Universidad de La Habana
Facultad de Matemática y Computación
Departamento de Matemática

UN ESPACIO DE FUNCIONES DE TIPO JAMES

Tesis presentada en opción al grado de
Licenciado en Matemática

Autor: Tho Le Van
Tutor: Dra. Rita Roldán Inguanzo

Ciudad de La Habana
2008

Agradecimientos

Quiero agradecer antes que todo a Rita, mi tutora, por la ayuda incondicional brindada en todo momento.

A mi Madre, a mis hermanos: Hung, Nga, Hang y a mis tíos y abuelos.

A mi novia Thuy y a mis compatriotas.

También a mis compañeros de aula, y a los del seminario de investigación, por cada productivo jueves.

Si se me escapa alguien, pues gracias también.

A todos los que hicieron posible el nacimiento y desarrollo de esta idea.

A la memoria de mi Padre

Resumen

A partir de los resultados conocidos sobre el espacio de James y los espacios de sucesiones y de funciones de p-variación acotada y sus propiedades de dualidad, en este trabajo se define un espacio de funciones de Tipo James y se estudian sus propiedades, en particular su caracterización a partir de los espacios anteriormente mencionados. Igualmente se propone una posible generalización de los espacios de funciones de Tipo James con vistas al estudio del problema, aún abierto, de la dualidad de los espacios de este tipo.

Abstract

Starting from the well-known results on the space of James and the spaces of successions and of functions of bounded p-variation and their properties of duality, in this work it is defined a space of functions of James Type and their properties are studied, in particular their characterization starting from the previously mentioned spaces. It propose a possible generalization of the spaces of functions of James Type with a view to the study of the problem, even open, of the duality of the spaces of this type.

Índice General

Introducción

Introducción

La idea de dualidad de espacios normados data de los orígenes del problema de momentos, en la Teoría de las Probabilidades. El presente trabajo tiene como base la investigación acerca de lo concerniente a la dualidad de los espacios de funciones absolutamente p-continuas y de p-variación acotada. Para ello se definen y estudian ciertos espacios con alguna similitud métrica y estructural con los anteriormente mencionados, constituyéndose esto en el objetivo principal de este trabajo.

El concepto de p-continuidad absoluta de una función real definida sobre el intervalo $[a, b]$ para $1 < p < \infty$ aparece por primera vez en el año 1937, en los trabajos de E.R. Love y L.C. Young (ver [14]), quienes desarrollaron también la noción de función de p-variación acotada sobre el intervalo $[a, b]$. En esta línea se destacan además los polacos Musielak y Orlicz (ver [17]), quienes en el año 1959 demostraron en conjunto la separabilidad del espacio $C_p[a, b]$ de las funciones absolutamente p-continuas en $[a, b]$.

Paralelamente, en 1951 James (ver [4], [7]) presentó un ejemplo de espacio de Banach que es isométricamente isomorfo a su bidual, pero no es reflexivo. Dicho espacio se conoce desde entonces con el nombre de su creador y es un espacio de sucesiones infinitesimales que juega un importante papel en la búsqueda de un teorema de representación de los funcionales de $C_p[a, b]$.

En 1984 aparece un trabajo del matemático ruso V.Kisliakov (ver [9]), donde se demuestra de forma indirecta que el espacio $(C_p[a, b])^{**}$, bidual a $C_p[a, b]$ es isomorfo al espacio $V_q[a, b]$ de las funciones de q-variación acotada en $[a, b]$ con p y q conjugados. De esta forma, la búsqueda de una demostración directa de la relación $(C_p[a, b])^{**} \simeq V_q[a, b]$ se convierte en la columna vertebral de las investigaciones expuestas en la tesis de doctorado (ver [20]) de la cubana Rita Roldán, quien, sobre la base del conocimiento del espacio de James, obtiene una representación de los funcionales sobre $C_p[a, b]$ a través de integrales de Stieltjes respecto a funciones de $V_q[a, b]$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, pero sin obtener la isometría buscada. Además se hace notar que $V_q[a, b]$ no puede ser el espacio dual de $C_p[a, b]$, mostrándose, no obstante, una condición suficiente para la existencia de la integral de Stieltjes de manera tal que esta representa un funcional continuo. De igual forma se tratan propiedades importantes de los espacios $V_p[a, b]$ y $C_p[a, b]$ como, por ejemplo, la relación de estos con el espacio $Lip_\alpha[a,b]$ de las funciones α-lipchitzianas $(0 < \alpha < 1)$, al igual que la no separabilidad de $V_p[a,b]$ y la separabilidad de $C_p[a,b]$.

Los estudios en esta dirección continúan en las tesis de licenciatura de los cubanos Y. Puig del año 2006 (ver [19]) y de R. Milián del año 2008 (ver [16]), quienes generalizan las definiciones de los espacios de funciones de p-variación acotada y estudian su dualidad para funciones abstractas en el primer caso y desde el punto de vista de la álgebras de Banach en el segundo caso.

El espacio definido por James también ha sido de gran utilidad en la obtención de interesantes resultados. Uno de estos se encuentra en los trabajos de Lindenstrauss y Stegall (ver [13]). En ellos se presenta una definición de espacio de funciones de James JF como completamiento de la cápsula lineal de las funciones características de subintervalos de $[0,1]$ con la norma

$$\|f\| = \sup \left(\sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones $0 = t_1 < t_2 < ... < t_n = 1$ de $[0,1]$. Dicha definición parece más cercana a la original de James que la de las funciones de p-variación acotada, por lo que su estudio pudiera permitir obtener nuevos resultados en la búsqueda del teorema de representación para $(C_p[a,b])^*$. Sin embargo, en los trabajos antes mencionados existen algunas inexactitudes que conducen a la necesidad de definir un nuevo espacio a partir de la idea original.

En la búsqueda bibliográfica desarrollada para este trabajo se han encontrado otros trabajos relacionados con estos espacios, los cuales dedican su atención sobre todo a problemas de aproximación, por lo que no se incluyen en esta tesis.

En este trabajo se generaliza la idea de Lindenstrauss y Stegall, definiendo el espacio $\widehat{JF_p[a,b]}$ de las funciones de p-variación integral acotada sobre el intervalo $[a,b]$, denominado espacio de funciones de Tipo James, y se estudia su relación con el espacio de las funciones de p-variación acotada $V_p[a,b]$. La tesis se estructura en una introducción y dos capítulos, cerrando la presentación con las conclusiones y recomendaciones del autor.

En el primer capítulo ("Preliminares") se presentan los resultados básicos para el desarrollo de la investigación. En él se estudia el espacio $v_p^{(0)}$ de las sucesiones de p-variación acotada (el caso $p = 2$ corresponde al ya mencionado espacio de James) como ejemplo de un espacio isométricamente isomorfo a su bidual sin ser reflexivo y sus principales propiedades. También se presentan algunas propiedades de los espacios $C_p[a,b]$ y $V_p[a,b]$ de las funciones absolutamente p-continuas y de $p-$variación acotada respectivamente, así como sus relaciones de dualidad.

El segundo capítulo ("Un espacio de funciones de Tipo James") está dedicado al estudio del espacio de funciones $\widehat{JF_p[a,b]}$ anteriormente mencionado. Se muestran interesantes propiedades de esos espacios, como su relación con los ya mencionados y su separabilidad o no separabilidad. Finalmente se proponen generalizaciones en la forma de definir estos espacios de funciones, las cuales abren nuevas vías de investigación.

Finalmente se presentan las "Conclusiones y Recomendaciones", donde se resumen los resultados fundamentales del trabajo, indicando posibles caminos de desarrollo para el trabajo futuro.

Capítulo I

Preliminares

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se exponen los resultados fundamentales necesarios para el desarrollo posterior de este trabajo. Ellos incluyen el espacio de James, como ejemplo de espacio semireflexivo de orden 1 y su generalización a los espacios de sucesiones y de funciones de p-variación acotada, así como la relación de éste último con el espacio de las funciones absolutamente p-continuas (ver, por ejemplo [20]).

1.1. El espacio de las sucesiones de p-variación acotada

Los resultados que se exponen en este epígrafe no tendrán una aplicación inmediata en esta investigación, referida a espacios de funciones. Sin embargo, se presentan aquí, pues las ideas que conducen a las definiciones de dichos espacios de funciones parten en gran medida de estos resultados.

1.1.1. El espacio $v_p^{(0)}$ de las sucesiones de p-variación acotada

Se denota por J al espacio de todas las sucesiones reales infinitesimales $x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty}$, para las cuales se cumple

$$\|x\|_J = \sup_n \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_{k_{2i-1}} - \xi_{k_{2i}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \tag{1.1}$$

donde el supremo se toma sobre todos los números naturales n y sobre todas las sucesiones crecientes finitas $k_1, k_2, \ldots, k_{2n}$ de números naturales. El espacio J se conoce en la literatura como **espacio de James** y constituye un ejemplo clásico de espacio normado semireflexivo de orden 1, quiere decir que la codimensión de la proyección canónica π de dicho espacio sobre su bidual es igual a 1 (ver, por ejemplo, [4]). El espacio de James J también puede ser nombrado **espacio de las**

sucesiones de 2-variación acotada.

De modo análogo se define el **espacio de las sucesiones de p-variación acotada**:

DEFINICIÓN 1.1
Una sucesión numérica real $x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ pertenece al espacio $v_p^{(0)}$ $(p \geq 1)$ de las **sucesiones infinitesimales de p-variación acotada** *si y sólo si se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0 \tag{1.2}$$

$$\|x\|_{v_p^{(0)}} = \sup_n \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_{k_{2i-1}} - \xi_{k_{2i}}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{1.3}$$

donde el supremo se considera como en la norma $\| x \|_{v_2^{(0)}} = \| x \|_J$.

El siguiente teorema, cuya demostración se desarrolla de modo clásico (ver [20]), caracteriza a este espacio como normado.

TEOREMA 1.1
$\left(v_p^{(0)}, \| x \|_{v_p^{(0)}}\right)$ *es un espacio de Banach.*

En la literatura se encuentran definiciones equivalentes de la norma en $v_2^{(0)}$ (ver [12]), por ejemplo:

$$\| x \|_J^{(1)} = \sup_n \left(\sum_{i=1}^{n-1} | \xi_{k_i} - \xi_{k_{i+1}} |^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.4}$$

$$\| x \|_J^{(2)} = \sup_n \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} | \xi_{k_i} - \xi_{k_{i+1}} |^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.5}$$

donde el supremo en ambos casos se toma sobre todos los números naturales n y todas las sucesiones crecientes finitas $k_1, k_2, \ldots, k_n$ de números naturales (en el caso (1.4) es $k_{n+1} = k_1$).

De modo análogo se pueden definir normas equivalentes en el caso general del espacio de las funciones de p-variación acotada, a saber

$$\| x \|_{v_p^{(0)}}^{(1)} = \sup_n \left(\sum_{i=1}^{n-1} | \xi_{k_i} - \xi_{k_{i+1}} |^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.6}$$

$$\| x \|_{v_p^{(0)}}^{(2)} = \sup_n \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} | \xi_{k_i} - \xi_{k_{i+1}} |^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.7}$$

donde el supremo se toma como en (1.4) y (1.5) respectivamente.

En este punto se debe hacer notar lo siguiente: En la construcción del supremo en el caso de la norma $\|\cdot\|_{v_p^{(0)}}$, de la sucesión finita creciente de índices $k_1, k_2, \ldots, k_{2n}$ (n fijo), se consideran bajo la suma solamente diferencias de la forma $\mid \xi_{k_{2i-1}} - \xi_{k_{2i}} \mid^p$. En cambio, en las normas $\|\cdot\|^{(1)}_{v_p^{(0)}}$ y $\|\cdot\|^{(2)}_{v_p^{(0)}}$ se consideran todas las diferencias de términos con índice consecutivo, donde en el caso de la norma $\|\cdot\|^{(2)}_{v_p^{(0)}}$ aparece además el sumando $\mid \xi_{k_n} - \xi_{k_1} \mid^p$ que cierra el "ciclo". (para la equivalencia de las normas ver [20]).

