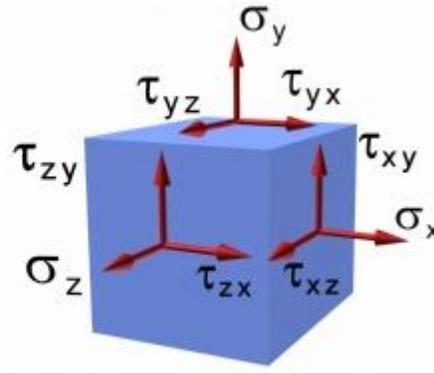
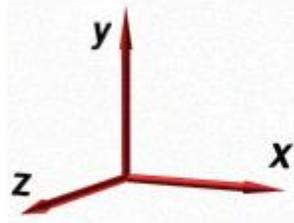


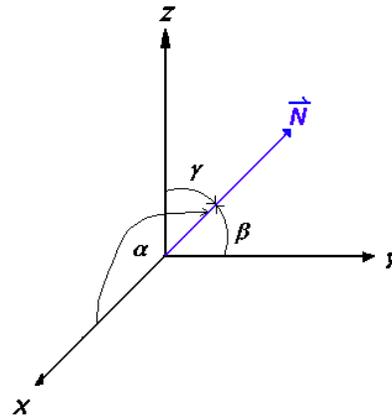
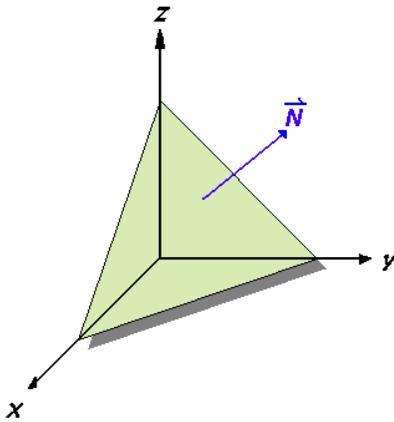
## 2.2.- Estado Espacial de Tensiones

- ✓ El estado espacial de tensiones en un punto, puede ser representado a través de una matriz (tensor) de tensiones.



$$\underline{\pi} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \underline{\pi} : \text{Tensor de Tensiones}$$

- Sea  $\underline{N}$ , el vector normal a un plano ubicado en el espacio.

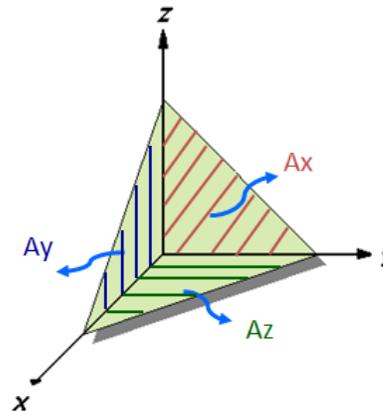
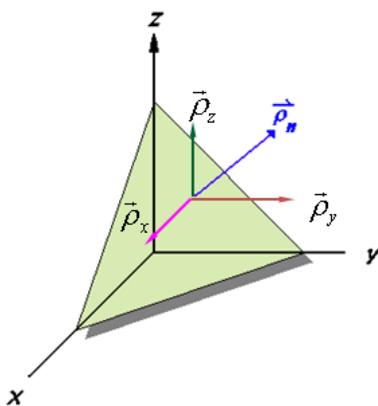


$$\hat{N} = (L, M, N) \text{ donde } \Rightarrow$$

L, M, N : cosenos directores del vector N

$$\left. \begin{array}{l} L = \cos \alpha \\ M = \cos \beta \\ N = \cos \gamma \end{array} \right\} \text{ y } L^2 + M^2 + N^2 = 1$$

- Sea  $\underline{\rho}_n$ , el vector de tensiones que actúa sobre el plano orientado por  $\underline{N}$ .



$$\underline{\rho}_n = (\rho_x, \rho_y, \rho_z) \quad \text{Vector de Tensiones}$$

$$\begin{array}{l} A_x = A * \hat{x} * \hat{N} \quad \text{donde } \hat{x} = (1,0,0) \\ A_y = A * \hat{y} * \hat{N} \quad \text{donde } \hat{y} = (0,1,0) \\ A_z = A * \hat{z} * \hat{N} \quad \text{donde } \hat{z} = (0,0,1) \end{array}$$

$$A_x = A \cos \alpha ; A_y = A \cos \beta ; A_z = A \cos \gamma$$

Realizando equilibrio de Fuerzas en cada una de las direcciones, se obtiene:

$$i) \sum F_x = 0 \Rightarrow \rho_x A = \sigma_x A \cos \alpha + \tau_{yx} A \cos \beta + \tau_{zx} A \cos \gamma$$

