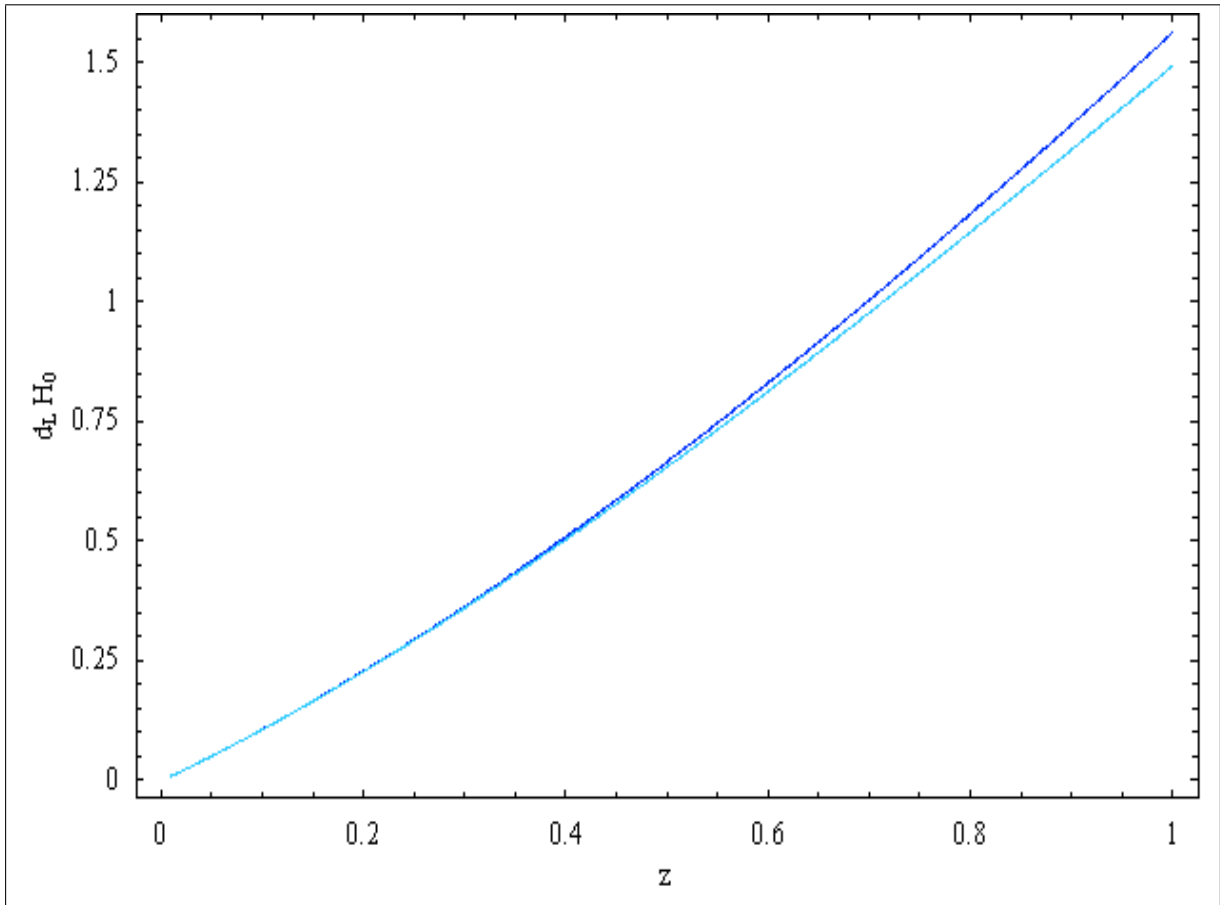


Figura 31: **Distancia de luminosidad para modelo braneworld;** para el universo brane (curva cian) en comparación con la distancia de luminosidad para el modelo estándar (curva azul). La distancia de luminosidad para el universo brane es inferior a la distancia predicha por el modelo estándar. Esto ya se había ilustrado en la parte correspondiente a la caracterización del modelo braneworld. Igualmente, aquí se debe multiplicar el valor obtenido por la distancia de Hubble, para obtener el valor físico.

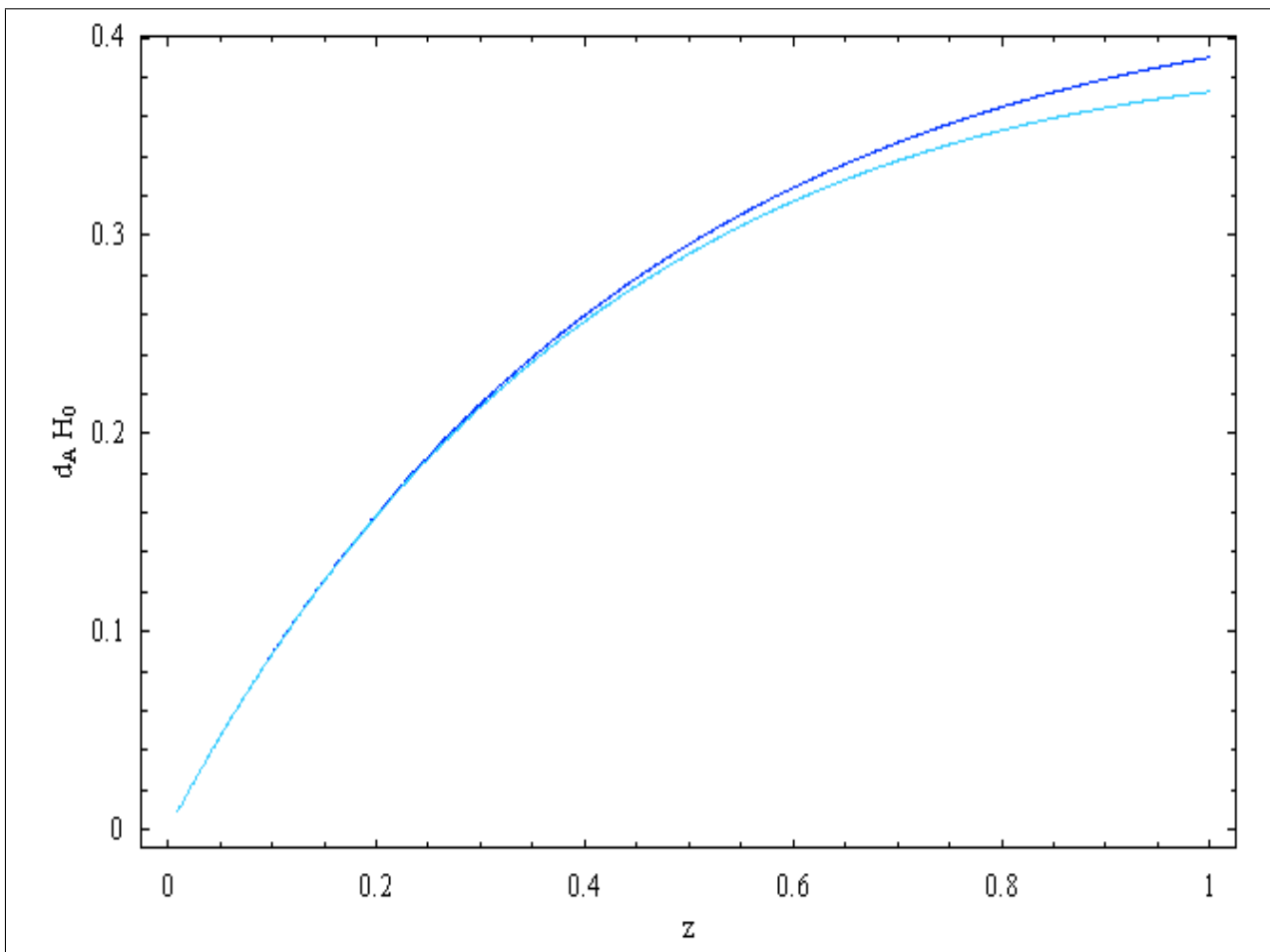


Figura 32: **Distancia diametral angular;** para el universo brane (curva cian) y distancia diametral angular para el modelo estándar (curva azul). La distancia predicha por el universo brane es inferior a la distancia predicha por el modelo estándar. Se observa que a bajo corrimiento al rojo las dos curvas coinciden perfectamente.

Los valores encontrados son los siguientes

χ^2	Ω_m	Ω_Λ	Ω_λ	Ω_U	Ω_k
102.861	0.2755098	0.715692	0.0137852	0.0067479	-0.011

Cuadro 9.2: Tabla con los respectivos valores obtenidos de la rutina de máxima verosimilitud, se ha obtenido un valor de chi-cuadrado pequeño que muestra la bondad del ajuste, como también los respectivos valores mínimos de los parámetros del modelo.

La suma de los valores de los parámetros da 1,0113, que es un valor cercano a 1. No se obtiene un valor igual a 1 porque se requiere mayor precisión en el cálculo teórico, pero se obtiene un valor bueno con un chi cuadrado pequeño. Se observa de igual forma que los valores de los parámetros estándar son concordantes con los valores reportados convencionalmente.

9.1.3. Modelo brane plana bajo dominio de Materia

Se realizó el análisis de máxima verosimilitud en el marco de universos membrana (brane-world), se obtuvieron los valores de los parámetros del modelo que hacen mínimo el chi-cuadrado, es decir los valores óptimos. Para el cálculo de máxima verosimilitud se tomó en consideración el valor de $\mathbf{M} = \mathbf{24}$, para el índice barotrópico $\gamma = 1$, y se considero el caso $\Omega_k = 0$. De igual forma se consideraron los valores de SN Ia reportados por Perlmutter, se tomo la relación magnitud-redshift para una brane plana, y se hizo un barrido de redshift desde cero a uno. Se presentan las regiones de confianza en los planos $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ y $(\Omega_m, \Omega_\lambda)$ ya que son los planos que más se presentan en la literatura.

En este caso se encontraron los siguientes valores óptimos para los parámetro

χ^2	Ω_m	Ω_Λ	Ω_λ	Ω_U	Ω_k
102.861	0.270503	0.706143	0.0131454	0.005876	0.0043

Cuadro 9.3: Tabla con los respectivos valores obtenidos de la rutina de máxima verosimilitud, se ha obtenido un valor de chi-cuadrado pequeño que muestra la bondad del ajuste, como también los respectivos valores mínimos de los parámetros del modelo. Se observa que el valor para el parámetro de densidad de curvatura no es exactamente cero, en principio tal discrepancia puede adjudicarse al programa de cálculo que se ha desarrollado. Igualmente se observa un menor valor de densidad de radiación oscura.

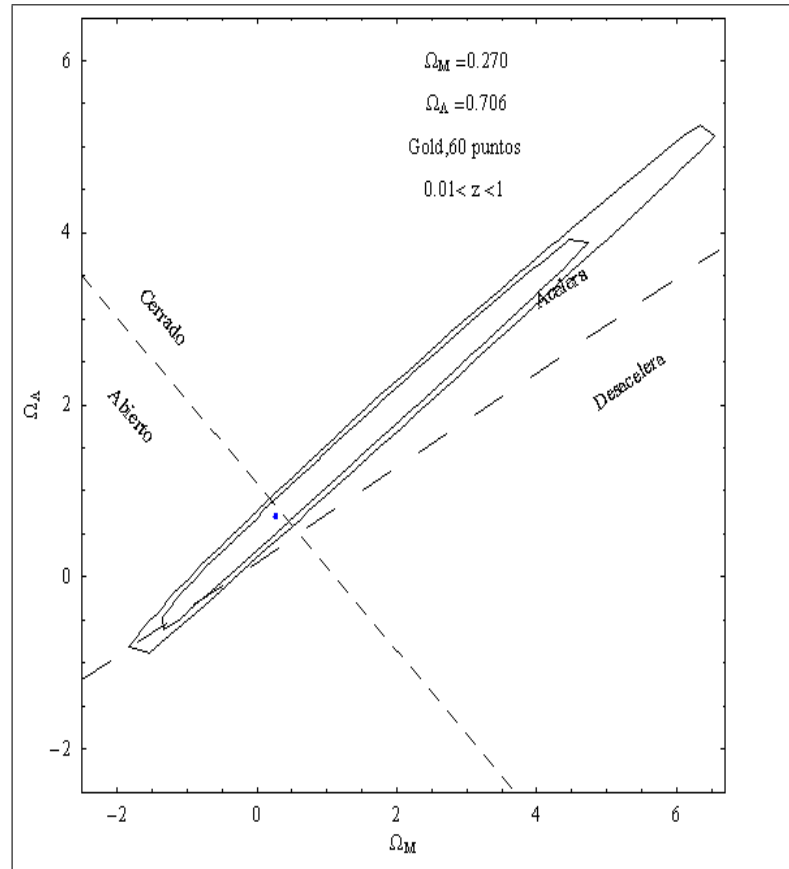


Figura 33: **Plano estándar-brane-plana**; se observa claramente la similitud con el plano obtenido en el modelo estándar, de igual forma el contorno más pequeño corresponde a un nivel de confianza del 68 %, el más grande corresponde a un nivel de 95 %, se muestra igualmente las regiones en las cuales se ha dividido el plano (acelerado-desacelerado, abierto-cerrado). El punto denota el valor óptimo. Igualmente los valores obtenidos para los parámetros óptimos corresponden o son muy similares a los valores reportados en la literatura.

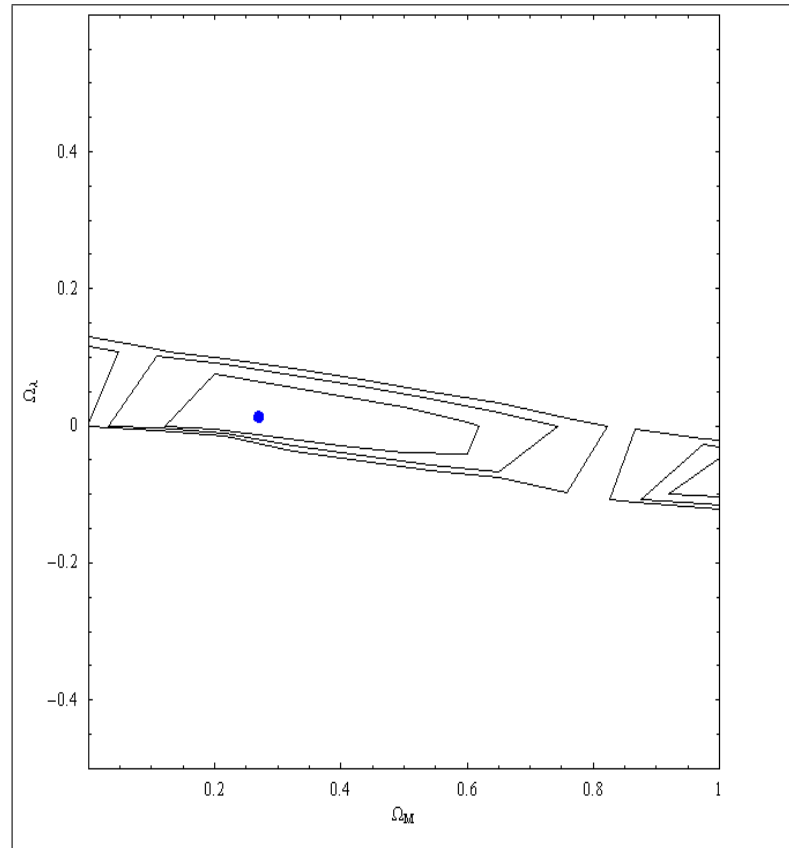


Figura 34: **Plano de densidad de materia y densidad de tensión**; las regiones pequeñas corresponden a un nivel de 68 %, las siguientes a un nivel de 95 % y la región mayor corresponde a un nivel de 99 %. El punto corresponde al valor óptimo de los parámetros y al igual que el gráfico anterior, se observan regiones fraccionadas, entonces, se debe considerar las regiones donde se presenta el valor óptimo. Puede compararse con gráficas reportadas en la literatura, aunque no presente la misma forma si cubre de forma general los mismos valores.

Igualmente, se muestra la gráfica para el ajuste de las SN Ia consideradas, es decir se muestra el diagrama de Hubble en el caso de una brana plana

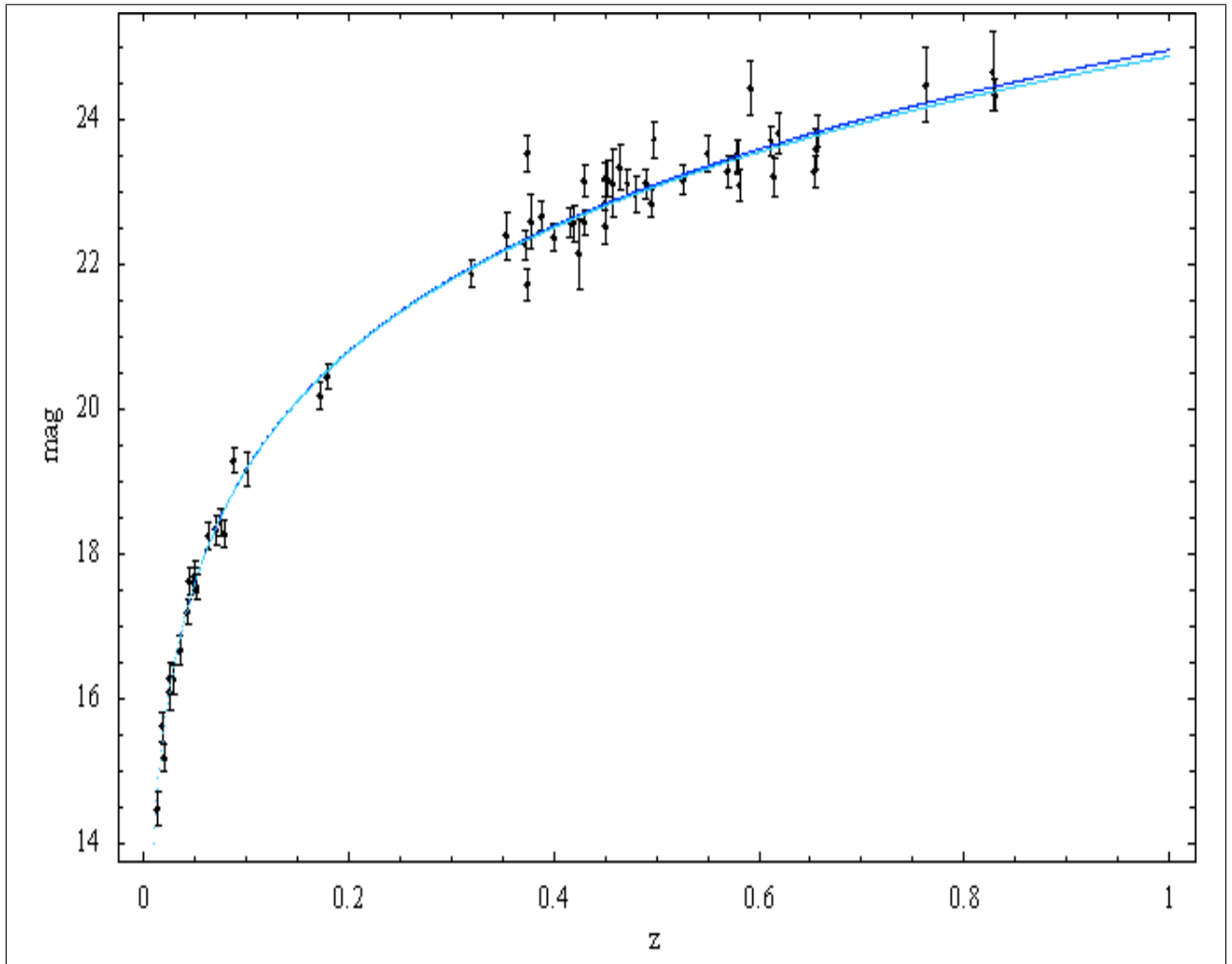


Figura 35: **Diagrama de Hubble o Curva de mejor ajuste;** *Magnitud teórica para el modelo braneworld (curva cian) o curva inferior, similarmente se tiene la curva para el modelo estándar (curva azul) o curva superior, lo cual esta de acuerdo con los reportes de cosmología de membranas, en la cual se predice un menor valor teórico para la magnitud aparente, es decir, predice un menor brillo para las SN Ia, en tanto que el modelo estándar muestra un valor mayor, esto es un elemento que coloca en dificultades el modelo estándar, ya que no predice los resultados observacionales recientes, claro esta, que el modelo braneworld habría que someterlo a un mayor número de observaciones de alto corrimiento al rojo, para determinar que tan bueno es su ajuste o predicción, se sabe que ajusta supernovas de redshift 1,7 mejor que el modelo estándar.*

Como uno de los resultados notables de este trabajo se muestra la curva comparativa para el

parámetro de desaceleración

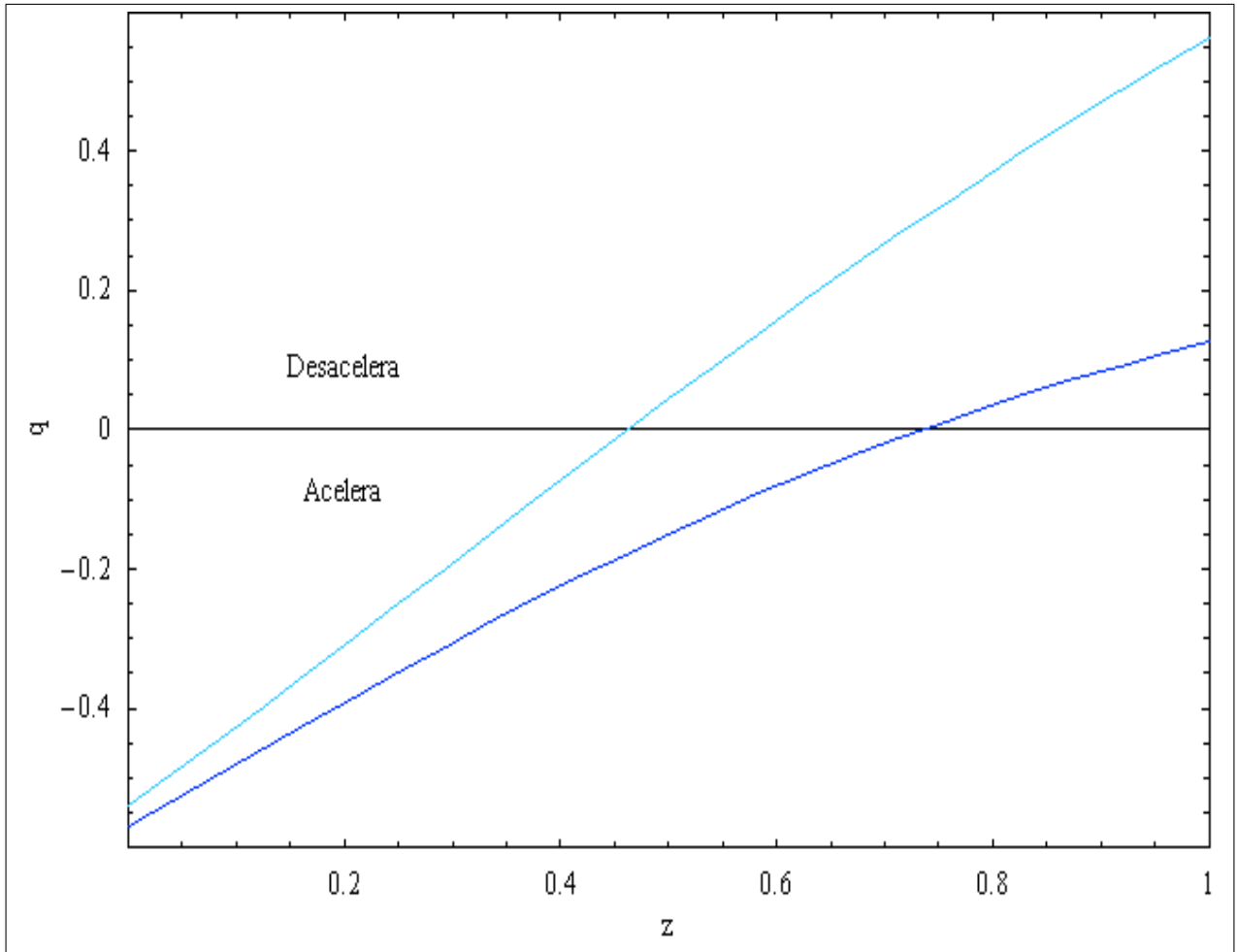


Figura 36: **Parámetro de desaceleración vs redshift**; se observa el cambio de la fase desacelerada a la fase acelerada. En consideración de los datos de SN Ia del conjunto Gold, y bajo el modelo de brane-world plano con materia no relativista sobre la brana (curva cian), en este caso se predice un valor de cambio de fase de $z \simeq 0,47$, menor que el predicho por la cosmología estándar $z \simeq 0,75$ (curva azul), pero mucho más cerca del valor obtenido de la observación de SN Ia el cual es de $z \simeq 0,50$.

9.1.4. Modelo brane esférico bajo dominio de Materia

De forma similar se realizó el análisis de máxima verosimilitud en el marco de universos membrana (brane-world), se obtuvieron los valores de los parámetros del modelo que hacen mínimo el chi-cuadrado, es decir los valores óptimos. De la misma forma se tomó el valor de

$\mathbf{M} = \mathbf{24}$, para el índice barotrópico $\gamma = 1$, y se considero el caso $\Omega_{k0} > 0$, es decir se consideró la relación magnitud-redshift para una brane tipo esférico, y se hizo un barrido de redshift desde cero a uno. De igual forma se presentan las regiones de confianza en los planos $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ y $(\Omega_m, \Omega_\lambda)$ ya que son los planos más recurrentes en la literatura.

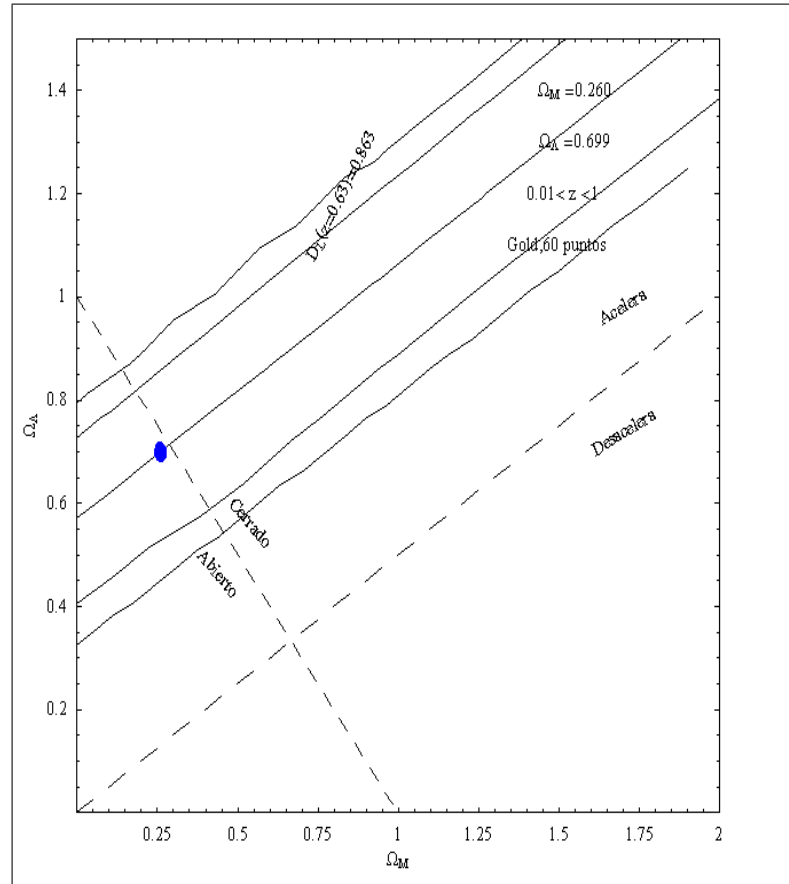


Figura 37: **Plano estándar-brane-esférica**; se observa claramente la similitud con el plano obtenido en el modelo estándar, de igual forma el contorno más pequeño corresponde a un nivel de confianza del 68 % , el más grande corresponde a un nivel de 95 %, se muestran las regiones en las cuales se ha dividido el plano (acelerado-desacelerado, abierto-cerrado). El punto denota el valor óptimo y se observa una curva muy especial correspondiente a la curva de distancia de luminosidad constante, la cual se puede interpretar como la curva que para un z determinado la distancia permanece constante cuando los valores de los parámetros cambian a lo largo de la misma. Igualmente los valores obtenidos para los parámetros óptimos corresponden con los valores reportados para los mismos.

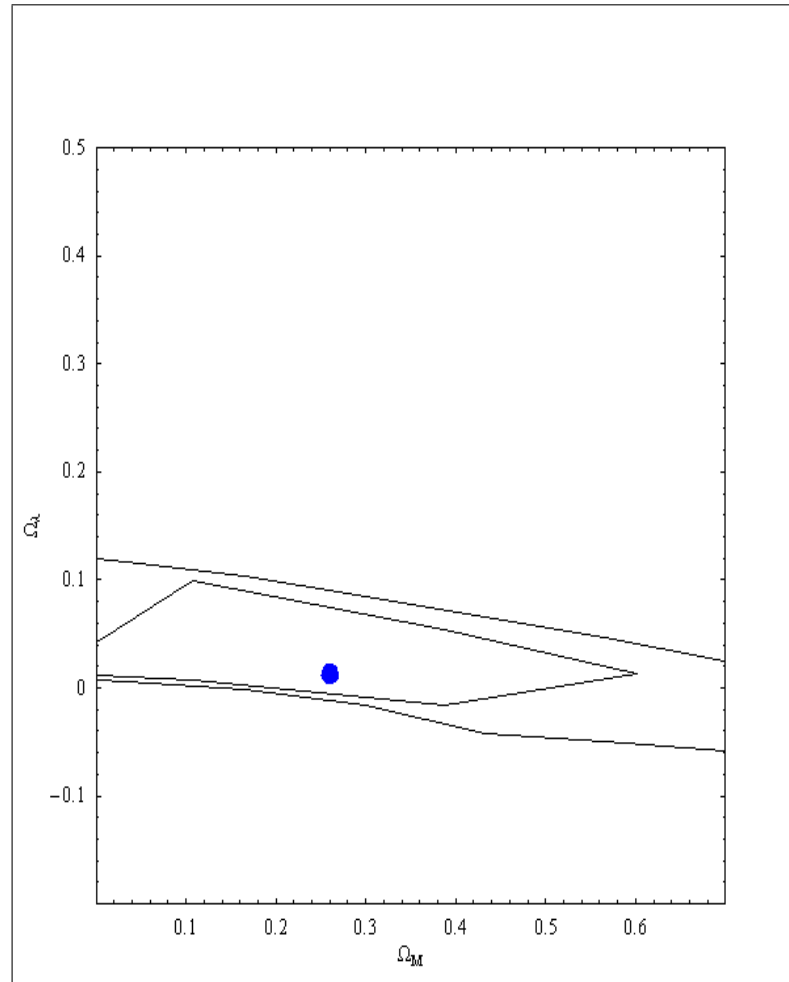


Figura 38: **Plano de densidad de materia y densidad de tensión;** *las regiones pequeñas corresponden a un nivel de 68 %, las siguientes a un nivel de 95 % . El punto corresponde al valor óptimo de los parámetros y al igual que el gráfico anterior, se observan regiones fraccionadas, entonces, se debe considerar las regiones donde se presenta el valor óptimo. Puede compararse con gráficas reportadas en la literatura, aunque no presente la misma forma si cubre de forma general los mismos valores.*

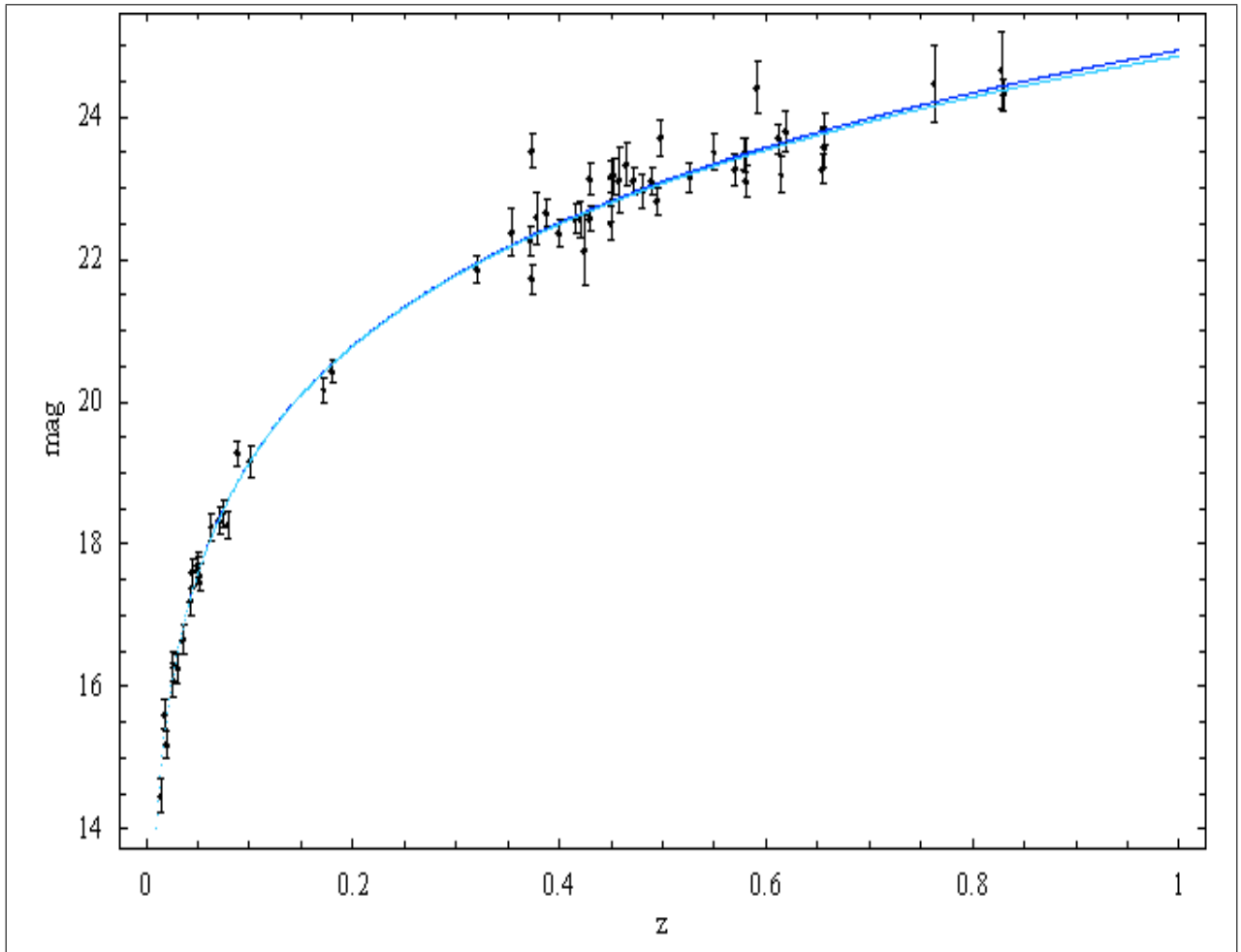


Figura 39: Diagrama de Hubble o Curva de mejor ajuste; Magnitud teórica para el modelo braneworld (curva cian) o curva inferior, similarmente se tiene la curva para el modelo estándar (curva azul) o curva superior, lo cual esta de acuerdo con los reportes de cosmología de membranas, en la cual se predice un menor valor teórico para la magnitud aparente, es decir, predice un menor brillo para las SN Ia, en tanto que el modelo estándar muestra un valor mayor, esto es un elemento que coloca en dificultades el modelo estándar, ya que no predice los resultados observacionales recientes, claro esta, que el modelo braneworld habría que someterlo a un mayor número de observaciones de alto corrimiento al rojo.