Las bases de Schauder juegan un importante papel en el estudio de estos espacios.

Definición 1.2
Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach.
Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de E se dice **base de Schauder de** *E si para todo elemento $x \in E$ existe una única sucesión numérica $(a_i)_{i=1}^{\infty}$, tal que*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i.$$

Una base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de E se dice **monótona** *si para todo sistema de escalares $(a_i)_{i=1}^{\infty}$, se cumple que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| = 1.$$

Sea k un número entero positivo. Una base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ del espacio de Banach E es llamada **k-contrahente** *si para la sucesión de funcionales biortogonales $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ se cumple*

$$codim_{E^*}[f_n] = k,$$

donde $[f_n]$ denota al subespacio cerrado de E^* generado por $(f_n)_{n=1}^{\infty}$. En particular, si $k = 0$, entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ se llama **base contrahente**.

Para los espacios de sucesiones de p-variación acotada se cumple (ver [20]):

Teorema 1.2
Los vectores unitarios canónicos $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ constituyen una base de Schauder monótona y contrahente de $v_p^{(0)}$ respecto a las normas $\|\cdot\|_{v_p^{(0)}}$ y $\|\cdot\|^{(1)}_{v_p^{(0)}}$.

El siguiente teorema ofrece una importante aplicación de las bases contrahentes (ver [23]).

Teorema 1.3
Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base contrahente del espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$. Entonces su espacio bidual E^{**} puede ser identificado con el espacio de todas las sucesiones numéricas $(a_i)_{i=1}^{\infty}$, para las que se cumple

$$\sup_n \left\| \sum_{l=1}^{n} a_l x_l \right\| < \infty.$$

A partir de este teorema se puede identificar al espacio bidual $\left(v_p^{(0)}\right)^{**}$ de $v_p^{(0)}$ con el espacio de todas las sucesiones numéricas $(\alpha_i)_{i=1}^{\infty}$, para las cuales se cumple

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|_{v_p^{(0)}} < \infty,$$

es decir, con el espacio de las sucesiones que cumplen que

$$\sup_n \left(\sum_{n=1}^{n} \left| \alpha_{k_{2i-1}} - \alpha_{k_{2i}} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{1.8}$$

Obviamente se deduce de esta última expresión la existencia del límite $\lim_{n\to\infty} \alpha_n$. Entonces $\left(v_p^{(0)}\right)^{**}$ es la cápsula lineal de $v_p^{(0)}$, o más exacto, la cápsula lineal de la imagen canónica de $v_p^{(0)}$ en $\left(v_p^{(0)}\right)^{**}$ y de la funcional x_0^{**} sobre $\left(v_p^{(0)}\right)^{*}$, que está definida por

$$x_0^{**}(e_n^*) = 1$$

para toda $n \in \mathbb{N}$ (es decir, x_0^{**} es la funcional que se identifica con la sucesión $(1, 1, 1, \ldots)$).

A partir de ello se obtiene el siguiente teorema:(ver [20])

Teorema 1.4
El espacio $v_p^{(0)}$ de las sucesiones infinitesimales de p-variación acotada es isométricamente isomorfo a su espacio bidual $\left(v_p^{(0)}\right)^{**}$ respecto a las normas $\|\cdot\|_{v_p^{(0)}}$ y $\|\cdot\|_{v_p^{(0)}}^{(1)}$.

En la literatura se define también en J una cuarta norma que tiene la expresión

$$\| x \|_{v_p^{(0)}}^{(3)} = \sup_n \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_{k_{2i-1}} - \xi_{k_{2i}}|^p + |\xi_{k_{2n+1}}|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

donde el supremo se toma sobre todos los números naturales n y todas las sucesiones crecientes finitas $k_1, k_2, \ldots, k_{2n+1}$ de números naturales. A menudo esta norma se presenta sin diferenciar de la ya conocida $\| \cdot \|_{v_2^{(0)}}$. Algunos autores se basan para ello en el artículo de R.C.James "Bases and reflexivity of Banach spaces" aparecido en 1950 en la revista "Annals of Mathematics", la cual no hemos podido localizar. En un trabajo posterior (ver [4]), James sólo analiza la isometría entre $v_2^{(0)}$ y $\left(v_2^{(0)}\right)^{**}$ respecto a la norma $\| \cdot \|_{v_2^{(0)}}$. Resulta importante señalar en este punto que, respecto a la norma $\| \cdot \|_{v_p^{(0)}}^{(3)}$, se obtiene también el isomorfismo $v_p^{(0)}$ y $\left(v_p^{(0)}\right)^{**}$, pero se pierde la isometría (ver [20]).

El siguiente teorema presenta la semireflexividad del espacio de las sucesiones de p-variación acotada, en analogía a la clásica propiedad del espacio de James ([20]).

Teorema 1.5
Sea π la inyección canónica de $v_p^{(0)}$ en $\left(v_p^{(0)}\right)^{**}$. Entonces es

$$codim_{\left(v_p^{(0)}\right)^{**}} \pi \left(v_p^{(0)}\right) = 1.$$

1.1.2. El espacio dual del espacio $v_p^{(0)}$

La vía indirecta aplicada para determinar el espacio bidual de $v_p^{(0)}$ induce a la pregunta sobre la forma del espacio dual de $v_p^{(0)}$. Esta pregunta resulta totalmente respondida en [20] a través del espacio $\widehat{u}_p$, que se define a continuación:

Partiendo del conjunto de las sucesiones reales de soporte finito (o sea, sucesiones finitas) se introducen las siguientes denominaciones:

- Un **escalón** es una sucesión de la forma $(0, \ldots, 0, a, \ldots, a, 0, \ldots, 0)$, donde a es un número real no nulo que se denomina **altura del escalón** y se llama **signo del escalón** al valor $sg(a)$.
- Se llama **soporte del escalón** $x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}$ al conjunto

  $$supp(x) = \{i \in \mathbb{N}; \quad \xi_i \neq 0\}.$$

  (Como se trata de sucesiones finitas, el soporte siempre tiene que ser acotado.)

- Dos escalones x e y se dicen **disjuntos**, si sus soportes son disjuntos, es decir,

$$supp(x) \cap supp(y) = \varnothing.$$

Ellos se dicen **estrictamente disjuntos**, si sus soportes son disjuntos y existe al menos un número natural k entre los soportes de x e y, es decir, para

$$supp(x) = \{i_1, \dots, i_n\}, \qquad supp(y) = \{j_1, \dots, j_m\}$$

con $i_n < j_1$, existe un $k \in \mathbb{N}$ con $i_n < k < j_1$.

- Se dice que **un escalón** x **está contenido en el escalón** y, si se cumple $supp(x) \subseteq supp(y)$.

Sea ahora $x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales de la forma

$$\xi_i = \begin{cases} \alpha_k & t_k \leq i \leq t_{k+1} \\ 0 & i \geq t_n \end{cases} \quad (k = 1, \dots, n-1) \tag{1.9}$$

con $\{t_1, t_2 \dots, t_n\} \subset \mathbb{N}$ y $\alpha_k \neq \alpha_{k+1}$ para $k = 1, \dots, n-1$. Se define entonces (ver [20])

$$|[x]|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.10}$$

Nótese que el valor $|[x]|_p$ no constituye una norma, pues no cumple la desigualdad triangular, como se puede comprobar fácilmente con las sucesiones $x = (1, 0, \dots, 0)$ y $y = (1, 1, 0, \dots, 0)$.

Sin embargo, resulta obvio que toda sucesión finita $x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}$ (aún cuando no sea suma de escalones estrictamente disjuntos) se representar en la forma (1.9) como suma finita de sucesiones x_j $(j = 1, \dots, m)$, que son suma de escalones estrictamente disjuntos. Para ello basta tomar la representación

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{con} \quad x_1 = (\xi_i^{(1)})_{i=1}^{\infty}, \quad x_2 = (\xi_i^{(2)})_{i=1}^{\infty},$$

tal que

$$\begin{aligned} \xi_i^{(1)} &= \begin{cases} \alpha_k & t_{2k} \leq i \leq t_{2k+1} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2k+1 \leq n) \\ \xi_i^{(2)} &= \begin{cases} \alpha_k & t_{2k-1} \leq i \leq t_{2k} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2k \leq n) \end{aligned}$$

Sin embargo, esta representación no es única.

Se denota por $SD(x)$ al conjunto de todas esas representaciones y se define entonces

$$\| x \|_{u_p} = \inf_{SD(x)} \sum_{k=1}^{n} |[x_k]|_p, \tag{1.11}$$

tomando el ínfimo sobre el conjunto $SD(x)$ de todas las representaciones de x de la forma

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

de manera que las sucesiones x_k son a su vez sumas de escalones estrictamente disjuntos para toda $k = 1, 2, \ldots, n$.

Se cumple el siguiente teorema:

TEOREMA 1.6
El valor $\| x \|_{u_p}$ es una norma en el espacio de todas las sucesiones finitas.

Si se denota ahora por $\widehat{u}_p$ al completamiento del espacio de las sucesiones con soporte finito respecto a la norma $\| \cdot \|_{u_p}$, se cumple:

TEOREMA 1.7
Si la sucesión finita x es suma de escalones estrictamente disjuntos, entonces

$$\| x \|_{u_p} = |[x]|_p.$$

El siguiente teorema presenta la relación de este espacio con el espacio de las sucesiones de $p-$variación acotada (ver [20]).

TEOREMA 1.8
El espacio dual de $\widehat{u}_p$ es isométricamente isomorfo al espacio $v_q^{(0)}$ de las sucesiones infinitesimales de q-variación acotada con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ respecto a la norma $\| \cdot \|_{v_p^{(0)}}$, y la base canónica de $\widehat{u}_p$ es una base contrahente.

También se cumple:

TEOREMA 1.9
El espacio $\widehat{u}_q$ es isométricamente isomorfo al espacio dual $(v_p^{(0)})^*$ del espacio $v_p^{(0)}$ de las sucesiones infinitesimales de p-variación acotada con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

De esta manera se ha obtenido la relación directa para $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$(v_p^{(0)})^{**} \cong (\widehat{u}_q)^* \cong v_p^{(0)}.$$

1.2. Las funciones de p-variación acotada y absolutamente p-continuas

En este epígrafe se presentan las definiciones y los resultados conocidos sobre los espacios $V_p[a,b]$ de las funciones de p-variación acotada y $C_p[a,b]$ de las funciones absolutamente p-continuas (ver [20]), los cuales constituyen un modo de generalizar los espacios de sucesiones del epígrafe anterior.

1.2.1. El espacio $V_p[a,b]$ de las funciones de p variación acotada

DEFINICIÓN 1.3

Una función f definida sobre el intervalo cerrado $[a,b]$ es **de p-variación acotada** *($1 \leq p < \infty$) si el valor*

$$V_p(f) = \sup_{\pi} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

es finito, donde el supremo se toma sobre todas las particiones $\pi = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ de $[a,b]$. El espacio $V_p[a,b]$ de la funciones de p-variación acotada con el valor inicial $f(a) = 0$ es un espacio de Banach con la norma $\| \cdot \|_{V_p} = V_p(\cdot)$.

Resulta sencillo comprobar que toda función de p-variación acotada en el intervalo cerrado $[a,b]$ es acotada en ese intervalo.
Los siguientes teoremas presentan algunas importantes propiedades de estos espacios (ver [20]):

TEOREMA 1.10

Toda función de p-variación acotada en $[a,b]$ es también de q-variación acotada para todo número real $q > p$ y tiene a lo sumo una cantidad numerable de discontinuidades, todas evitables o no evitables de primera especie.