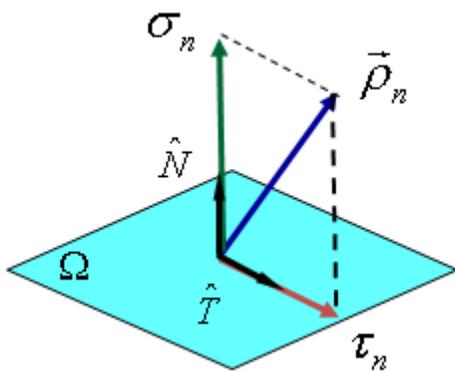
$$ii) \sum F_y = 0 \Rightarrow \rho_y A = \tau_{xy} A \cos \alpha + \sigma_y A \cos \beta + \tau_{zy} A \cos \gamma$$

$$iii) \sum F_z = 0 \Rightarrow \rho_z A = \tau_{xz} A \cos \alpha + \tau_{yz} A \cos \beta + \sigma_z A \cos \gamma$$

Escribiendo las ecuaciones de equilibrio en forma matricial:

$$\underline{\rho}_n = \underline{\pi} \cdot \underline{\hat{N}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix}$$

- ✓ Calculemos la **tensión Normal y Tangencial** que se genera en el Plano definido por el vector Normal  $\underline{\hat{N}}$ .



$$\sigma_n = \underline{\rho}_n \cdot \underline{\hat{N}}$$

La tensión Tangencial puede ser calculada a partir del vector de tensiones o calculada a partir de  $\sigma_n$ .

$$\tau_n = \underline{\rho}_n \cdot \underline{\hat{T}}$$

$$\tau_n^2 = \|\underline{\rho}_n\|^2 - \sigma_n^2$$

$\Omega$  = Plano cuya normal es  $\underline{\hat{N}}$

## 2.2.1.- Esfuerzos Principales en el Estado Espacial de Tensiones

### 2.2.1.1.- Esfuerzos Principales

$$\underline{\rho}_n = \sigma_n \underline{\hat{N}} + \tau_n \underline{\hat{T}}$$

En el plano Principal  $\tau = 0$

$$\Rightarrow \underline{\rho}_n = \sigma \underline{\hat{N}}$$

Por definición el vector de tensiones es:

$$\Rightarrow \underline{\rho}_n = \underline{\pi} \cdot \underline{\hat{N}}$$

$$\Rightarrow \underline{\pi} \cdot \underline{\hat{N}} = \sigma \underline{\hat{N}} \quad \text{PROBLEMA DE VALORES PROPIOS}$$

$$\Rightarrow (\underline{\pi} - \sigma \underline{I}) \underline{\hat{N}} = 0 \quad \text{donde } \underline{I} = \text{matriz Identidad de } 3 \times 3$$

Sistema de ecuaciones de la forma  $\Rightarrow \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{0}}$

Dicho sistema para no tener la **Solución Trivial** ( $\underline{X} = \underline{0}$ ), debe cumplirse que:

$$\text{Det}|A| = 0 \quad , \text{ es decir} \quad \Rightarrow \quad \text{Det}|\underline{\pi} - \sigma \underline{I}| = 0$$

El problema de la solución del sistema de ecuaciones mencionado, recibe el Nombre de "**PROBLEMA DE VALORES PROPIOS**".

De la *Solución no Trivial* se obtienen tres pares de vectores, conocidos como "**Vectores Propios**" y son:

$$(\sigma_1, \hat{n}_1); (\sigma_2, \hat{n}_2) \text{ y } (\sigma_3, \hat{n}_3)$$

$\sigma_1, \sigma_2 \text{ y } \sigma_3 \Rightarrow$  Tensiones Principales

$\hat{n}_1, \hat{n}_2 \text{ y } \hat{n}_3 \Rightarrow$  Direcciones Principales, Vectores Unitarios Normales a los planos que actúan las tensiones  $\sigma_1, \sigma_2 \text{ y } \sigma_3$ , respectivamente.