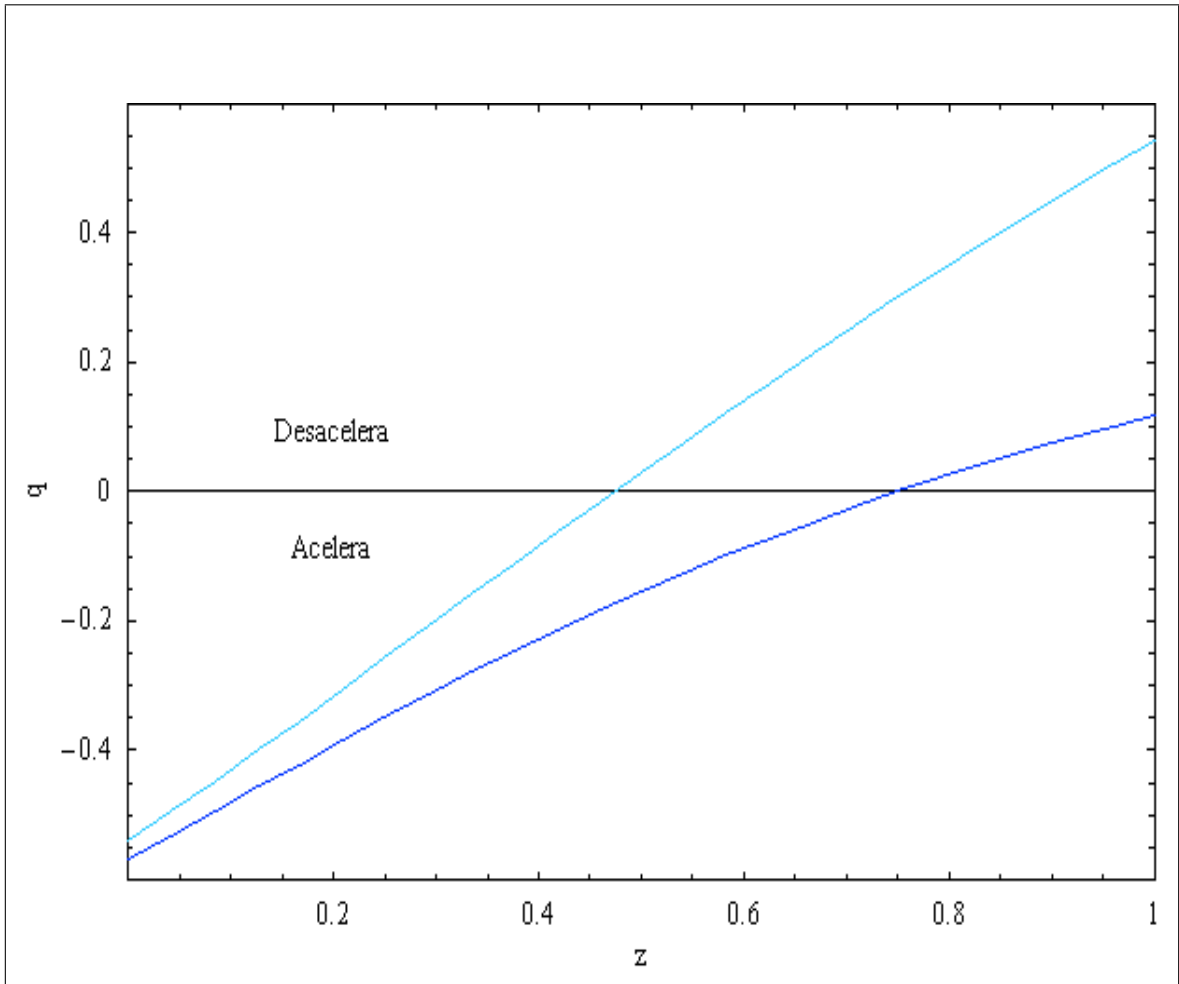


Figura 40: **desaceleración vs redshift**; Se observa el cambio de la fase desacelerada a la fase acelerada, bajo el modelo de braneworld esférico con materia no relativista sobre la brane (curva cian), en este caso se predice un valor de cambio igual que el caso anterior de $z \simeq 0,47$, y para la cosmología estándar $z \simeq 0,75$ (curva azul).

Para este caso los valores encontrados corresponde a

χ^2	Ω_m	Ω_Λ	Ω_λ	Ω_U	Ω_k
102.895	0.260485	0.699103	0.0126477	0.0047488	0.023

Cuadro 9.4: Tabla con los respectivos valores obtenidos de la rutina de máxima verosimilitud, se ha obtenido un valor de chi-cuadrado pequeño que muestra la bondad del ajuste, como también los respectivos valores mínimos de los parámetros del modelo.

9.1.5. Modelo brane hiperbólica bajo dominio de Radiación

Este es un caso hipotético ya que tendríamos un universo dominado por radiación, y además con existencia de supernovas Ia, lo cual no correspondería al universo dominado por radiación en el pasado. Bajo esta consideración, se obtuvieron los valores de los parámetros óptimos, el valor de chi cuadrado, los contornos de confianza, la curva de mejor ajuste y la magnitud residual. Para este caso se obtuvo un valor negativo en la densidad de radiación, lo cual modifica las condiciones de la dimensión extra, y se tendría que revisar nuevamente la conservación de la energía bajo este resultado, pero en principio lo que muestra el resultado es que se tendría interacción brane-bulk. Para considerar este caso se tomó $\gamma = 4/3$, por consiguiente, las regiones de confianza obtenidas son las siguientes

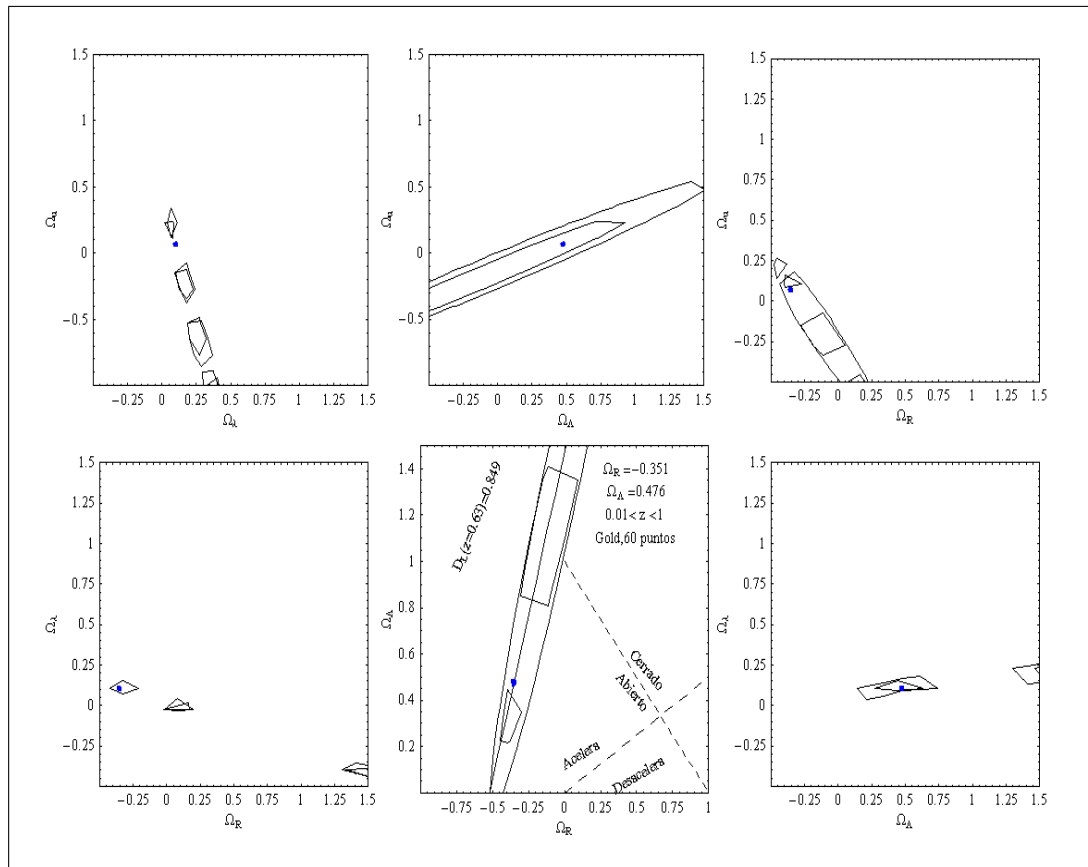


Figura 41: **Regiones de Confianza Radiación-braneworld**; se muestran los seis planos resultantes, donde se se observan las regiones de confianza, nuevamente las más pequeñas son regiones de confianza del 68 % y las mayores son del 95 %. Se ha conservado los elementos del plano estándar, solamente como elemento comparativo. Se puede leer de las regiones de

confianza el rango de posibles valores para los parámetros del modelo. Este modelo predice un universo abierto y acelerado.

De igual forma se muestran las curvas de mejor ajuste

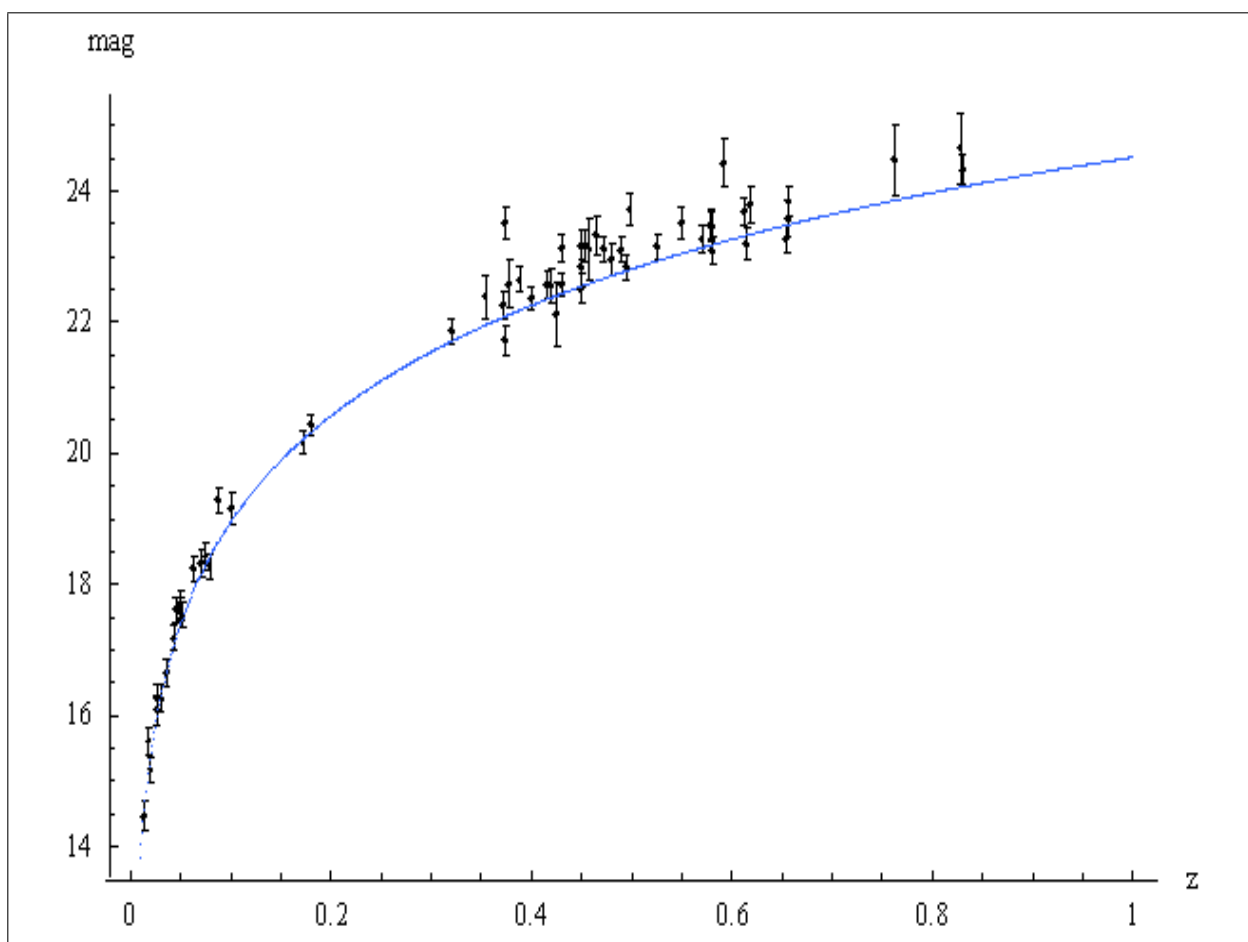


Figura 42: **Ajuste datos SN Ia mediante Radiación-braneworld;** se observa que la curva de mejor ajuste presenta un menor valor, al presentado por la curva estándar. De igual forma se observa que la curva teórica en realidad no está ajustando completamente los datos observacionales, ya que la curva teórica es obtenida de un modelo irreal, es decir un universo gobernado por radiación, lo cual no corresponde con la observación actual.

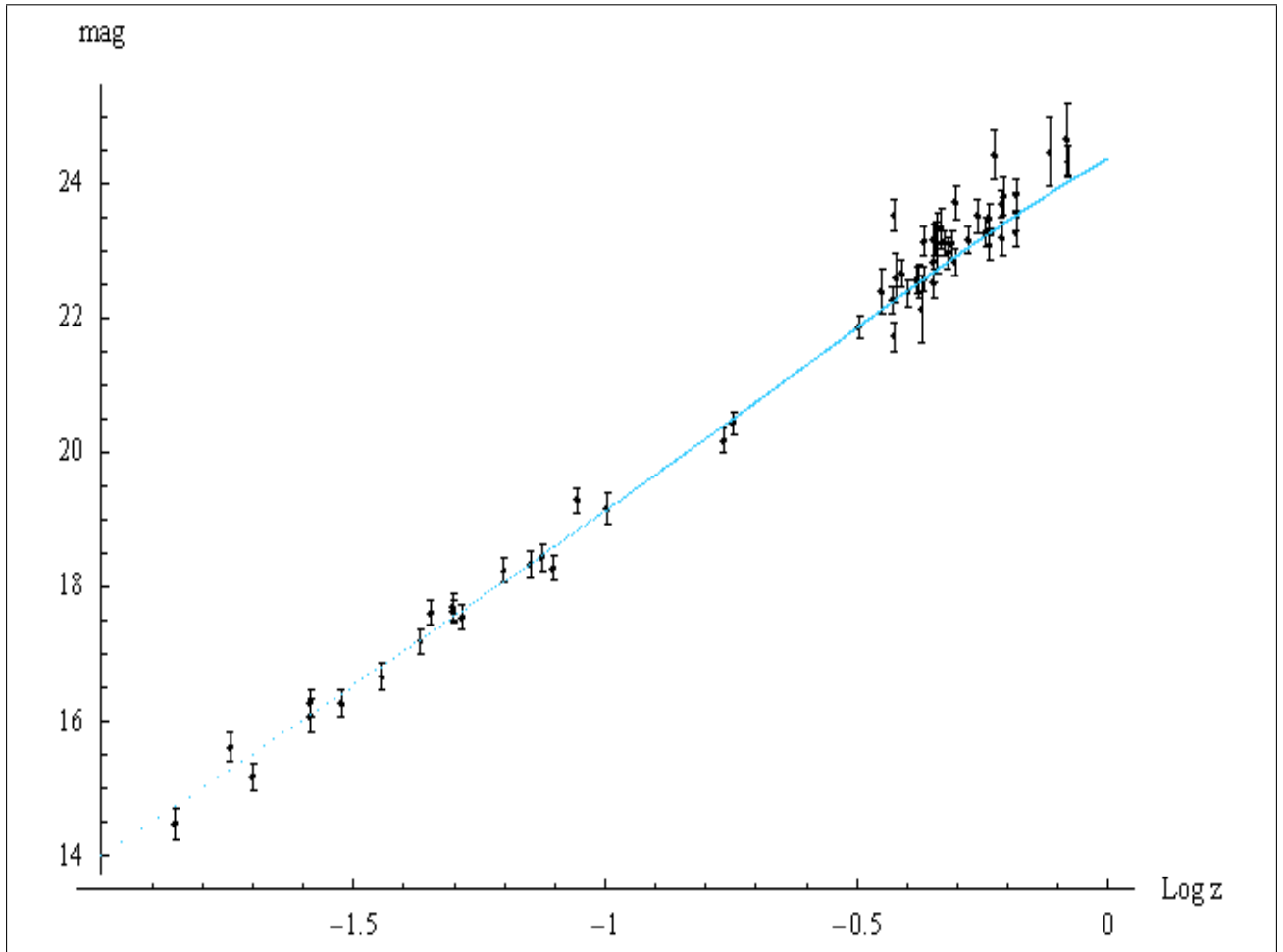


Figura 43: **Ajuste Logarítmico de datos SN Ia mediante Radiación-braneworld**; *curva de mejor ajuste, donde la escala de redshift es logarítmica. Nuevamente se observa un menor valor de magnitud, de acuerdo con la cosmología de braneworld. Se observa aquí que la curva no ajusta correctamente los datos de alto corrimiento al rojo, aunque es aceptable para los datos de bajo corrimiento al rojo.*

También se muestra la curva de magnitud residual.

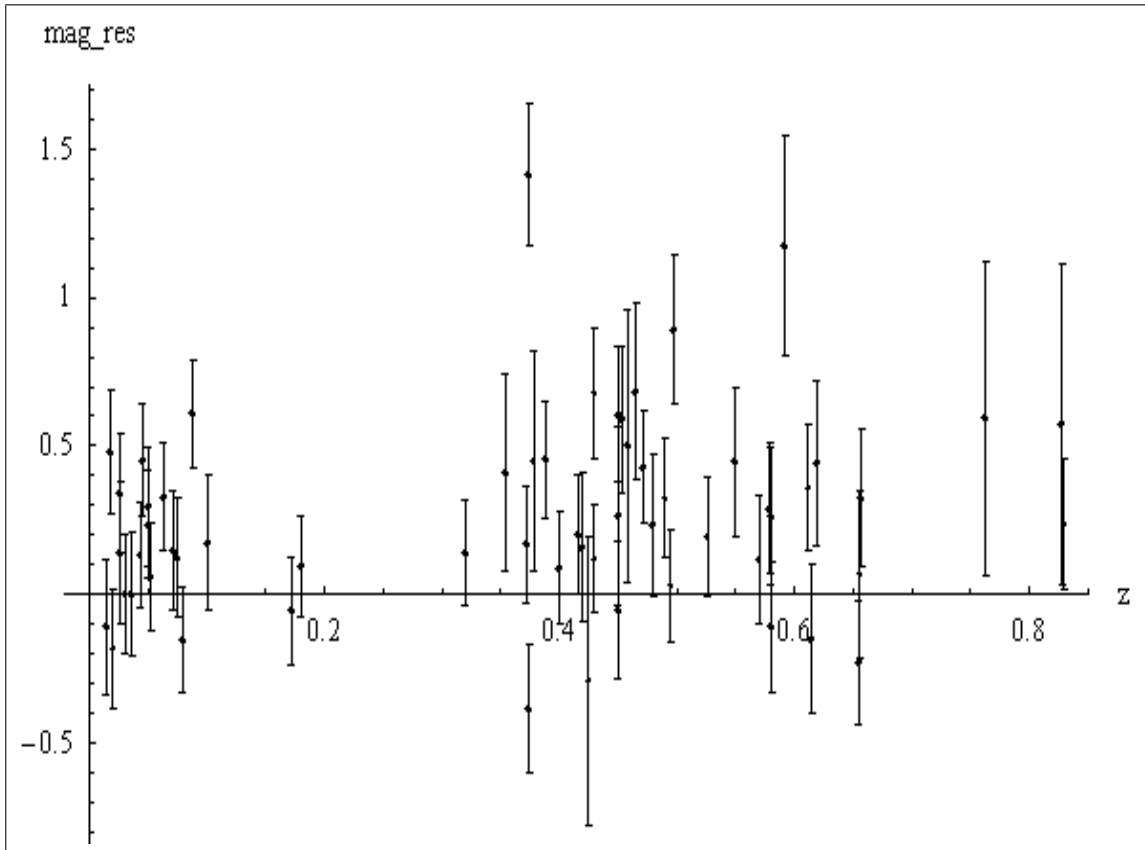


Figura 44: **Magnitud Residual para Radiación-braneworld**; esta gráfica de magnitud residual, muestra muchos más valores positivos, nuevamente se tiene un modelo que predice una mayor distancia para las SN Ia, o un mayor brillo para las SN Ia, esto es nuevamente un *índicativo de una expansión acelerada.*

Asimismo, los valores óptimos obtenidos son

χ^2	Ω_R	Ω_Λ	Ω_λ	Ω_U	Ω_k
107.256	-0.351414	0.476412	0.101741	0.0685964	-0.011

Cuadro 9.5: Tabla con los respectivos valores obtenidos de la rutina de máxima verosimilitud, se ha obtenido un valor de chi-cuadrado pequeño que muestra la bondad del ajuste, como también los respectivos valores mínimos de los parámetros del modelo.

9.1.6. Modelo brane hiperbólica bajo dominio de ‘paredes de dominio’

Se supone que el universo está gobernado por paredes de dominio, consideramos $\gamma = 1/3$, es decir regiones primitivas que no han sufrido todas las transiciones de fase por las que ha atravesado el universo, y además donde se supone la existencia de supernovas Ia, por consiguiente es nuevamente un modelo hipotético no realista. Igualmente se obtuvieron, los valores de máxima verosimilitud, los contornos de confianza, las curvas de mejor ajuste y la magnitud residual, en este caso se observa un densidad de tensión negativa, esto indica que para este modelo se tiene interacción brane-bulk, esto lleva a considerar modificaciones en la conservación de la energía. Los contornos de confianza obtenidos son los siguientes, las curvas de mejor ajuste y la magnitud residual se muestran a continuación

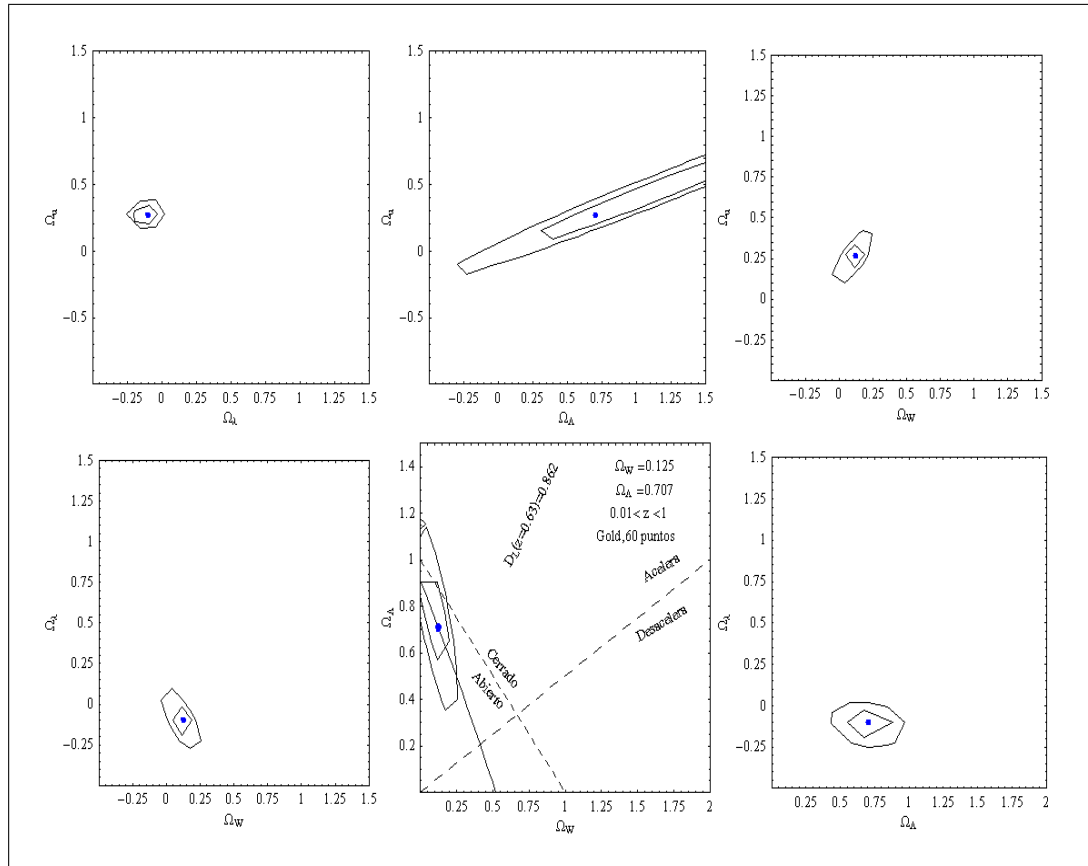


Figura 45: **Regiones de Confianza Domain Walls-braneworld**; estas gráficas muestran las regiones de confianza con un nivel de 68 % y 95 %. Igualmente se han conservado los elementos del plano estándar, como referencia. Se puede observar según el contorno el rango de valores de

los parámetros del modelo. Desde el punto de vista estadístico es conveniente obtener contornos pequeños lo cual permite acotar los valores de los parámetros, en este caso se observan contornos bien definidos y pequeños.

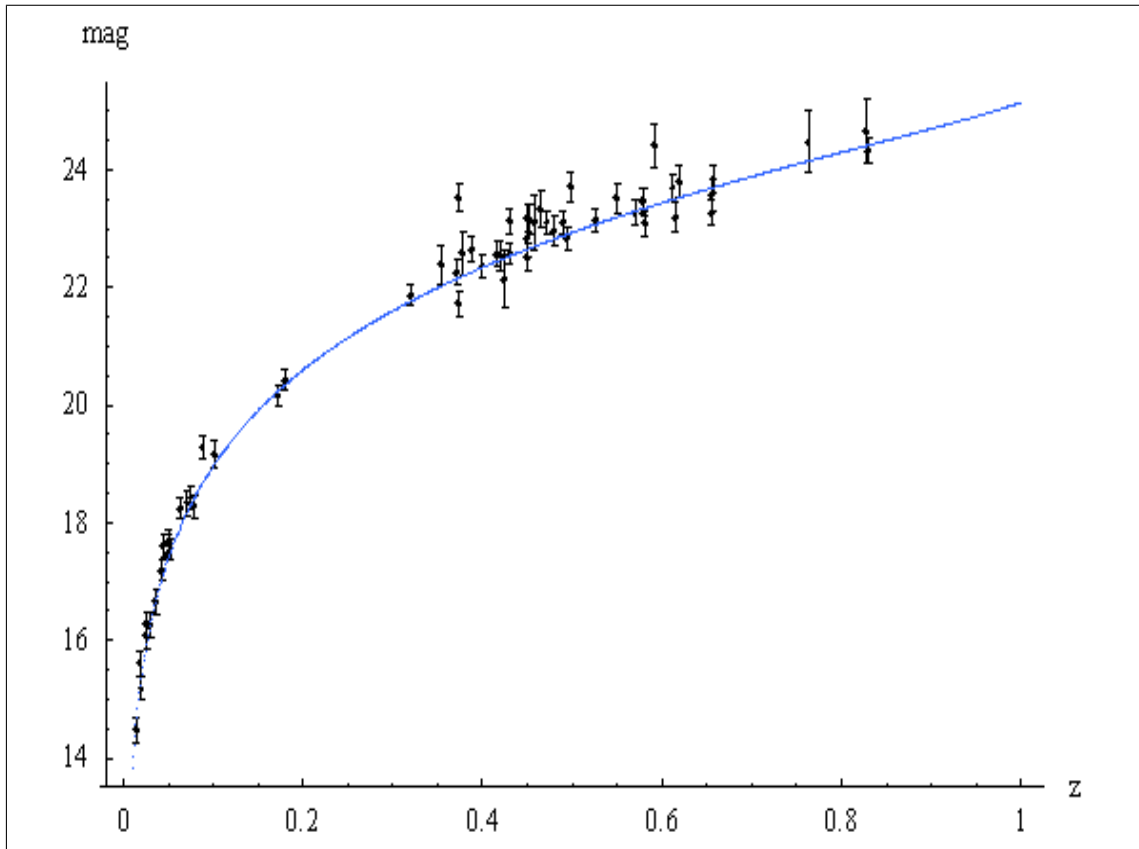


Figura 46: Curva teórica de mejor ajuste para SN Ia mediante Domain

Walls-braneworld; se obtiene un menor valor para la magnitud teórica. Se tiene que para corrimientos al rojo grandes la magnitud empieza a crecer. Se conoce que para corrimientos al rojo grandes, la magnitud observada es menor que lo que se predice teóricamente, de tal forma que esta curva teórica dificultaría el ajuste de los datos.

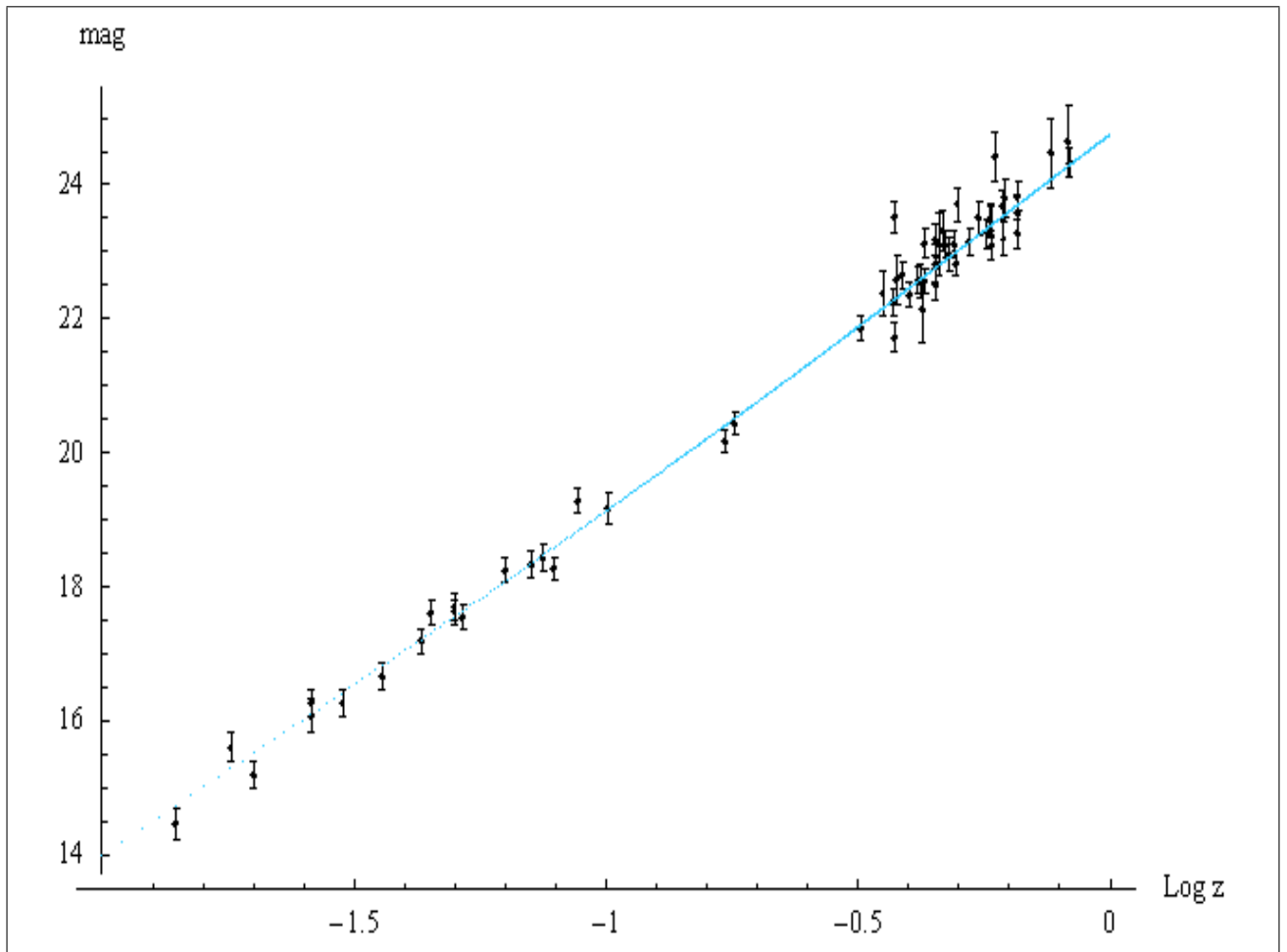


Figura 47: **Ajuste Logarítmico mediante Domain Walls-braneworld**; se observa en este ajuste con escala logarítmica, que para corrimientos al rojo grandes, la magnitud teórica empieza a crecer, es decir que si los datos observacionales son de magnitud mayor el ajuste sería bueno, pero lo que se conoce es que la magnitud para corrimientos al rojo mayores se hace más pequeña, lo cual no permite ajustar la curva teórica.