TEOREMA 1.11

El espacio $V_p[a,b]$ no es separable y contiene un subespacio isomorfo a c_0.

1.2.2. El espacio $C_p[a,b]$ de las funciones absolutamente p-continuas

DEFINICIÓN 1.4
El **módulo de p-continuidad** *($1 < p < \infty$) de una función f definida en $[a,b]$ está definido por*

$$\omega_p(\delta)(f) = \sup_{\pi_\delta} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones $\pi_\delta : a = t_0 < \ldots < t_n = b$ del intervalo cerrado $[a,b]$, para las que se cumple $(t_i - t_{i-1}) < \delta$ para toda $1 \leq i \leq n$.
Una función f se dice **absolutamente p-continua** *si se cumple*

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_p(\delta)(f) = 0.$$

El espacio $C_p[a,b]$ de las funciones absolutamente p-continuas con el valor inicial $f(a) = 0$ es un subespacio cerrado de $V_p[a,b]$.

Un ejemplo interesante resulta la conocida función de Weierstrass

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{-\frac{n}{2}} \cos(2\pi a^n x) \qquad x \in [0,1],$$

para un número entero cualquiera $a > 1$, la cual es de 2-variación acotada y absolutamente p-continua para todo número real $p > 2$.

Para las funciones absolutamente p-continuas se cumple (ver [20]):

TEOREMA 1.12
Toda función absolutamente p-continua en $[a,b]$ es continua en ese intervalo. El recíproco no se cumple en general.

TEOREMA 1.13
Para toda función f de p-variación acotada sobre $[a,b]$ se define para todo x del intervalo $[a,b]$ la función $\phi(x) = V_p(f,a,x)$ como la p-variación de f en el intervalo $[a,x] \subset [a,b]$, la cual es monótona creciente. Si f es absolutamente p-continua, entonces ϕ también es absolutamente p-continua en $[a,b]$.

Una función f definida en el intervalo cerrado $[a,b]$ se dice **Lipschitz-continua** del orden α para $0 < \alpha \leq 1$, si para cualesquiera dos puntos x, y de $[a,b]$ se cumple la desigualdad

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha,$$

con una constante M que sólo depende de f.

Teorema 1.14

Toda función Lipschitz-continua del orden α es de $\frac{1}{\alpha}$-variación acotada y absolutamente p-continua en $[a,b]$ para todo número real $p > \frac{1}{\alpha}$.

Teorema 1.15

El espacio $C_p[a,b]$ es separable.

Teorema 1.16

La inmersión Id_p de $C_p[a,b]$ $(p > 1)$ en el espacio $C[a,b]$ de las funciones continuas sobre $[a,b]$ no es compacta.

1.2.3. Estudios sobre el espacio dual de $C_p[a,b]$

Las integrales de Riemann-Stieljes, cuya definición se presenta a continuación, juegan un importante papel en los teoremas de representación de espacios de normados.

Definición 1.5

Sean f, g dos funciones cualesquiera definidas sobre el intervalo cerrado $[a,b]$. Sea $\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ una partición cualquiera de $[a,b]$ y sean los puntos $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ para $1 \leq i \leq n$. Entonces el valor

$$\sigma_\pi(f,g) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

se llama **suma de Riemann-Stieltjes de f respecto a g y π.**
Se dice que la función f **es Riemann-Stieltjes integrable respecto a g en** $[a,b]$*, si existe un número real I, tal que, para todo $\varepsilon > 0$ existe un número real $\delta_\varepsilon > 0$ con*

$$|\sigma_\pi(f,g) - I| < \epsilon$$

para cualquier partición π de norma menor que δ_ε y cualquier selección de los puntos intermedios ξ_i. En ese caso, el número real I se llama **integral de Riemann-Stieltjes de f respecto a g en** $[a,b]$ *y se denota por*

$$I = \int_a^b f(x)dg(x).$$

En [20] se presentan ciertas desigualdes de tipo Hölder, a partir de las cuales se deduce el siguiente teorema.

Teorema 1.17

Para dos funciones f, g de p-variación acotada y q-variación acotada respectivamente en $[a,b]$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$ y para una partición cualquiera π de $[a,b]$ se cumple la acotación

$$|\sigma_\pi(f,g)| \leq \left\{1+\zeta\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\right\} V_p(f)V_q(g),$$

donde $\sigma_\pi(f,g)$ es la suma de Riemann-Stieltjes de f respecto a g y π y

$$\zeta(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^t}$$

es la función Zeta de Riemann.

A partir de esta acotación, en [20] se presenta además la relación de dualidad:

Teorema 1.18

Toda funcional lineal continua F sobre $C_p[a,b]$ para $1<p<\infty$ se puede representar a través de una integral de Riemann-Stieltjes de la forma

$$F(f)=\int_a^b f(x)dg(x),$$

donde g es una función de q-variación acotada en $[a,b]$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ y se cumple

$$\| g \|_{V_q} \leq 2^{1+\frac{1}{q}} \| F \| .$$

Recíprocamente, si f es una función absolutamente p-continua y g es una función de q-variación acotada en $[a,b]$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$, entonces existe la integral de Riemann-Stieltjes de f respecto a g en $[a,b]$ y se cumple la acotación

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right| \leq \left\{1+\zeta\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\right\} V_p(f)V_q(g),$$

donde $\zeta(t)$ es la función Zeta de Riemann.

Sin embargo, el espacio dual del espacio $C_p[a,b]$ no puede ser identificado con $V_q[a,b]$, lo cual se comprueba fácilmente a partir de sue relaciones con c_0 y l_1 respectivamente.

En un intento por responder a la pregunta sobre la existencia de un espacio de Banach, cuyo espacio dual sea isomorfo al espacio $V_p[a,b]$ de las funciones de p-variación acotada en el intervalo cerrado $[a,b]$, y en analogía al caso de los espacios

v_p de las sucesiones de p-variación acotada (ver [20]), R.Roldán define (generalizando la idea del espacio $\widehat{u}_p$) el espacio $\widehat{I_p}[a,b]$ como completamiento de las funciones escalonadas definidas en $[a,b]$ con una norma adecuada que denota por $\|.\|_{I_p}$. En el trabajo citado se estudian las propiedades de este espacio, como su separabilidad y, a pesar de no obtener tampoco por esta vía la deseada relación de dualidad, se demuestra el siguiente importante resultado:

Teorema 1.19
El dual de $\widehat{IL_p[a,b]}$ es isomorfo al espacio $V_q[a,b]$ de las funciones $q-$variación acotada con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Capítulo II

Un espacio de funciones de Tipo James

Capítulo 2

Un espacio de funciones de Tipo James

2.1. Definiciones y propiedades preliminares

En capítulo 1 han sido presentadas las principales propiedades del espacio de James como espacio no reflexivo de codimensión 1 y su generalización a los espacios de sucesiones y de funciones de p-variación acotada. Sin embargo, se observa que la interpretación de los espacios de funciones de p-variación acotada como generalización de los correpondientes espacios de sucesiones no permite prolongar las propiedades de dualidad. Otra forma de generalizar dichos espacios lo constituyen el espacio JT "James tree" y espacio JF de las funciones de James que aparecen en los trabajos de Lindenstrauss y Stegall (ver [13]), como ejemplos de espacios de funciones de Banach separables no reflexivos, que contienen una copia de c_0, mientras su dual no contiene a l_1.

Conviene comentar la definición de estos autores. Para Lindenstrauss y Stegall el espacio de funciones de tipo James se considera como el completamiento de la cápsula lineal de las funciones características de subintervalos de $[0,1]$ con respecto a la "norma"

$$\|f\| = \sup \left(\sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.1}$$

Sin embargo, una sencilla comprobación permite verificar que la expresión anterior no constituye una norma en la cápsula lineal de las funciones características de subintervalos de $[0,1]$, pues para la función no nula

$$I_a(x) = \begin{cases} 1 & x = a \\ 0 & x \neq a \end{cases}$$

se obtiene $\|f\| = 0$.

En este trabajo se pretende definir con rigor un nuevo espacio de funciones que generalice al espacio de sucesiones de James y estudiar sus propiedades. Para ello se toma como punto de partida al espacio $I_p[a,b]$ de las funciones indicadoras de intervalos $[a,b]$, que se define de la manera siguiente:

Definición 2.1

Se denota por $I_p[a,b]$ a la cápsula lineal de las funciones indicadoras de subintervalos de $[a,b]$; es decir, si $\langle c,d\rangle$ denota a un subintervalo de cualquier tipo de $[a,b]$ (aceptando $\langle c,c\rangle = \{c\}$) y $\chi_{\langle c,d\rangle}$ denota a la función indicadora de $\langle c,d\rangle$, entonces

$$I_p[a,b] = span\{\chi_{\langle c,d\rangle}; \langle c,d\rangle \subset [a,b]\}.$$

Resulta fácil comprobar que cualquier función f de $I_p[a,b]$ se puede escribir de la forma

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{I_k} \qquad (\alpha_k \in \mathbb{R}), \tag{2.2}$$

donde $(I_k)_{k=1}^n$ es una partición de intervalo $[a,b]$ (es decir, $(I_k)_{k=1}^n$ es un sistema de intervalos disjuntos dos a dos, cuya unión es todo el intervalo $[a,b]$). Esta representación no es única, pero si se considera además que los I_k están ordenados de izquierda a derecha y la condición $\alpha_k \neq \alpha_{k+1}$ para todo $k = 1,\ldots,n$, se logra la unicidad deseada. Esta forma de escribir la función $f \in I_p[a,b]$ se denomina **representación canónica de** f, siendo los α_k sus **coeficientes** y n el **orden** de la representación.

Una representación canónica de la forma (2.2) se dice **alternada** si los coeficientes forman una sucesión de números reales de signos alternos, es decir, si $\alpha_k\alpha_{k+1} < 0$ para todo $k = 1,\ldots,n$.

A continuación se estudia la expresión (2.1) para algunos tipos de funciones del espacio $I_p[a,b]$. Para ello se considera una función $\|\cdot\|_p : I_p[a,b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\|f\|_p = \sup\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

donde $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ es una partición cualquiera de intervalo $[a,b]$. Entonces se tienen los siguientes resultados.

Teorema 2.1
Sea $f \in I_p[a,b]$ una función de signo constante con la representación canónica

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{I_k} \quad (\alpha_k \geq 0 \quad ó \quad \alpha_k \leq 0, \quad \forall k = 1, \ldots, n-1),$$

entonces se cumple que

$$\|f\|_p = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \nu(I_k),$$

donde $\nu(I_k)$ representa la longitud del intervalo I_k.

Demostración:
Sea $\pi : a = t_0 < t_1 ... < t_m = b$ una partición cualquiera de $[a,b]$ y sea $J_i = [t_i, t_{i+1}]$ para $i = 0, \ldots, m-1$. Entonces se tiene

$$\left(\sum_{i=0}^{m-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{i=0}^{m-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt \right|.$$

Si f es no negativa, es decir, $\alpha_k \geq 0$ para todo $k = 1, \ldots, n-1$, entonces se cumple

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt \right| &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \nu(I_k) dt = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \nu(I_k \cap J_i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_k \nu(I_k \cap J_i) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{i=0}^{m-1} \nu(I_k \cap J_i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \nu(I_k) = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \nu(I_k).
\end{aligned}$$

Por otra parte, si f es no positiva, es decir, $\alpha_k \leq 0$ para todo $k = 1, \ldots, n-1$, resulta sencillo comprobar que

$$\|f\|_p = \|-f\|_p = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \nu(I_k),$$

quedando así demostrado el teorema. **Q.e.d**

En el caso particular en que la representación canónica de la función $f \in I_p[a,b]$ es alternada se tiene la relación siguiente:

Teorema 2.2
Sea $f \in I_p[a,b]$ con la representación canónica

$$f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{I_k},$$

tal que $\alpha_k \alpha_{k+1} \leq 0$ para todo $k = 1, \ldots, n-1$. Entonces se cumple que

$$\|f\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} (|\alpha_k| \nu(I_k))^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.3}$$

donde $\nu(I_k)$ representa la longitud del intervalo I_k.