Resolviendo el **Problema de Valores Propios**, se tiene:

$$\text{Det} \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$(\sigma_x - \sigma) \begin{vmatrix} \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} - \tau_{xy} \begin{vmatrix} \tau_{yx} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} + \tau_{xz} \begin{vmatrix} \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando la expresión anterior, llegamos a una ecuación cúbica, de la forma:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{cases}$$

Donde los términos  $I_1, I_2$  e  $I_3$  se denominan "**INVARIANTES DE TENSIONES**".

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$$

### 2.2.1.2.- Direcciones Principales

El Problema de Valores propios parte del sistema de ecuaciones de:

$$\Rightarrow (\underline{\pi} - \sigma \underline{I}) \hat{N} = 0 \quad \text{donde } \underline{I} = \text{matriz Identidad de } 3 \times 3$$

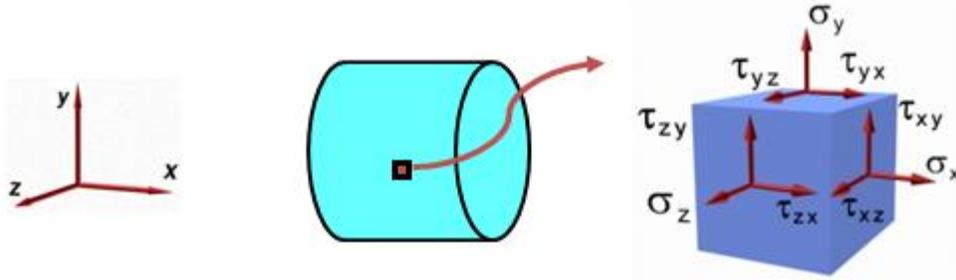
Resolviendo para cada tensión principal, encontramos sus **direcciones principales**

$$\Rightarrow (\underline{\pi} - \sigma_1 \underline{I}) \hat{n}_1 = 0 \quad \hat{n}_1 = (L_1, M_1, N_1) \quad \text{en que } L_1^2 + M_1^2 + N_1^2 = 1$$

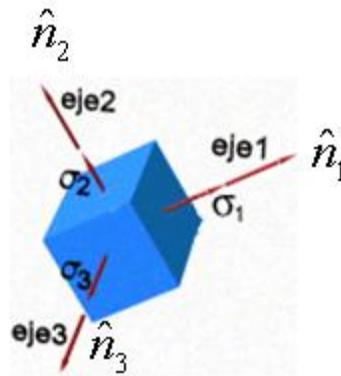
$$\Rightarrow (\underline{\pi} - \sigma_2 \underline{I}) \hat{n}_2 = 0 \quad \hat{n}_2 = (L_2, M_2, N_2) \quad \text{en que } L_2^2 + M_2^2 + N_2^2 = 1$$

$$\Rightarrow (\underline{\pi} - \sigma_3 \underline{I}) \hat{n}_3 = 0 \quad \hat{n}_3 = (L_3, M_3, N_3) \quad \text{en que } L_3^2 + M_3^2 + N_3^2 = 1$$

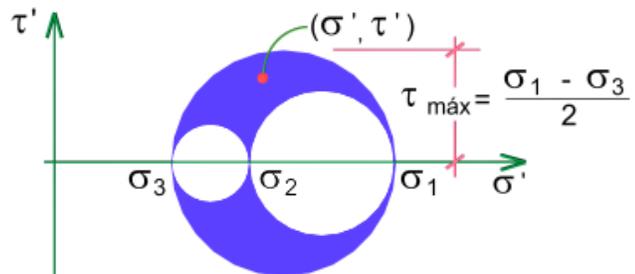
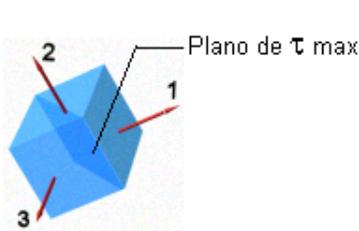
Resumiendo, tenemos un sistema Espacial de tensiones en un punto de un cuerpo sólido cualquiera:



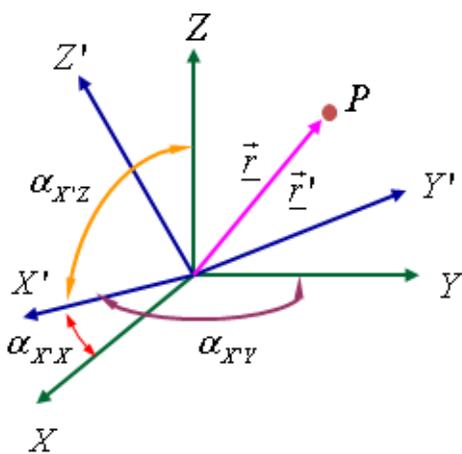
Calculamos las Tensiones y Direcciones Principales:



Calculamos el Esfuerzo de Corte Máximo que se desarrolla:



### Giro de Coordenadas en el Espacio



Cualquier vector de componentes (x,y,z), se puede transformar a un sistema de coordenadas (x',y',z') mediante una **Matriz de Rotación (R)**

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{x'x} & \cos \alpha_{x'y} & \cos \alpha_{x'z} \\ \cos \alpha_{y'x} & \cos \alpha_{y'y} & \cos \alpha_{y'z} \\ \cos \alpha_{z'x} & \cos \alpha_{z'y} & \cos \alpha_{z'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{x'x}, \alpha_{x'y}, \alpha_{x'z} \Rightarrow$$

Son los ángulos que forma el eje x' con los ejes x, y, z, respectivamente.

$\cos \alpha_{x'x}, \cos \alpha_{x'y}, \cos \alpha_{x'z} \Rightarrow$  Representan a las componentes del vector unitario en la dirección de  $x'$

Por lo tanto se debe cumplir que:

$$\hat{x}' \cdot \hat{x}' = 1 \Rightarrow$$

$$\cos^2 \alpha_{x'x} + \cos^2 \alpha_{x'y} + \cos^2 \alpha_{x'z} = 1$$

Análogamente:

$$\hat{y}' \cdot \hat{y}' = 1 \Rightarrow$$

$$\cos^2 \alpha_{y'x} + \cos^2 \alpha_{y'y} + \cos^2 \alpha_{y'z} = 1$$

$$\hat{z}' \cdot \hat{z}' = 1 \Rightarrow$$

$$\cos^2 \alpha_{z'x} + \cos^2 \alpha_{z'y} + \cos^2 \alpha_{z'z} = 1$$

Ello significa que:

$$\underline{R}^* \underline{R}^T = \underline{I} \Rightarrow$$

$$\underline{R}^T = \underline{R}^{-1}$$

Por otra parte los vectores  $x', y', z'$  son **ortogonales** entre sí, por lo tanto:

$$\hat{x}' \otimes \hat{y}' = 0 \Rightarrow$$

$$\cos \alpha_{x'x} \cos \alpha_{y'y} + \cos \alpha_{x'y} \cos \alpha_{y'x} + \cos \alpha_{x'z} \cos \alpha_{y'z} = 0$$

$$\hat{x}' \otimes \hat{z}' = 0 \Rightarrow$$

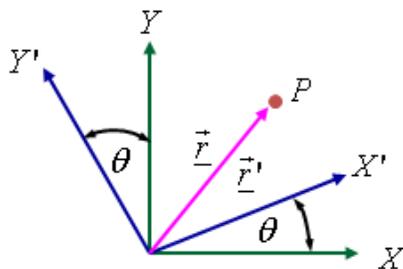
$$\cos \alpha_{x'x} \cos \alpha_{z'x} + \cos \alpha_{x'y} \cos \alpha_{z'y} + \cos \alpha_{x'z} \cos \alpha_{z'z} = 0$$

$$\hat{y}' \otimes \hat{z}' = 0 \Rightarrow$$

$$\cos \alpha_{y'x} \cos \alpha_{z'x} + \cos \alpha_{y'y} \cos \alpha_{z'y} + \cos \alpha_{y'z} \cos \alpha_{z'z} = 0$$

### Ejemplo:

✓ Apliquemos lo anteriormente visto, al caso plano



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \underline{i}' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\pi/2 - \theta) \\ \cos(\pi/2 + \theta) & \cos \theta \end{bmatrix}}_{\underline{R}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \underline{i} \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}^T = \underline{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Sea  $\underline{\pi}$  la matriz de tensiones en un sistema  $X, Y, Z$  y  $\underline{\pi}'$  la matriz de tensiones en un sistema  $X', Y', Z'$ .