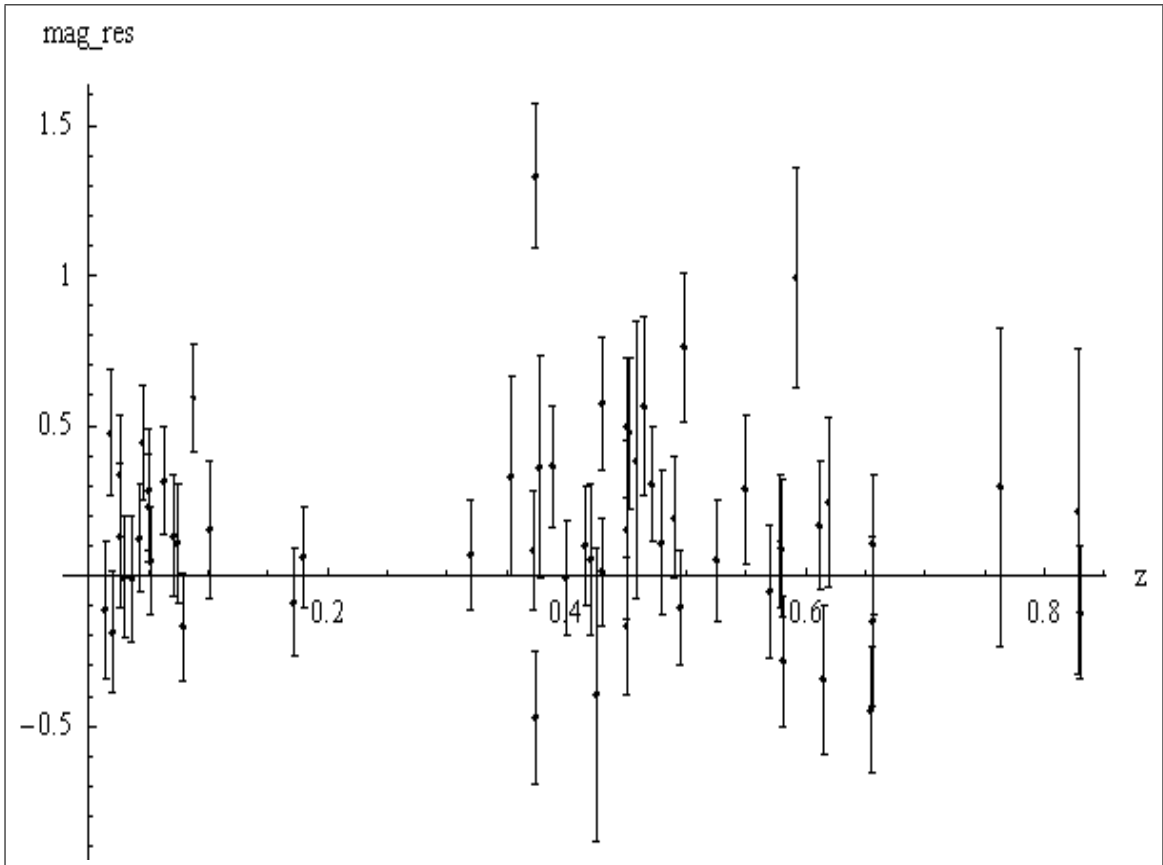


Figura 48: **Magnitud Residual para Domain Walls-braneworld**; *la magnitud residual para este caso presenta muchos más valores positivos que negativos, lo cual muestra nuevamente, que este modelo predice expansión acelerada.*

Los valores óptimos obtenidos son:

χ^2	Ω_W	Ω_Λ	Ω_λ	Ω_U	Ω_k
103.389	0.125831	0.707483	-0.0989964	0.268867	-0.003184

Cuadro 9.6: Tabla con los respectivos valores obtenidos de la rutina de máxima verosimilitud, se ha obtenido un valor de chi-cuadrado pequeño que muestra la bondad del ajuste, como también los respectivos valores mínimos de los parámetros del modelo.

9.1.7. Modelo brane hiperbólica bajo dominio de cuerdas cósmicas

Para este modelo se supone, que el universo está gobernado por cuerdas cósmicas, es decir filamentos muy delgados de materia energía que atraviesan el universo en grandes extensiones, y

se supone la existencia de SN Ia, este también constituye un modelo hipotético no realista. Para este caso el índice barotrópico es $\gamma = 2/3$, el cual permite encontrar los siguientes valores

χ^2	Ω_S	Ω_Λ	Ω_λ	Ω_U	Ω_k
105.052	0.0950158	0.73635	0.07575	0.104958	-0.01207

Cuadro 9.7: Tabla con los respectivos valores obtenidos de la rutina de máxima verosimilitud, se ha obtenido un valor de chi-cuadrado pequeño que muestra la bondad del ajuste, como también los respectivos valores mínimos de los parámetros del modelo.

Las regiones de confianza, las curvas de mejor ajuste, y la magnitud residual que se obtuvieron se muestran a continuación

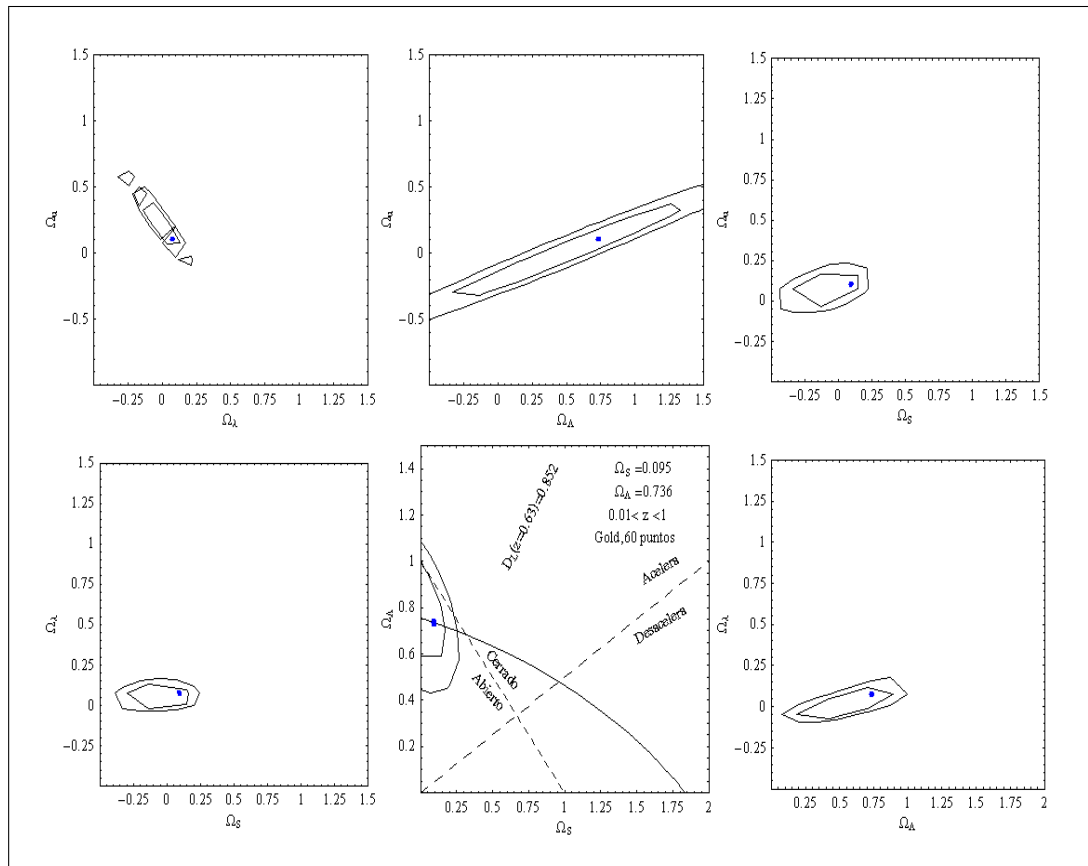


Figura 49: **Regiones de confianza para el modelo Cuerdas C3smicas-braneworld;** se muestran regiones de 68 % y 95 %, para un modelo brane con dominio de cuerdas, se ha conservado los elementos del plano estandar como referencia para el modelo. Se obtienen unos

contornos bastante definidos y pequeños para algunos planos, en general se busca que los contornos sean pequeños para acotar los valores de los parámetros de forma más precisa.

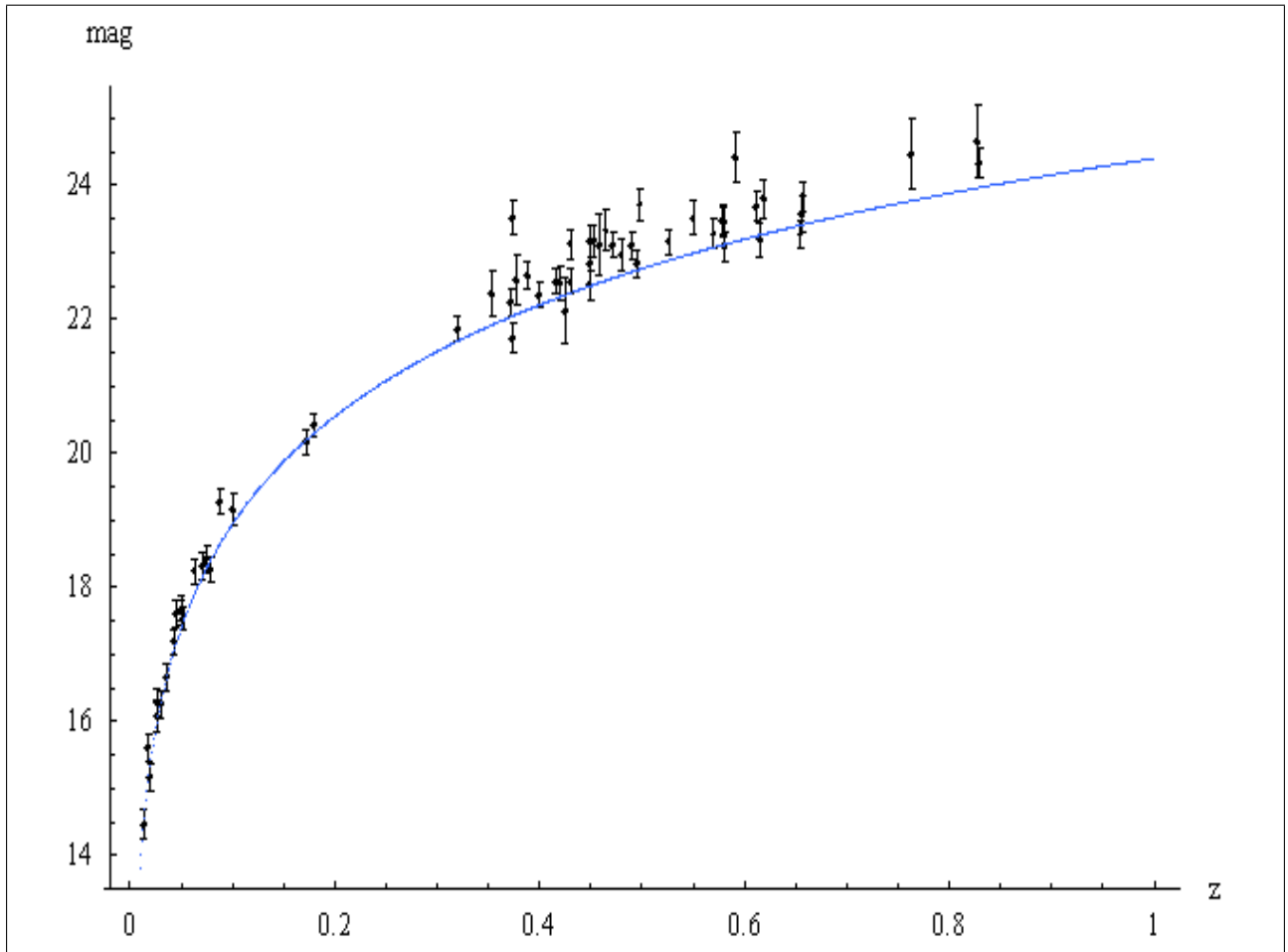


Figura 50: **Curva de mejor ajuste en el modelo Cuerdas C3smicas-braneworld;** *para dominio de cuerdas c3smicas, se observa un menor valor para la magnitud te3rica. La curva te3rica que se exhibe en principio no est3 ajustando los datos observacionales, ello es debido a que proviene de un modelo hip3t3tico, muestra claramente que este no es un modelo real.*

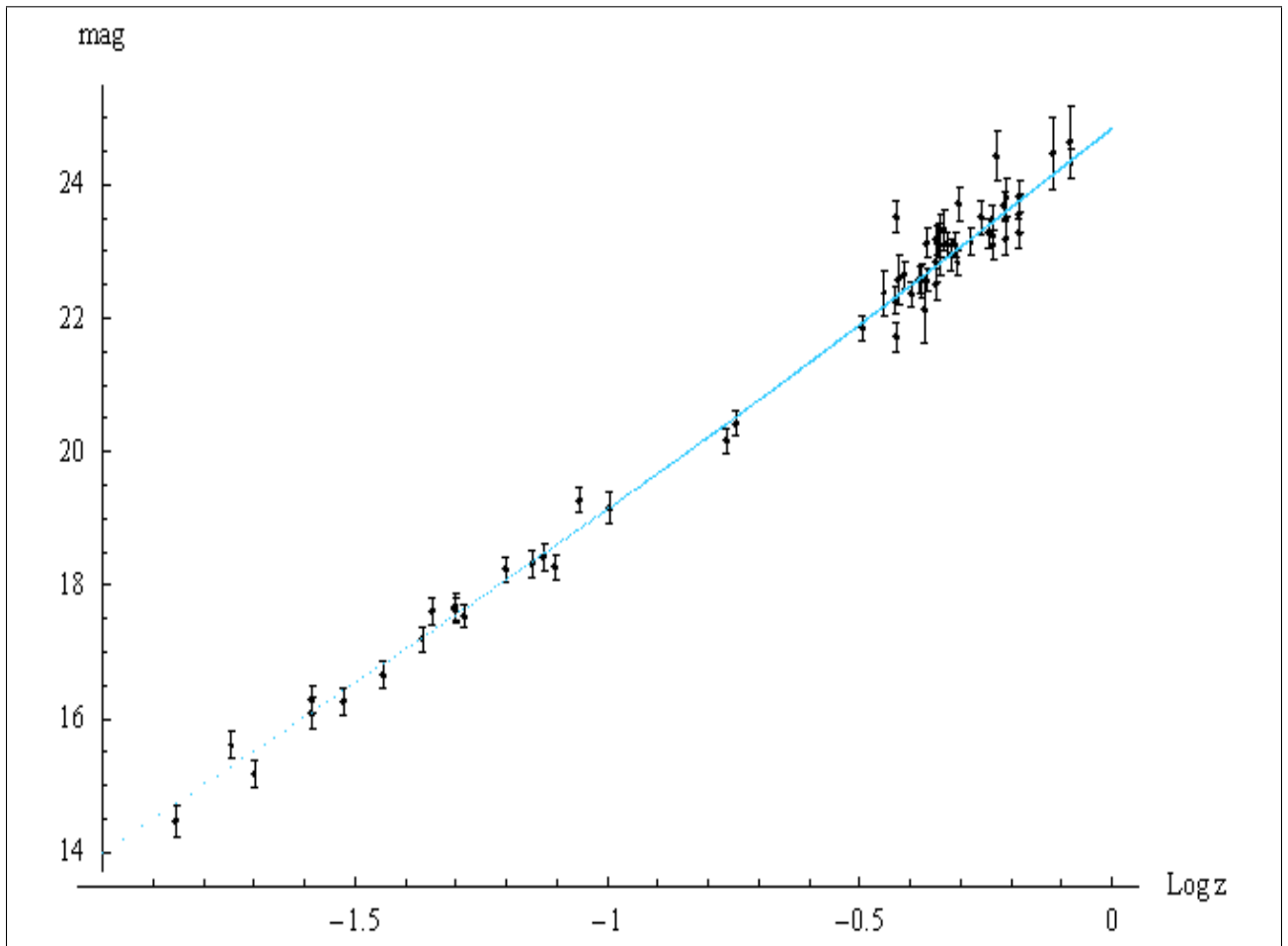


Figura 51: **Magnitud-Redshift con escala Logarítmica en Z** ; en esta escala logarítmica, la curva teórica no ajusta los datos observacionales, en especial los datos de alto corrimiento al rojo, ello es evidencia de lo irreal del modelo considerado, es decir un universo dominado por cuerdas cósmicas.

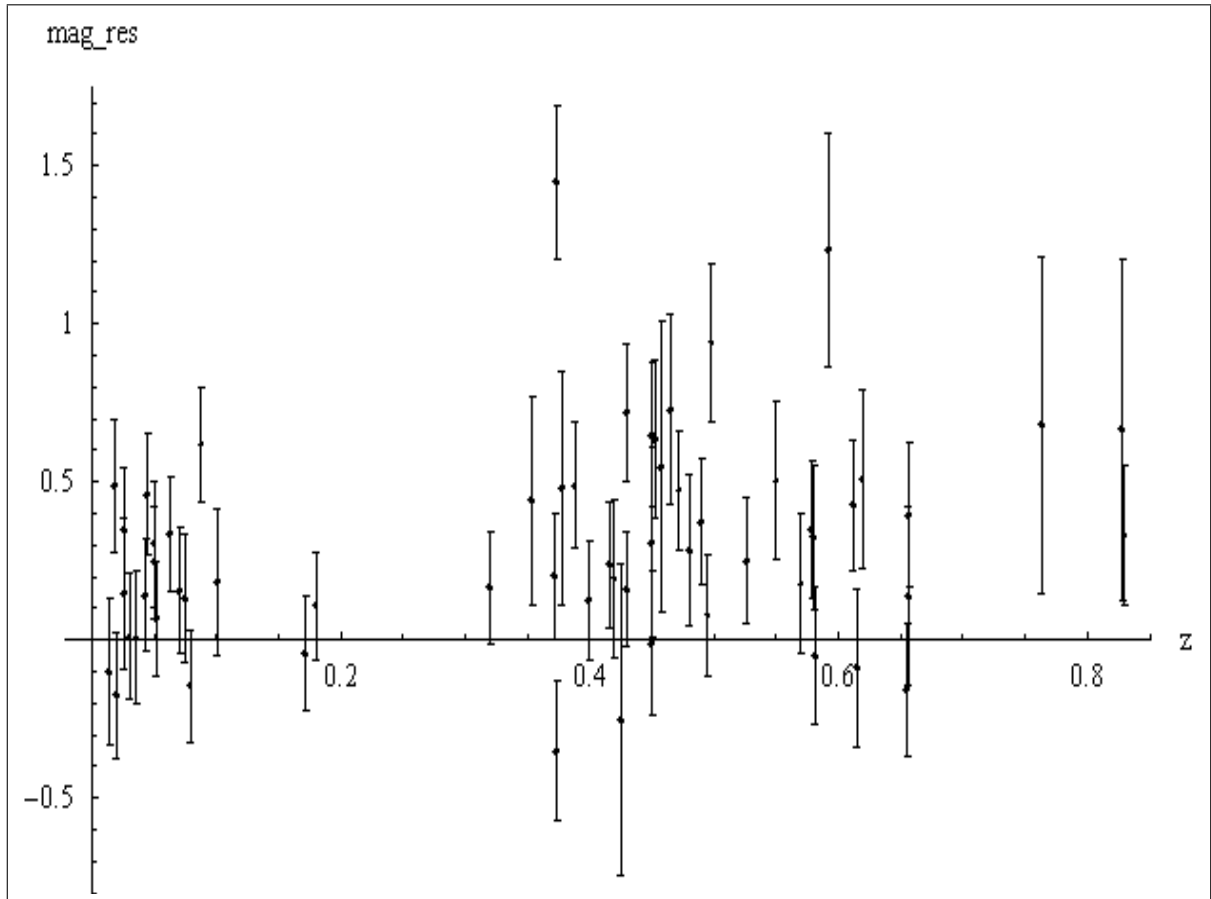


Figura 52: Magnitud residual para el modelo Cuerdas C3smicas-braneworld; en la cual se tiene preponderancia de valores positivos, lo cual favorece fuertemente la expansi3n acelerada del universo.

9.1.8. Modelo brane hiperb3lica bajo dominio de Energ3a Oscura

Este modelo constituye uno de los m3s importantes y en principio es un modelo realista en el sentido que como se conoce en la actualidad, el universo esta siendo dominado por una forma de energ3a conocida como energ3a oscura² [47], para este caso se ha considerado que la brane contiene energ3a oscura, haciendo $\gamma = -1/3$. Igualmente, se obtuvieron los valores de los par3metros mediante la t3cnica de m3xima verosimilitud, como tambi3n, las regiones de confianza, las curvas de mejor ajuste, y la magnitud residual. Los valores obtenidos son

²Aunque, en los modelos braneworld, la energ3a oscura es reemplazada por el efecto gravitacional de la dimensi3n extra, de tal forma que en este modelo tendr3amos el efecto combinado de la energ3a oscura y de la dimensi3n extra.

χ^2	Ω_D	Ω_Λ	Ω_λ	Ω_U	Ω_k
114.899	0.0508607	0.532503	0.521554	0.371577	-0.007096

Cuadro 9.8: Tabla con los respectivos valores obtenidos de la rutina de máxima verosimilitud, se ha obtenido un valor de chi-cuadrado pequeño que muestra la bondad del ajuste, como también los respectivos valores mínimos de los parámetros del modelo.

En este caso la curvatura es muy pequeña, es decir un modelo casi plano, y los términos adicionales Ω_λ y Ω_U tienen valores bastante representativos, esto lo que muestra es que en el Universo 4D surgen dos componentes importantes de energía, en principio se pueden asociar a las componentes de energía oscura y materia oscura. Es de notar también que la constante cosmológica presenta un valor un poco menor al aceptado hoy día. La densidad de energía oscura es pequeña, es decir la contribución de la energía oscura entendida como un tipo de energía-materia sobre la brane es mínima.

En este caso la suma de los parámetros no reporta un valor cercano a 1, posiblemente debe ser a falta de precisión o exactitud del programa de cálculo y el valor de chi cuadrado no es tan pequeño, quizá, se requiere mayor refinamiento en el programa, igualmente se obtuvieron los contornos de nivel que son.

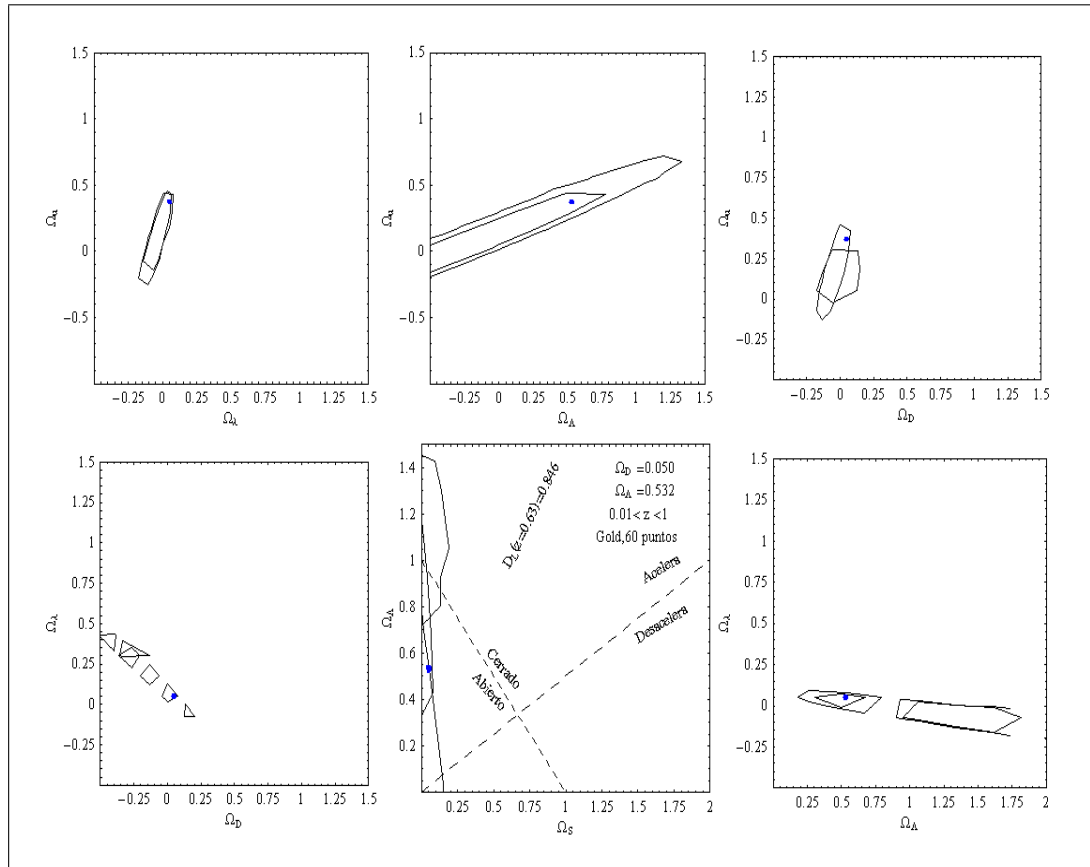


Figura 53: **Regiones de confianza para el modelo Energía Oscura-braneworld;** *para el modelo braneworld con energía oscura, se ha dejado los elementos del plano estándar para tenerlos como referentes en el modelo. De igual forma las regiones menores corresponden a una confianza del 68 % y las regiones mayores corresponden a una confianza del 95 %.*

Las curvas de mejor ajuste son

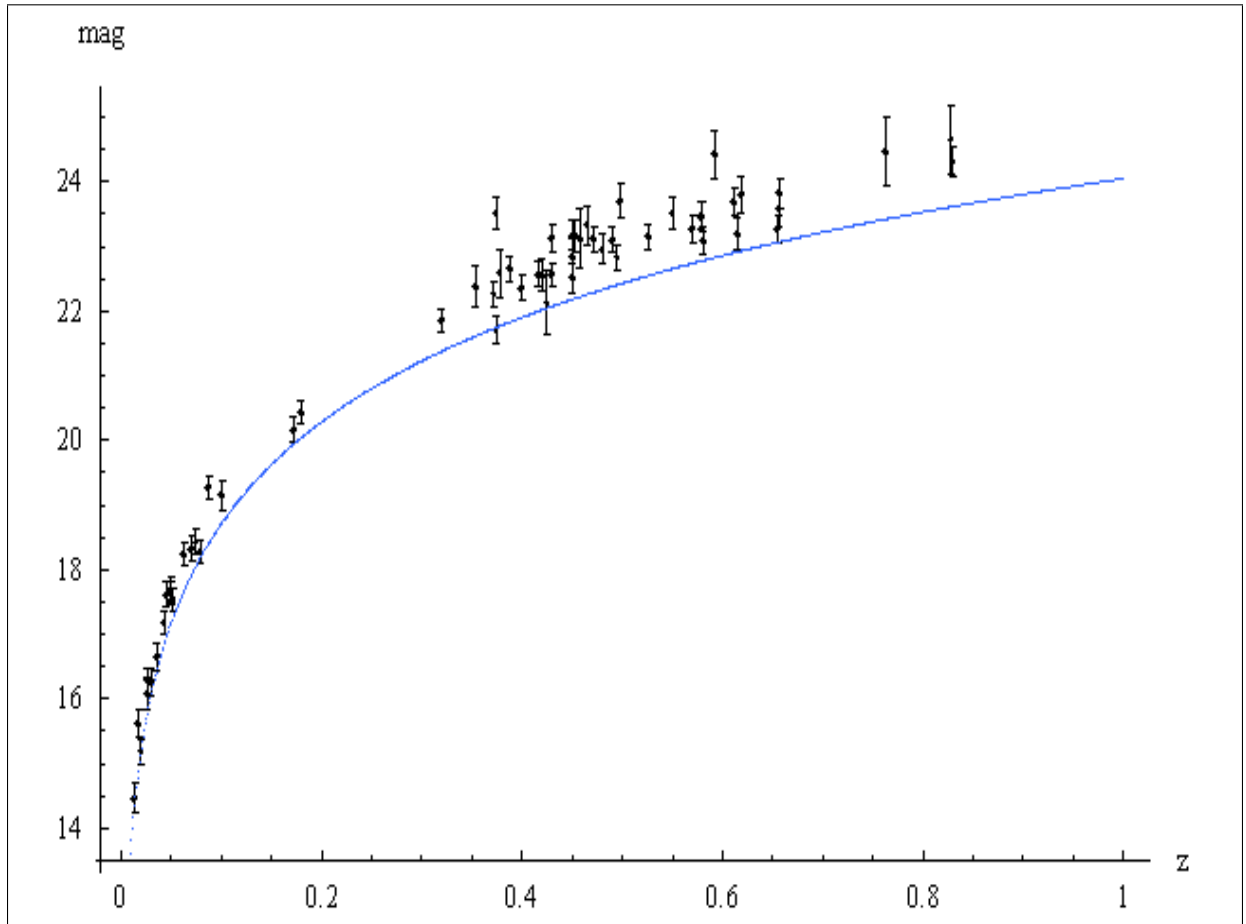


Figura 54: Curva de mejor ajuste para el modelo Energía Oscura-braneworld; para el braneworld con energía oscura, se observa que la magnitud teórica es menor de lo predicho por la curva estándar. Se observa que la curva teórica no ajusta completamente los datos, ya que es una curva teórica obtenida para un modelo hipotético, ello muestra que es una curva muy lejana para los datos observacionales, es decir que este modelo híbrido no reproduce la magnitud observacional.