Demostración: (Por inducción).

- En el caso $n = 2$ se tiene que $f = \alpha_1 \chi_{I_1} + \alpha_2 \chi_{I_2}$, donde $\alpha_1 \alpha_2 \leq 0$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ y $I_1 \cup I_2 = [a,b]$.

  Sea $\pi : a = t_0 < t_1 < ... < t_m = b$ una partición cualquiera del intervalo $[a,b]$ y sea $c \in [a,b]$, tal que $\langle a, c \rangle = I_1$, entonces c tiene que estar en algún subintervalo de la partición π de $[a,b]$. Sea k tal que $c \in (t_k, t_{k+1})$, entonces es

$$\left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)dt \right|^p \leq \left| \int_{t_k}^{c} f(t)dt \right|^p + \left| \int_{c}^{t_{k+1}} f(t)dt \right|^p.$$

  Luego, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt \right|^p &= \sum_{i=0}^{k-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt \right|^p + \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)dt \right|^p + \sum_{i=k+1}^{m-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt \right|^p \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt \right|^p + \left| \int_{t_k}^{c} f(t)dt \right|^p + \left| \int_{c}^{t_{k+1}} f(t)dt \right|^p + \sum_{i=k+1}^{n-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt \right|^p. \end{aligned}$$

  Pero, como f tiene signo constante en el subintervalo I_1, se cumple

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt \right|^p + \left| \int_{t_k}^{c} f(t)dt \right|^p &\leq \left(\sum_{i=0}^{k-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt \right| + \left| \int_{t_k}^{c} f(t)dt \right| \right)^p \\ &\leq \left| \int_{a}^{c} f(t)dt \right|^p = (|\alpha_1| \nu(I_1))^p. \end{aligned}$$

  De modo análogo se obtiene para el subintervalo I_2

$$\left| \int_{c}^{t_{k+1}} f(t)dt \right|^p + \sum_{i=k+1}^{n-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt \right|^p \leq \left| \int_{c}^{b} f(t)dt \right|^p = (|\alpha_2| \nu(I_2))^p.$$

Entonces es

$$\sup_{\pi}\left(\sum_{i=0}^{m-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq ((|\alpha_1|\nu(I_1))^p + (|\alpha_2|\nu(I_2))^p)^{\frac{1}{p}},$$

por lo que el teorema es válido para $n = 2$

- Ahora si (2.3) es cierta para todo orden $m \leq n-1$ con $n-1 \geq 2$, entonces se debe demostrar que (2.3) es también válida para una representación de orden n. Para ello, sea $f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{I_k}$, con $\alpha_k\alpha_{k+1} \leq 0$, $I_k = \langle s_{k-1}, s_k\rangle$ para todo $k = 1, \ldots, n-1$ y sea $\pi : a = t_0 < t_1 < ... < t_m = b$ una partición de $[a, b]$.

  Está claro que siempre existe t_l tal que $t_l \in \langle s_{k-1}, s_k\rangle$ para algún k. Si se particiona el intervalo $[a, b]$ en los dos subintervalos $[a, t_l]$ y $(t_l, b]$, entonces en cada subintervalo la función f tiene ahora una representación canónica alternada de orden menor que n. Al aplicar la hipótesis de indución para f en cada subintervalo $[a, t_l]$ y $(t_l, b]$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt\right|^p &= \sum_{i=0}^{l-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt\right|^p + \sum_{i=l}^{m-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt\right|^p \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1}|\alpha_i\nu(I_i)|^p + |\alpha_k(t_l - s_k)|^p \\
&\quad + |\alpha_k(s_{k+1} - t_l)|^p + \sum_{i=k}^{n}|\alpha_i\nu(I_i)|^p \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1}|\alpha_i\nu(I_i)|^p + |\alpha_k(s_{k+1} - s_k)|^p + \sum_{i=k}^{n}|\alpha_i\nu(I_i)|^p \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i\nu(I_i)|^p
\end{aligned}$$

  Con esta desigualdad queda demostrado el teorema. **Q.e.d**

Ya se ha comprobado que la expresión (2.1) no constituye una norma de este espacio. Por tanto, se debe buscar otra norma o una manera de construir una norma parecida a la expresión (2.1). Para ello se considera (de manera análoga a los espacios $L_p[a, b]$) una relación de equivalencia en $I_p[a, b]$, la cual está dada por

$$f \sim g \qquad \Leftrightarrow \qquad \sup_{\pi}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} (f(t) - g(t))dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0,$$

donde el supremo se toma sobre el conjunto de todas particiones de $[a, b]$ de la forma $\pi : a = t_0 < t_2 < ... < t_n = b$.

Está claro que "$\sim$" es una relación reflexiva y simétrica. Luego, para justificar que "$\sim$" es una relación de equivalencia basta demostrar que es transitiva. Para ello sean $f, g, h \in I_p[a, b]$, tales que $f \sim g$ y $g \sim h$. Por la desigualdad de Minkowski es

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}}(f(t)-h(t))dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}}(f(t)-g(t)+g(t)-h(t))dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}}(f(t)-g(t))dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}}(g(t)-h(t))dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

por lo que $f \sim h$, siendo así "$\sim$" una relación de equivalencia en $I_p[a, b]$.

A partir de esto, tiene sentido de considerar el espacio cociente $I_p[a, b]/\sim$, el cual se denota por $JF_p[a, b]$.

Nótese que si dos funciones $f, g \in I_p[a, b]$ pertenecen a una misma clase de equivalencia de $JF_p[a, b]$, ellas son iguales casi donde quiera. Ello permite identificar al espacio $JF_p[a, b]$ como espacio de funciones, al identificar a cada clase de equivalencia con uno cualquiera de sus representantes. Igualmente, resulta sencillo comprobar que el valor de la expresión (2.1) se mantiene constante dentro de cada clase. Entonces se define:

Definición 2.2

*Se llama $p-$***variación integral de** $\widehat{f} \in JF_p[a, b]$ *a la función*

$$\|\cdot\|_p : JF_p[a, b] \to \mathbb{R},$$

definida por

$$\|\widehat{f}\|_p = \sup\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.4}$$

siendo f un representante de la clase $\widehat{f}$.

A partir de lo anteriormente mencionado y para simplificar la notación, se denotará a partir de ahora a $\|\widehat{f}\|_p$ por $\|f\|_p$. Respecto al espacio $JF_p[a, b]$ se cumple el siguiente teorema.

Teorema 2.3

El espacio $JF_p[a, b]$ es un espacio normado respecto de la norma (2.4), pero no es de Banach.

Demostración:
Es obvio que para comprobar que (2.4) es una norma, sólo resta demostrar la desigualdad triangular, la cual se deduce directamente de la desigualdad de Minkowski, pues para todos $f, g \in JF_p[a,b]$ se tiene

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}}(f+g)(t)dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}}f(t)dt+\int_{t_i}^{t_{i+1}}g(t)dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}}f(t)dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}}g(t)dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Para la segunda afirmación se considera por simplificar al intervalo $[0,1]$ y se construyen las funciones $\phi_n(x)(n=1,2,3,\ldots)$ según el siguiente esquema:

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 1 & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \\
&\cdots \\
\phi_n(x) &= \begin{cases} \frac{k}{2^n} & x \in \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right), (k=1,\ldots,2^n-1) \\ 1 & x \in \left[\frac{2^n-1}{2^n}, 1\right] \end{cases}.
\end{aligned}$$

Está claro que esas funciones pertenecen al espacio $JF_p[0,1]$ y $\phi_{n+r}(x) \leq \phi_n(x)$ para todo $x \in [0,1]$. En particular, para $r=1$ es

$$(\phi_n-\phi_{n+1})(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}} & x \in \left[\frac{2(k-1)}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right), \ (k=1,\ldots,2^{n+1}-1) \\ 0 & x \in \left[\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}}\right) \text{ ó } x \in \left[\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}, 1\right] \end{cases},$$

por lo que la función $\phi_n - \phi_{n+1}$ toma sólo los valores cero y $\frac{1}{2^{n+1}}$, y alcanza esos valores 2^n veces en intervalos de longitud $\frac{1}{2^{n+1}}$. Entonces aplicando el teorema (2.1) para calcular la $p-$variación integral de $\phi_n - \phi_{n+1}$ se cumple

$$\|\phi_n-\phi_{n+1}\|_p = 2^n\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Aplicando ahora la desigualdad triangular para $r \in \mathbb{N}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\|\phi_n-\phi_{n+r}\|_p &\leq \|\phi_n-\phi_{n+1}\|_p+\|\phi_{n+1}-\phi_{n+2}\|_p+\ldots+\|\phi_{n+r-1}-\phi_{n+r}\|_p \\
&= \frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{2^{n+3}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+r+2}} \\
&= \frac{1}{2^{n+2}}\sum_{k=0}^{r}\frac{1}{2^k}.
\end{aligned}$$

Pero la suma en el miembro derecho de esta expresión representa la suma parcial de orden r de una serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$, por lo que puede ser acotada por el valor 2, entonces

$$\|\phi_n - \phi_{n+r}\|_p \leq \frac{2}{2^{n+2}} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

De ese modo, para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural $N > \log_2 \frac{1}{2\varepsilon}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple

$$\|\phi_n - \phi_{n+r}\|_p < \varepsilon,$$

siendo así la sucesión $\{\phi_m\}$ de Cauchy en $JF_p[0,1]$.

Por otra parte, resulta obvia la convergencia puntual de la sucesión $\{\phi_n\}$ a la función $f(x) = x$ en $[0,1]$, la cual no pertenece a $JF_p[0,1]$, por no ser combinación lineal de funciones indicadoras en ese intervalo. Con esto de observa que $JF_p[0,1]$ no es un espacio de Banach. **Q.e.d**

2.2. El espacio $\widehat{JF_p[a,b]}$ de Tipo James

El último teorema conduce a la necesidad de definir el espacio de funciones de Tipo James del siguiente modo:

Definición 2.3

Se define el espacio de funciones de tipo James como el completamiento del espacio $JF_p[a,b]$ respecto la norma (2.4) y se denota por $\widehat{JF_p[a,b]}$. Es decir, $\widehat{JF_p[a,b]}$ es el espacio de las clases de equivalencia $\widehat{\phi}$ de sucesiones de Cauchy $\{\phi_n\}$ de $JF_p[a,b]$, dadas por la relación

$$\{\phi_n\} \sim \{\psi_n\} \qquad \Leftrightarrow \qquad \|\phi_n - \psi_n\|_p \to 0,$$

con la norma

$$\|\widehat{\phi}\|_p = \lim \|\phi_n\|_p,$$

siendo $\{\phi_n\}$ un representante de la clase $\widehat{\phi}$.

Primeramente resulta importante observar que si $f \in JF_p[a,b]$, entonces $f \in L_1[a,b]$, lo cual se comprueba fácilmente, considerando en (2.4) la partición canónica $\pi : a < b$ de $[a,b]$, lo que implica la integrabilidad de $|f|$ en $[a,b]$. Se debe hacer notar que esto no implica necesariamente que se cumpla que $\|f\|_{L_1} \leq \|f\|_p$.

Por otra parte, si $f \in L_1[a,b]$ y $\pi : a = t_0 < t_1 < ... < t_m = b$ es una partición cualquiera de $[a,b]$, se tiene que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} |f(t)|dt \\ &= \int_a^b |f(t)|dt = \|f\|_{L_1},\end{aligned}$$

o sea $\|f\|_p \leqslant \|f\|_{L_1}$. .