Sea un plano  $\underline{\Omega}$  cuya normal en el sistema  $X, Y, Z$  es  $\underline{N}$  y en el sistema  $X', Y', Z'$  es  $\underline{N}'$ .

$$\Rightarrow \underline{\bar{\rho}}_n = \underline{\pi} \cdot \underline{\hat{N}} \quad (\text{en el sistema } X, Y, Z)$$

$$\Rightarrow \underline{\bar{\rho}}_n' = \underline{\pi}' \cdot \underline{\hat{N}}' \quad (\text{en el sistema } X', Y', Z')$$

$$\text{Pero } \underline{\bar{\rho}}_n' = \underline{R} \underline{\bar{\rho}}_n \quad \text{y} \quad \underline{\hat{n}}' = \underline{R} \underline{\hat{n}}$$

$$\underline{\bar{\rho}}_n' = \underline{R} \underline{\bar{\rho}}_n = \underline{R} \underline{\pi} \underline{\hat{n}} \quad \text{pero} \quad \underline{\hat{n}} = \underline{R}^T \underline{\hat{n}}'$$

$$\therefore \underline{\bar{\rho}}_n' = \underline{R} \underline{\pi} \underline{R}^T \underline{\hat{n}}' = \underline{\pi}' \underline{\hat{n}}'$$

Luego, se tiene que:

$$\underline{\pi}' = \underline{R} \underline{\pi} \underline{R}^T$$

Aplicado al **caso Plano**, se tiene que:

$$\underline{\pi} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad \text{Tensor de Tensiones Estado Plano de Tensiones}$$

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{Matriz de Rotación Estado Plano}$$

$$\underline{R}\underline{\pi} = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \text{sen} \theta & \tau_{yx} \cos \theta + \sigma_y \text{sen} \theta \\ -\sigma_x \text{sen} \theta + \tau_{xy} \cos \theta & -\tau_{yx} \text{sen} \theta + \sigma_y \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\underline{\pi}' = \underline{R}\underline{\pi}\underline{R}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'} \end{bmatrix}$$

$$\text{en que } \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + 2\tau_{xy} \text{sen} \theta \cos \theta + \sigma_y \text{sen}^2 \theta \\ \sigma_{y'} = \sigma_x \text{sen}^2 \theta - 2\tau_{xy} \text{sen} \theta \cos \theta + \sigma_y \cos^2 \theta \\ \tau_{x'y'} = -\sigma_x \text{sen} \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta) + \sigma_y \text{sen} \theta \cos \theta \end{cases}$$

Se comprueba que:  $\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$

Reemplazando por las siguientes Identidades Trigonométricas:

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\text{sen}^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

$$\text{sen} 2\theta = 2\text{sen} \theta \cos \theta$$

$$\sigma_{x'} = \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) + \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos(2\theta) + \tau_{xy} \text{sen}(2\theta) \quad (4)$$

$$\tau_{x'y'} = - \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \text{sen}(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta) \quad (5)$$

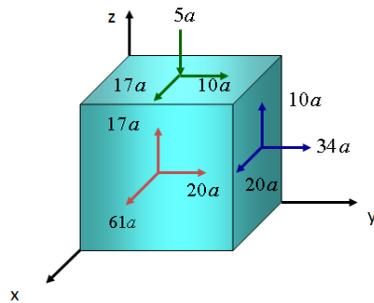
$$\sigma_{y'} = \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) - \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos(2\theta) - \tau_{xy} \text{sen}(2\theta) \quad (6)$$

**Las direcciones Principales se obtienen haciendo  $\tau = 0$**

$$\Rightarrow \text{tg}(2\theta_p) = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} \quad (7)$$

**Ejemplo:**

- ✓ Un punto de un sólido cualquiera, se encuentra solicitado por el estado tensional mostrado en la figura adjunta.



donde  $a = \frac{1}{9} \text{ Ton/m}^2$

Se pide determinar:

- i) Las Tensiones Principales y las Direcciones Principales
- ii) La Tensión de Corte Máxima
- iii) La Tensión Normal y Tangencial al plano cuya normal corresponde a  $(0,9623 ; 0,1925 ; 0,1925)$ .

**Solución:**

- 1. Determinamos el Tensor de Tensiones c/r al Sistema de Orientación OXYZ :

$$\underline{\pi} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61 & 20 & 17 \\ 20 & 34 & 10 \\ 17 & 10 & -5 \end{bmatrix} a$$

- 2. Resolvemos el Problema de Valores Propios:

$$\text{Det}|\underline{\pi} - \sigma \underline{I}| = 0 \Rightarrow$$

$$\text{Det} \begin{vmatrix} \frac{61}{9} - \sigma & \frac{20}{9} & \frac{17}{9} \\ \frac{20}{9} & \frac{34}{9} - \sigma & \frac{10}{9} \\ \frac{17}{9} & \frac{10}{9} & -\frac{5}{9} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el Determinante Obtenemos:

$$\Rightarrow \sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

Calculamos los Invariantes de Tensiones

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 10$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 = 10$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = -24$$

$$\therefore \sigma^3 - 10\sigma^2 + 10\sigma + 24 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 8,489 \\ \sigma_2 = 2,599 \\ \sigma_3 = -1,088 \end{cases}$$