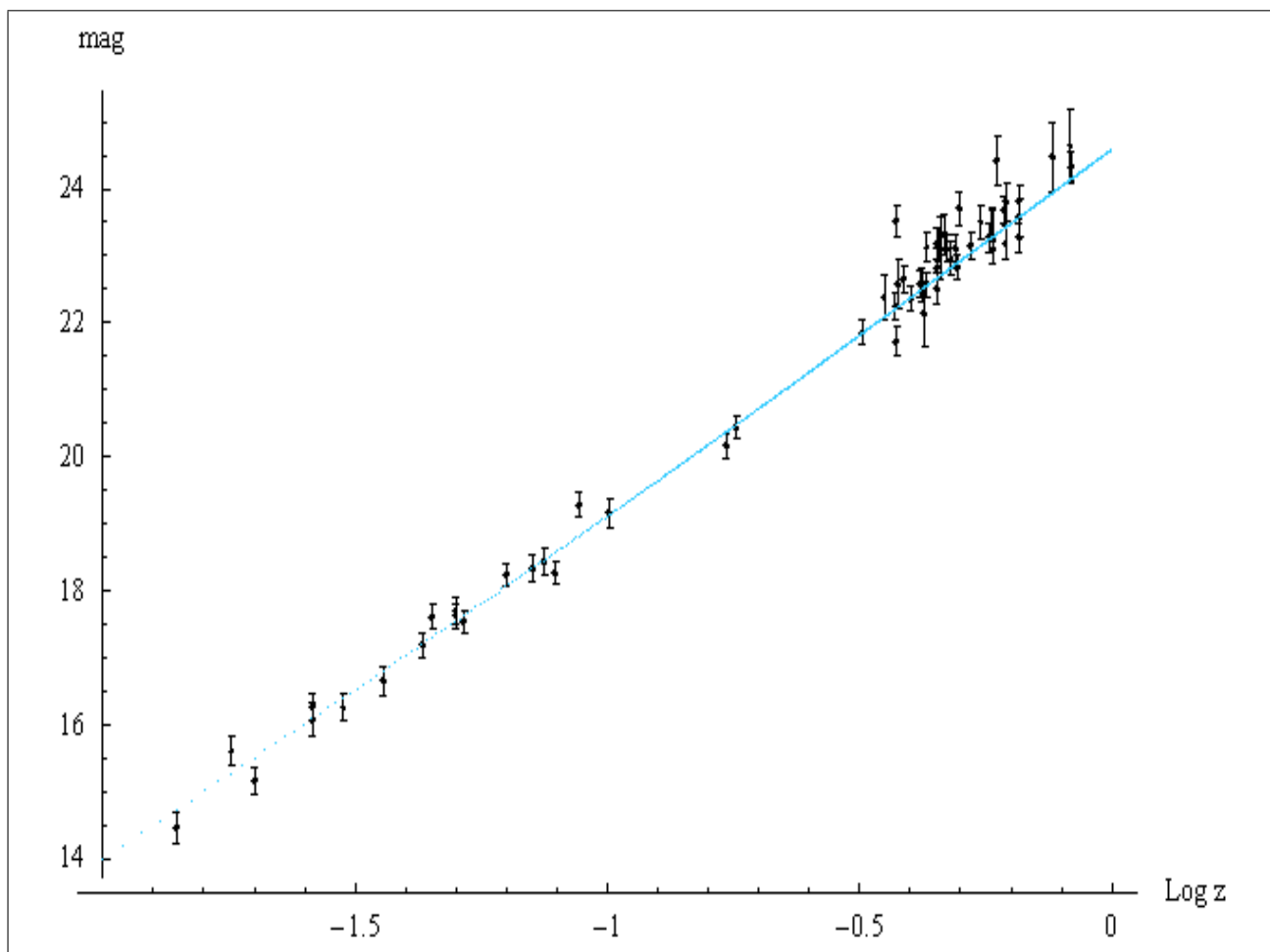


Figura 55: **Magnitud-redshift, en el modelo braneworld con energía oscura, y escala logarítmica; igualmente se observa menor magnitud de lo predicho por la curva estándar.**

Claramente la curva teórica no ajusta los datos observacionales, lo cual muestra que este modelo con energía oscura no es real o que hay una incompatibilidad de un universo brane con contenido de energía oscura.

La gráfica de magnitud residual es la siguiente

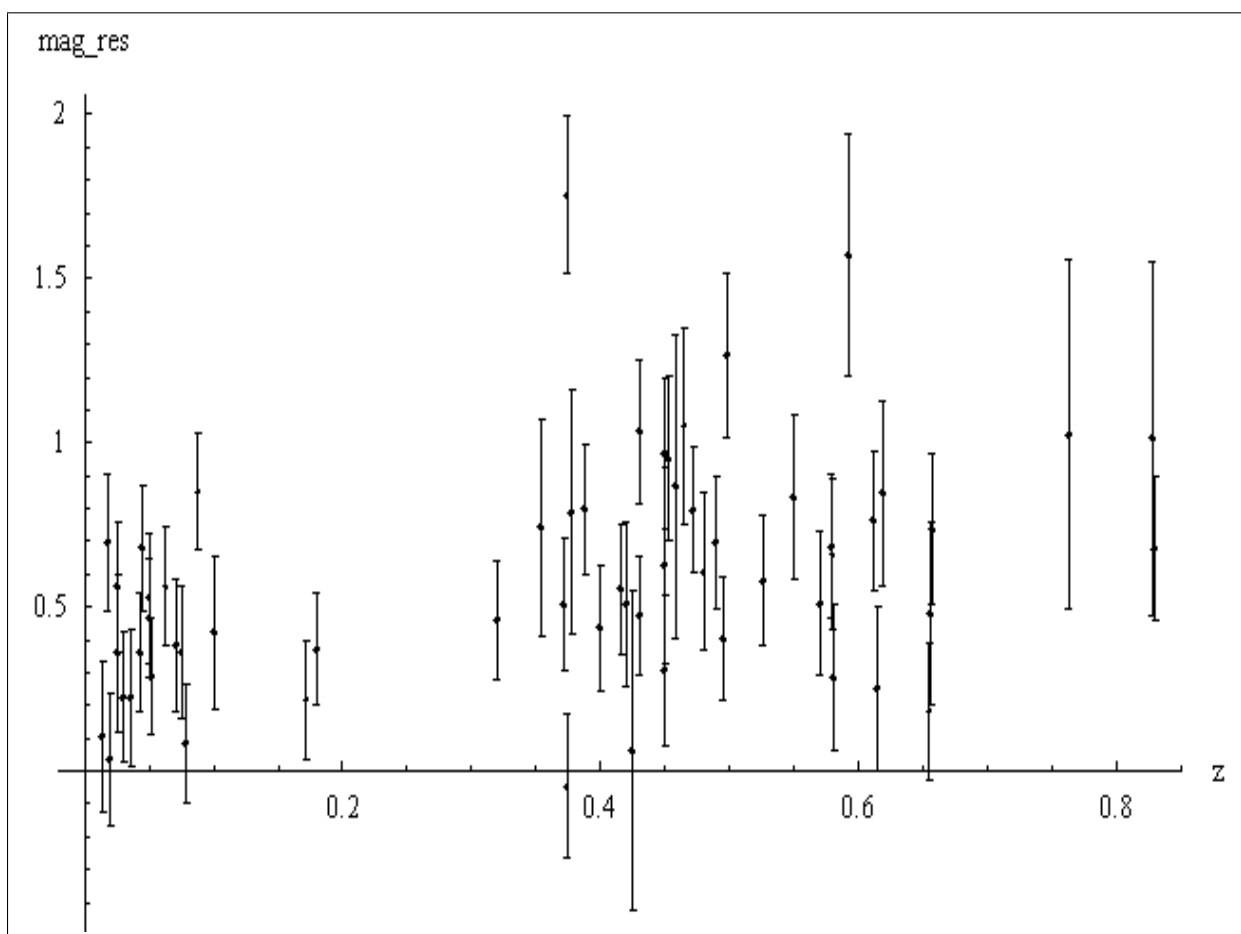


Figura 56: **Magnitud Residual modelo Energía Oscura-braneworld**; *la gráfica de magnitud residual muestra una gran cantidad de valores positivos, lo cual conduce a predecir bajo este modelo un universo en expansión acelerada o de muy fuerte expansión acelerada. Lo anterior obedece a la consideración de un modelo híbrido.*

9.2. Cosmometría del braneworld bajo SN Ia

9.2.1. Volumen Comóvil de braneworld bajo dominio de materia

En esta sección se ilustran las gráficas comparativas del modelo braneworld junto con el modelo estándar para el volumen comóvil y para cada uno de los tres tipos de curvatura posibles, es decir braneworld hiperbólicos, planos y esféricos. Las gráficas son obtenidas con los valores óptimos de cada uno de los parámetros, es decir los encontrados bajo la rutina de máxima verosimilitud. Dichas gráficas son

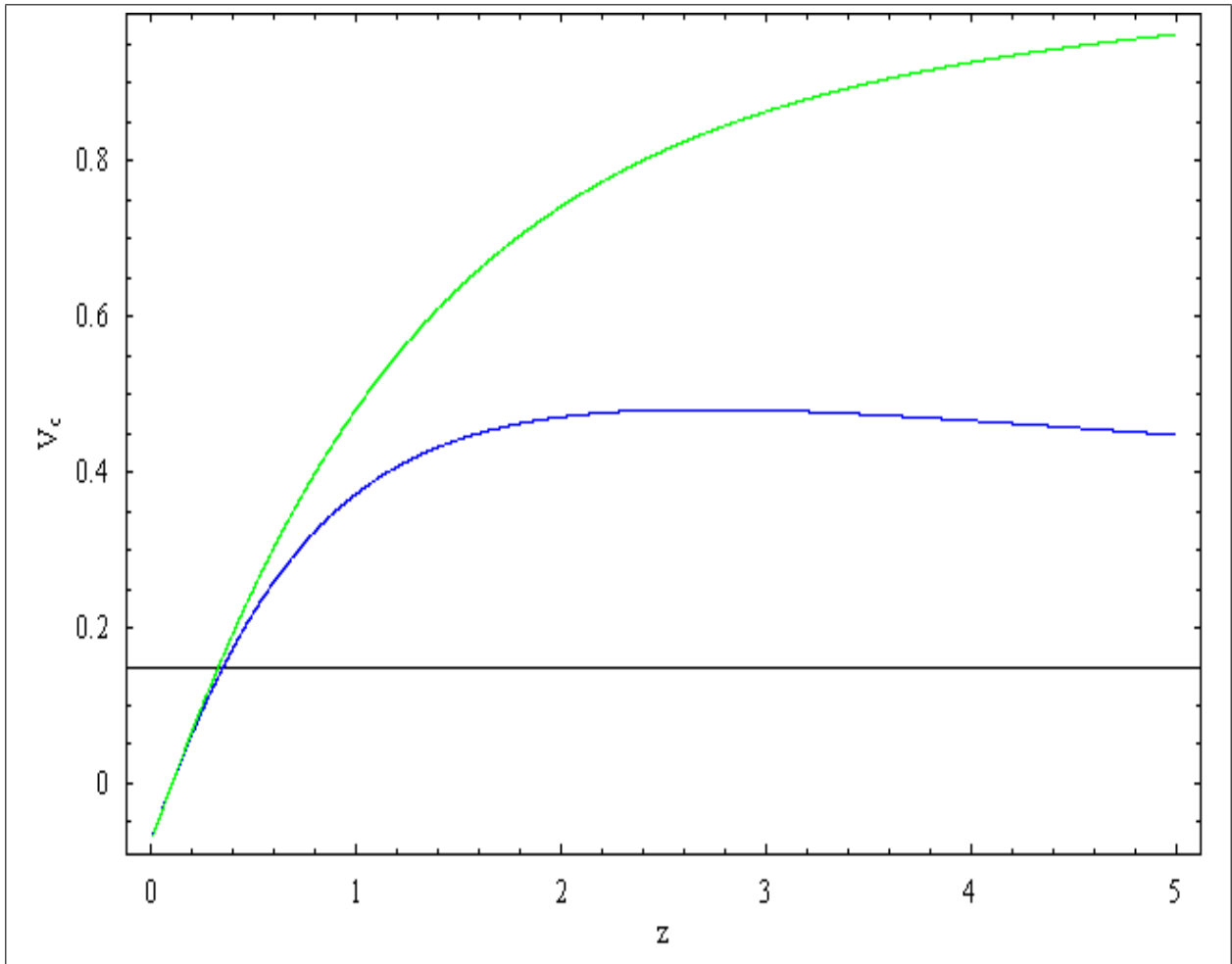


Figura 57: **Volumen Comóvil**; la gráfica muestra el volumen comóvil para el modelo brane tipo hiperbólico, gráfica verde, junto con el volumen comóvil para el modelo estándar, gráfica azul. Se observa que en el caso de corrimientos al rojo grandes el volumen comóvil predicho por la membrana es mayor que para el caso estándar. Las gráficas fueron obtenidas con los valores óptimos de los parámetros.

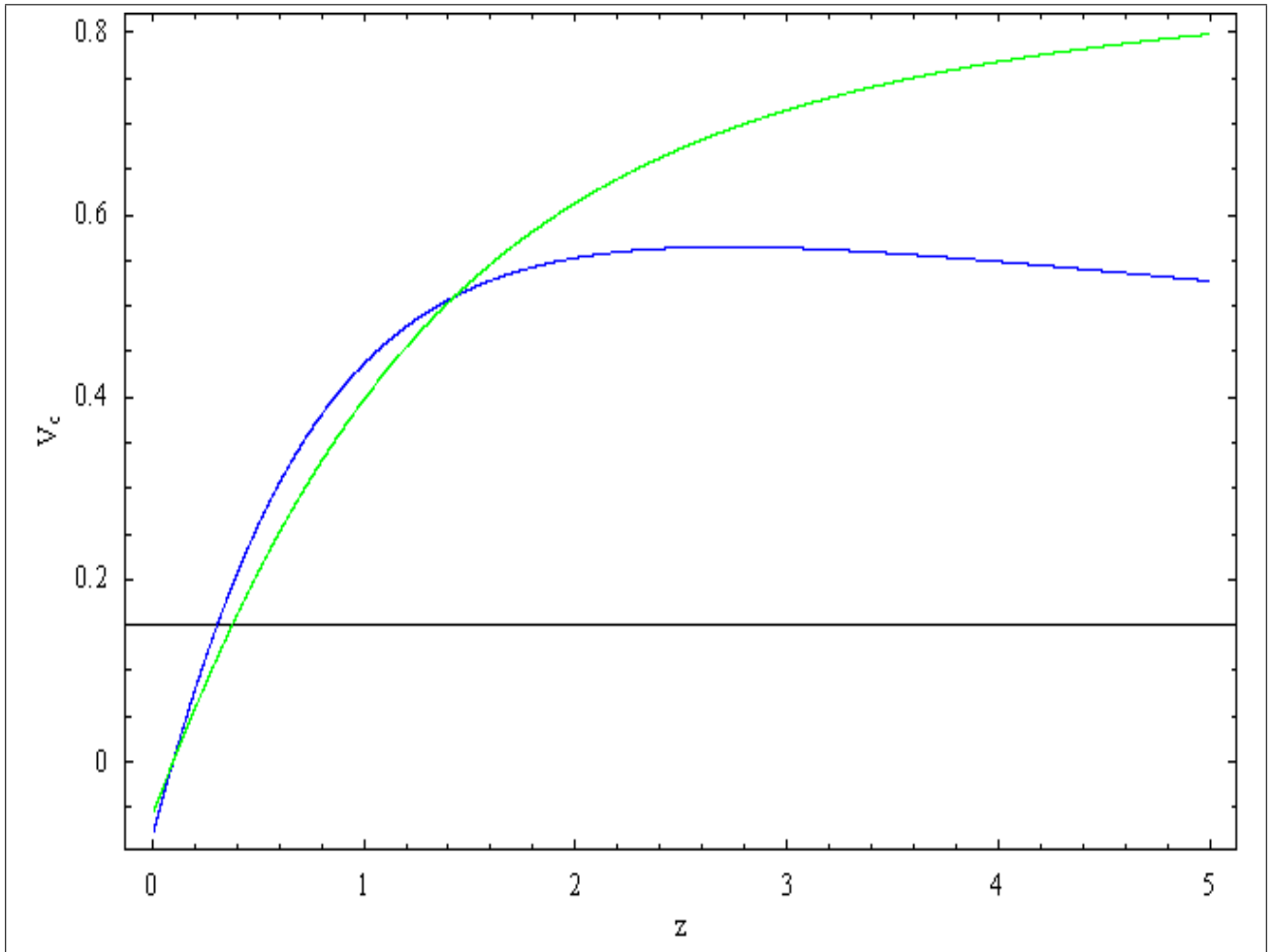


Figura 58: **Volumen Comóvil**; la gráfica muestra el volumen comóvil para el modelo brana tipo plana, gráfica verde, junto con el volumen comóvil para el modelo estándar, gráfica azul. Se observa que en el caso de corrimientos al rojo grandes el volumen comóvil predicho por la membrana es mayor que para el caso estándar, pero en el caso de corrimientos al rojo pequeños se invierte el comportamiento. Las gráficas fueron obtenidas con los valores óptimos de los parámetros.

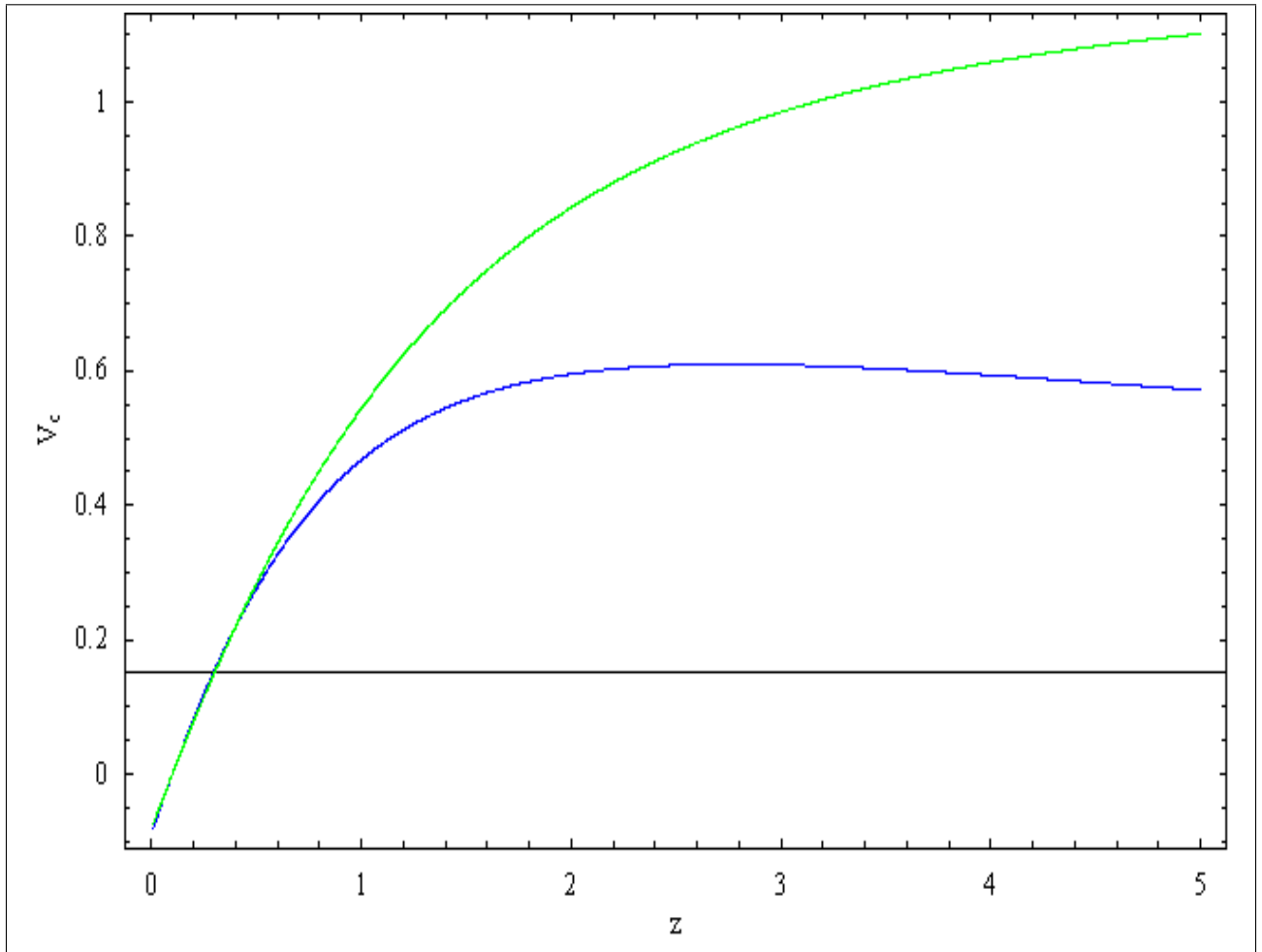


Figura 59: **Volumen Comóvil**; la gráfica muestra el volumen comóvil para el modelo brane tipo esférica, gráfica verde, junto con el volumen comóvil para el modelo estándar, gráfica azul. Se observa que en el caso de corrimientos al rojo grandes el volumen comóvil predicho por la membrana es mayor que para el caso estándar. En este caso la diferencia de los valores predichos por los modelos es menor que la diferencia en el caso de brane tipo hiperbólica. Las gráficas fueron obtenidas con los valores óptimos de los parámetros.

9.2.2. Distancia de Luminosidad bajo dominio de materia

Nuevamente ilustramos las gráficas correspondientes a la distancia de luminosidad obtenidas bajo la rutina de máxima verosimilitud, en el caso de un braneworld tipo hiperbólico, plano y esférico.

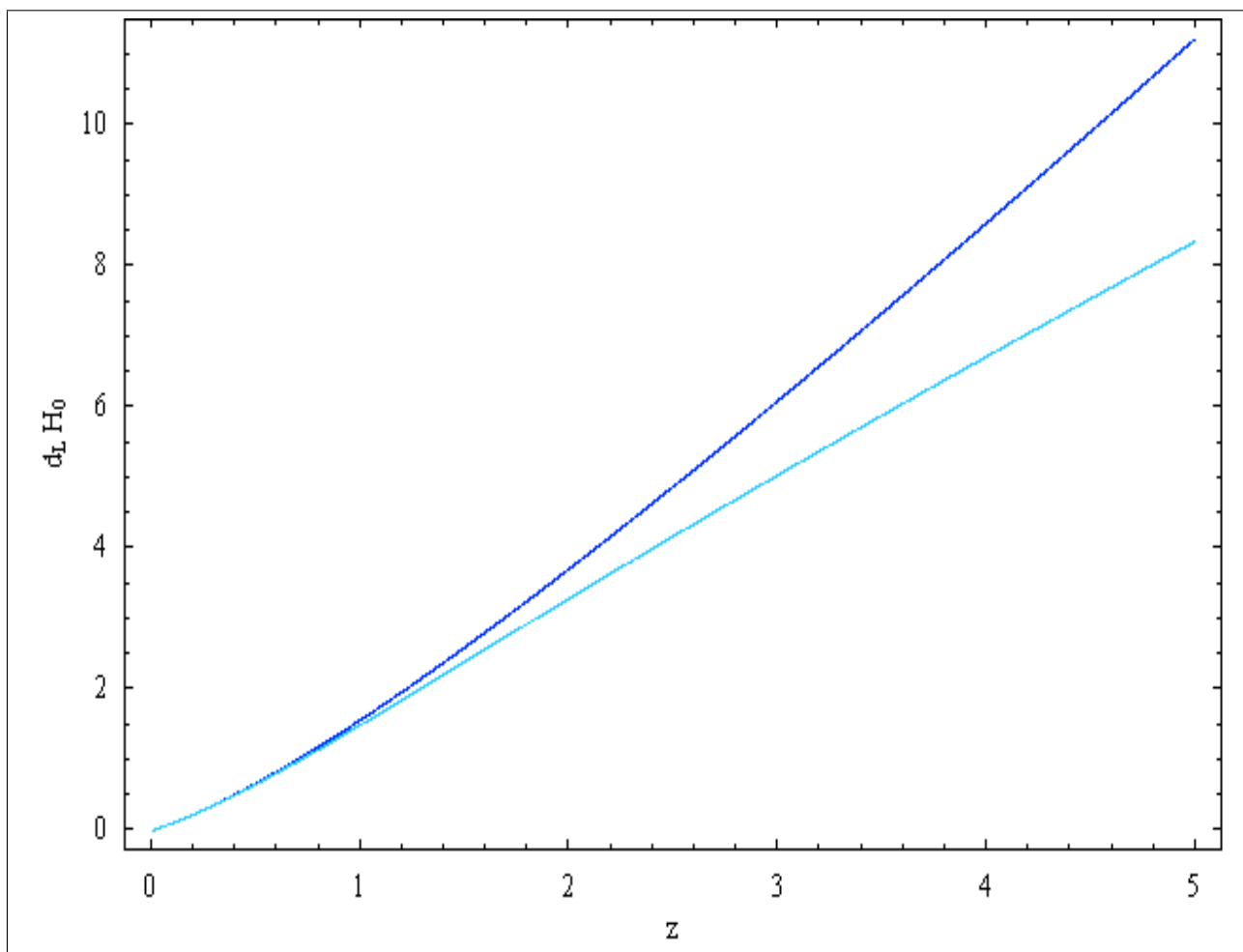


Figura 60: **Distancia de Luminosidad**; la gráfica muestra la distancia de luminosidad para el modelo brane tipo hiperbólico, gráfica cian, junto con el volumen comóvil para el modelo estándar, gráfica azul. Se observa que en el caso de corrimientos al rojo grandes la distancia de luminosidad predicho por la membrana es menor que para el caso estándar. Las gráficas fueron obtenidas con los valores óptimos de los parámetros.

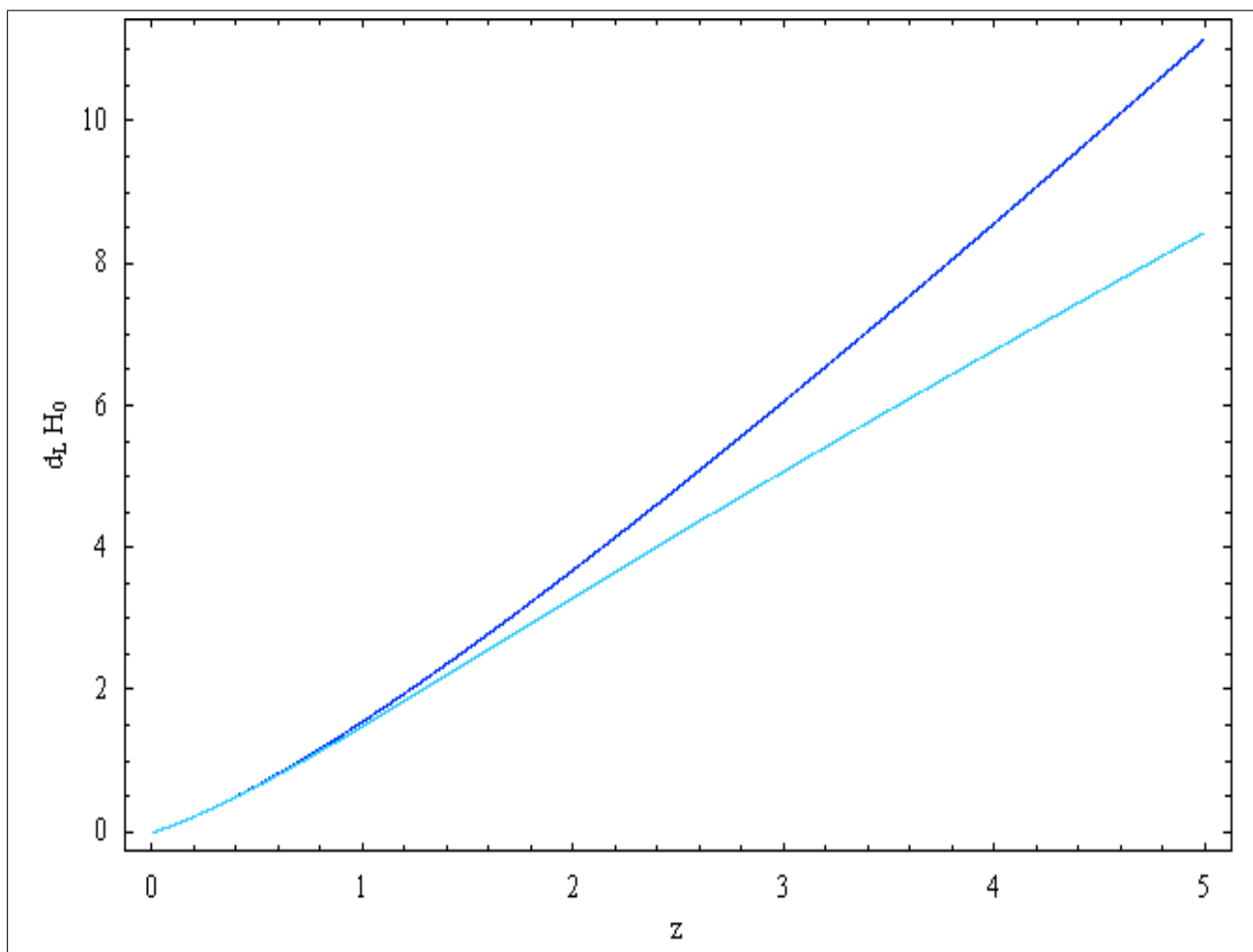


Figura 61: **Distancia de Luminosidad**; la gráfica muestra la distancia de luminosidad para el modelo brane tipo plano, gráfica cian, junto con la distancia de luminosidad para el modelo estándar, gráfica azul. Se observa que en el caso de corrimientos al rojo grandes la distancia de luminosidad predicho por la membrana es menor que para el caso estándar. Las gráficas fueron obtenidas con los valores óptimos de los parámetros.

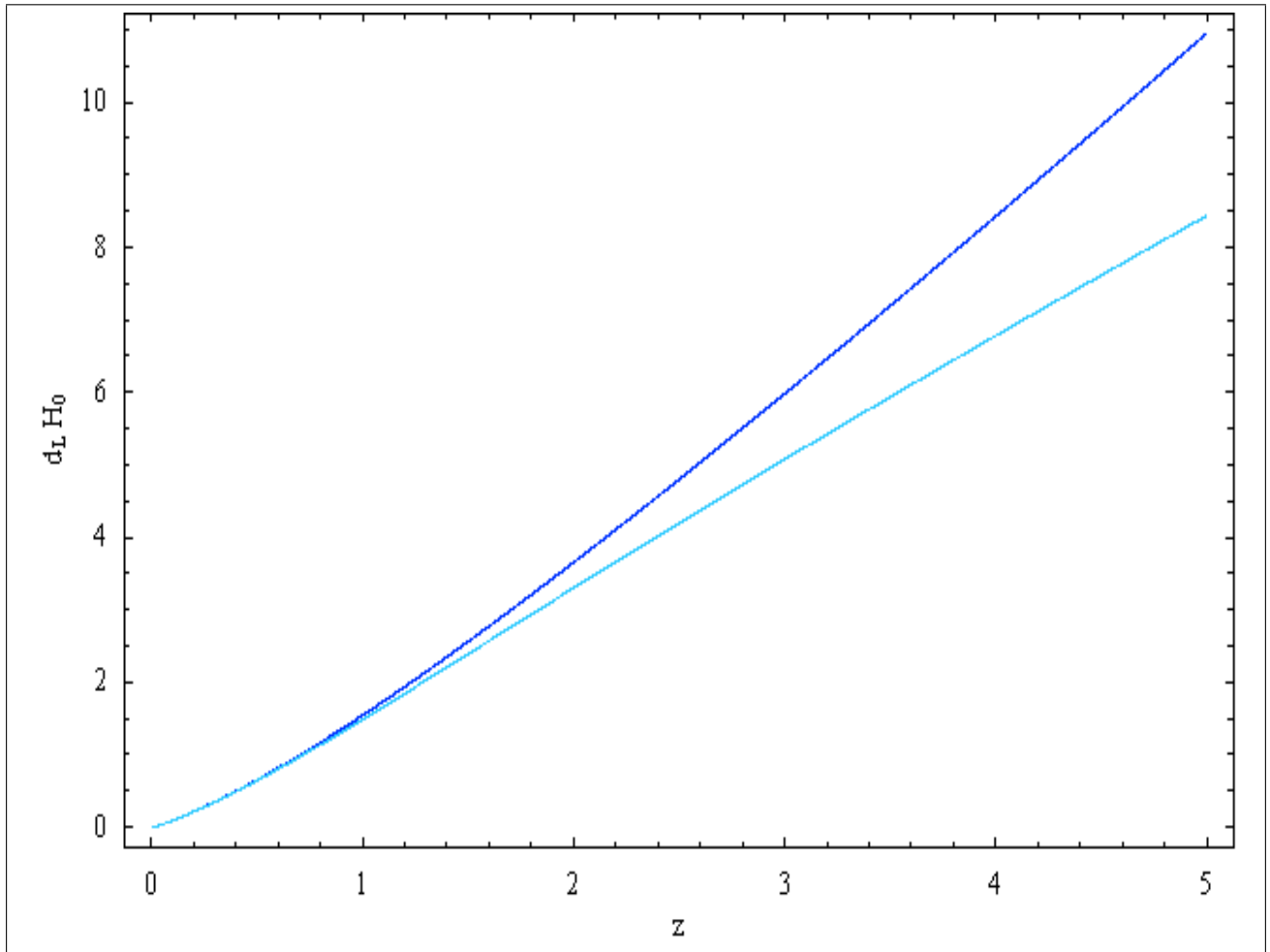


Figura 62: **Distancia de Luminosidad**; la gráfica muestra la distancia de luminosidad para el modelo brane tipo esférico, gráfica cian, junto con la distancia de luminosidad para el modelo estándar, gráfica azul. Se observa que en el caso de corrimientos al rojo grandes la distancia de luminosidad predicho por la membrana es menor que para el caso estándar. Las gráficas fueron obtenidas con los valores óptimos de los parámetros.

9.2.3. Distancia Diametral Angular bajo dominio de materia

Aquí, se muestran las gráficas comparativas para la distancia diametral angular obtenidas bajo la rutina de máxima verosimilitud, en el caso de un braneworld tipo hiperbólico, plano y esférico.