Más adelante se comprobará que los espacios $\widehat{JF_p[a,b]}$ y $L_1[a,b]$ no son iguales.

Si se denota por $JV_p(f;\alpha,\beta)$ a la **p-variación integral de la función f en el intervalo** $[\alpha,\beta]$, entonces se cumple:

TEOREMA 2.4
Sea $f \in \widehat{JF_p[a,b]}$, $c \in (a,b)$ y $\forall p > 1$. Se cumple la acotación

$$(JV_p^p(f;a,c) + JV_p^p(f;c,b))^{\frac{1}{p}} \leq JV_p(f)$$

Además si $p \in \mathbb{N}$ entonces se tiene también la relación

$$JV_p(f) \leq (2^p - 1)^{\frac{1}{p}}(JV_p(f;a,c) + JV_p(f;c,b))$$

Demostración:

(i) Por la definición de $JV_p(f)$, para cada $\epsilon > 0$ existen particiones

$$\pi' : a = t'_0 < t'_1 < \ldots < t'_m = c \quad \text{y} \quad \pi'' : c = t''_0 < t''_1 < \ldots < t''_s = b$$

de $[a,c]$ y $[a,b]$ respectivamente, tales que

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt\right|^p &> JV_p^p(f;a,c) + \frac{\epsilon}{2} \\ \sum_{i=0}^{s-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt\right|^p &> JV_p^p(f;c,b) + \frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

Si se unen estas particiones se obtiene una nueva partición

$$\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

de $[a, b]$, para la cual se cumple

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt\right|^p &= \sum_{i=0}^{m-1}\left|\int_{t'_i}^{t'_{i+1}} f(t)dt\right|^p + \sum_{i=0}^{s-1}\left|\int_{t''_i}^{t''_{i+1}} f(t)dt\right|^p \\ &> JV_p^p(f; a, c) + JV_p^p(f; c, b) - \epsilon.\end{aligned}$$

Pero esto es válido para cualquier $\epsilon > 0$, por lo que

$$JV_p(f; a, b) \geq (JV_p^p(f; a, c) + JV_p^p(f; c, b))^{\frac{1}{p}}$$

de donde se deduce la primera parte del teorema.

(ii) Sea ahora $\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a, b]$ que contiene al punto $c = t_k$. Entonces

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{i=0}^{k-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &+ \left(\sum_{i=k}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

o sea,

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq (JV_p(f; a, c) + JV_p(f; c, b)). \tag{2.5}$$

Sea ahora $\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ una partición cualquiera de $[a, b]$. Entonces existe un número natural $0 < k \leq n$, tal que $t_{k-1} \leq c \leq t_k$.

Nótese primeramente que de la monotonía de la función exponencial se deduce que si $1 \leq k \leq p - 1$, entonces para todo par de números reales a, b es

$$|a|^k|b|^{p-k} \leq |a|^p + |b|^p.$$

Para comprobar esta desigual basta reescribirla en la forma

$$\left|\frac{a}{b}\right|^k - 1 \leq \left|\frac{a}{b}\right|^p.$$

De esto se deduce que

$$\begin{aligned}|a + b|^p \leq (|a| + |b|)^p &= |a|^p + |b|^p + \sum_{k=1}^{p-1}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}|a|^k|b|^{p-k} \\ &\leq (|a|^p + |b|^p)\left(1 + \sum_{k=1}^{p-1}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

Pero por el teorema binomial es

$$\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} = 2^p - 2,$$

de donde

$$|a+b|^p \leq (|a|+|b|)^p \leq (2^p-1)(|a|^p+|b|^p).$$

Entonces para $t_{k-1} \leq c \leq t_k$ se cumple

$$\begin{aligned} \left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt\right|^p &= \left|\int_{t_i}^{c} f(t)dt + \int_{c}^{t_{i+1}} f(t)dt\right|^p \\ &\leq (2^p-1)\left(\left|\int_{t_i}^{c} f(t)dt\right|^p + \left|\int_{c}^{t_{i+1}} f(t)dt\right|^p\right). \end{aligned}$$

Luego, si se denota a la suma correspondiente a la partición π de $[a,b]$ por S_π y por S a la suma correspondiente a la partición $\pi \cup \{c\}$, es decir

$$\begin{aligned} S_\pi &= \left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ S &= \left(\sum_{i=0, i\neq k}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt\right|^p + \left|\int_{t_k}^{c} f(t)dt\right|^p + \left|\int_{c}^{t_{k+1}} f(t)dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

se cumple

$$S_\pi \leq (2^p-1)S.$$

Aplicando ahora la acotación (2.5) se obtiene

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq (2^p-1)^{\frac{1}{p}}(JV_p(f;a,c)+JV_p(f;c,b)),$$

con ello queda demostrado el teorema. **Q.e.d**

Partiendo de la primera parte del teorema anterior, es fácil demostrar por inducción la relación

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} JV_p^p(f;t_i,t_{i+1})\right)^{\frac{1}{p}} \leq JV_p(f;a,b), \tag{2.6}$$

donde $\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ es una partición cualquiera de $[a,b]$. Entonces se cumple el siguiente teorema.

Teorema 2.5
Sean $p, q > 1$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dados. Entonces se cumple la desigualdad

$$\sum_{i=0}^{n-1} JV_p(f; t_i, t_{i+1}) JV_q(g; t_i, t_{i+1}) \leq JV_p(f; a, b) JV_q(g; a, b)$$

para toda partición de $\pi : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ de $[a, b]$ y para dos funciones cualesquiera $f \in JF_p[a, b]$ y $g \in JF_q[a, b]$

Demostración:
La esencia de este teorema se deduce de la desigualdad (2.6) y la desigualdad de Hölder, pues

$$\sum_{0}^{n-1} JV_p(f; t_i, t_{i+1}) JV_q(g; t_i, t_{i+1}) \leq \left(\sum_{i=0}^{n-1} JV_p^p(f; t_i, t_{i+1}) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=0}^{n-1} JV_q^q(g; t_i, t_{i+1}) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Entonces por (2.6) se tiene

$$\sum_{i=0}^{n-1} JV_p(f; t_i, t_{i+1}) JV_q(g; t_i, t_{i+1}) \leq JV_p(f; a, b) JV_q(g; a, b)$$

Q.e.d

La siguiente es una importante propiedad que se extiende a estos espacios desde los conocidos espacios de funciones de variación acotada.

Teorema 2.6
Si $f \in \widehat{JF_p[a, b]}$, $x \in [a, b]$, entonces la función $JV_p^p(f; a, x)$ es monótona creciente en $[a, b]$.

Demostración:
Sean x_1 y x_2 puntos cualesquiera de $[a, b]$ con $x_1 < x_2$. Por el teorema 2.3 es

$$JV_p(f; a, x_2) \geq (JV_p^p(f; a, x_1) + JV_p^p(f; x_1, x_2))^{\frac{1}{p}},$$

o sea,

$$JV_p^p(f; a, x_2) \geq JV_p^p(f; a, x_1),$$

con lo cual queda demostrado el teorema. **Q.e.d**

Una relación entre los espacios $\widehat{JF_p[a, b]}$ está dada por el teorema siguiente.

Teorema 2.7
Para $1 \leq p < \infty$, cada elemento de $\widehat{JF_p[a, b]}$ es también elemento de $\widehat{JF_q[a, b]}$ para todo número real $q > p$.

Demostración:
Sea la función f de $JF_p[a,b]$ dada y sea

$$M = \sup_{x,y\in[a,b]} \left| \int_x^y f(t)dt \right|.$$

Entonces es

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt \right|^p \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt \right|^{q-p} \right)^{\frac{1}{q}}$$

para toda partición $\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ de $[a,b]$, o sea,

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq (M^{q-p})^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

De aquí se deduce entonces

$$\|f\|_q \leq \widehat{M} \|f\|_p < \infty,$$

siendo

$$\widehat{M} = M^{\frac{q-p}{q}},$$

y por tanto f pertenece también a $JF_q[a,b]$.
Esta condición se extiende sin dificultad al espacio $\widehat{JF_p[a,b]}$, quedando así demostrado el teorema. **Q.e.d**

En este punto conviene definir un subespacio de $V_p[a,b]$ (funciones de p-variación acotada) que tiene mucha relación con el estudio de espacio de las funciones de Tipo James.

Definición 2.4
Se denota por $LCV_p[a,b]$ al subespacio de $V_p[a,b]$ de las funciones continuas lineales a trozos y por $\widehat{LCV_p[a,b]}$ a su completamiento respecto la norma de $p-$variación, es decir, respecto a la norma de $V_p[a,b]$

$$\|g\|_{V_p} = \sup_{\pi} \left(\sum_{k=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones $\pi : \{t_i\}_{i=0}^n$ de $[a,b]$.

Una relación entre estos espacios se muestra en el siguiente teorema, que juega un papel importante en este trabajo.

Teorema 2.8

El espacio $\widehat{JF_p[a,b]}$ *es isométricamente isomorfo al espacio* $\widehat{LCV_p[a,b]}$.

Demostración:

Para demostrarlo se considera la función $\Phi : JF_p[a,b] \to LCV_p[a,b]$ tal que

$$\Phi(f)(t) = g(t) \quad \forall f \in JF_p[a,b] \quad \text{con} \quad g(t) = \int_a^t f(u)du.$$

Para comprobar que $g(t) \in LCV_p[a,b]$, sea $f \in JF_p[a,b]$ con la representación canónica

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{(t_{i-1},t_i)}$$

con $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ (se puede considerar que f se anula en los extremos de los intervalos (t_{i-1}, t_i), pues ello no influye en el cálculo de su norma en $JF_p[a,b]$). Entonces para k fijo, tal que $t \in (t_k, t_{k+1})$, se cumple

$$g(t) = \int_a^t f(u)du = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t_i - t_{i-1}) + \alpha_{k+1}(t - t_k),$$

lo que implica la linealidad de g y su continuidad en todo $t \neq t_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. La continuidad de g en $t = t_i$ para $i = 1, \ldots, n$ se comprueba a partir de la coincidencia de los límites laterales

$$\begin{aligned} \lim_{t \to t_k^-} g(t) &= \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i(t_i - t_{i-1}) + \alpha_k(t_k - t_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t_i - t_{i-1}) \\ \lim_{t \to t_k^+} g(t) &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Sea ahora $f \in JF_p[a,b]$ cualquiera, entonces

$$\|f\|_p = \sup \left(\sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup \left(\sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i))|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|\Phi(f)\|_{V_p},$$

por lo que Φ es una isometría de $JF_p[a,b]$ en $LCV_p[a,b]$.

Por la linealidad de la integral, es obvio que Φ también es una función lineal de dichos espacios.

Para demostrar la inyectividad de Φ, sean f_1, f_2 en $JF_p[a,b]$ tales que

$$\Phi(f_1) = \Phi(f_2) = g(t) \in LCV_p[a,b].$$

Entonces se cumple que

$$\int_a^t (f_1(u) - f_2(u))du = 0,$$

lo que implica que $f_1 \sim f_2$, es decir, que Φ es inyectiva.