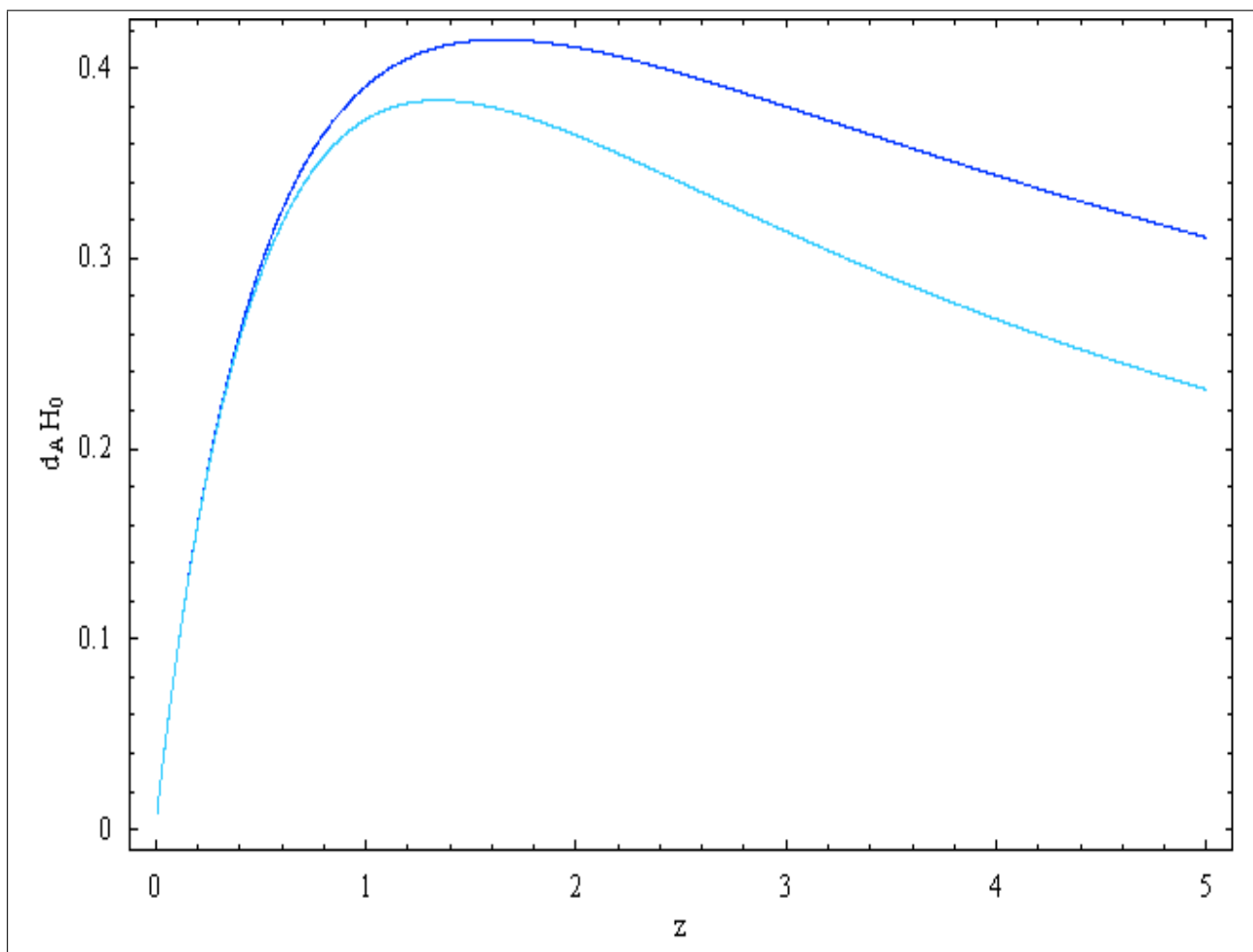


Figura 63: **Distancia diametral angular**; la gráfica muestra la distancia diametral angular para el modelo brane tipo hiperbólico, gráfica cian, junto con la distancia de luminosidad para el modelo estándar, gráfica azul. Se observa que en el caso de corrimientos al rojo grandes la distancia diametral angular predicho por la membrana es menor que para el caso estándar. Las gráficas fueron obtenidas con los valores óptimos de los parámetros.

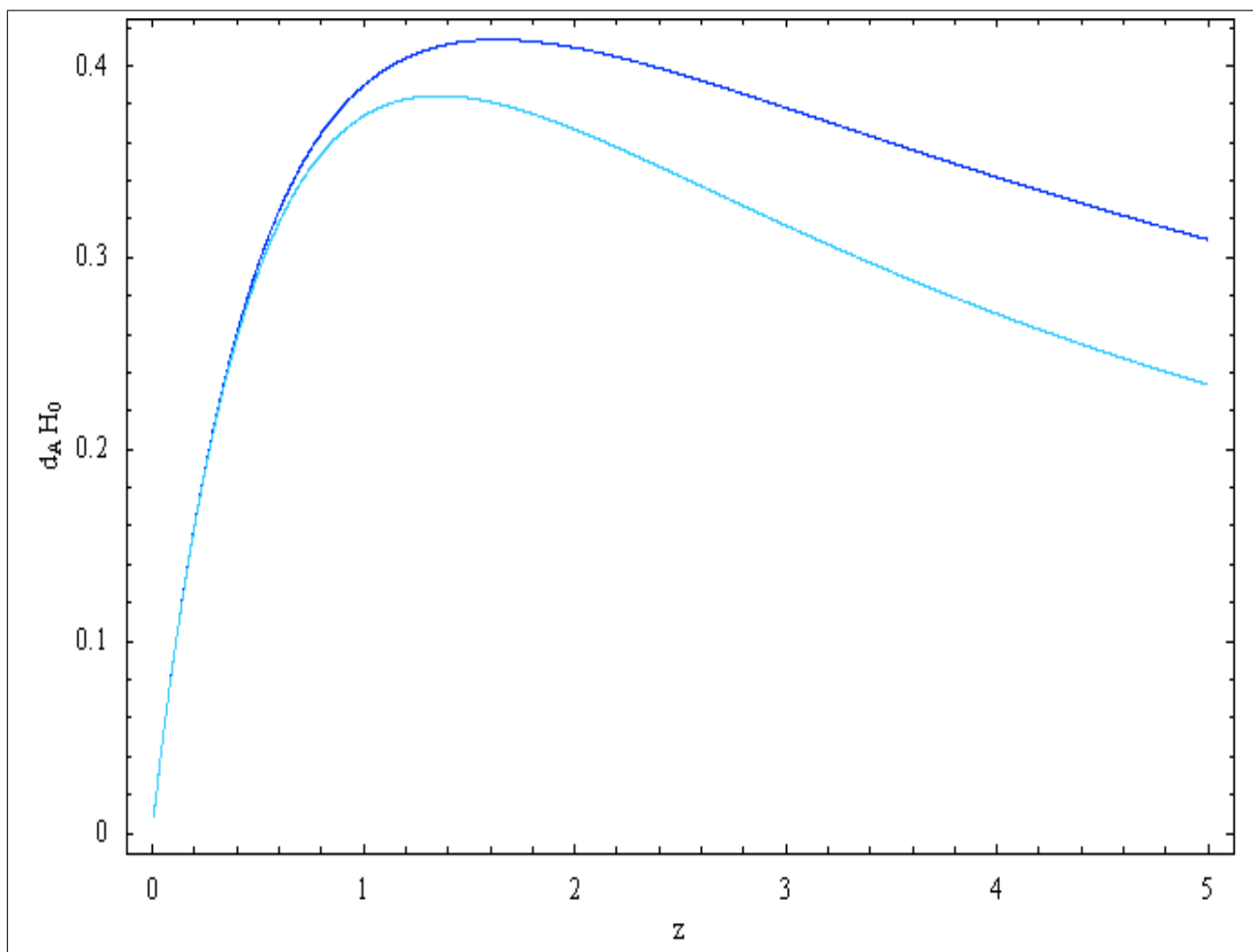


Figura 64: **Distancia diametral angular**; la gráfica muestra la distancia diametral angular para el modelo brane tipo plano, gráfica cian, junto con la distancia de luminosidad para el modelo estándar, gráfica azul. Se observa que en el caso de corrimientos al rojo grandes la distancia diametral angular predicho por la membrana es menor que para el caso estándar. Las gráficas fueron obtenidas con los valores óptimos de los parámetros.

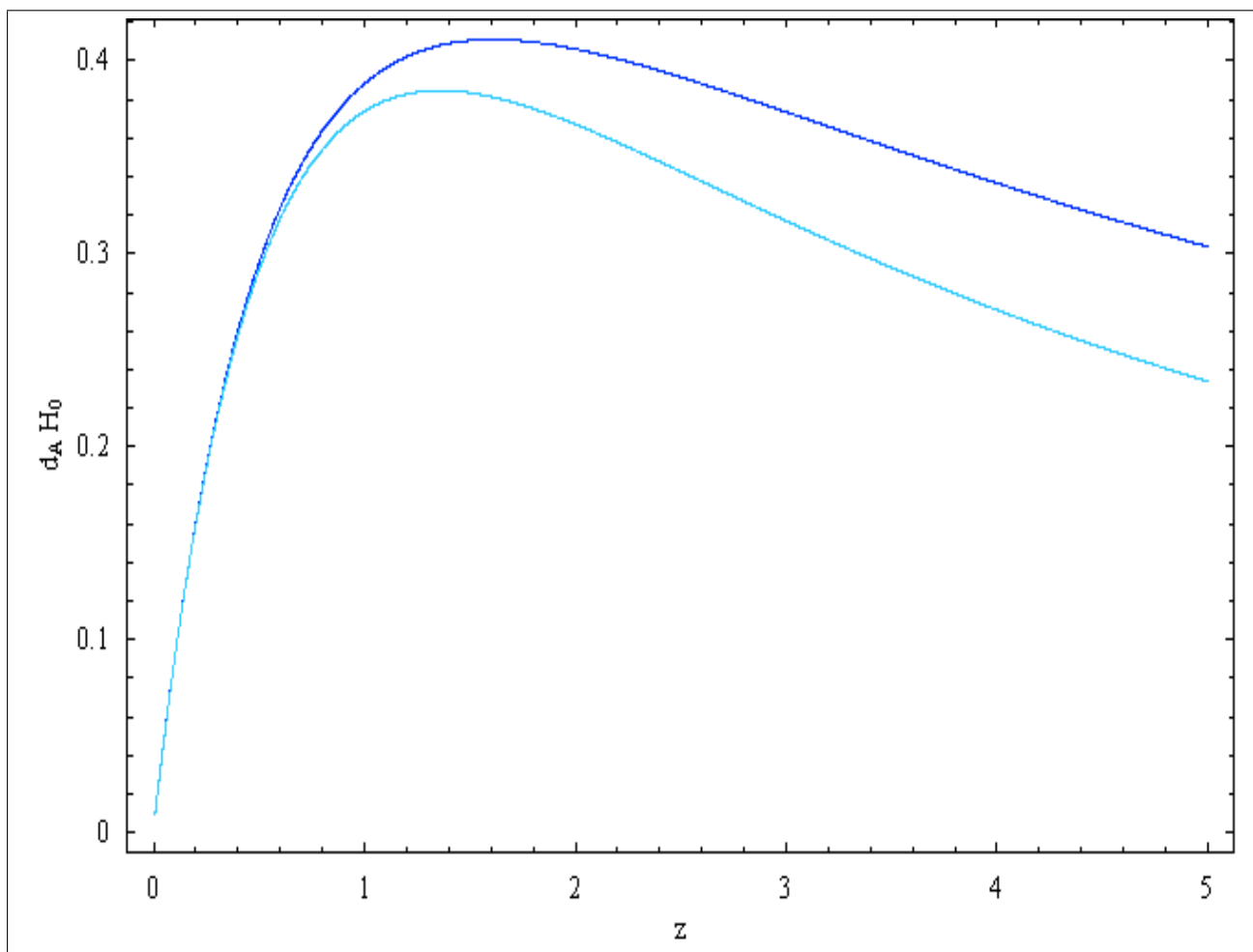


Figura 65: **Distancia diametral angular**; la gráfica muestra la distancia diametral angular para el modelo brane tipo esférico, gráfica cian, junto con la distancia de luminosidad para el modelo estándar, gráfica azul. Se observa que en el caso de corrimientos al rojo grandes la distancia diametral angular predicho por la membrana es menor que para el caso estándar. Las gráficas fueron obtenidas con los valores óptimos de los parámetros.

Capítulo 10

Braneworld y observaciones cosmológicas

Las SN Ia, son explosiones termonucleares de enanas blancas de carbón-oxígeno [37] y son universalmente consideradas como patrones de intensidad estándar observados a escala cosmológica ya que es bastante alta su luminosidad absoluta. La observación de SN Ia con redshift $z \leq 1$ ha brindado una alarmante y sutil evidencia de que la expansión del Universo en la época actual parece estar acelerando, como se ha mencionado en los apartados anteriores, dicho comportamiento se ha atribuido a la llamada “Energía Oscura” con presión negativa (Riess et al. 1998; Perlmutter et al. 1999). La evidencia directa proviene del opacamiento o merma en el brillo aparente de SN Ia para $z \approx 1$. Recientemente, se han recopilado muchos más datos de SN Ia los cuales han reforzado el análisis y validéz estadística de este hecho (Knop et al. 2003) mientras otras investigaciones han extendido las muestras de SN Ia para $z \approx 1$ (Tonry et al. 2003; Barris et al. 2004). Además, las observaciones de la estructura a gran escala del Universo (LSS), cuando se combinan con medidas del tamaño angular característico de fluctuaciones en la radiación cósmica de Fondo (CMB), suministran evidencia independiente (aunque indirecta) para considerar efectos y componentes de la energía oscura (e. g. , Spergel et al. 2003). Una investigación independiente, aunque más tentativa, mediante el efecto integrado de Sachs-Wolfe (ISW) también suministra evidencia de la energía oscura (Scranton et al. 2003). La magnitud de la aceleración observada no fue anticipada por la teoría y continúa siendo un gran reto para una explicación adecuada. Los candidatos para la energía oscura incluyen la constante cosmológica Λ con un valor fenomenológico pequeño, evolución de campos escalares, y un debilitamiento de la gravedad en

nuestras 3+1 dimensiones por fuga gravitacional en otras dimensiones requeridas por la teoría de cuerdas (Deffayet, Dvali, Gabadadze 2002). Estas explicaciones deben soportarse en la física fundamental lo cual ha estimulado la observación para confirmar los resultados iniciales de la energía oscura, posibles pruebas, detección de errores y extender nuestro conocimiento empírico de estos novedosos descubrimientos en el Universo.

Los efectos astrofísicos pueden imitar o sustituir la evidencia directa de las SN Ia para la expansión acelerada del Universo. Un apantallamiento perverso del polvo gris puede opacar las SN Ia mostrando un enrojecimiento (Aguirre et al. 1999a, b). La evolución de la luminosidad puede corromper las medidas si las SN Ia en $z \approx 0,5$ están intrínsecamente disminuyendo la luminosidad. A la fecha, ninguna evidencia de origen astrofísico del opacamiento de SN Ia se ha encontrado. Sin embargo, dada la importancia de la energía oscura y de la capacidad de las SN Ia para evidenciar este hecho, se requiere una prueba más definitiva de la hipótesis de que las supernovas en $z \approx 0,5$ están intinsecamente opacandosen o mermando su luminosidad por absorción.

Si la aceleración cósmica es la razón por la cual las SN Ia están opacandosen en $z \approx 0,5$, entonces se espera una desaceleración cósmica para $z > 1$ para invertir el signo de el efecto observado. Además, entre otras cosas las SN Ia para $z > 1$ continuaran demarcando el camino para la construcción de modelos cosmológicos, la observación de SN Ia para corrimientos al rojo altos suministrará la única posibilidad de discriminar entre ecuaciones de estado de energía oscura evolutivas o estáticas.

Una de las virtudes de los modelos braneworld es que suministran un mecanismo alternativo por el cual la aceleración cósmica se puede producir sin la necesidad de invocar la energía oscura y su difícil observación o determinación. Específicamente, se pueden explorar modelos en los cuales la aceleración es producida por el intercambio de energía entre bulk y brane. El modelo Randall-Sundrum, como se ha mostrado anteriormente, ha sido propuesto como un modelo fenomenológico práctico sobre el cual se puede explorar la física en altas dimensiones. Como la distancia por luminosidad D_L depende sensiblemente de la curvatura espacial y de la dinámica involucrada en los modelos, la relación magnitud-redshift para SN Ia de alto corrimiento al rojo puede ser usada como una prueba potencial de modelos cosmológicos, además de suministrar una herramienta útil para restringir los parámetros de los modelos. Según lo mencionado anteriormente, la observación de SN Ia para $z > 1$, definirá los modelos cosmológicos apropiados, esto puede ser considerado en la limitación que presenta la curva de magnitud -redshift proporcionada por el modelo estándar

para ajustar la SN Ia 1997ff (la magnitud predicha es menor que la observada), mientras el modelo RS proporciona un ajuste mucho mejor para ésta SN Ia (dicho ajuste no se muestra explícitamente en este trabajo ya que se consideraron SN Ia para $z \leq 1$) pero constituye un elemento importante para otros trabajos.

Las observaciones cosmológicas nos indican que en el presente, la razón de la suma de las densidades de todas las formas de materia-energía en el Universo a la densidad crítica para un Universo globalmente plano, es

$$\Omega_T = \frac{\rho_m + \rho_\Lambda}{\rho_{cri}} = \Omega_m + \Omega_\Lambda = 1,02 \pm 0,04 , \quad (10.1)$$

donde las densidades crítica y de constante cosmológica se obtienen de la siguiente manera

$$\rho_{cri} = \left(\frac{3}{8\pi G}\right)H^2 \quad , \quad \rho_\Lambda = \left(\frac{\Lambda}{8\pi G}\right) . \quad (10.2)$$

Los datos son consistentes con la posibilidad de que Ω_T sea precisamente uno, implicando un Universo espacialmente plano infinito. Los mejores valores de parámetros cosmológicos relevantes según el satélite WMAP (2003) son $H_0 = 71 \text{ Km}/\text{SMpc}$, $\Omega_{m0} = 0,27$, $\Omega_\Lambda = 0,75$, $\Omega_k = 0$, $R_\Lambda = 16 \text{ Gly}$ (radio de Sitter) [38]. Puede observarse en la sección anterior que la suma de parámetros cosmológicos es cercana a uno, y que la densidad de curvatura presenta valores pequeños, puede evidenciarse esto en (gráfica 20) la cual muestra un universo brane casi plano en expansión acelerada, estando de acuerdo con lo dicho anteriormente. Esto muestra la compatibilidad del modelo braneworld con los resultados aceptados de la cosmología estándar.

En los últimos años, como se ha dicho varias veces, se ha presentado una gran actividad tratando de descubrir modelos del Universo en el cual la expansión se este acelerando. Algunos modelos llenan el Universo de un fluido auto-interactuante, suave, no agrupado, con presión altamente negativa, conocido colectivamente como energía oscura. Estos modelos, estan fuertemente motivados por la observación de SN Ia de alto corrimiento al rojo, las cuales no pueden ser explicadas en el marco de trabajo del modelo estándar, el cual desde el punto de vista teórico conduce a un proceso de desaceleración. Los modelos de materia oscura se encuentran soportados, en la actualidad por las recientes medidas de las fluctuaciones en el espectro de potencias de la radiación cósmica de fondo (CMB), las cuales indican que el Universo es plano y que $\Omega_T = 1,02 \pm 0,04$ [39]. Sin embargo, la forma de contribución de la densidad de masa total, incluyendo materia oscura, es de tan sólo un tercio, es decir $\Omega_{m0} \approx 0,3$, valor obtenido

del análisis de diferentes observaciones astrofísicas, conduciendo este hecho a que las restantes dos partes de Ω_T , deben provenir de la energía oscura. El modelo más simple para la energía oscura, es el que considera la constante cosmológica Λ , aunque presente el llamado problema de la ‘constante cosmológica’ ¿ Por qué, no observamos la gran densidad de energía del vacío, $\rho_\Lambda = (\frac{\Lambda}{8\pi G}) \approx 10^{76} \text{ GeV}$, o el valor esperado de la física de partículas $\approx 10^{123}$ veces mayor que el predicho por la ecuación de Friedmann?. Una solución fenomenológica a este problema es haciendo que Λ , decaiga dinámicamente, o introduciendo, a gran escala, un campo escalar conocido como Quintaesencia, el cual puede producir presión negativa, conduciendo a una expansión acelerada. Debe notarse, sin embargo que a pesar de su consistencia con las observaciones, la naturaleza de la energía oscura, es un misterio a la fecha. No presenta parecido a ninguna forma conocida de materia examinada en el laboratorio. Las observaciones presentes—mediciones de las fluctuaciones angulares en el espectro de potencias de CMB, observaciones de magnitud-redshift para alto redshift, observaciones de tamaño angular-redshift de radiofuentes de tamaño de miliarco-segundos—pueden ser explicados sin involucrar un término Λ . El modelo de brane-world, incorpora dentro de su dinámica la expansión acelerada del universo [48]. Se encontró que el parámetro de desaceleración en el marco de un modelo brane-world se puede expresar de la siguiente forma

$$q_0 = \frac{1}{2}\Omega_{GR} - \Omega_\Lambda + \Omega_U + \Omega_\lambda, \quad (10.3)$$

donde consideramos que el término clásico $\Omega_{GR} = \Omega_m$, además de considerar que en la actualidad el término $\Omega_\lambda \approx 0$, según lo considerado anteriormente, lo cual nos permite obtener

$$q_0 = \frac{1}{2}\Omega_m + \Omega_U - \Omega_\Lambda. \quad (10.4)$$

Un interesante caso surge cuando el modelo es geoméricamente plano $k = 0$, en el cual se cumple que $\Omega_{m0} + \Omega_{U0} + \Omega_\Lambda = 1$. Si el Universo está dominado por la energía oscura, en el escenario braneworld se puede atribuir dicho efecto al término de radiación oscura, como responsable de la fuga de energía gravitacional, es decir que se debe cumplir que $\Omega_{\Lambda0} > \frac{1}{2}\Omega_m + \Omega_U$, para obtener $q_0 < 0$, esto conduce a obtener $\Omega_U < 0,55$, en el presente trabajo se han obtenido valores menores que éste valor.

En el caso de ajuste por SN Ia se muestra en la siguiente tabla los datos reportados para el modelo estándar, los datos para el modelo brane con materia no relativista reportados en la

literatura, y se muestran los valores para el modelo brane con materia no relativista estudiado aquí.

Parámetros/Resultados	Ω_{m0}	$\Omega_{\Lambda0}$	$\Omega_{\lambda0}$	Ω_{U0}	χ^2
Modelo Estándar	0.327	0.686	0	0	103.131
Datos Braneworld reportados	0.30	0.69	0.014	0.00	95.7
Datos Braneworld obtenidos	0.275	0.715	0.013	0.006	102.861

Cuadro 10.1: Tabla comparativa para los datos reportados en la literatura y obtenidos en el presente trabajo

Finalmente, discutimos los resultados obtenidos de la relación edad-redshift en la forma alternativa presentada, la cual es independiente del parámetro de Hubble hoy día. Para este fin se uso la medida de la cantidad $H_0 t_0$. Los resultados obtenidos muestran que $0 \leq H_0 t_0 \leq 0,9$ (gráfica 30), para verificar este resultado comparamos con otros estimados del mismo parámetro. Por ejemplo, de observaciones sólo de CMB se infiere una edad de $t_0 = 13,7 \pm 0,25 \text{ Gyr}$, mientras que la edad inferida de cluster globulares conduce a $t_0 = 12,6 \pm 2,4 \text{ Gyr}$. Si también asumimos $H_0 = (9,77813 \text{ Gyr})^{-1} \times h$, con $h = 0,72 \pm 0,08$ del HST Key Project, se obtiene para el producto $H_0 t_0$ los rangos $0,79 \leq H_0 t_0 \leq 1,27$ y $0,67 \leq H_0 t_0 \leq 1,31$, para cada una de las edades anotadas [44]. El límite superior encontrado esta dentro de los límites superiores reportados, pero existe discrepancia en el límite inferior hallado, aunque es importante anotar que en este trabajo no se está haciendo un análisis o cálculo de errores en los parámetros cosmológicos, por ello no se logra hallar el límite inferior o superior de forma más precisa.

Capítulo 11

Conclusiones

En este trabajo se ha analizado y mostrado un desarrollo paralelo a la cosmología estándar, para el caso de universos membrana (brane-world). Se ha obtenido la ecuación de campo efectiva sobre una brane, la ecuación de Friedmann modificada, y algunas relaciones cosmológicas como coordenada radial comóvil, distancia diamétrica angular, distancia de luminosidad, edad del Universo, y diagrama de Hubble, en el marco de los Universos membrana. De igual manera, se han obtenido las gráficas correspondientes para las relaciones cosmológicas y se ha conseguido de manera formal los valores posibles para los parámetros cosmológicos involucrados en el modelo bajo estudio, al igual que las regiones de confianza y las curvas de buen ajuste. Para ello fue necesario desarrollar el esquema teórico convencional seguido en la cosmología estándar, como también implementar el algoritmo numérico que permite obtener la minimización del estadístico chi-cuadrado y por consiguiente las gráficas de la relación magnitud-redshift. Se ha estudiado de forma indirecta la incorporación de una dimensión espacial adicional no compacta, cuyo efecto se aprecia en la ecuación de Friedmann modificada. Asimismo, se han señalado algunas limitaciones de la cosmología estándar, como son, la no predicción del valor de corrimiento al rojo para el cambio de fase del universo y la no obtención teórica del menor brillo de las SN Ia.

Según lo obtenido para la coordenada radial comóvil se observa que se torna más monótona, es decir que tiende a un valor constante, para valores mayores en las densidades de materia, tensión o radiación oscura. Ello produce que para corrimientos al rojo grandes las distancias sean menores a las obtenidas en la cosmología estándar, pero para el caso donde la densidad de radiación oscura se hace mayor, las distancias se harían mayores y ello suministraría una forma de probar la existencia de interacción de la brane con su bulk o viceversa. Igualmente, para

corrimientos al rojo pequeños y diferentes valores de tensión se observan diferencias apreciables en las distancias, lo cual permitiría determinar el efecto de tensión sobre la membrana. También, se observa que aumentando el valor del parámetro de densidad de radiación oscura, se hace mayor el valor de la coordenada radial, con mínima sensibilidad, mientras que aumentado el valor del parámetro de densidad de tensión se hace menor el valor de la coordenada radial mostrando mucha mayor sensibilidad en las curvas para los cambios en tal parámetro. Estas diferentes variaciones son las que permiten dar explicaciones alternas a los resultados convencionales.

La edad del Universo predicha por el modelo de brane-world, es menor con el incremento en la densidad de tensión, lo cual lleva a pensar que tal parámetro debe ser pequeño, para evitar dificultades con la edad predicha bajo la cosmología estándar. De forma similar las curvas de distancias en general, para el modelo de brane-world, corresponden, para altos corrimientos al rojo a un Universo temprano, estando de acuerdo el modelo con el comportamiento observado en esta época, pero mostrando valores menores a lo esperado de la cosmología estándar.

Según la caracterización realizada, los modelos brane cobran bastante importancia en el estudio del universo temprano, en tanto que muestran concordancia en la época actual con la cosmología estándar, es decir, que en el estudio del universo brane temprano se manifiestan los términos adicionales de la ecuación de Friedmann modificada.

Como se mostró anteriormente, el valor predicho de redshift para el cambio de fase desacelerada a la fase acelerada para un universo brane-world es menor que el valor obtenido para el modelo estándar. De igual forma se muestra que el valor del parámetro de desaceleración actual para el universo brane es un poco mayor que el valor que se observa para el modelo estándar, pero un hecho importante del modelo braneworld es que predice un valor para el cambio de fase bastante de acuerdo con el valor obtenido empíricamente.

Se ha mostrado un modelo brane-world, con simplificaciones fuertes, como son materia no relativista, brane tipo RS, bulk vacío, una sola membrana, lo cual simplifica algunas implicaciones físicas, que conllevan a desarrollar un esquema teórico que no corresponde totalmente con los resultados convencionales de la cosmología estándar. De igual manera se han obtenido relaciones cosmológicas, asumiendo que en estos modelos se conservan las relaciones y principios convencionales, lo cual debería probarse formalmente.

De los varios modelos brane considerados, el más de acuerdo o compatible con la cosmología estándar es el modelo brane con materia no relativista, el cual conduce en varios aspectos a una concordancia aceptable con los resultados del modelo estándar, y en el cual se obtiene la

expansión acelerada sin involucrar energía oscura, aunque presenta algunas diferencias notables con la cosmología estándar. Por ello es uno de los modelos que debe estudiarse a profundidad, para determinar completamente la descripción que suministra y poderlo someter a un mayor número pruebas cosmológicas y observacionales.

La técnica de máxima verosimilitud, desarrollada aquí, la cual permite restringir los valores de los parámetros del modelo, debe involucrar muchos más datos de alto corrimiento al rojo, lo cual permitiría determinar el alcance del modelo bajo un conjunto mayor de datos.

En los desarrollos que se realizaron de forma paralela a los desarrollos de la cosmología estándar aparecen términos divergentes, la razón de ello puede obedecer a que se construyó una cosmología sobre una membrana de tipo RS, que no es precisamente uno de los modelos más generales, es decir con bastantes simplificaciones, ocasionando lo señalado anteriormente, o tal vez, no se introdujo una descripción más completa para los términos de tensión y de radiación oscura.

Es también importante mencionar que no se está haciendo una descripción unificada para la constante cosmológica y para la tensión de energía sobre la membrana, las cuales juntas están asociadas con la energía del vacío. No obstante, en el esquema teórico exhibido se muestra una relación compleja entre densidad de energía, densidad de energía del vacío, constante cosmológica y tensión, la cual podría explicar algunas dificultades, como también determinar nuevas consecuencias.

El ajuste de SN Ia, con la relación magnitud-redshift, ilustra un comportamiento concordante y ajustado con la relación magnitud-redshift estándar, en particular para los datos de alto corrimiento al rojo, estando en acuerdo con lo observado. En particular predice un mayor brillo de SN Ia. Ello, evidencia la factibilidad de que el modelo de brane-world, sea una buena aproximación a una descripción real. Los detalles obtenidos para el modelo braneworld, muestran que este modelo es compatible con los resultados de la cosmología estándar como también con la observación de SN Ia, lo cual brinda la posibilidad de pensar que tal modelo pueda ser un verdadero modelo del universo, además de incorporar otros elementos no explicados completamente en los esquemas convencionales. Aunque se debe realizar un análisis mayor para estudiar el modelo bajo CMB, nucleosíntesis NBB, y otro tipo de observaciones, para obtener un modelo más restringido y poderlo considerar como un modelo más aproximado a la descripción real. Los valores de los parámetros obtenidos mediante la técnica de máxima verosimilitud corresponden bastante bien a los valores reportados en la literatura convencional, algunos de ellos se muestran en la tabla

10.1. De igual forma de las regiones de confianza obtenidas se puede inferir los posibles valores de los parámetros adicionales, bajo una cierta probabilidad, igualmente puede observarse en el apéndice H, la función de distribución de los parámetros.

En resumen, se ha desarrollado una aproximación para el estudio de algunos aspectos cosmológicos bajo algunas hipótesis novedosas y tomando en consideración una técnica en particular, pero como se ha dicho, el modelo desarrollado, debe ser sometido a muchas otras pruebas para considerar su factibilidad. La lista de temas que quedan fuera es extensa, esta incluye la reciente discusión sobre el problema de la constante cosmológica, espacios de altas dimensiones curvos, materia oscura desde los modos KK, agujeros negros en modelos braneworlds, deconstrucción de dimensiones extras, y la lista continua. Urge al lector interesado el continuar desarrollando todos estos temas.

Apéndice A

Ecuación de campo para Randall-Sundrum

En esta sección se obtendrá explícitamente la ecuación de campo de Randall-Sundrum, siguiendo la técnica clásica del principio de mínima acción mediante la variación de la acción. La acción considerada en el modelo RSI, está dada por

$$S = \int d^4x \int dy \sqrt{-g} [2M^3 R - \Lambda] + \int d^4x \sqrt{-g_{(b1)}} [V_{b1} + \mathcal{L}_{b1}] + \int d^4x \sqrt{-g_{(b2)}} [V_{b2} + \mathcal{L}_{b2}] , \quad (\text{A.1})$$

como la coordenada y es periódica $y = \phi + 2\pi$, lo cual conduce a $dy = d\phi$, con $0 \leq \phi \leq \pi$, con esto se puede escribir la acción como

$$S = \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{-g} [2M^3 R - \Lambda] + \int d^4x \sqrt{-g_{(b1)}} [V_{b1} + \mathcal{L}_{b1}] + \int d^4x \sqrt{-g_{(b2)}} [V_{b2} + \mathcal{L}_{b2}] , \quad (\text{A.2})$$

aplicando una variación a la primera integral S_B (se refiere a la acción en 5D), se obtiene

$$\delta S_B = \delta \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{-g} [2M^3 R - \Lambda] , \quad (\text{A.3})$$

lo cual conduce a la siguiente expresión

$$\delta S_B = \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi [2M^3\delta(\sqrt{-g}R) - \Lambda\delta(\sqrt{-g})] , \quad (\text{A.4})$$

donde el escalar de curvatura se puede expresar como $R = g^{uv}R_{uv}$, con lo cual se obtiene

$$\delta S_B = \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi [2M^3\delta(\sqrt{-g}g^{uv}R_{uv})] - \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \Lambda\delta(\sqrt{-g}) , \quad (\text{A.5})$$

tomando la variación en el primer integrando, se encuentra

$$\delta(\sqrt{-g}g^{uv}R_{uv}) = \delta(\sqrt{-g})g^{uv}R_{uv} + \sqrt{-g}\delta(g^{uv})R_{uv} + \sqrt{-g}g^{uv}\delta(R_{uv}) , \quad (\text{A.6})$$

ahora bién, si se desarrolla cada una de las variaciones, encontramos

$$\sqrt{-g}g^{uv}\delta(R_{uv}) = \partial_l\sqrt{-g}g^{uv}\delta\Gamma_{uv}^l - \partial_v\sqrt{-g}g^{uv}\delta\Gamma_{ul}^l , \quad (\text{A.7})$$

$$\delta(g^{uv}) = -g^{up}g^{vs}\delta g_{ps} , \quad (\text{A.8})$$

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{uv}\delta g^{uv} , \quad (\text{A.9})$$

llevando estas expresiones a la expresión para $\delta(\sqrt{-g}R)$, se obtiene

$$\delta(\sqrt{-g}R) = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{uv}\delta g^{uv}R + \sqrt{-g}(-g^{up}g^{vs}\delta g_{ps})R_{uv} + \partial_l\sqrt{-g}g^{uv}\delta\Gamma_{uv}^l - \partial_v\sqrt{-g}g^{uv}\delta\Gamma_{ul}^l , \quad (\text{A.10})$$

simplificando esta expresión y aplicando la idea de índices mudos llegamos a

$$\delta(\sqrt{-g}R) = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{uv}R\delta g^{uv} - \sqrt{-g}R^{uv}\delta g_{uv} + \partial_l\sqrt{-g}g^{uv}\delta\Gamma_{uv}^l - \partial_v\sqrt{-g}g^{uv}\delta\Gamma_{ul}^l , \quad (\text{A.11})$$

entonces la variación completa para la acción en cinco dimensiones se puede expresar de forma amplia como

$$\begin{aligned} \delta S_B &= \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \left[2M^3 \left(\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{uv} R \delta g^{uv} - \sqrt{-g} R^{uv} \delta g_{uv} + \partial_t \sqrt{-g} g^{uv} \delta \Gamma_{uv}^l - \partial_v \sqrt{-g} g^{uv} \delta \Gamma_{ul}^l \right) \right] \\ &\quad - \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \frac{1}{2} \Lambda \sqrt{-g} g_{uv} \delta g^{uv} , \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

aplicando el teorema de Gauss y como las variaciones del campo son nulas en los límites de integración se obtiene

$$\delta S_B = \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi 2M^3 \left(\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{uv} R \delta g^{uv} - \sqrt{-g} R^{uv} \delta g_{uv} \right) - \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \frac{1}{2} \Lambda \sqrt{-g} g_{uv} \delta g^{uv} , \quad (\text{A.13})$$

simplificando la expresión anterior resulta

$$\delta S_B = \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi 2M^3 \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g_{uv} R + R_{uv} - \frac{1}{4M^3} \Lambda g_{uv} \right) \delta g_{uv} , \quad (\text{A.14})$$

ahora, efectuando la variación para la acción que describe las branes tenemos

$$\delta S_{b1} = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g_{(b1)}} g_{\mu\nu}^{(b1)} V_{b1} \delta g_{(b1)}^{\mu\nu} , \quad (\text{A.15})$$

$$\delta S_{b2} = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g_{(b2)}} g_{\mu\nu}^{(b2)} V_{b2} \delta g_{(b2)}^{\mu\nu} , \quad (\text{A.16})$$

entonces la variación de la acción completa queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi 2M^3 \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g_{uv} R + R_{uv} - \frac{1}{4M^3} \Lambda g_{uv} \right) \delta g_{uv} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g_{(b1)}} g_{\mu\nu}^{(b1)} V_{b1} \delta g_{(b1)}^{\mu\nu} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g_{(b2)}} g_{\mu\nu}^{(b2)} V_{b2} \delta g_{(b2)}^{\mu\nu} , \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

expresando las variaciones para las branes en cinco dimensiones con ayuda de la función delta y tomando en consideración su localización en el orbifold, obtenemos

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi 2M^3 \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g_{uv} R + R_{uv} - \frac{1}{4M^3} \Lambda g_{uv} \right) \delta g_{uv} \\
&\quad - \frac{1}{2} \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \delta(\phi - \pi) \sqrt{-g_{(b1)}} g_{\mu\nu}^{(b1)} V_{b1} \delta g_{(b1)}^{\mu\nu} \\
&\quad - \frac{1}{2} \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \delta(\phi) \sqrt{-g_{(b2)}} g_{\mu\nu}^{(b2)} V_{b2} \delta g_{(b2)}^{\mu\nu} , \tag{A.18}
\end{aligned}$$

simplicando la expresión anterior, resulta

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi 2M^3 \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g_{uv} R + R_{uv} - \frac{1}{4M^3} \Lambda g_{uv} \right) \delta g_{uv} \\
&\quad - \frac{1}{2} \delta(\phi - \pi) \sqrt{-g_{(b1)}} g_{\mu\nu}^{(b1)} V_{b1} \delta g_{(b1)}^{\mu\nu} \\
&\quad - \frac{1}{2} \delta(\phi) \sqrt{-g_{(b2)}} g_{\mu\nu}^{(b2)} V_{b2} \delta g_{(b2)}^{\mu\nu} , \tag{A.19}
\end{aligned}$$

ahora, se puede expresar cada $\delta g_{(bi)}^{\mu\nu}$ de la siguiente forma $\delta g_{(bi)}^{\mu\nu} = \delta_u^\mu \delta_v^\nu \delta g^{uv}$, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \left(2M^3 \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g_{uv} R + R_{uv} - \frac{1}{4M^3} \Lambda g_{uv} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \delta(\phi - \pi) \sqrt{-g_{(b1)}} g_{\mu\nu}^{(b1)} V_{b1} \delta_u^\mu \delta_v^\nu - \frac{1}{2} \delta(\phi) \sqrt{-g_{(b2)}} g_{\mu\nu}^{(b2)} V_{b2} \delta_u^\mu \delta_v^\nu \right) \delta g_{uv} , \tag{A.20}
\end{aligned}$$

y como la variación debe ser igual a $\delta S = 0$, entonces el integrando debe ser igual a cero

$$\begin{aligned}
2M^3 \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g_{uv} R + R_{uv} - \frac{1}{4M^3} \Lambda g_{uv} \right) - \frac{1}{2} \delta(\phi - \pi) \sqrt{-g_{(b1)}} g_{\mu\nu}^{(b1)} V_{b1} \delta_u^\mu \delta_v^\nu \\
- \frac{1}{2} \delta(\phi) \sqrt{-g_{(b2)}} g_{\mu\nu}^{(b2)} V_{b2} \delta_u^\mu \delta_v^\nu = 0 , \tag{A.21}
\end{aligned}$$

finalmente se obtiene la ecuación de campo en el escenario Randall-Sundrum

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g} \left(R_{uv} - \frac{1}{2} g_{uv} R \right) &= -\frac{1}{4M^3} \left(\Lambda \sqrt{-g} g_{uv} + V_{b1} \sqrt{-g_{(b1)}} g_{\mu\nu}^{(b1)} \delta_u^\mu \delta_v^\nu \delta(\phi - \pi) \right. \\
&\quad \left. + V_{b2} \sqrt{-g_{(b2)}} g_{\mu\nu}^{(b2)} \delta_u^\mu \delta_v^\nu \delta(\phi) \right) . \tag{A.22}
\end{aligned}$$

Apéndice B

Solución de la ecuación de Einstein

Como se ha dicho anteriormente, la métrica espacio-temporal en cinco dimensiones tiene la forma

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + b^2(t, y)dy^2 , \quad (\text{B.1})$$

pero como estamos interesados en obtener soluciones cosmológicas, tomamos la métrica en la forma

$$ds^2 = -n^2(t, y)dt^2 + a^2(t, y)\gamma_{ij}dx^i dx^j + b^2(t, y)dy^2 , \quad (\text{B.2})$$

donde γ_{ij} es una métrica en tres dimensiones de máxima simetría. La ecuación de Einstein en cinco dimensiones toma la forma usual

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = \kappa^2 T_{ab} , \quad (\text{B.3})$$

aquí κ^2 es la constante de acople gravitacional relacionada con la constante de Newton en cinco dimensiones, $\kappa^2 = 8\pi G_5 = M_5^{-3}$, llevando la métrica anterior a la ecuación de Einstein obtenemos las componentes no cero del tensor de Einstein, las cuales son

$$G_{00} = 3 \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \right) - \frac{n^2}{b^2} \left(\frac{a''}{a} + \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} \right) \right) + k \frac{n^2}{a^2} \right\} , \quad (\text{B.4})$$

$$G_{ij} = \frac{a^2}{b^2} \gamma_{ij} \left\{ \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} + 2 \frac{\hat{n}}{n} \right) - \frac{b'}{b} \left(\frac{n'}{n} + 2 \frac{\hat{a}}{a} \right) + 2 \frac{a''}{a} + \frac{n''}{n} \right\} + \frac{a^2}{n^2} \gamma_{ij} \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \left(-\frac{\dot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{n}}{n} \right) - 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \left(-2 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{n}}{n} \right) - \frac{\ddot{b}}{b} \right\} - k \gamma_{ij} , \quad (\text{B.5})$$

$$G_{04} = 3 \left(\frac{n' \dot{a}}{n a} + \frac{a' \dot{b}}{a b} - \frac{\dot{a}'}{a} \right) , \quad (\text{B.6})$$

$$G_{44} = 3 \left\{ \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} + \frac{\hat{n}}{n} \right) - \frac{b^2}{n^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{n}}{n} \right) + \frac{\ddot{a}}{a} \right) - k \frac{b^2}{a^2} \right\} \quad (\text{B.7})$$

donde se ha establecido que la prima denota derivada respecto a la coordenada y y el punto denota derivada respecto a t . El tensor momentum-energía puede ser descompuesto en dos partes,

$$T_b^a = T_b^a|_{bulk} + T_b^a|_{brane} , \quad (\text{B.8})$$

es decir que se puede escribir como

$$T_b^a = \text{diag}(-\rho_B, P_B, P_B, P_B, P_T) + \frac{1}{b} \text{diag}(-\rho_b, p_b, p_b, p_b, 0) \delta(y) , \quad (\text{B.9})$$

como se considera aquí sólo geometrías estrictamente homogéneas e isotrópicas sobre la brane, puede considerarse que las densidades ρ_b , y p_b son independientes de la posición dentro de la brane, es decir son funciones sólo del tiempo. Se puede asumir que $T_{04} = 0$, lo cual físicamente significa que no existe flujo de energía a lo largo de la quinta dimensión, implica que $G_{04} = 0$.

Las componentes (0,0) y (4,4) de la ecuación de Einstein en el bulk se pueden escribir de la siguiente forma

$$F' = \frac{2}{3} a \dot{a}^3 T_0^0|_{bulk} , \quad (\text{B.10})$$

$$\dot{F} = \frac{2}{3} \dot{a} a^3 T_4^4|_{bulk} , \quad (\text{B.11})$$

donde $F' = \frac{dF}{dy}$, $\dot{F} = \frac{dF}{dt}$ y la función F es función de t y y definida por

$$F(t, y) = \frac{(\dot{a}a)^2}{b^2} - \frac{(\dot{a}a)^2}{n^2} - ka^2 , \quad (\text{B.12})$$

de tal forma que como $T_0^0|_{bulk} = -\rho_B$ es independiente de y , con lo cual se puede integrar las expresiones anteriores para obtener

$$F + \frac{1}{6}a^4\rho_B + C = 0 , \quad (\text{B.13})$$

donde C es una constante de integración la cual a priori depende del tiempo.

Puede considerarse que la quinta dimensión es estática, es decir que

$$\dot{b} = 0 , \quad (\text{B.14})$$

lo cual posibilita solucionar la métrica espacio-temporal completa, es decir determinar la dependencia explícita de la métrica con coordenada y . Según lo anterior se tiene que

$$b = 1 , \quad (\text{B.15})$$

entonces se sigue de $G_{04} = 0$, que n puede ser expresado en términos de a según la relación

$$\frac{\dot{a}}{n} = \alpha(t) , \quad (\text{B.16})$$

llevando esta expresión a $F' = \frac{2}{3}\dot{a}a^3T_0^0|_{bulk}$, encontramos la siguiente ecuación diferencial

$$\alpha^2 + k - (a\alpha)' = \frac{1}{3}\kappa^2\rho_B a^2 , \quad (\text{B.17})$$

la cual es válida en todo el bulk, menos sobre la brana. Las soluciones de la ecuación anterior son

$$a^2 = A \cos h\left(\sqrt{-\frac{2}{3}\kappa^2\rho_B}y\right) + B \sin h\left(\sqrt{-\frac{2}{3}\kappa^2\rho_B}y\right) + C \quad \text{para } \rho_B < 0 , \quad (\text{B.18})$$

$$a^2 = A \cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}\kappa^2\rho_B}y\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{2}{3}\kappa^2\rho_B}y\right) + C \quad \text{para } \rho_B > 0 , \quad (\text{B.19})$$

$$a^2 = (\alpha^2 + k)y^2 + Dy + E \quad \text{para } \rho_B = 0 . \quad (\text{B.20})$$

La constance C puede expresarse en términos de la función α de la siguiente forma

$$C = 3\left(\frac{\alpha^2 + k}{\kappa^2 \rho_B}\right), \quad (\text{B.21})$$

de igual manera se puede encontrarse que la conservación de la energía sobre la brane puede expresarse como

$$\dot{\rho}_b + 3\frac{\dot{a}_0}{a_0}(\rho_b + p_b) = 0, \quad (\text{B.22})$$

si finalmente se fija el tiempo mediante la condición $n_0 = 1$, es decir que se escoge como tiempo el correspondiente al tiempo cósmico sobre la brane y con la ayuda de la ecuación de Friedmann modificada, obtenemos

$$C = \frac{1}{2}a_0^2\left(1 + \frac{\kappa^2 \rho_b^2}{6\rho_B}\right) - \frac{6U_0 a_0^4}{\lambda^2 a^2}, \quad (\text{B.23})$$

finalmente se obtiene la expresión general para el factor de escala

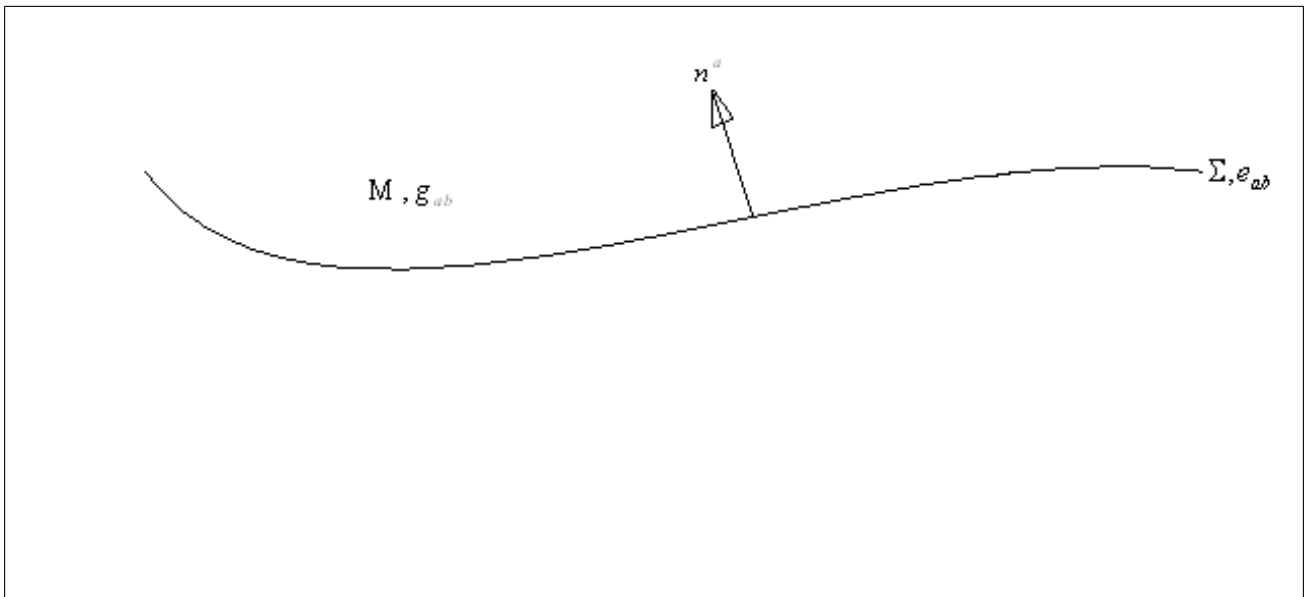
$$\begin{aligned} a(y, t) = & \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\kappa^2 \rho_b^2}{6\rho_B} \right) a - \frac{6U_0 a_0^4}{\lambda^2 a^2} - \frac{\kappa \rho_b}{\sqrt[2]{-6\rho_B}} a_0^2 \text{Senh} \left(\sqrt{-\frac{2}{3} \kappa^2 \rho_B y} \right) \right. \\ & \left. + \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\kappa^2 \rho_b^2}{6\rho_B} \right) a_0^2 + \frac{6U_0 a_0^4}{\lambda^2 a^2} \right] \text{Cosh} \left(\sqrt{-\frac{2}{3} \kappa^2 \rho_B y} \right) \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Los otros coeficientes de la métrica, tal como $n(t, y)$ se puede obtener directamente de la expresión anterior con ayuda de la relación $\dot{a} = n\alpha(t)$, la cual conduce a $n(t, y) = \frac{\dot{a}(t, y)}{a(t)}$. En general, se puede encontrar un comportamiento cuadrático en la densidad de energía sobre la brane lo cual conduce a una cosmología no convencional, sin embargo, puede recobrase la cosmología estándar en el contexto de Randall-Sundrum como se ha mostrado anteriormente.

Apéndice C

Obtención ecuación de campo efectiva para RSII

En esta sección se obtendrá la ecuación de campo efectiva sobre una brana, donde, se hace uso del formalismo seguido en el libro de Eric Poisson e igualmente se ilustraran los pasos más relevantes para el desarrollo. El “formalismo de hipersuperficies” es central en la construcción del braneworld, en el cual nuestro Universo es concebido como una subvariedad (brane) sumergida en un espacio de altas dimensiones (bulk), se ilustra esto esquemáticamente en la figura A1.



Una brana Σ sumergida en un espaciotiempo M . Se muestra un vector normal unitario a la brana, igualmente la métrica inducida sobre la brana.

Una sub-variedad de m -dimensiones Σ de una variedad de n -dimensiones M , puede ser definida mediante una ecuación paramétrica

$$x^a = x^a(\sigma^\alpha) , \quad a = 0, 1, \dots, n ; \quad \alpha = 0, 1, \dots, m , \quad (\text{C.1})$$

donde σ^α son coordenadas internas de la sub-variedad. Con el braneworld en mente, se considera el caso donde $m = n - 1$, es decir la sub-variedad es una co-dimensión. Las $n - 1$ dimensiones internas pueden entonces ser eliminadas de las n -ecuaciones paramétricas para dar una ecuación de restricción definiendo la hipersuperficie

$$\Phi(x^a) = c , \quad (\text{C.2})$$

donde c es una constante. Esto permite definir un vector normal unitario en todos los punto de Σ por

$$n_a = \frac{\nabla_a \Phi}{|g^{ab} \nabla_a \Phi \nabla_b \Phi|^{\frac{1}{2}}} , \quad (\text{C.3})$$

como se ha dicho en otros apartados el punto de inicio de tal desarrollo es la ecuación de Gauss, en la cual se expresa la proyección del tensor de Riemann sobre una hipersuperficie, tal ecuación es

$$R_{abcd} e_\alpha^a e_\beta^b e_\gamma^c e_\delta^d = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + K_{\alpha\delta} K_{\beta\gamma} - K_{\alpha\gamma} K_{\beta\delta} , \quad (\text{C.4})$$

en la cual los índices latinos barren las cinco dimensiones ($a, b, c, d = 0, 1, 2, 3, 4$), los índices griegos barren cuatro dimensiones ($\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, 2, 3$) y por ejemplo $K_{\alpha\beta}$ representa la curvatura extrínseca, es decir la curvatura de la hipersuperficie determinada desde el espacio de dimensión superior. Despejando el tensor de Riemann en cuatro dimensiones se obtiene

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{abcd} e_\alpha^a e_\beta^b e_\gamma^c e_\delta^d - K_{\alpha\delta} K_{\beta\gamma} + K_{\alpha\gamma} K_{\beta\delta} , \quad (\text{C.5})$$

ahora, realizando un cambio de índices, es decir cambiando α por ε y a por n , se puede escribir la expresión anterior como

$$R_{\varepsilon\beta\gamma\delta} = R_{nbcd} e_\alpha^n e_\beta^b e_\gamma^c e_\delta^d - K_{\varepsilon\delta} K_{\beta\gamma} + K_{\varepsilon\gamma} K_{\beta\delta} , \quad (\text{C.6})$$

sobre esta expresión aplicamos de forma conveniente el tensor métrico inducido $h^{\alpha\beta} = g^{ab}e_a^\alpha e_b^\beta$, el cual permite subir un índice

$$h^{\alpha\varepsilon} R_{\varepsilon\beta\gamma\delta} = g^{an} e_a^\alpha e_n^\varepsilon R_{nbcd} e_\alpha^a e_\beta^b e_\gamma^c e_\delta^d - h^{\alpha\varepsilon} K_{\varepsilon\delta} K_{\beta\gamma} + h^{\alpha\varepsilon} K_{\varepsilon\gamma} K_{\beta\delta} , \quad (\text{C.7})$$

se obtiene

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = R_{bcd}^a e_a^\alpha e_\beta^b e_\gamma^c e_\delta^d - K_\delta^\alpha K_{\beta\gamma} + K_\gamma^\alpha K_{\beta\delta} , \quad (\text{C.8})$$

aplicando contracción de índices sobre α, γ y sobre a, c ,

$$R_{\beta\alpha\delta}^\alpha = R_{bad}^a e_a^\alpha e_\beta^b e_\alpha^a e_\delta^d - K_\delta^\alpha K_{\beta\alpha} + K_\alpha^\alpha K_{\beta\delta} , \quad (\text{C.9})$$

se encuentra la expresión contraída

$$R_{\beta\delta} = R_{bd} e_\beta^b e_\delta^d - K_\delta^\alpha K_{\beta\alpha} + K K_{\beta\delta} , \quad (\text{C.10})$$

ahora bien, el tensor de Ricci en cinco dimensiones se puede descomponer en forma general como $R_{bd} = \varepsilon R_{bvd}^a n_a n^v + h^{\beta\delta} R_{abvd} e_\beta^a e_\delta^v$, en el caso de una hipersuperficie como de espacio $\varepsilon = -1$, con lo cual se obtiene $R_{bd} e_\beta^b e_\delta^d = R_{bd} e_\delta^d e_\beta^b - R_{bvd}^a n_a n^v e_\beta^b e_\delta^d$, esta expresión se reemplaza en la anterior, con lo cual se obtiene

$$R_{\beta\delta} = R_{bd} e_\beta^b e_\delta^d - R_{bvd}^a n_a n^v e_\beta^b e_\delta^d - K_\delta^\alpha K_{\beta\alpha} + K K_{\beta\delta} , \quad (\text{C.11})$$

haciendo un cambio de nombres de índices β por α, δ por β, b por a, d por b, a por c, α por γ , la expresión anterior se puede escribir como

$$R_{\alpha\beta} = R_{ab} e_\alpha^a e_\beta^b - R_{avb}^c n_c n^v e_\alpha^a e_\beta^b - K_\alpha^\gamma K_{\alpha\gamma} + K K_{\alpha\beta} , \quad (\text{C.12})$$

contraíendo índices sobre α, β y a, b , se obtiene

$$R_{\alpha\alpha} = R_{aa} e_\alpha^a e_\alpha^a - R_{ava}^c n_c n^v e_\alpha^a e_\alpha^a - K_\alpha^\gamma K_{\alpha\gamma} + K K_{\alpha\alpha} , \quad (\text{C.13})$$

lo cual conduce al escalar de curvatura en cuatro dimensiones

$$R = R' - R_{av}^c n_c n^v - K^{\gamma\alpha} K_{\alpha\gamma} + K^2 , \quad (\text{C.14})$$

donde R' es el escalar de curvatura en cinco dimensiones, con esta expresión se construye el tensor $\frac{1}{2}Rh_{\alpha\beta}$,

$$\frac{1}{2}Rh_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}Rg_{ab}e_{\alpha}^ae_{\beta}^b - \frac{1}{2}R_{\nu}^cn_{\nu}h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(K^2 - K^{\gamma\alpha}K_{\alpha\gamma})h_{\alpha\beta} \quad (C.15)$$

de tal forma que con las expresiones anteriores se puede construir el tensor de Einstein $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rh_{\alpha\beta}$, obteniendo

$$G_{\alpha\beta} = \left[R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} \right] e_{\alpha}^ae_{\beta}^b - R_{\alpha\nu b}^cn_{\nu}e_{\alpha}^ae_{\beta}^b + \frac{1}{2}R_{\nu}^cn_{\nu}h_{\alpha\beta} - K_{\beta}^{\gamma}K_{\alpha\gamma} + KK_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}(K^2 - K^{\gamma\alpha}K_{\alpha\gamma}), \quad (C.16)$$

ahora, con la descomposición del tensor de Riemann 5D en el tensor de Ricci, el escalar de curvatura y el tensor de Weyl, se tiene

$$R_{\alpha\nu b}^c = \frac{2}{3} [g_{[\nu}^c R_{b]a} - g_{a[\nu} R_{b]}^c] - \frac{1}{6} Rg_{[\nu}^c g_{b]a} + C_{\alpha\nu b}^c, \quad (C.17)$$

la cual se reemplaza en la expresión del tensor de Ricci, para obtener

$$R_{\alpha\beta} = R_{ab}e_{\alpha}^ae_{\beta}^b - \left\{ \frac{2}{3} [g_{[\nu}^c R_{b]a} - g_{a[\nu} R_{b]}^c] - \frac{1}{6} Rg_{[\nu}^c g_{b]a} + C_{\alpha\nu b}^c \right\} n_{\nu}n^{\nu}e_{\alpha}^ae_{\beta}^b - K_{\alpha}^{\gamma}K_{\alpha\gamma} + KK_{\alpha\beta}, \quad (C.18)$$

nuevamente, en la expresión anterior se contraen los índices α, β , lo cual permite encontrar el escalar de curvatura en cuatro dimensiones, éste es

$$R = R' - \frac{2}{3} [g_{[\nu}^c R_{a]a} - g_{a[\nu} R_{a]}^c] n_{\nu}n^{\nu} + \frac{1}{6} Rg_{[\nu}^c g_{a]a} n_{\nu}n^{\nu} - C_{\nu}^cn_{\nu} - K^{\gamma\alpha}K_{\alpha\gamma} + K^2, \quad (C.19)$$

similar a lo efectuado anteriormente, se puede construir el tensor de Einstein, el cual en estos términos es

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\beta} = & \left[R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \right] e_{\alpha}^a e_{\beta}^b - \frac{2}{3} [g_{[v}^c R_{b]a} - g_{a[v} R_{b]}^c] n_c n^v e_{\alpha}^a e_{\beta}^b + \frac{1}{6} R g_{[v}^c g_{b]a} n_c n^v e_{\alpha}^a e_{\beta}^b \\
& + \frac{1}{3} [g_{[v}^c R_{a]a} - g_{a[v} R_{a]}^c] n_c n^v h_{\alpha\beta} - \frac{1}{12} R g_{[v}^c g_{a]a} n_c n^v h_{\alpha\beta} + \frac{1}{12} C_v^c n_c n^v h_{\alpha\beta} - K_{\beta}^{\gamma} K_{\alpha\gamma} \\
& + K K_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} (K^2 - K^{\gamma\alpha} K_{\alpha\gamma}) - C_{avb}^c n_c n^v e_{\alpha}^a e_{\beta}^b, \tag{C.20}
\end{aligned}$$

agrupando términos semejantes se escribe de forma más compacta

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\beta} = & \left\{ \left[R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \right] - \frac{2}{3} [g_{[v}^c R_{b]a} - g_{a[v} R_{b]}^c] n_c n^v + \frac{1}{6} R g_{[v}^c g_{b]a} n_c n^v \right\} e_{\alpha}^a e_{\beta}^b \\
& + \left\{ \frac{1}{3} [g_{[v}^c R_{a]a} - g_{a[v} R_{a]}^c] n_c n^v - \frac{1}{12} R g_{[v}^c g_{a]a} n_c n^v + \frac{1}{12} C_v^c n_c n^v \right\} h_{\alpha\beta} \\
& - K_{\beta}^{\gamma} K_{\alpha\gamma} + K K_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} (K^2 - K^{\gamma\alpha} K_{\alpha\gamma}) - C_{avb}^c n_c n^v e_{\alpha}^a e_{\beta}^b, \tag{C.21}
\end{aligned}$$

con ayuda de la ecuación de Einstein en cinco dimensiones $R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = \kappa^2 T_{ab}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\beta} = & \left[\frac{2\kappa^2}{3} T_{ab} \right] e_{\alpha}^a e_{\beta}^b + \left[\frac{2\kappa^2}{3} T_{ab} n^a n^b \right] h_{\alpha\beta} - \left[\frac{\kappa^2}{6} T_a^a \right] h_{\alpha\beta} \\
& - K_{\beta}^{\gamma} K_{\alpha\gamma} + K K_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} (K^2 - K^{\gamma\alpha} K_{\alpha\gamma}) - C_{avb}^c n_c n^v e_{\alpha}^a e_{\beta}^b, \tag{C.22}
\end{aligned}$$

finalmente, se puede obtener la ecuación de campo en cuatro dimensiones sobre la hipersuperficie (brane)

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\beta} = & \frac{2\kappa^2}{3} \left\{ T_{ab} e_{\alpha}^a e_{\beta}^b + \left[T_{ab} n^a n^b - \frac{1}{4} T_a^a \right] h_{\alpha\beta} \right\} - K_{\beta}^{\gamma} K_{\alpha\gamma} + K K_{\alpha\beta} \\
& + \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} (K^2 - K^{\gamma\alpha} K_{\alpha\gamma}) - C_{avb}^c n_c n^v e_{\alpha}^a e_{\beta}^b. \tag{C.23}
\end{aligned}$$

Ahora, se expresa el tensor momentum-energía en cinco dimensiones, en sus diferentes constituyentes

$$T_{ab} = -\Lambda g_{ab} - \lambda h_{\alpha\beta} e_a^{\alpha} e_b^{\beta} + \tau_{\alpha\beta} e_a^{\alpha} e_b^{\beta}, \tag{C.24}$$

donde, se puede identificar Λ con la constante cosmológica en cinco dimensiones, λ tensión o energía del vacío sobre la membrana y $\tau_{\alpha\beta}$ es el tensor momentum-energía convencional, se puede expresar la contribución de la brane en el tensor $S_{\alpha\beta} = -\lambda h_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta + \tau_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta$. La ecuación de campo en cinco dimensiones, que incluye explícitamente la contribución de la brane es

$$G_{ab} = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 (T_{ab} + S_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta \delta(y)) , \quad (\text{C.25})$$

integrando la anterior ecuación desde $y = -\varepsilon$ a $y = +\varepsilon$, y tomando el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, se encuentran las condiciones de frontera de Israel-Darmois en la brane [23]

$$g_{ab}^+ - g_{ab}^- = 0 , \quad (\text{C.26})$$

$$K_{\alpha\beta}^+ - K_{\alpha\beta}^- = -\kappa^2 (S_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} S) . \quad (\text{C.27})$$

La simetría Z_2 significa que cuando uno se aproxima a la brane desde un lado y la atraviesa emerge en el bulk, pero con el vector normal invertido, $n^a \rightarrow -n^a$. Entonces, la ecuación anterior implica que

$$K_{\alpha\beta}^+ = -K_{\alpha\beta}^- , \quad (\text{C.28})$$

por consiguiente con la condición de frontera se puede expresar la curvatura extrínseca sobre la brane como

$$K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \kappa^2 \left(-\frac{2}{3} h_{\alpha\beta} \lambda + \tau_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \tau \right) , \quad (\text{C.29})$$

con esta expresión se encuentra

$$K = -\frac{1}{3} \kappa^2 (\tau - \lambda) , \quad (\text{C.30})$$

$$K^{\gamma\alpha} K_{\alpha\gamma} = \frac{1}{4} \kappa^4 \left(-\frac{2\lambda}{3} h^{\gamma\alpha} - \frac{\tau}{3} h^{\gamma\alpha} + \tau^{\gamma\alpha} \right) \left(-\frac{2\lambda}{3} h_{\alpha\gamma} - \frac{\tau}{3} h_{\alpha\gamma} + \tau_{\alpha\gamma} \right) , \quad (\text{C.31})$$

$$K_\beta^\gamma K_{\alpha\gamma} = \frac{1}{4} \kappa^4 \left(-\frac{2\lambda}{3} h_\beta^\gamma - \frac{\tau}{3} h_\beta^\gamma + \tau_\beta^\gamma \right) \left(-\frac{2\lambda}{3} h_{\alpha\gamma} - \frac{\tau}{3} h_{\alpha\gamma} + \tau_{\alpha\gamma} \right) , \quad (\text{C.32})$$

expresiones que se sustituyen en la ecuación de campo en cuatro dimensiones sobre la hipersuperficie, y esto conduce a la ecuación gravitacional efectiva sobre la brane, la cual toma la siguiente forma

$$G_{\alpha\beta} = -\Lambda_4 h_{\alpha\beta} + 8\pi G_N \tau_{\alpha\beta} + \kappa^4 \left(-\frac{1}{4} \tau_{\alpha\gamma} \tau_{\beta}^{\gamma} + \frac{1}{12} \tau \tau_{\alpha\beta} + \frac{1}{8} h_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta} \tau^{\alpha\beta} - \frac{1}{24} h_{\alpha\beta} \tau^2 \right) - C_{avb}^c n_c n^v e_{\alpha}^a e_{\beta}^b, \quad (\text{C.33})$$

donde, $\Lambda_4 = \frac{1}{2} \kappa^2 (\Lambda + \frac{1}{6} \kappa^2 \lambda^2)$, $G_N = \frac{\kappa^4 \lambda}{48\pi}$.