Para comprobar la sobreyectividad nótese que toda $g \in LCV_p[a,b]$ tiene la forma $g(a) = 0$ y

$$\begin{aligned} g(a) &= 0, \\ g(x) &= a_i x + b_i \quad \text{para} \quad x \in (t_{i-1}, t_i] \quad (i = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

donde $\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ es una partición de $[a,b]$. Además, por la continuidad de g, los coeficientes $(a_i)_{i=1}^n$, $(b_i)_{i=1}^n$ tienen que satisfacer las condiciones

$$a_1 a + b_1 = 0; \quad a_i t_i + b_i = a_{i+1} t_i + b_{i+1} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

o sea

$$a_1 a + b_1 = 0; \quad b_{i+1} - b_i = a_i t_i - a_{i+1} t_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2.7}$$

Sumando en (2.7) desde $i = 1$ hasta $i = k$ se tiene

$$b_{k+1} - b_1 = \sum_{i=1}^{k} (a_i t_i - a_{i+1} t_i). \tag{2.8}$$

Construyendo ahora la función $f(x) = a_i$ para $x \in (t_{i-1}, t_i]$ y $f(a) = 0$, es decir, $f(x) = \sum_{i=1}^n a_1 \chi_{(t_{i-1}, t_i]}$, para $t \in (t_{k-1}, t_k]$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_a^t f(u)du &= \int_a^t \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{I_k} du = \sum_{k=1}^{i-1} a_k \chi_{I_k} du + \int_{t_{i-1}}^t a_i \chi_{I_i} du \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} (a_k t_k - a_k t_{k-1}) + a_i t - a_i t_{i-1} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} a_k t_k - \sum_{k=1}^{i} a_k t_{k-1} + a_i t \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} (a_k t_k - a_{k+1} t_k) - a_1 a + a_i t \end{aligned} \tag{2.9}$$

De (2.7),(2.8)y(2.9) tenemos que

$$\int_a^t f(u)du \quad = b_i - b_1 - a_1 a + a_i x = b_i + a_i t \tag{2.10}$$

con lo que se demuestra la sobreyectividad de Φ y, por tanto, la isometría entre $JF_p[a,b]$ y $LCV_p[a,b]$.

Ahora, para cualquier $\widehat{f} \in \widehat{JF_p[a,b]}$, sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy de funciones de $JF_p[a,b]$ en la norma $\|\cdot\|_p$, tal que $(f_n)_{n=1}^{\infty} \in \widehat{f}$. Como $f_n \in JF_p[a,b]$ para todo n, entonces por lo anteriormente demostrado va a existir una única sucesión $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones de $LCV_p[a,b]$ tales que $\Phi(f_n) = g_n$. Para comprobar que la sucesión $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $LCV_p[a,b]$, dado $\varepsilon > 0$ sea $N > 0$ tal que $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$ para todos $n, m \geq N$. Esto es equivalente a

$$\sup_{\pi} \sum_{i=0}^{k-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} (f_n - f_m)(u)du \right|^p < \epsilon^p$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sup_{\pi} \sum_{i=0}^{k-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_n(u)du - \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_m(u)du \right|^p < \epsilon^p.$$

Sustituyendo por la expresión de g se tiene

$$\sup_{\pi} \sum_{i=0}^{k-1} |(g_n(t_{i+1}) - g_n(t_i)) - (g_m(t_{i+1}) - g_m(t_i))|^p < \epsilon^p$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sup_{\pi} \sum_{i=0}^{k-1} |(g_n - g_m)(t_{i+1}) - (g_n - g_m)(t_i)|^p < \epsilon^p,$$

de donde se deduce que

$$\|g_n - g_m\|_{V_p} < \epsilon$$

para todos $n, m \geq N$. Con esto se demuestra que la sucesión $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $LCV_p[a,b]$, por lo que corresponde a una clase $\widehat{g} \in \widehat{LCV_p[a,b]}$.

El mismo proceso en sentido inverso muestra que a cada elemento $\widehat{g}0 \in \widehat{LCV_p[a,b]}$ corresponde un único elemento $\widehat{f} \in \widehat{JF_p[a,b]}$, lo que demuestra el teorema.

Q.e.d

Resulta sencillo comprobar que el sistema de las funciones indicadoras de subintervalos de $[a,b]$ de extremos racionales es un conjunto numerable siempre denso en $\widehat{JF_p[a,b]}$. De ello se deduce el siguiente teorema:

Teorema 2.9

El espacio $\widehat{JF_p[a,b]}$ es separable.

Sin embargo, el siguiente teorema muestra que esta propiedad no se extiende al espacio dual correspondiente.

Teorema 2.10

El espacio dual de $\widehat{JF_p[a,b]}$ no es separable.

Demostración:
Sea M un conjunto siempre denso en $(\widehat{JF_p[a,b]})^*$. A continuación se demuestra que M no es numerable. Para ello se consideran las funciones $\Psi_{\langle c,d\rangle} : \widehat{JF_p[a,b]} \to \mathbb{R}$ tales que

$$\Psi_{\langle c,d\rangle}(f) = \int_c^d f(t)dt \quad \text{donde} \quad \langle c,d\rangle \subset [a,b] \quad c \neq d.$$

Está claro que $\|\Psi_{\langle c,d\rangle}\|_{(\widehat{JF_p[a,b]})^*} \leq 1$ por definición de $\|.\|_p$. Particularmente para las funciones $f = \frac{1}{d-c}\chi_{\langle c,d\rangle}$ se tiene $\|f\|_p = 1$ y $|\Psi_{\langle c,d\rangle}(f)| = 1$. Por lo tanto

$$\|\Psi_{\langle c,d\rangle}\|_{(\widehat{JF_p[a,b]})^*} = 1; \quad \forall \langle c,d\rangle \subset [a,d].$$

Sean ahora dos funciones $\Psi_{[a,t]}$ y $\Psi_{[a,s]}$ cualesquiera con $s < t$. Como que M es denso en $(\widehat{JF_p[a,b]})^*$, entonces existen $F_1; F_2 \in M$ tales que

$$\|\Psi_{[a,t]} - F_1\|_{(\widehat{JF_p[a,b]})^*} < \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \|\Psi_{[a,s]} - F_2\|_{(\widehat{JF_p[a,b]})^*} < \frac{1}{4}$$

Por otra parte que es

$$\|\Psi_{[a,t]} - \Psi_{[a,s]}\|_{(\widehat{JF_p[a,b]})^*} = \|\Psi_{[s,t]}\|_{(\widehat{JF_p[a,b]})^*} = 1$$

Aplicando la desigualdad triangular se obtiene

$$\begin{aligned}\|\Psi_{[a,t]} - \Psi_{[a,s]}\|_{(\widehat{JF_p[a,b]})^*} &= \|\Psi_{[a,t]} - F_1 + F_1 - F_2 + F_2 - \Psi_{[a,s]}\|(\widehat{JF_p[a,b]})^* \\ &\leq \|\Psi_{[a,t]} - F_1\|_{(\widehat{JF_p[a,b]})^*} + \|F_1 - F_2\|_{(\widehat{JF_p[a,b]})^*} + \|F_2 - \Psi_{[a,s]}\|_{(\widehat{JF_p[a,b]})^*},\end{aligned}$$

de donde se deduce la desigualdad

$$\|F_1 - F_2\|_{(\widehat{JF_p[a,b]})^*} > \frac{1}{2}$$

Esto muestra la existencia en el conjunto M de al menos tantos elementos como las funciones de tipo $\Psi_{[a,t]}$ con $t \in (a,b]$, lo cual implica la no numerabilidad del conjunto M. **Q.e.d**

Nótese que este teorema implica que los espacios $\widehat{JF_p[a,b]}$ y $L_1[a,b]$ son diferentes, pues en caso contrario $\left(\widehat{JF_p[a,b]}\right)^*$ tendría que ser separable.

Las siguientes propiedades muestran la relación del espacio $\widehat{JF_p[a,b]}$ con los conocidos espacios de sucesiones c_0 y l_1.

Teorema 2.11

El espacio $\widehat{JF_p[a,b]}$ contiene un subespacio isomorfo a c_0.

En ([13]) se demostró un caso particular sólo para el caso $p = 2$, aquí se presenta una demostración más general y sencilla para $1 < p < \infty$. Para ello resulta necesario introducir primeramente los siguientes resultados (ver[20]):

Definición 2.5
Sea B un espacio de Banach cualquiera. Una serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

con $x_n \in B$ $(n = 1, 2, \ldots)$, se dice **incondicionalmente convergente débil**, *si para toda funcional f del espacio dual B^* de B es finita la suma*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|.$$

Lema 2.1 *BESSAGA/PELCZYNSKI*
Sea B un espacio de Banach cualquiera. Una serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

de elementos x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ de B es incondicionalmente convergente débil, si y sólo si existe una constante real positiva C, tal que para toda sucesión $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in l_\infty$ se cumple la acotación

$$\sup_n \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_k x_k \right\| \leq C \sup_n |\alpha_n|.$$

Sean B_1 y B_2 espacios de Banach cualesquiera con bases $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ y $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ respectivamente. Decimos que $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ y $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ son **equivalentes**, si la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

es equivalente a la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n;$$

es decir, si existe un isomorfismo de B_1 sobre B_2 que a cada elemento x_n asigna el elemento y_n.

Corolario 2.1

Dada la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *del espacio de Banach* B*, sea la serie infinita*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

incondicionalmente convergente débil, y supongamos además que

$$\inf_n \| x_n \| > 0.$$

Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es equivalente a la base canónica de* c_0.

A continuación se presenta la demostración del teorema.

Demostración: (*del teorema 2.11*)

El principio de esta demostración consiste en presentar una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\widehat{JF_p}$ que cumple la condición $\inf_n \| f_n \| > 0$ y cuya serie infinita es incondionalmente convergente débil, de modo que del corolario anterior se deduce la tesis del teorema.

(i) Para simplificar la demostración se consideran las funciones de p-variación integral acotada sobre el intervalo cerrado $[0,1]$.

Se construyen las funciones $g_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ según el siguiente esquema:

$$\begin{aligned}
g_1(x) &= \begin{cases} 2 & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ -2 & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \\
g_2(x) &= \begin{cases} 4 & x \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ -4 & x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ 4 & x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ -4 & x \in \left(\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases} \\
\ldots & \\
g_n(x) &= \begin{cases} 2^n & x \in \left[0, \frac{1}{2^n}\right] \\ (-1)^k 2^n & x \in \left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \quad (k = 1, \ldots, 2^n - 1) \end{cases}
\end{aligned}$$

Para toda $n \in \mathbb{N}$ la función $g_n(x)$ es obviamente elemento de $\widehat{JF_p}$. Además si se denota por $s_i = \frac{i}{2^n}$ para $i = 0, \ldots, 2^n$ y $J_i = (s_{i-1}, s_i]$, $(i > 1)$, $J_1 = [0, s_1]$, entonces g_n tiene la representación canónica alternada

$$g_n = \sum_{k=0}^{2^n} (-1)^k 2^n \chi_{J_{k+1}}. \tag{2.11}$$

Por tanto, del teorema (2.2) se deduce que

$$\|g_n\|_p = \left(\sum_{k=0}^{2^n - 1} \left| (-1)^k 2^n \frac{1}{2^n} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{n}{p}} \tag{2.12}$$

Si ahora se considera $f_n = 2^{-\frac{n}{p}} g_n$, de (2.12) resulta que $\|f_n\|_p = 1$, entonces

$$\inf_n \|f_n\|_p = \|f_n\|_p = 1. \tag{2.13}$$

(ii) Sea ahora $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada cualquiera de números reales, es decir $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in l_\infty$. Se busca una cota superior para el valor

$$\left\| \sum_{n=1}^{k} \alpha_n f_n \right\|_p = \left\| \sum_{n=1}^{k} \alpha_n 2^{-\frac{n}{p}} g_n \right\|_p \tag{2.14}$$