Apéndice D

Generalización ecuaciones de campo para RSI

De forma similar, inicialmente se parte de la ecuación de Gauss

$$R_{uvps}e_\alpha^ue_\beta^ve_\gamma^pe_\delta^s = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + K_{\alpha\gamma}K_{\beta\delta} - K_{\alpha\delta}K_{\beta\gamma} , \quad (\text{D.1})$$

subiendo un índice en la ecuación anterior, se obtiene

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = R_{vps}^ue_\alpha^ue_\beta^ve_\gamma^pe_\delta^s + K_\gamma^\alpha K_{\beta\delta} - K_\delta^\alpha K_{\beta\gamma} , \quad (\text{D.2})$$

contrayendo los índices α, γ obtenemos

$$R_{\beta\delta} = R_{vps}^ue_\alpha^ue_\beta^ve_\delta^s + KK_{\beta\delta} - K_\delta^\alpha K_{\beta\alpha} . \quad (\text{D.3})$$

La métrica inducida sobre la sub-variedad es dada por $h_{np} = g_{np} - n_n n_p$, esto permite subir un índice $h^{np}h_{np} = e^{np}g_{np} - e^{np}n_n n_p$, para obtener $h_u^p = g_u^p - n^p n_u$, reemplazando en la expresión anterior, se llega a

$$R_{\beta\delta} = R_{vs}e_\beta^ve_\delta^s - R_{vps}^un_un^pe_\beta^ve_\delta^s + KK_{\beta\delta} - K_\delta^\alpha K_{\beta\alpha} . \quad (\text{D.4})$$

Considerando el tensor de Einstein $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}R$, y contrayendo los índices obtenemos

$$R = R' - R_v^un_un^v + K^2 - K^{\delta\beta}K_{\beta\delta} , \quad (\text{D.5})$$

con $R = e^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$, obtenemos

$$\frac{1}{2}h_{\alpha\beta}R = \frac{1}{2}Rg_{ab}e_{\alpha}^ae_{\beta}^b - \frac{1}{2}R_{\nu}^un_{\nu}h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}(K^2 - K^{\delta\beta}K_{\beta\delta}) , \quad (\text{D.6})$$

llevando el resultado anterior a la expresión del tensor de Einstein, obtenemos

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} = & \left[R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} \right] e_{\alpha}^ae_{\beta}^b - R_{\text{avp}}^un_{\nu}e_{\alpha}^ae_{\beta}^b + \frac{1}{2}R_{\nu}^un_{\nu}h_{\alpha\beta} + \\ & KK_{\alpha\beta} - K_{\beta}^{\delta}K_{\alpha\delta} - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}(K^2 - K^{\delta\beta}K_{\beta\delta}) . \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Si se considera el tensor momentum-energía en la ecuación de campo $R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \kappa^2 T_{ab}$, junto con el tensor de Weyl, se obtienen

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} = & \frac{2}{3}\kappa^2 [T_{ab}e_{\alpha}^ae_{\beta}^b + T_{uv}n^un^v] - \frac{1}{6}\kappa^2 Th_{\alpha\beta} + KK_{\alpha\beta} - K_{\beta}^{\delta}K_{\alpha\delta} \\ & - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}(K^2 - K^{\delta\beta}K_{\beta\delta}) - C_{\text{avb}}^run_{\nu}e_{\alpha}^ae_{\beta}^b . \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

En el caso de tener un modelo con dos membranas, como en el caso RSI, podemos mostrar de manera simple que las ecuaciones de campo sobre cada membrana, tendrían las siguientes formas, siguiendo lo anteriormente presentado y realizando algunas generalizaciones, las cuales no se muestran explícitamente en la literatura convencional

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{abcd}e_{\alpha}^ae_{\beta}^be_{\gamma}^ce_{\delta}^d + 2K_{\alpha[\gamma}K_{\delta]\beta} + 2K'_{\alpha[\gamma}K'_{\delta]\beta} , \quad (\text{D.9})$$

lo cual si consideramos las membranas independientes, nos conduce a

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} = & \frac{\kappa^2}{3} [T_{ab}e_{\alpha}^ae_{\beta}^b + T_{uv}n^un^v] - \frac{\kappa^2}{6}Th_{\alpha\beta} + KK_{\alpha\beta} - K_{\beta}^{\delta}K_{\alpha\delta} - K'K'_{\alpha\beta} + \frac{h_{\alpha\beta}}{2}(K^2 - K^{\delta\beta}K_{\beta\delta}) \\ & - K_{\beta}^{\delta}K'_{\alpha\delta} - C_{\text{avp}}^run_{\nu}e_{\alpha}^ae_{\beta}^b - \frac{h'_{\alpha\beta}}{2}(K'^2 - K'^{\delta\beta}K'_{\beta\delta}) - C_{\text{avp}}^run'_{\nu}e_{\alpha}^ae_{\beta}^b , \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

donde se ha considerado que no existe interacción inter-brane, además de colocar materia sobre

una brane.

En el espíritu de mantener independientes las branes, se considera la simetría Z_2 , es decir cuando pasamos de un lado de la membrana al otro, para cada brane obtenemos

$$K_{uv}^+ - K_{uv}^- = -\kappa^2 \left[T_{uv} - \frac{1}{3} T g_{uv} \right] , \quad (\text{D.11})$$

$$K'_{uv}{}^+ - K'_{uv}{}^- = -\kappa^2 \left[T'_{uv} - \frac{1}{3} T' g'_{uv} \right] , \quad (\text{D.12})$$

lo cual nos lleva a las siguientes ecuaciones efectivas de campo sobre cada una de las brane

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda_{(4)} g_{\mu\nu} + \kappa^2 T_{\mu\nu} + \frac{1}{6} \kappa^2 \Pi_{\mu\nu} - E_{\mu\nu} , \quad (\text{D.13})$$

$$G'_{\mu\nu} = -\Lambda'_{(4)} g'_{\mu\nu} + \kappa^2 T'_{\mu\nu} + \frac{1}{6} \kappa^2 \Pi'_{\mu\nu} - E'_{\mu\nu} , \quad (\text{D.14})$$

donde se recalca nuevamente, que las brane no interaccionan. Una situación más realista debe implicar una interacción de tipo gravitacional, lo cual debe llevar a un término que contemple tal hecho y que se manifieste en cada ecuación de campo.

Apéndice E

Términos no nulos de la métrica RS-FRW

Bajo consideraciones de isotropía, la métrica sobre un espacio 3D se puede expresar como

$$dt^2 = d\rho^2 + R_c^2 \text{sen}^2 \left(\frac{\rho}{R_c} \right) (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) , \quad (\text{E.1})$$

donde R_c es el radio de curvatura del espacio, ρ es la distancia radial. Ahora, si se considera el principio cosmológico y se definen los observadores fundamentales como aquellos que se mueven de tal manera que el universo siempre parece isotrópico a ellos. Cada uno de ellos tiene un reloj y mide el tiempo propio el cual se puede sincronizar en un único evento para definir el tiempo cósmico. Con esto se puede escribir la métrica como

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} \left[d\rho^2 + R_c^2 \text{sen}^2 \left(\frac{\rho}{R_c} \right) (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \right] , \quad (\text{E.2})$$

donde en esta forma t es el tiempo cósmico, y $d\rho$ es el incremento de distancia propia en la dirección radial.

Pero existe un problema al usar la métrica anterior, ya que la luz viaja a velocidad finita, es decir que sólo observamos todos los objetos astronómicos a lo largo de nuestro cono de luz pasado el cual está centrado en la Tierra en la época actual t_0 . Bajo algunas consideraciones un poco artificiosas se puede expresar la distancia radial como $\rho(t) = R(t)r$, donde r es la distancia coordenada radial comóvil, y el radio de curvatura se expresa como $R_c(t) = R_c(t_0)R(t) = \mathfrak{R}R(t)$, con estos resultados se obtiene la métrica de Robertson-Walker la cual es

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2(t)}{c^2} \left[dr^2 + \mathfrak{R}^2 \text{sen}^2 \left(\frac{r}{\mathfrak{R}} \right) (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \right] , \quad (\text{E.3})$$

esta métrica ha incorporado todos los elementos anteriores, y es el fundamento mismo de la cosmología estándar.

En consideración de lo anterior, y con el modelo braneworld en mente puede obtenerse una expresión para la métrica de Randall-Sundrum-Friedmann-Robertson-Walker la cual es

$$ds^2 = e^{-2\sigma(y)} dt^2 - e^{-2\sigma(y)} \frac{R^2(t)}{c^2} \left[dr^2 + \mathfrak{R}^2 \text{sen}^2 \left(\frac{r}{\mathfrak{R}} \right) (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \right] + b^2(t, y) dy^2, \quad (\text{E.4})$$

esta métrica describe una geometría no factorizable, es decir que la dimensión adicional afecta todos los elementos de la métrica.

Como se dijo anteriormente, la métrica más general que permite obtener soluciones cosmológicas es

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + b^2 dy^2 , \quad (\text{E.5})$$

la cual toma la siguiente forma, para obtener cosmologías compatibles con FRW, según lo anterior

$$ds^2 = -n^2(t, y) dt^2 + a^2(t, y) \gamma_{ij} dx^i dx^j + b^2(t, y) dy^2 , \quad (\text{E.6})$$

donde γ_{ij} es una métrica de máxima simetría tri-dimensional, es decir un espacio con simetría esférica, donde la curvatura espacial estará parametrizada por $k = -1, 0, 1$.

La ecuación de Einstein toma la forma usual

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = \kappa^2 T_{ab} , \quad (\text{E.7})$$

donde R_{ab} es el tensor de Ricci cinco-dimensional, y $R = g^{ab} R_{ab}$ es el escalar de curvatura y κ es la constante de acople gravitacional relacionada con la constante de Newton en cinco-dimensiones además de relacionarse con la masa de Planck en cinco-dimensiones, mediante la relación

$$\kappa^2 = 8\pi G_5 = M_5^{-3} . \quad (\text{E.8})$$

Insertado la métrica de prueba en la ecuación de campo se obtienen los elementos no nulos del tensor de Einstein, definido por $G = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}$:

Los símbolos de Cristoffel de segunda especie no nulos son:

$$\begin{array}{lll} \Gamma_{00}^0 = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial \tau} & \Gamma_{44}^0 = \frac{b}{n^2} \frac{\partial b}{\partial \tau} & \Gamma_{33}^4 = \frac{1}{b^2} \frac{\partial a}{\partial y} \\ \Gamma_{44}^4 = \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial y} & \Gamma_{34}^3 = \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial y} & \Gamma_{04}^0 = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} \\ \Gamma_{11}^0 = \frac{a}{n^2} \frac{\partial a}{\partial \tau} & \Gamma_{00}^4 = \frac{n}{b^2} \frac{\partial n}{\partial y} & \Gamma_{10}^1 = \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial \tau} \\ \Gamma_{30}^3 = \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial \tau} & \Gamma_{11}^4 = -\frac{a}{b^2} \frac{\partial a}{\partial y} & \Gamma_{14}^1 = \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial y} \\ \Gamma_{22}^0 = \frac{a}{n^2} \frac{\partial a}{\partial \tau} & \Gamma_{22}^4 = -\frac{n}{b^2} \frac{\partial a}{\partial y} & \Gamma_{20}^2 = \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial \tau} \\ \Gamma_{33}^0 = \frac{a}{n^2} \frac{\partial a}{\partial \tau} & \Gamma_{40}^4 = \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial \tau} & \Gamma_{24}^2 = \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial y} \end{array}$$

Elementos con los cuales podemos construir el tensor de Ricci y el escalar de curvatura

$$R_{ab} = \frac{\partial}{\partial x^a} \Gamma_{bd}^a - \frac{\partial}{\partial x^d} \Gamma_{ba}^a + \Gamma_{al}^a \Gamma_{bd}^l - \Gamma_{dl}^a \Gamma_{ba}^l$$

$$R = g_{ab} R_{ab} = g_{ab} \frac{\partial}{\partial x^a} \Gamma_{bd}^a - g_{ab} \frac{\partial}{\partial x^d} \Gamma_{ba}^a + g_{ab} \Gamma_{al}^a \Gamma_{bd}^l - g_{ab} \Gamma_{dl}^a \Gamma_{ba}^l$$

donde los índices latinos recorren 0, 1, 2, 3, 4

Relizando el correspondiente proceso algebraico obtenemos:

$$\begin{aligned} G_{00} &= 3 \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \right) - \frac{n^2}{b^2} \left(\frac{a''}{a} + \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} \right) \right) + k \frac{n^2}{a^2} \right\} \\ G_{ij} &= \frac{a^2}{b^2} \gamma_{ij} \left\{ \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} + 2 \frac{n'}{n} \right) - \frac{b'}{b} \left(\frac{n'}{n} + 2 \frac{a'}{a} \right) + 2 \frac{a''}{a} + \frac{n''}{n} \right\} \\ &\quad + \frac{a^2}{n^2} \gamma_{ij} \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \left(-\frac{\dot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{n}}{n} \right) - 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \left(-2 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{n}}{n} \right) - \frac{\ddot{b}}{b} \right\} - k \gamma_{ij} \\ G_{04} &= 3 \left(\frac{n' \dot{a}}{n a} + \frac{a' \dot{b}}{a b} - \frac{\dot{a}}{a} \right) \\ G_{44} &= 3 \left\{ \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} + \frac{n'}{n} \right) - \frac{b^2}{n^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{n}}{n} \right) + \frac{\ddot{a}}{a} \right) - k \frac{b^2}{a^2} \right\} \end{aligned}$$

En las expresiones anteriores, la prima establece las derivadas respecto a y , y el punto establece la derivada respecto a τ . Estas expresiones permiten obtener las ecuaciones dinámicas de la cosmología, una vez se conozca el tensor momentum-energía.

Apéndice F

Métrica Randall-Sundrum

Para solucionar la ecuación de Einstein en cinco dimensiones, se requiere que las branes preserven la invarianza de Lorentz en 4D (invarianza de Poincaré), para ello se escoge una métrica de prueba

$$ds^2 = a^2(y)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2 , \quad (\text{F.1})$$

la cual se sustituye en la ecuación de Einstein 5D y se aplica la condición de frontera de la topología de un orbifold S^1/Z_2 (es un círculo doblado sobre su diámetro), esto permite obtener la métrica de Randall-Sundrum, la cual expresa la geometría estática de una brane junto con la geometría del volumen en el cual está contenida, dicha métrica es

$$ds^2 = e^{-2\sigma(y)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2 , \quad (\text{F.2})$$

el término $e^{-2\sigma(y)}$ es llamado el factor de curvatura, el cual es Z_2 -simétrico, y decae exponencialmente desde la brane de tensión positiva hasta la brane de tensión negativa.

Para la métrica anterior los elementos del tensor métrico son

$$g_{\mu\nu} = e^{-2\sigma(y)}\eta_{\mu\nu}$$

$$g_{44} = 1$$

$$g_{4\mu} = g_{\mu 4} = 0$$

elementos con los cuales se puede calcular el tensor métrico inverso

$$\begin{pmatrix} e^{-2\sigma(y)}\eta_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{F.3})$$

Desarrollando el producto matricial e igualando las componentes, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$Ae^{-2\sigma(y)}\eta_{\mu\nu} = 1$$

$$Be^{-2\sigma(y)}\eta_{\mu\nu} = 0$$

$$C = 0$$

$$D = 1$$

Entonces los elementos del tensor métrico $g^{\mu\nu}$ son

$$g^{\mu\nu} = e^{2\sigma}\eta^{\mu\nu}$$

$$g^{44} = 1$$

$$g^{4\mu} = g^{\mu 4} = 0$$

Según lo anterior se pueden determinar los símbolos de Cristoffel no nulos

$$\Gamma_{\mu\nu}^4 = -2\sigma' e^{-2\sigma}\eta_{\mu\nu}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\gamma = 0$$

$$\Gamma_{\nu 4}^4 = 0$$

$$\Gamma_{\nu 4}^\gamma = -2\sigma'\delta_\nu^\gamma$$

$$\Gamma_{44}^\mu = 0$$

$$\Gamma_{44}^4 = 0$$

Con los resultados anteriores se puede calcular el tensor de Ricci, el cual se obtiene de:

$$R_{\mu\nu} = -\partial_\nu\Gamma_{\mu p}^p + \partial_p\Gamma_{\mu\nu}^p - \Gamma_{\mu p}^m\Gamma_{\nu m}^p + \Gamma_{\mu\nu}^p\Gamma_{pm}^m$$

calculando las respectivas componentes y llevando a cabo los pasos algebraicos se obtiene:

$$R_{\mu\nu} = e^{-2\sigma}(\sigma'' - 4\sigma'^2)\eta_{\mu\nu}$$

$$R_{44} = 4\sigma'' - 4\sigma'^2$$

$$R_{\mu 4} = 0$$

de igual manera se puede calcular el escalar de curvatura

$$R = 4(2\sigma'' - 5\sigma'^2). \quad (\text{F.4})$$

En la quinta dimensión se encuentra lo siguiente

$$\sqrt{-g}(R_{44} - \frac{1}{2}g_{44}R) = -\frac{1}{4M_5^3}(\Lambda_4\sqrt{-g}g_{44}), \quad (\text{F.5})$$

$$4\sigma'' - 4\sigma'^2 - \frac{1}{2}[4(2\sigma'' - 5\sigma'^2)] = -\frac{1}{4M_5^3}\Lambda_4\sqrt{-g}, \quad (\text{F.6})$$

donde $6\sigma'^2 = -\frac{1}{4M_3^2}\Lambda_4$.

En lo que sigue se muestra un cálculo explícito de la escala de energía involucrada por la métrica RS. La escala de energías introducida por la masa de Planck, se define como $M_P = \left(\frac{\hbar c}{G_N}\right) \simeq 1,2 \times 10^{19} GeV = 10^{16} TeV$, que corresponde a la energía de unificación de todas las interacciones. Los aceleradores de partículas más poderosos han explorado energías entre 100 y 1000 GeV es decir $\approx 1TeV$, correspondiente a los procesos de interacción electrodébil, esto define la escala de energías electrodébiles, la enorme discrepancia en los diez y seis ordenes de magnitud es lo que se conoce como problema de jerarquías. Este problema se ha tratado de resolver modificando condiciones físicas o modificando los principios físicos mismos. El modelo de Randall-Sundrum, suministra una nueva escala de energías incorporando una dimensión adicional, conduciendo a una llamada escala fundamental, la cual se encuentra en el orden de los TeV , acercando la verificación experimental a los aceleradores actuales. Dicha escala se define por $M_P = \frac{M^3}{k} (1 - e^{-2kr_c\pi})$, como se enunció anteriormente. M es la masa de Planck fundamental en cinco-dimensiones, k una constante, r_c es un radio de compactificación en el modelo RSI. Considerando valores para $k = 10^4 m^{-1}$ y $r_c = 2,78 \times 10^{-3} m$, deducidos en el modelo RSI, obtenemos $M \simeq 1TeV$, en el caso RSII donde $r_c \rightarrow \infty$ tenemos $M = M_P^{2/3} k^{1/3}$, lo cual nos llevaría a $M \simeq 10^{12} TeV$.

Apéndice G

Soluciones exactas, ajuste fino y relaciones entre constantes

Algunas soluciones integrables o exactas que se pueden encontrar para la en la ecuación de Friedmann modificada en términos de índice barotrópico [28, 30]

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{C_{GR}}{a^{3\gamma}} + \frac{C_\lambda}{a^{6\gamma}} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda_4}{3} + \frac{C_U}{a^4}, \quad (\text{G.1})$$

donde las constantes que se ha mostrado son $C_{GR} = \frac{\kappa_4^2}{3} a^{3\gamma} \rho$, $C_\lambda = \frac{\kappa_4^2}{6\lambda} a^{6\gamma} \rho^2$, $C_U = \frac{2}{\kappa_4^2 \lambda} a^4 U$, y donde se hace uso de la ecuación de estado general $p = (\gamma - 1)\rho$ la cual introduce el índice barotrópico γ , el cual hace posible la introducción de diferentes contenidos de materia-energía sobre la membrana. A partir de la ecuación anterior el análisis correspondiente para determinar cuales casos son integrables exactamente se obtienen tomando en consideración diferentes valores para el índice barotrópico

-Constante cosmológica $\gamma = 0$

En este caso la ecuación de Friedmann toma la siguiente forma

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 = \left(C_{GR} + C_\lambda + \frac{\Lambda_4}{3} \right) - \frac{k}{a^2} + \frac{C_U}{a^4}, \quad (\text{G.2})$$

se observa que la ecuación que se obtiene es similar a la obtenida en cosmología estándar, modificando la constante cosmológica.

-Paredes de dominio $\gamma = 1/3$

Considerando paredes de dominio sobre la membrana y en el marco de la relatividad general,

el término relativístico C_{GR} actúa como dominios de pared, mientras el término C_λ actúa como el efecto producido por cuerdas cósmicas, obteniéndose la siguiente expresión

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{C_\lambda - k}{a^2} + \frac{C_{GR}}{a^2} + \frac{\Lambda_4}{3} + \frac{C_U}{a^4}, \quad (\text{G.3})$$

-Cuerdas Cósmicas $\gamma = 2/3$

Bajo esta consideración y en el marco de la relatividad general, el término C_{GR} actúa o representa el efecto de las cuerdas cósmicas sobre la membrana, en tanto que el término C_λ actúa como un término de radiación, esto lleva a obtener la siguiente expresión

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{C_U + C_\lambda}{a^4} + \frac{C_{GR} - k}{a^2} + \frac{\Lambda_4}{3}, \quad (\text{G.4})$$

-Energía Oscura $\gamma = -1/3$

Para el caso de materia oscura sobre la membrana se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 = C_{GR}a + C_\lambda a^2 - \frac{k}{a^2} + \frac{C_U}{a^4} + \frac{\Lambda_4}{3}, \quad (\text{G.5})$$

en la cual se puede hacer algunas consideraciones a fin de obtener una solución simple para energía oscura, tales consideraciones son, $C_\lambda = C_U = \Lambda_4 = 0$ y además identificando $C_{GR} \equiv C_d$, junto con un universo plano $k = 0$, se obtiene como solución

$$a(t) = \frac{1}{4} C_d (t - t_0)^2, \quad (\text{G.6})$$

y considerando un universo espacialmente cerrado con $k = +1$, obtenemos

$$a(t) = \left[\frac{-1}{C_d^{1/2} \text{sen} 2(t - t_0)} \right]^{1/2}, \quad (\text{G.7})$$

esta expresión muestra que el dominio admisible para el tiempo es $-\pi/2 \leq (t - t_0) \leq \pi$. También, se puede encontrar una solución donde $k = 0$ y $C_U = 0$, y definiendo $\Delta = \frac{4}{3} C_\lambda \Lambda_4 - C_{GR}^2$, se obtiene

$$a(t) = \frac{2/3 \Lambda_4}{\left[\text{sen}^2 \sqrt{-\frac{\Lambda_4}{3}} (t - t_0) \right] - C_{GR}}, \quad (\text{G.8})$$

lo cual describe un universo oscilante no singular, con una competencia entre la presión positiva

de $\Lambda_4 < 0$ y la presión negativa de energía oscura $p = -(4/3)\rho$.

En cosmología el problema del ajuste fino se ha definido como la sutil relación que debe existir entre algunas constantes fundamentales para que se den las condiciones necesarias que permitan que el universo evolucione hasta el estado actual. Según el modelo RS tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas (las primas denotan derivadas respecto de y)

$$6\sigma'^2 = -\kappa^2\Lambda, \quad (\text{G.9})$$

$$3\sigma'' = \kappa^2\lambda\delta(y), \quad (\text{G.10})$$

entonces solucionando la primera ecuación se obtiene $\sigma(y) = \sqrt{-\frac{1}{6}\kappa^2\Lambda y}$, ahora, si se integra la segunda ecuación desde $-\epsilon$ hasta $+\epsilon$, luego se toma el límite $\epsilon \rightarrow 0$ y se hace uso de la simetría Z_2 , se encuentra $6\sigma' = \kappa^2\sigma$, que junto con la solución $\sigma(y)$ permite obtener

$$\Lambda = \frac{-1}{6}\kappa^2\lambda^2, \quad (\text{G.11})$$

la relación anterior es la condición de ajuste fino para el modelo brane world RS estático, es decir que el valor de la constante cosmológica en cinco dimensiones depende del valor de la tensión sobre la brane, de este modo los valores que puede asumir la tensión deben ser muy adecuados para obtener un valor de constante cosmológica 5D que conduzca al valor de constante cosmológica 4D observado hoy día. En el marco del braneworld, se han obtenido relaciones entre las constantes fundamentales, por ejemplo

$$\Lambda_4 = \frac{1}{2}\kappa^2 \left[\Lambda + \frac{1}{6}\kappa^2\lambda^2 \right], \quad (\text{G.12})$$

esta es la constante cosmológica en cuatro dimensiones, relacionada con la constante cosmológica en cinco dimensiones y con la tensión sobre la brane, si consideramos un universo donde la constante cosmológica sea cero, obtenemos la condición de ajuste fino encontrada anteriormente, es decir que para producir un modelo braneworld RS estático se requiere que $\Lambda_4 = 0$.

Se pueden deducir otras constantes o la relación entre ellas, algunas son

$$\kappa_4 = 8\pi G_4 = \frac{8\pi}{M_4^2} = \frac{1}{6}\lambda\kappa^4, \quad (\text{G.13})$$

$$\kappa = 8\pi G_5 = \frac{8\pi}{M_5^3}, \quad (\text{G.14})$$

en términos del radio de curvatura del espacio AdS_5 , se obtiene

$$l = \frac{M_4^2}{M_5^3}, \quad (\text{G.15})$$

$$\Lambda = \frac{-6}{l^2 \kappa^2} = \frac{-\lambda}{l^2 \kappa_4^2}, \quad (\text{G.16})$$

y bajo algunas consideraciones físicas, se obtienen algunas cotas, como por ejemplo

$$\lambda \gtrsim 1 \text{MeV}$$

$$M_5 \gtrsim 10 \text{TeV}$$

$$M_4 \gtrsim 10^{16} \text{TeV}$$

$$\Lambda_4 \gtrsim 0$$

$$\Lambda \gtrsim 6,31 \times 10^{-6} \text{eV}$$

Apéndice H

Máxima Verosimilitud

Recientemente la técnica de máxima verosimilitud [41] [42] [43], se viene aplicando con regularidad para contrastar y restringir los modelos teóricos bajo la consideración de datos observacionales, además, es uno de los mejores métodos para obtener un estimador puntual de un parámetro o de un conjunto de parámetros, y como su nombre lo indica, el estimador será el valor o valores de los parámetros que maximizan la función de verosimilitud. La función de verosimilitud es definida como la probabilidad de que dado un conjunto de datos, experimentales u observacionales, se puedan encontrar éstos bajo una teoría o modelo matemático. Esta técnica consiste en obtener una función de verosimilitud, sabiendo que los datos observacionales se distribuyen normalmente y donde se asume que las medidas observacionales se presentan con errores Gaussianos no correlacionados, y en tal caso se puede encontrar que la función de likelihood \mathcal{L} o de log-likelihood $\log \mathcal{L}$, puede ser determinada del estadístico χ^2 , donde $\mathcal{L} \propto e^{(-\frac{\chi^2}{2})}$. Por consiguiente los parámetros que maximizan la función de verosimilitud, son los mismos que minimizan el chi-cuadrado, y donde se involucra las observaciones (datos) con el modelo teórico, de la siguiente forma

$$\chi^2(z_i; \Omega_\alpha) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{m_{obs}(z_i) - m_{teo}(z_i; \Omega_\alpha)}{\sigma_m(z_i)} \right]^2, \quad (\text{H.1})$$

en la cual, tenemos la magnitud aparente observada, la magnitud teórica y el error en la medida (desviación estándar). La magnitud teórica se obtiene según la siguiente relación

$$m_{teo}(z) = 5 \log \frac{(1+z)}{\sqrt{\Omega_{k0}}} \text{sen} \left[\sqrt{\Omega_{k0}} \int_0^z [\Omega_{\lambda0}(1+z)^6 + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{U0}(1+z)^4 + \Omega_{k0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda0}]^{-1/2} dz \right] + \mathbf{M} , \quad (\text{H.2})$$

de este modo la función chi-cuadrado que se debe estudiar se puede escribir de forma completa como

$$\begin{aligned} \chi^2(z_i; \Omega_{m0}, \Omega_{\Lambda0}, \Omega_{\lambda0}, \Omega_{U0}) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{(\sigma_m(z_i))^2} \left[m_{obs}(z_i) - 5 \log \frac{(1+z)}{\sqrt{\Omega_{k0}}} \right. \\ &\quad \left. \text{sen} \left[\sqrt{\Omega_{k0}} \int_0^z [\Omega_{\lambda0}(1+z)^6 + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \right. \right. \quad (\text{H.3}) \\ &\quad \left. \left. \Omega_{U0}(1+z)^4 + \Omega_{k0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda0}]^{-1/2} dz \right] + \mathbf{M} \right]^2 . \end{aligned}$$

Ahora bién, para hacer el análisis de los datos debemos determinar el mejor ajuste al conjunto de parámetros cosmológicos, en este caso el conjunto de parámetros es $\Omega_\alpha = \{\Omega_{m0}, \Omega_{\Lambda0}, \Omega_{\lambda0}, \Omega_{u0}\}$ y además encontrar las regiones de confianza bidimensionales que en este caso corresponden con las regiones definidas por $(\Omega_{m0}, \Omega_{\Lambda0})$, $(\Omega_{m0}, \Omega_{\lambda0})$, $(\Omega_{m0}, \Omega_{u0})$, $(\Omega_{\Lambda0}, \Omega_{\lambda0})$, $(\Omega_{\Lambda0}, \Omega_{u0})$, $(\Omega_{\lambda0}, \Omega_{u0})$, por lo tanto para encontrar el espacio de parámetros anteriores usamos el proceso de marginalización asumiendo que cada parámetro tiene una distribución Gaussiana a priori, lo cual conduce a considerar un estadístico chi-cuadrado modificado, el cuál se puede expresar de la siguiente forma

$$\chi_{int}^2(\Omega_\alpha) = -2 \ln \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega_\alpha \exp\left(-\frac{1}{2}(\chi^2 - \chi_{\min}^2)\right) \pi(\Omega_\alpha) \right] , \quad (\text{H.4})$$

esta ecuación corresponde al chi-cuadrado marginalizado o integrado, en el cual podemos considerar una distribución Gaussiana a priori o una distribución uniforme a priori para los parámetros cosmológicos de interés, es decir

$$\pi(\Omega_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{apriori}^2(\Omega_\alpha)}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_{apriori}^2(\Omega_\alpha)} (\Omega_\alpha - \Omega_\alpha^{\text{real}})^2 \right] , \quad (\text{H.5})$$

$$\pi(\Omega_\alpha) = 1 , \text{ con } \Omega_\alpha \in \Omega_\alpha^{\text{real}} \pm \Delta\Omega_\alpha , \quad (\text{H.6})$$

entonces si se encuentra el mínimo de χ^2 se obtiene el mínimo de χ_{int}^2 , donde χ_{\min}^2 es el mínimo obtenido con el valor óptimo de los parámetros $\bar{\Omega}_\alpha$.

La variable χ_{\min}^2 es aleatoria en el sentido de que esta depende del conjunto de datos aleatorios que se considera. Su distribución de probabilidad es una distribución chi-cuadrado para $N - \nu$ grados de libertad (ν número de parámetros libres). Esto implica que 68 % de los valores aleatorios en un conjunto de datos dado dará un χ^2 tal que

$$\chi^2 - \chi_{\min}^2 \leq \Delta\chi_{1\sigma}^2(\nu), \quad (\text{H.7})$$

donde $\Delta\chi_{1\sigma}^2(\nu)$ es 2,3 para $\nu = 2$ parámetros libres. Por lo tanto, la ecuación anterior define la 1σ -superficie alrededor del parámetro de mejor ajuste. De igual forma se puede mostrar que el 95,4 % de los valores aleatorios del conjunto dado dará un χ^2 tal que

$$\chi^2 - \chi_{\min}^2 \leq \Delta\chi_{2\sigma}^2(\nu), \quad (\text{H.8})$$

donde $\Delta\chi_{2\sigma}^2(\nu)$ es 6,17 para dos parámetros libres. Nuevamente, la ecuación anterior define la 2σ -superficie alrededor del mejor ajuste y de forma similar se puede encontrar lo mismo para σ 's mayores.

El valor fijo de $\Delta\chi_{i\sigma}^2(\nu)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) determina la frontera de los i -ésimos contornos de nivel de confianza y dará la probabilidad de tener χ^2 para el valor verdadero de los parámetros estimados dentro de la frontera. Este criterio permite descartar o aceptar cualquier par de parámetros y si $\chi^2/(N - \nu) \approx 1$, se dice que el ajuste es bueno y que los datos son consistentes con el modelo cosmológico bajo consideración [44] [45].

Según lo anterior, en este trabajo se utilizó la siguiente metodología: primero se obtuvo el mínimo de la función chi-cuadrado definida anteriormente, con ayuda de la función *FinMinimum de Mathematica V4.0*, el resultado de esta función son los valores óptimos de los parámetros, con estos valores se obtiene el valor de χ_{\min}^2 , y siguiendo el criterio enunciado en las ecuaciones anteriores se procede a solucionar estas ecuaciones con ayuda de la función *ImplicitPlot*, la cual da como resultado la gráfica de las ecuaciones anteriores, es decir los contornos de nivel. Puede observarse la utilización de las funciones anteriores en el código elaborado en *Mathematica V4.0* y presentado al final de esta sección.