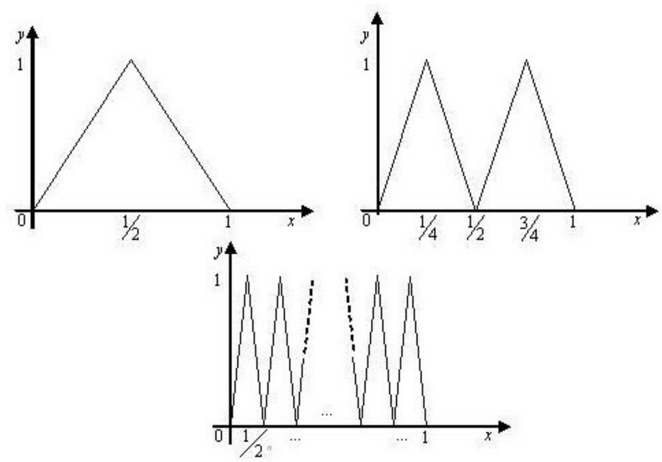
Primeramente conviene calcular $G_n(x) = \int_0^x g_n(u)du$. Aplicando la fórmula (2.8, 2.9) con $x \in (s_k, s_{k+1}] = J_k$ se obtiene

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \int_0^x g_n(u)du = \int_0^x \sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^i 2^n \chi_{J_{i+1}} du \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} 2^n \frac{1}{2^i} + \int_{s_k}^x (-1)^k 2^n \chi_{J_k} du, \end{aligned}$$

de donde para $x \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ se tiene (ver figura 2.1)

$$G_n(x) = \begin{cases} 2^n x - 2l & \text{para } k = 2l; x \in [\frac{2l}{2^n}, \frac{2l+1}{2^n}] \\ -2^n x + 2l & \text{para } k = 2l-1; x \in [\frac{2l-1}{2^n}, \frac{2l}{2^n}] \end{cases}. \tag{2.15}$$

Figura 2.1:



Sea $\pi : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ una partición cualquiera del intervalo cerrado $[0,1]$. Entonces es claro que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\sum_{n=1}^{k} \alpha_n f_n \right) du \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=0}^{m-1} \left| \sum_{n=1}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \alpha_n f_n du \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{m-1} \left| \sum_{n=1}^{k} \alpha_n 2^{\frac{-n}{p}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g_n du \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

es decir, para $\alpha = \sup_n |\alpha_n|$ se tiene

$$\left(\sum_{i=0}^{m-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sum_{n=1}^{k} \alpha_n f_n du \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=0}^{m-1} \left| \sum_{n=1}^{k} 2^{-\frac{n}{p}} (G_n(t_{i-1}) - G_n(t_i)) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.16}$$

Sea ahora $1 \leq i \leq m$ fijo. Se divide la suma

$$\sum_{n=1}^{k} 2^{-\frac{n}{p}} (G_n(t_i) - G_n(t_{i-1})) = S_1 + S_2 \tag{2.17}$$

en dos sumas S_1, S_2, donde

$$S_1 = \sum_{n: t_i - t_{i-1} \leq 2^{-n}} 2^{-\frac{n}{p}} (G_n(t_i) - G_n(t_{i-1}) \tag{2.18}$$

$$S_2 = \sum_{n: t_i - t_{i-1} > 2^{-n}} 2^{-\frac{n}{p}} (G_n(t_i) - G_n(t_{i-1}). \tag{2.19}$$

Obviamente se cumple para $t_i - t_{i-1} \leq \frac{1}{2^n}$ la acotación

$$|G_n(t_i) - G_n(t_{i-1})| = \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} g_n(u) du \right| \leq 2^n (t_i - t_{i-1}).$$

Entonces es

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \sum_{n: t_i - t_{i-1} \geq 2^{-n}} 2^{-\frac{n}{p}} 2^n (t_i - t_{i-1}) \\ &= (t_i - t_{i-1}) \sum_{n: t_i - t_{i-1} \geq 2^{-n}} 2^{n(1-\frac{n}{p})} \end{aligned} \tag{2.20}$$

Reescribiendo esta desigualdad es

$$S_1 \leq (t_i - t_{i-1}) \sum_{n=0}^{m_i} 2^{n(1-\frac{n}{p})}, \tag{2.21}$$

donde

$$2^{m_i} \leq \frac{1}{t_i - t_{i-1}}, \tag{2.22}$$

pero

$$2^{m_i+1} > \frac{1}{t_i - t_{i-1}}. \tag{2.23}$$

Pero la suma en la parte derecha de (2.21) es una progresión geométrica finita. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{m_i} 2^{n(1-\frac{n}{p})} &= \frac{2^{(m_i+1)(1-\frac{1}{p})} - 1}{2^{1-\frac{1}{p}} - 1} \\
&\leq \frac{1}{2^{(1-\frac{1}{p})} - 1} 2^{(m_i+1)(1-\frac{1}{p})} \\
&= \frac{2^{(1-\frac{1}{p})}}{2^{(1-\frac{1}{p})} - 1} 2^{m_i(1-\frac{1}{p})}.
\end{aligned}$$

De ello se deduce entonces por (2.22) la acotación

$$S_1 \leq C_p^{(1)} (t_i - t_{i-1})^{\frac{1}{p}} \tag{2.24}$$

con

$$C_p^{(1)} = \frac{2^{(1-\frac{1}{p})}}{2^{(1-\frac{1}{p})} - 1}.$$

Por otra parte, de (2.15) es fácil de ver que $0 \leq G_n(x) \leq 1$ para todo $x \in [0, 1]$, entonces

$$|G_n(x) - G_n(y)| \leq 1$$

para todos x, y del intervalo cerrado $[0, 1]$ y todo número natural n. Por tanto

$$S_2 \leq \sum_{n: t_i - t_{i-1} < 2^{-n}} 2^{-\frac{n}{p}}.$$

Se reescribe nuevamente la desigualdad, a saber

$$S_2 \leq (t_i - t_{i-1}) \sum_{n=n_i}^{\infty} 2^{-\frac{n}{p}}, \tag{2.25}$$

donde

$$\frac{1}{t_i - t_{i-1}} < 2^{n_i}, \tag{2.26}$$

pero

$$\frac{1}{t_i - t_{i-1}} \geq 2^{n_i - 1}. \tag{2.27}$$

Pero la parte derecha de la desigualdad (2.25) corresponde a la serie geométrica. Entonces

$$\sum_{n=n_i}^{\infty} 2^{-\frac{n}{p}} = 2^{-\frac{n_i}{p}} \frac{1}{1 - 2^{1-\frac{1}{p}}}.$$

De ello se deduce entonces por (2.26) la acotación

$$S_2 \leq C_p^{(2)} (t_i - t_{i-1})^{\frac{1}{p}} \tag{2.28}$$

con

$$C_p^{(2)} = \frac{1}{1 - 2^{(1-\frac{1}{p})}}.$$

De (2.17), (2.24) y (2.28) se deduce entonces

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{n=1}^{k} 2^{-\frac{n}{p}} (G_n(t_i) - G_n(t_{i-1})) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{i=1}^{m} ((C_p^1) + (C_p^2))^p (t_i - t_{i-1}) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C_p^1 + C_p^2 = C_p, \end{aligned}$$

Entonces, por (2.16), se cumple

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n \right\|_p \leq C_p \sup_n |\alpha_n|. \tag{2.29}$$

(iii) Ahora, por (2.29), la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

es incondicionalmente convergente débil (ver Lema 2.1). Con ello la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\widehat{JF_p[0,1]}$ es equivalente a la base canónica de c_0, quedando así demostrado el teorema. **Q.e.d**

Teorema 2.12

El espacio dual de $\widehat{JF_p[a,b]}$ no contiene un subespacio isomorfo a l_1.

Demostración:
Esta propiedad también se deduce de la propiedad correspondiente para $C_p[a,b]$ (que no contiene un subespacio isomorfo a l_1) (ver [4]), pues como $LCV_p[a,b]$ es subespacio de C_p entonces, con más razón, éste no contiene un subespacio isomorfo a l_1.

Q.e.d

A partir de estos dos últimos teoremas se puede concluir que el espacio dual de $\widehat{JF_p[a,b]}$ no es isomorfo al espacio $\widehat{JF_q[a,b]}$ para $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. De hecho, a partir de esto se concluye también que el espacio $\widehat{JF_p[a,b]}$ no coincide con el espacio $L_p[a,b]$ de las funciones $p-$integrales.

2.3. Una integral de tipo Riemann-Stieltjes y la acotación de ciertos funcionales

En la búsqueda de una representación para los funcionales lineales continuos sobre $\widehat{JF_p[a,b]}$ conviene definir una variante "cómoda" de la integración de Riemann-Stieltjes.

Sea f una función cualquiera definida sobre el intervalo cerrado $[a,b]$ y sea g un elemento de $\widehat{JF_p[a,b]}$. Sea $\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ una partición cualquiera de $[a,b]$ y sean los puntos $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ para $1 \leq i \leq n$. Entonces el valor

$$\sigma_\pi(f,g) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} g(u)du \tag{2.30}$$

se llama **suma de tipo Riemann-Stieltjes de f respecto a la función de Tipo James g y π.**

Se dice que la función f es **integrable tipo Riemann-Stieltjes respecto a la función** $g \in \widehat{JF_p[a,b]}$ si y sólo si existe un número real I, tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número real $\delta_\varepsilon > 0$ con

$$|\sigma_\pi(f,g) - I| < \epsilon,$$

para cualquier partición π de $[a,b]$ de norma menor que δ_ε y cualquier selección de los puntos intermedios ξ_i. En ese caso el valor I se llama **integral de tipo Riemann-Stieltjes de f respecto a g en** $[a,b]$ y se denota

$$\int_a^b f(x)Dg(x).$$

Nótese que si en lugar de función $g \in \widehat{JF_p[a,b]}$ se considera la función

$$G(x) = \int_a^x g(u)du,$$

entonces por (2.30) se tiene

$$\sigma_\pi(f,g) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} g(u)du = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(G(t_i) - G(t_{i-1})).$$

Por tanto, se deduce que existe la integral de tipo Riemann-Stieltjes de f respecto a una función $g \in \widehat{JF_p[a,b]}$ en $[a,b]$ si y sólo si existe la integral clásica de Riemann-Stieltjes de f respecto a la función G en $[a,b]$.

Por otra parte, se tiene que

$$\sigma_\pi(f,g) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} g(u)du = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\xi_i)g(u)du.$$

Ahora, dada la relación entre las funciones g y G, obviamente es

$$\|g\|_p = \|G\|_{V_p} = V_p(g)$$

y aplicando el teorema 1.17 se obtiene entonces:

Teorema 2.13
: *Sean f, g dos funciones definidas en el intervalo cerrado $[a,b]$, tal que $f(a) = 0$ y $g \in \widehat{JF_q[a,b]}$ y sean p, q tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$. Entonces para toda partición π de $[a,b]$ se cumple*

$$|\sigma_\pi(f,g)| \leq \left\{1 + \zeta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\right\} V_p(f)\|g\|_q,$$

donde

$$\zeta(t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^t}$$

es la función Zeta de Riemann.

Este teorema permite afirmar que si la función f, de p-variación acotada en $[a,b]$, es integrable de tipo Riemann-Stieltjes respecto a la función $g \in \widehat{JF_q[a,b]}$, entonces se cumple

$$\int_a^b fDg \leq \left\{1 + \zeta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\right\} V_p(f)\|g\|_q,$$

para $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$. De hecho, la integrabilidad de f respecto a g queda garantizada si f es absolutamente p-continua en $[a,b]$ (ver ([20]), de donde se deduce el siguiente teorema:

Teorema 2.14

Sean las funciones $f \in C_p[a,b]$ y $g \in \widehat{JF_q[a,b]}$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$. Entonces f es integrable de tipo Riemann-Stieltjes respecto a g en $[a,b]$ y se cumple

$$\int_a^b fDg \leq \left\{1+\zeta\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\right\} V_p(f)\|g\|_q.$$

donde ζ es la función Zeta de Riemann.

Este teorema permite identificar al espacio $JF_p[a,b]$ como subespacio del espacio dual de $C_p[a,b]$. Sin embargo, la obtención de un teorema de representación para los elementos de $(C_p[a,b])^*$, exige un estudio más profundo de la relación entre estos espacios, lo cual queda como objetivo de trabajos futuros. Es en esta línea que se definen también en el siguiente epígrafe ciertas variaciones en la definición del espacio de funciones de tipo James, las cuales pudieran apoyar en dicha investigación.

2.4. Sobre posibles generalizaciones del espacio de funciones de tipo James

La siguiente constituye una variación de la definición del espacio de funciones de tipo James a partir de la misma idea original de Lindenstrauss y Stegall (ver [13]):

Definición 2.6

Se llama **p-variación integral** *de una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ al valor*

$$JV_p(f)=\sup_{\pi}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(u)du\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(el supremo se toma sobre todas las particiones $\pi: a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$ de $[a,b]$).

Se denota por $IV_p[a,b]$ al **espacio de las funciones de p-variación integral acotada**. *Es decir,*

$$IV_p[a,b]=\{f:[a,b]\to\mathbb{R};\quad JV_p(f)<\infty\}.$$

En $IV_p[a,b]$ se define la relación

$$f\sim g \qquad \Leftrightarrow \qquad JV_p(f-g)=0.$$

Resulta sencillo comprobar que ésta define una relación de equivalencia en $IV_p[a,b]$. Se denota por $\widetilde{IV}_p[a,b]$ al espacio cociente $IV_p[a,b]/_{\sim}$.

De manera análoga al comentario desarrollado en la definición de $JF_p[a,b]$ se comprueba que este espacio (de clases de equivalencia) puede ser fácilmente identificado como un espacio de funciones. Entonces se cumple el siguiente teorema.

Teorema 2.15
El espacio $\widetilde{IV}_p[a,b]$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_p = JV_p(f).$$

Demostración:
La demostración de las propiedades de la norma es totalmente análoga a la desarrollada en el teorema 2.3.

Para comprobar que $\widetilde{IV}_p[a,b]$ es un espacio de Banach, sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $IV_p[a,b]$, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

para todos $n, m \geq N$. De aquí que (obviamente) para todo $x \in [a,b]$ fijo sea

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

para todos $n, m \geq N$, por lo que la sucesión numérica $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy y por tanto convergente en $\mathbb{R}$. Sea para todo $x \in [a,b]$

$$f(x) = \lim f_n(x).$$

Entonces se cumple

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} (f(u) - f_n(u))du \right|^p \leq \varepsilon^p \sum_{i=0}^{n-1} (t_i - t_{i+1})^p.$$

Considerando, sin perder generalidad, a la partición $\pi = \{t_i\}_{i=0}^n$ de norma menor que 1, la suma de la parte derecha de la desigualdad anterior es acotada por una constante C, de donde se deduce (hallando el supremo sobre todas las posibles particiones) que

$$\|f - f_n\|_p < C\varepsilon.$$

De esa manera se ha demostrado que la sucesión de Cauchy $\{f_n\} \subset IV_p[a,b]$ es convergente. Resta comprobar que su límite es también elemento de $IV_p[a,b]$, lo cual se deduce directamente de la desigualdad triangular. **Q.e.d.**

Surge ahora de manera natural la pregunta sobre la relación entre los espacios $\widetilde{IV}_p[a,b]$ y $\widehat{JF_p[a,b]}$.

Revisando las demostraciones correspondientes, es de esperar que las propiedades de la norma se trasladen sin diferencias del espacio $\widehat{JF_p[a,b]}$ a este espacio. Lo mismo sucede respecto a su separabilidad. En cuanto a las relaciones de este espacio y su dual con los espacios c_0 y l_1 respectivamente, se hace necesario un análisis más exhaustivo y diferenciado.

El modo más natural de establecer una relación entre esos espacios es a partir de una aplicación $\Phi : IV_p[a,b] \to \widehat{JF_p[a,b]}$, que a cada $f \in IV_p[a,b]$ haga corresponder una sucesión de Cauchy $\{f_n\} \subset JF_p[a,b]$ tal que $f_n \to f$ en la norma $\|\cdot\|_p$. Sin embargo, el estudio de dicha aplicación implica desarrollar estudios de aproximación de funciones de $IV_p[a,b]$, lo cual se sale de los objetivos de esta tesis.

Una nueva posibilidad de generalización surge al considerar funciones abstractas, es decir funciones $f : [a,b] \to X$, donde X representa un espacio normado. En este sentido surge de manera natural la definición siguiente.

Definición 2.7
Sea X un espacio normado. Se llama p-variación integral abstracta de una función $f : [a,b] \to X$ al valor

$$JVA_p(f) = \sup_{F \in X^*} \|F \circ f\|_p < \infty, \tag{2.31}$$

donde el supremo se toma sobre todos los funcionales lineales continuos F de X^*.

Aquí se observa que la expresión (2.31) no define una norma en el espacio de las funciones abstractas $f : [a,b] \to X$ (con X no trivial) tales que $JVA_p(f) < \infty$. Para comprobarlo basta considerar la función

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} y & x = a,\ y \neq 0 \\ 0 & x \neq a \end{cases},$$

la cual es diferente de cero, mientras que su $p-$variación integral abstracta es igual a cero.

Sin embargo, en este espacio se podía definir, de manera análoga a todo lo desarrollado hasta ahora, la relación

$$f \sim g \qquad \Leftrightarrow \qquad \sup_{F \in X^*} \|F \circ (f-g)\|_p = 0$$

Resulta fácil comprobar que "$\sim$" constituye una relación de equivalencia en el espacio de las funciones abstractas $f : [a,b] \to X$ tales que $JVA_p(f) < \infty$, de manera que conviene definir el espacio $JV_p([a,b],X)$ como el espacio cociente correspondiente a dicha relación de equivalencia. Entonces, a partir de las propiedades de la norma de la p-variación integral ($\|\cdot\|_p$) y de la linealidad de $F \in X^*$ se deduce el siguiente teorema.

Teorema 2.16
El espacio $JV_p([a,b],X)$ es un espacio normado con la norma $\|\cdot\|_{pA} = JVA_p(\cdot)$.

Este nuevo espacio merece un estudio aparte para determinar cuáles de las propiedades de los espacios de funciones de tipo James se pueden generalizar y cuáles no. La ventaja de este tipo de definición es que se basa en una cierta convergencia débil, lo cual pudiera conducir a buenos resultados en relación con su dualidad.

Conclusiones

Y

Recomendaciones

Conclusiones y Recomendaciones

Conclusiones

En esta tesis se ha definido un espacio de funciones de tipo James a partir del estudio del espacio de funciones de James definido por Lindenstrauss y Stegall y de generalizar los conocidos espacios de sucesiones y de funciones de p-variación acotada.

Entre las propiedades más importantes del espacio $\widehat{JF_p[a,b]}$ aquí definido, se destacan las fórmulas para el cálculo de la p-variación integral de cierto tipo de funciones y, sobre todo, la relación de este espacio con el espacio de las funciones lineales continuas a trozos de p-variación acotada y con el conocido espacio $L_1[a,b]$. De gran importancia resulta también la definición en este capítulo de la integración de tipo Riemann-Stieltjes y la acotación de la integral de tipo Riemann-Stieltjes de funciones absolutamente p- continuas respecto a funciones de $\widehat{JF_q[a,b]}$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} > 1$.

En los estudios por la obtención de un teorema de representación para este espacio, se proponen además dos posibles generalizaciones, de las cuales una se refiere en particular a funciones abstractas $f : [a,b] \to X$, siendo X un espacio normado. La ventaja de este tipo de definición es que se basa en una cierta convergencia débil, lo cual pudiera conducir a buenos resultados en relación con la dualidad.

Recomendaciones

Al obtener en esta tesis una colección considerable de resultados acerca de la estructura del espacio $\widehat{JF_p[a,b]}$ surge como inquietud natural la cuestión sobre la dualidad de este; dejándose esta última como línea de trabajo para dar continuidad a la investigación.

También, dada la naturaleza de algunas técnicas de demostración utilizadas se impone la idea de buscar apoyo en la teoría de aproximación para esclarecer y establecer relaciones entre los espacios que aquí se estudian y otros ya conocidos.

Tampoco resultaría ocioso trabajar sobre las ideas de generilación expuestas, considerando X un espacio con determinadas características prefijadas.

Bibliografía

[1] B. Bessaga, Pelczynsky: On Bases an Unconditional Convergence of Series in Banach Spaces, *Studia Mathematica,* **17,** Warszawa, (1958) (preprint).

[2] J. Diestel: *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer Verlag, Berlín/Heidelberg/New York, (1984), 261 págs.

[3] I.M. Gelfand: *Collected Papers I*, Springer Verlag, Berlín/Heidelberg/New York, (1987).

[4] R.C. James: Banach Spaces quasi-reflexive of order one, *Studia Mathematica,* **60,** Warszawa, (1977) 157-177.

[5] R.C. James: Characterizations of Reflexivity, *Studia Mathematica,* **22,** Warszawa, (1964) 205-216.

[6] R.C. James, D.P. Giesy: Uniformly non $l^{(1)}$ and B-convex Banach space, *Studia Mathematica,* **56,** Warszawa, (1973) 61-.69.

[7] R.C. James: A separable somewhat reflexive Banach space with nonseparable dual, *Bulletin of the American Mathematical Society,* **80,** (1974) 738-743.

[8] M.A. Jiménez Pozo: *Medida, Integración y Funcionales*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, (1989).

[9] S.V. Kisliakov: A Remark on the Space of functions of bounded p-Variation. *En: Mathematische Nachrichten,* **119,** Berlín, (1984), (preprint).

[10] A.N. Kolmogorov, S:V: Fomin: *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, Editorial MIR, Moscú, (1978).

[11] H.E. Lacey: *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces,* Springer Verlag, Berlín/Heidelberg/New York, (1977).

[12] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri: *Classical Banach Spaces I. Sequence Spaces,* Springer Verlag, Berlín/Heidelberg/New York, (1977).

[13] J. Lindenstrauss, C. Stegall: Example of separable space which do not contain l_1 and who duals are non-separable,*Studia Mathematica,* **58,** Warszawa, (1975) 81-105

[14] E.R Love, L.C. Young: Sur une Classe de fonctionelles lineaires. *En: Fundamenta Mathematica,* **28,** Warszawa, (1937).

[15] T.J. Marti: *Introduction to the Theory of Bases,* Springer Verlag, Berlín/Heidelberg/New York, (1969).

[16] R. Milián Pérez: *El Álgebra de las Funciones de p-Variación Acotada,* Tesis de Licenciatura, Universidad de La Habana, (2008).

[17] G. Musielack, W. Orlicz: On generalized Variations (1). *En: Studia Mathematica,* **18,** Warszawa, (1959).

[18] G. Pisier, G. Xu: Random series in the real interpolation spaces betwen the spaces v_p, *Lecture Notes in Mathematics,* Springer Verlag, Berlín/Heidelberg/New York, (1967).

[19] Y. Puig de Dios: *Espacios de Funciones de p-Variación Acotada Fuerte y Débil,* Tesis de Licenciatura, Universidad de La Habana, (2005).

[20] R.A. Roldán Inguanzo: *Räume von Folgen und Funktiones von bescränkter p-variation,* Tesis de Doctorado, Universidad Friedrich Schiller de Jena, RDA, (1989).

[21] J.R. Rice: *The Aproximation of Functions,* Addision-Wesley Publishing Company, Volume 1, (1964).

[22] C. Sánchez Fernández, C. Valdés Castro: *De los Bernoulli a los Bourbaki,* Ed. Nivola, España, (2004).

[23] I. Singer, *Bases in Banach Spaces,* Springer Verlag, Berlín/Heidelberg/New York, (1974).

[24] L.C. Young: An Inequality of the Hölder Type, connected with Stieltjes Integration. *En: Acta Mathematica,* **67,** Uppsala, (1936).