Desde el punto de vista Bayesiano encontramos que el estadístico χ^2 , como se ha mencionado anteriormente, es bastante adecuado para determinar los valores más probables de los parámetros

cosmológicos, que en este caso corresponden a $(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_\lambda, \Omega_U)$, como también los intervalos o regiones de confianza que rodean estos parámetros. Para restringir las regiones del espacio de parámetros no acotados por contornos de confianza uniformes (i.e. χ^2 constante), se necesita definir la función de densidad de probabilidad (PDF) para los parámetros cosmológicos. La PDF (p) de estos parámetros dada la magnitud aparente es derivada de la PDF de la magnitud aparente observacional mediante el teorema de Bayes

$$p(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_\lambda, \Omega_U | m_{obs}) = \frac{1}{p(m_{obs})} p(m_{obs} | \Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_\lambda, \Omega_U) p(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_\lambda, \Omega_U), \quad (\text{H.9})$$

como no tenemos restricciones a priori sobre los parámetros cosmológicos (fuera de las regiones excluidas) o sobre los datos, tomamos $p(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_\lambda, \Omega_U)$ y $p(m_{obs})$ como constantes. Entonces tenemos para las regiones permitidas de $(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_\lambda, \Omega_U)$

$$p(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_\lambda, \Omega_U | m_{obs}) \propto p(m_{obs} | \Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_\lambda, \Omega_U), \quad (\text{H.10})$$

asumimos que cada magnitud aparente es independiente y distribuida normalmente, así que la PDF para el conjunto de magnitudes dados los parámetros es un producto de Gaussianas

$$p(m_{obs} | \Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_\lambda, \Omega_U) = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{obs,i}^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{m_{teo,i}(z_i, \Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_\lambda, \Omega_U) - m_{obs,i}}{\sigma_{obs,i}}\right)^2\right], \quad (\text{H.11})$$

la cual se simplifica a

$$p(m_{obs} | \Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_\lambda, \Omega_U) = \left[\prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{obs,i}^2}} \right] \exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2\right), \quad (\text{H.12})$$

el producto es una constante, lo cual lleva a la PDF de los parámetros cosmológicos

$$p(m_{obs} | \Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_\lambda, \Omega_U) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2\right), \quad (\text{H.13})$$

la PDF normalizada se obtiene de dividir esta PDF relativa por la suma de todos los posibles estados, es decir

$$p_n(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_\lambda, \Omega_U | m_{obs}) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}\chi^2) d\Omega_m d\Omega_\Lambda d\Omega_\lambda d\Omega_U} \exp(-\frac{1}{2}\chi^2), \quad (\text{H.14})$$

despreciando las regiones no físicas. Los valores más probables de los parámetros cosmológicos y las regiones preferidas del espacio de parámetros son localizados cuando la ecuación $\chi^2(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_\lambda, \Omega_U)$ es minimizado o alternativamete la ecuación anterior es maximizada. Las regiones de confianza conjuntas para las diferentes parejas de parámetro se obtiene de

$$p(\Omega_m, \Omega_\Lambda | m_{obs}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_n(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_\lambda, \Omega_U | m_{obs}) d\Omega_\lambda d\Omega_U \quad (\text{H.15})$$

$$p(\Omega_m, \Omega_\lambda | m_{obs}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_n(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_\lambda, \Omega_U | m_{obs}) d\Omega_\Lambda d\Omega_U \quad (\text{H.16})$$

$$p(\Omega_m, \Omega_U | m_{obs}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_n(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_\lambda, \Omega_U | m_{obs}) d\Omega_\Lambda d\Omega_\lambda \quad (\text{H.17})$$

$$p(\Omega_\Lambda, \Omega_\lambda | m_{obs}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_n(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_\lambda, \Omega_U | m_{obs}) d\Omega_m d\Omega_U \quad (\text{H.18})$$

$$p(\Omega_\Lambda, \Omega_U | m_{obs}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_n(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_\lambda, \Omega_U | m_{obs}) d\Omega_m d\Omega_\lambda \quad (\text{H.19})$$

$$p(\Omega_\lambda, \Omega_U | m_{obs}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_n(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_\lambda, \Omega_U | m_{obs}) d\Omega_m d\Omega_\Lambda \quad (\text{H.20})$$

En el desarrollo de este trabajo se ha escrito un programa o código en *Mathematica V4.0*, el cual permite obtener los parámetros óptimos del modelo, Ω_α , como el valor de chi-cuadrado y los respectivos contornos o regiones de confianza, asimismo, se ha hecho uso de los datos de Supernovas Ia, reportados por el Proyecto de Supernovas de Alto Corrimiento al Rojo, el cual esta conformado por un total de 60 SN Ia, las cuales han servido para demostrar la expansión

acelerada del Universo.

Se reporta en este apéndice, las funciones de verosimilitud para los cuatro parámetros relevantes del modelo braneworld, dichas funciones de verosimilitud se pueden interpretar como la función de distribución de valores las cuales permiten determinar la probabilidad de obtener algún valor para los parámetros en cuestión.

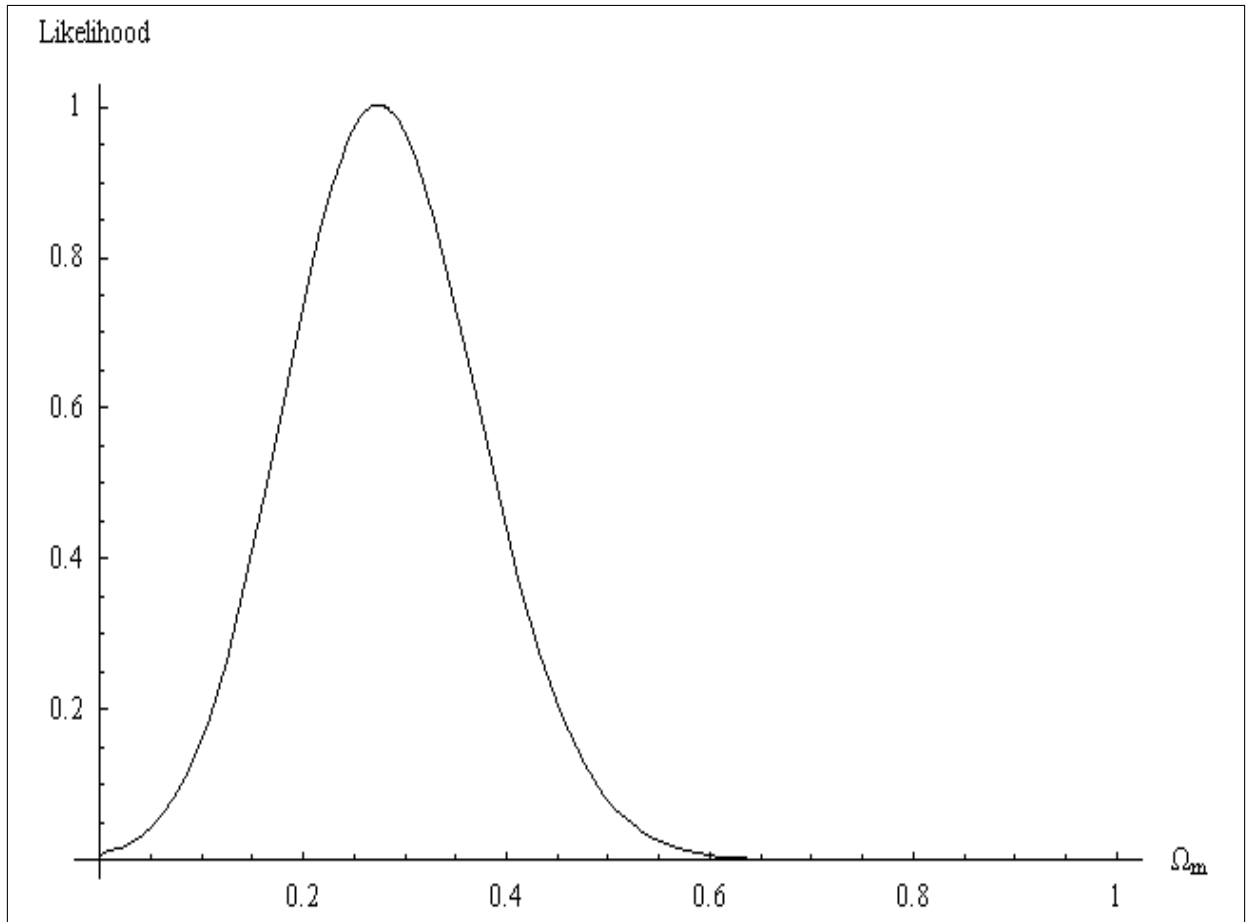


Figura 49: **Función de verosimilitud o de distribución de valores, para el parámetro de densidad de materia.**

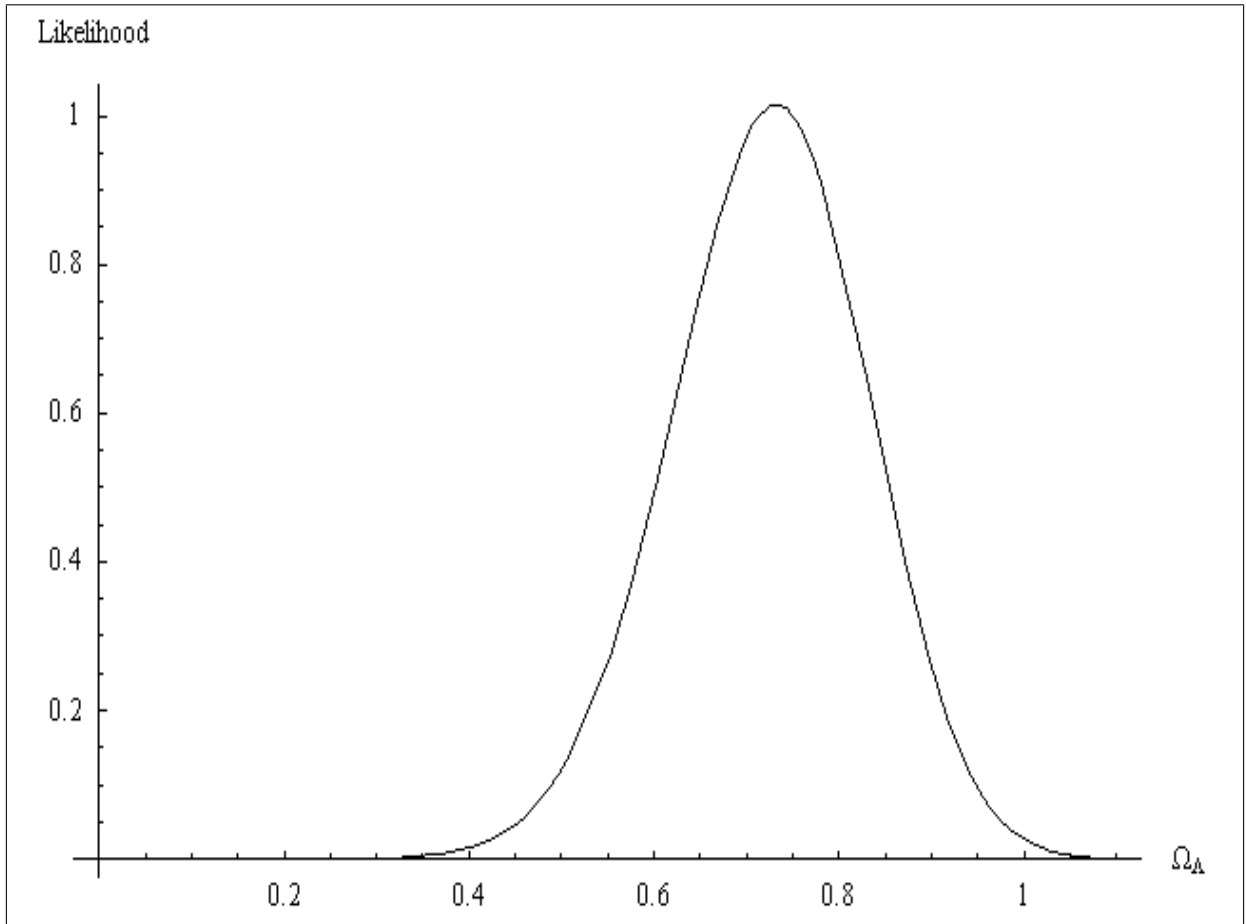


Figura 50: Función de verosimilitud o de distribución de valores, para el parámetro de densidad de constante cosmológica.

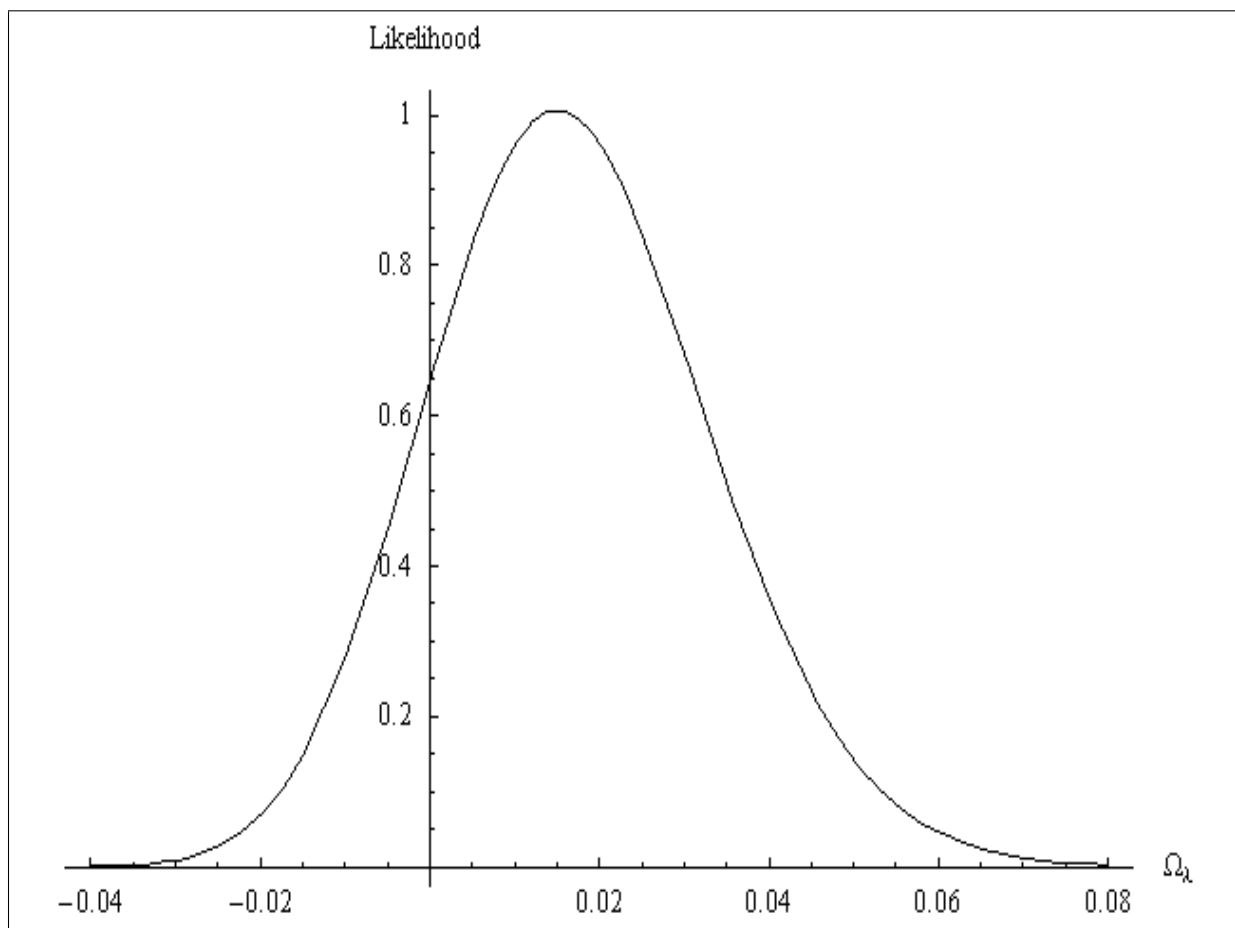


Figura 51: **Función de verosimilitud o de distribución de valores, para el parámetro de densidad de tensión sobre la brane.** *Observe, que existe una probabilidad de obtener valores negativos para este parámetro.*

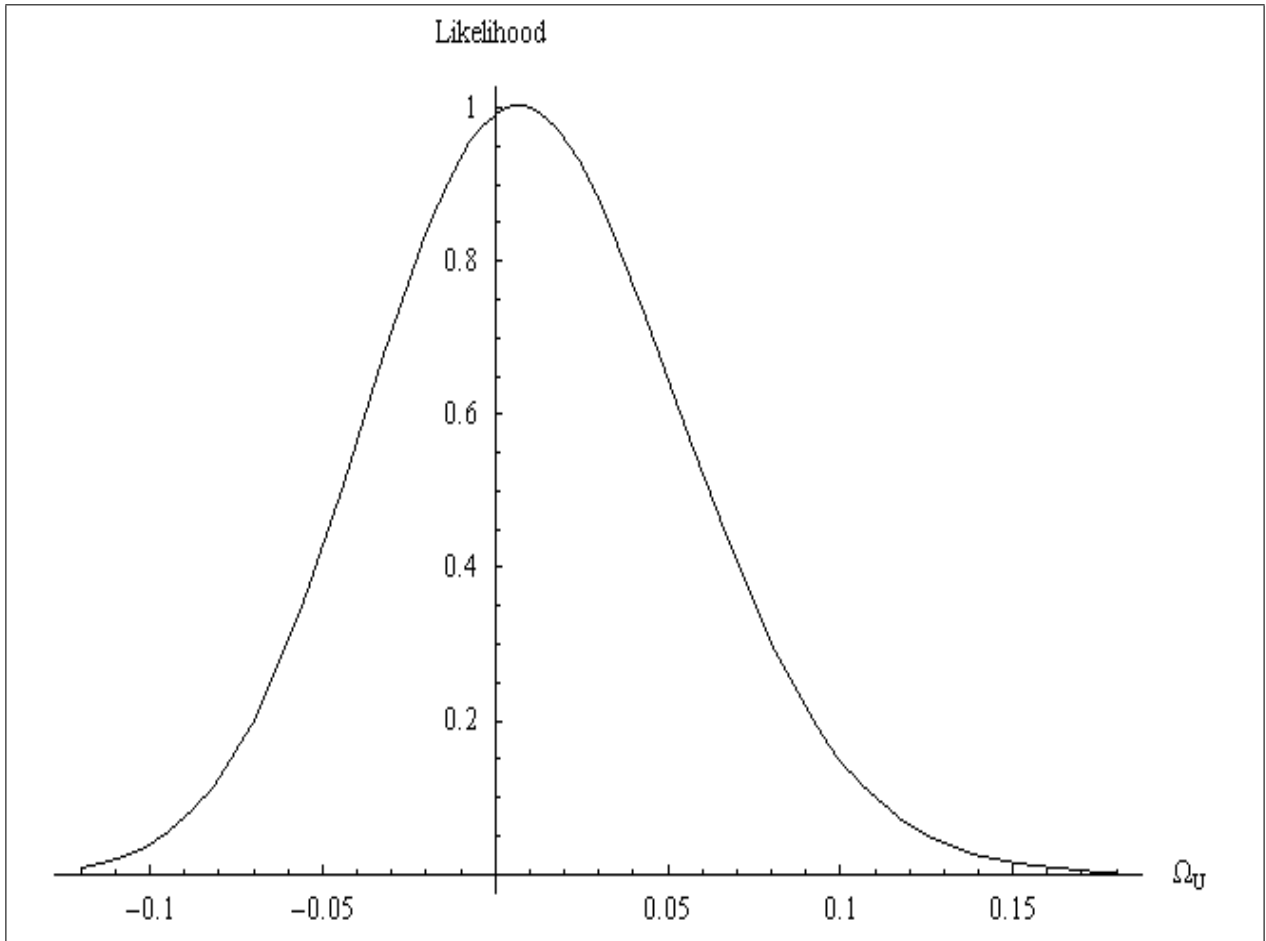


Figura 52: **Función de verosimilitud o de distribución de valores, para el parámetro de densidad de radiación oscura sobre la brane.** *Observe, que existe una probabilidad de obtener valores negativos para este parámetro.*

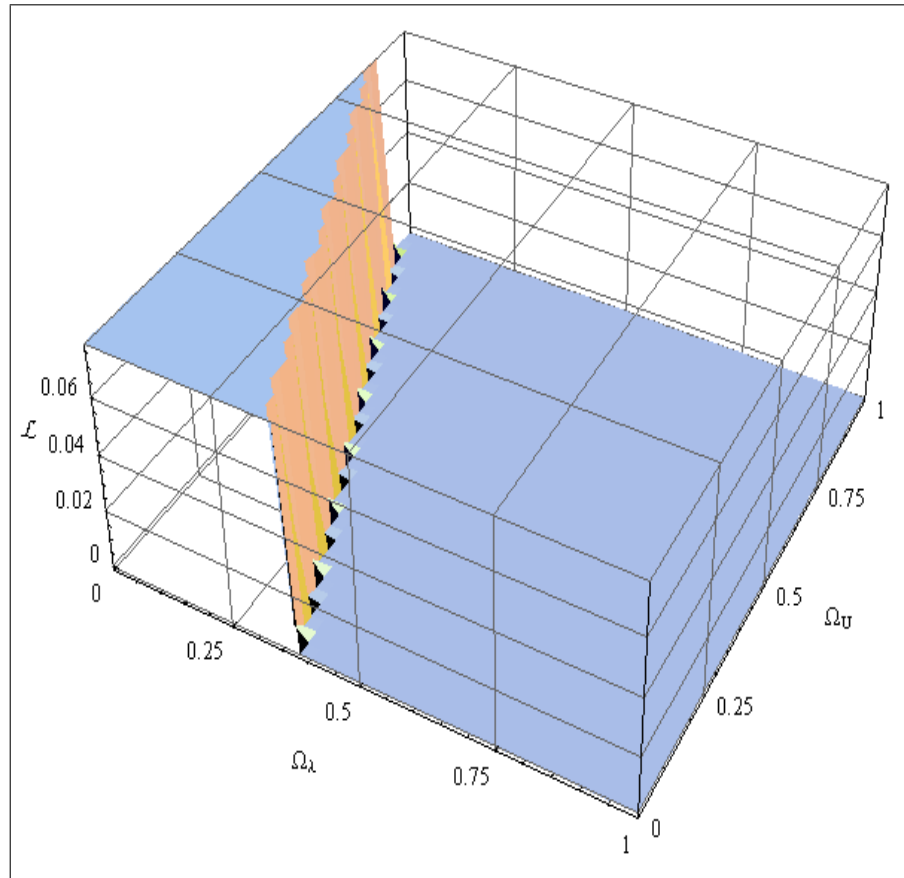


Figura 53: **Función de verosimilitud 3D, para los parámetros de densidad de tensión y de radiación oscura.** *Puede apreciarse en esta gráfico 3D, la forma que tiene la función de verosimilitud.*

Finalmente se reporta el conjunto de datos utilizados en este estudio y se anexa el código que desarrolla los cálculos.

redshift	magnitud aparente	error magnitud
0.03	16.26	0.20
0.05	17.63	0.18
0.026	16.08	0.24
0.075	18.43	0.20
0.026	16.28	0.20
0.014	14.47	0.23

0.101	19.16	0.23
0.02	15.18	0.20
0.036	16.66	0.21
0.045	17.61	0.19
0.043	17.19	0.18
0.018	15.61	0.21
0.079	18.27	0.18
0.088	19.28	0.18
0.063	18.24	0.18
0.071	18.33	0.20
0.052	17.54	0.18
0.05	17.69	0.20
0.458	23.11	0.46
0.354	22.38	0.33
0.425	22.13	0.49
0.374	21.72	0.22
0.42	22.55	0.25
0.372	22.26	0.20
0.378	22.58	0.37
0.453	23.17	0.25
0.465	23.33	0.30
0.498	23.71	0.25
0.655	23.27	0.21
0.4	22.36	0.19
0.615	23.19	0.25
0.48	22.96	0.24
0.45	22.51	0.23
0.388	22.65	0.20
0.57	23.27	0.22
0.49	23.1	0.20
0.495	22.83	0.19

redshift	magnitud aparente	error magnitud
0.656	23.57	0.28
0.828	24.65	0.54
0.45	23.17	0.23
0.43	23.13	0.22
0.58	23.46	0.23
0.763	24.47	0.53
0.526	23.15	0.20
0.172	20.17	0.18
0.619	23.8	0.28
0.592	24.42	0.37
0.55	23.51	0.25
0.18	20.43	0.17
0.374	23.52	0.24
0.472	23.11	0.19
0.43	22.57	0.18
0.657	23.83	0.23
0.612	23.69	0.21
0.32	21.86	0.18
0.579	23.48	0.22
0.45	22.83	0.30
0.581	23.09	0.22
0.416	22.57	0.20
0.83	24.32	0.22

Cuadro H.1: Tabla con los respectivos valores observacionales

Bibliografía

- [1] Narlikar, J. V., *Introduction to Cosmology*, (2002)
- [2] Linder, E. V., *First Principles of Cosmology*, Addison-Wesley, 1997
- [3] Peebles, P. J. E. 1993, *Principles of Physical Cosmology*. Princeton: Princeton University Press
- [4] Peter Schneider, *Cosmology*, Argelander-Institut für Astronomie, Universität Bonn, 2008
- [5] Coles, P. and Lucchin, F. (1995). *Cosmology-the Origin and Evolution of Cosmic Structure*. Chichester: John Wiley and Sons.
- [6] Guth, A. (1997). *The Inflationary Universe. The Quest for a New Theory of Cosmic Origins*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- [7] Turner, M. S. (1997). In *Relativistic Astrophysics*, (eds. B.J.T Jones and D. Markovic), 83. Cambridge University Press.
- [8] Kolb, E. W. and Turner, M.S. (1990). *The Early Universe*. Redwood City, California: Addison-Wesley Publishing Co.
- [9] Longair, M. S. (1994). *Theoretical Concepts In Physics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [10] Weinberg, S. (1997). In *Critical Dialogues in Cosmology*, (ed. N. Turok), 195. Singapore: World Scientific.
- [11] T. Padmanabhan, *Dark Energy and Gravity*, IUCAA, Post Bag 4, Ganeshkhind, Pune - 411 007, India, 2007

- [12] T. Padmanabhan, *Gravity: A New Holographic Perspective (Lecture at the International Conference on Einstein's Legacy in the New Millennium, Puri, India, Dec, 2005)* Int.J.Mod.Phys., D 15, 1659-1675, gr-qc/0606061, 2006.
- [13] *The Universe's Unseen Dimensions*, Scientific American, hep-ph/0111027, 2001.
- [14] P. D. B. Collins, A. D. Martin, E. J. Squires, *Particle Physics and Cosmology*, Durham, England, 1988
- [15] Naresh Dadhich, *Why do we live in four dimension?*, IUCAA, Pune 411007, India, gr-qc/0902.0205v1, 2009
- [16] Ishwaree P. Neupane, *Extra dimensions, warped compactifications and cosmic acceleration*, Department of Physics and Astronomy, University of Canterbury, Private Bag 4800, Christchurch 8041, New Zealand, Kavli Institute for Theoretical Physics China, CAS, Beijing 100190, China, hep-th/0903.4190v1v1, 2009
- [17] L. Randall, R. Sundrum, Phys. Rev. Lett., **83** (1999), 3370.
- [18] L. Randall, R. Sundrum, Phys. Rev. Lett., **83** (1999), 4690.
- [19] D. Wands, *Institute of Cosmology and Gravitation, University of Portsmouth*, gr-qc/0601078v1, 2006
- [20] S. Förste, *Physikalisches Institut, Universität Bonn*, hep-th/0110055, 2002.
- [21] P. Binétruy, C. Deffayet, D. Langlois., LPT-ORSAY 99/25, hep-th/9905012v2, 1999.
- [22] P. Binétruy, C. Deffayet, D. Langlois., LPT-ORSAY 99/25, hep-th/9910219v2, 2000.
- [23] T. Shiromizu, K. Maeda, M. Sasaki, Phys. Rev. D **62**, 024012 (2000).
- [24] Poisson. E, *An advanced course in general relativity*, Univ. Guelph, 2002.
- [25] M. Sasaki, Phys. Rev. D, **62**, 024008 (2000)
- [26] R. Maartens, *Relativity and Cosmology Group, University of Portsmouth*, gr-qc/0101059v2
- [27] C. Barceló, M. Visser, hep-th/0004056v2.

- [28] M. Szydlowski, M. P. Dabrowski, W. Godlowski, *Astro-ph/0212100v2*.
- [29] E. Flanagan, S. H. Henry, I. Wasserman, *Phys. Rev. D* **62**, 044039 (2000).
- [30] M. Szydlowski, M. P. Dabrowski, W. Godlowski, *Astro-ph/0212100v2*.
- [31] M. S. Longair, *Galaxy Formation*, Springer, 1998.
- [32] Weinberg. S, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley and Sons, 1972.
- [33] D. W. Hogg, *Institute for Advanced Study*, Princeton NJ, *astro-ph/9905116v4*, 2000.
- [34] P. Brax, C. van de Bruck, CEA-Saclay F-91191, France, *hep-th/0303095*, 2003.
- [35] R. Maartens, *Relativity and Cosmology Group, University of Portsmouth*, U.K. 2004.
- [36] M. Szydlowski, M. P. Dabrowski, W. Godlowski, *Institute of Physics, University of Szczecin*, Poland, *astro-ph/0212100v3*, 2006.
- [37] K. Ichiki, M. Yahiro, T. Kajino, M. Orito, G. J. Mathews, *astro-ph/0203272*.
- [38] J. D. Bratt, A. C. Gault, R. J. Scherrer. T. P. Walker, *astro-ph/0208133v2*.
- [39] S. Perlmutter, *Institute for Nuclear and Particle Astrophysics*, Berkeley, Cal, *astro-ph/9812133v1*, 1998.
- [40] T. Padmanabhan, T. Roy Choudhury, *Ganeshkhind, Pune, India*, *astro-ph/0212573v2*, 2003.
- [41] M. C. Bento, O. Bertolami, N. M. C. Santos, A. A. Sen, *Departamento de Física and Centro de Física Teórica de Partículas, Lisboa Portugal*, *astro-ph/0412638v2*, 2005.
- [42] Adam. G. Riess, Alexei V. Filippenko, *Department of Astronomy, University of California, Berkeley, CA*, *astro-ph/9805201v1*, 1998.
- [43] Adam. G. Riess, Louis-Gregory, John Tonry, et. al, *Espace Telescope Science Institute, 3700 San Martin Drive, Baltimore, MD 21218*, *astro-ph/0402512v2*, 2004.
- [44] Herman. J. Mosquera, Habit Dumet, Cristina Furlaneto, *Instituto de Cosmologia, Relatividade e Astrofísica (ICRA-BR)*, RJ Brazil, *JCAP07(2008)004*

- [45] M. Goliath, R. Amanullath, P. Astier, A. Goobar, and R. Pain, *Supernovae and the Nature of the Dark Energy*, astro-ph/0104009v1, 2001.
- [46] R. G. Vishwakarma and Parampreet Singh, *Inter-University Centre for Astronomy and Astrophysics*, Ganeshkhind, Pune-411 007, INDIA, astro-ph 0211285, 2003.
- [47] Robert R. Caldwell, *The Physics of Cosmic Acceleration*, Department of Physics & Astronomy, Dartmouth College, Hanover, Marc Kamionkowski, California Institute of Technology, astro-ph/0903.0866v1, 2009.
- [48] K. Ichiki, P. M. Garnavich, T. Kajino, G. J. Mathews, and M. Yahiro, *Dissappearing Dark Matter in Brane World Cosmology: New Limits on Noncompact Extra Dimensions*, National Astronomical Observatory, Osawa, Mitaka, Tokio, Japan, astro-ph/0210032v3, 2003
- [49] Andrey Linde, *Inflationary Cosmology*, Department of Physics, Stanford University, Stanford, CA 94305, hep-th/0705.0164v2, 2007.
- [50] E. I. Buchbinder, *Five brane dynamics and inflation in heterotic M-theory*, Nucl. Phys. B **711**, 314 (2005), hep-th/0411062.
- [51] K. Becker, M. Becker and A. Krause, *M-theory inflation from multi M5-brane dynamics*, hep-th/0501130, 2005.
- [52] O. DeWolfe and S. B. Gddings, *Scales and hierchies in warped compactifications and brane world*, Phys. Rev. D **67**, 066008 (2003), hep-th/02008123.
- [53] Richard Whisker, *Braneworld Black Holes*, Institute for Particle Physics Phenomenology, Department of Physics, University of Durham, England, 2006.
- [54] A. Pérez Lorenzana, *An Introducction to the brane world*, Revista Mexicana de Física, vol . **53** pp. 85-1002, 2007.
- [55] Miao. Li, Yi Wan, *The measure for the Multiverse and Probability for Inflation*, The interdisciplinary Center for Theoretical Study of China, hep-th/0704.1026, 2007.
- [56] L. M. Tomilchik, *Pioner anomaly and accelerating Universe as Effects of the Minkowski Space Conformal Symmetry*, Institute of Physics, National Academy of Sciences of Belarus, Minks Belarus, gr-qc/0704.2745v2, 2007.