**Tensiones Principales**  
en  $\text{Ton/m}^2$

### 3. Direcciones Principales

#### ➤ Tensión Principal Mayor

$$\Rightarrow (\underline{\pi} - 8,489 \text{ I}) \underline{\hat{n}}_1 = 0 \quad \underline{\hat{n}}_1 = (L_1, M_1, N_1) \quad \text{en que } L_1^2 + M_1^2 + N_1^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1,7122 & 20/9 & 17/9 \\ 20/9 & -4,7112 & 10/9 \\ 17/9 & 10/9 & -9,0446 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ M_1 \\ N_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = 1,0 \\ M_1 = 0,5365 \\ N_1 = 0,2748 \end{cases}$$

$$\therefore \underline{\hat{n}}_1 = (0,8565 ; 0,4595 ; 0,2353)$$

#### ➤ Tensión Principal Intermedia

$$\Rightarrow (\underline{\pi} - 2,599 \text{ I}) \underline{\hat{n}}_2 = 0 \quad \underline{\hat{n}}_2 = (L_2, M_2, N_2) \quad \text{en que } L_2^2 + M_2^2 + N_2^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4,1788 & 20/9 & 17/9 \\ 20/9 & 1,1788 & 10/9 \\ 17/9 & 10/9 & -3,1546 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_2 \\ M_2 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} L_2 = 1,0 \\ M_2 = -1,8390 \\ N_2 = -0,04896 \end{cases}$$

$$\therefore \underline{\hat{n}}_2 = (0,4776 ; -0,8727 ; -0,2337)$$

#### ➤ Tensión Principal Menor

$$\Rightarrow (\underline{\pi} + 1,088 \text{ I}) \underline{\hat{n}}_3 = 0 \quad \underline{\hat{n}}_3 = (L_3, M_3, N_3) \quad \text{en que } L_3^2 + M_3^2 + N_3^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 7,8658 & 20/9 & 17/9 \\ 20/9 & 4,8658 & 10/9 \\ 17/9 & 10/9 & 0,5324 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_3 \\ M_3 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} L_3 = 1,0 \\ M_3 = 0,6753 \\ N_3 = -4,9572 \end{cases}$$

$$\therefore \underline{\hat{n}}_3 = (0,1960 ; 0,1324 ; -0,9716)$$

Se debe verificar que:  $\underline{\hat{n}}_1 \times \underline{\hat{n}}_2 = \underline{\hat{n}}_3$

$$\underline{\hat{n}}_3 = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0,8564 & 0,4595 & 0,2353 \\ 0,4776 & -0,8783 & -0,0234 \end{bmatrix} = \hat{i}(0,1959) - \hat{j}(-0,1324) + \hat{k}(-0,9716)$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{n}}_3 = (0,1959 ; 0,1324 ; -0,9716) \Rightarrow OK$$

### 4. Tensión de Corte Máxima

$$\tau_{m\acute{a}x} = \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 4,789 \text{ Ton/m}^2$$

### 5. Tensión Normal y Tangencial al Plano cuya normal es $\underline{N}$

$$\underline{\hat{N}} = (0,9623 ; 0,1925 ; 0,1925)$$

Calcularemos el **Vector de Tensiones** en el Plano definido por la Normal  $\underline{N}$

$$\underline{\vec{\rho}}_n = \underline{\pi} \cdot \hat{N} \Rightarrow \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61/9 & 20/9 & 17/9 \\ 20/9 & 34/9 & 10/9 \\ 17/9 & 10/9 & -5/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,9623 \\ 0,1925 \\ 0,1925 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,3131 \\ 3,0792 \\ 1,9245 \end{bmatrix} \quad \left[ \text{Ton/m}^2 \right]$$

Calcularemos la **Tensión Normal** al Plano definido por la Normal  $\underline{N}$

$$\sigma_n = \underline{\vec{\rho}}_n \cdot \hat{N} = \begin{bmatrix} 7,3131 & 3,0792 & 1,9245 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,9623 \\ 0,1925 \\ 0,1925 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_n = 8,00 \text{ Ton/m}^2$$

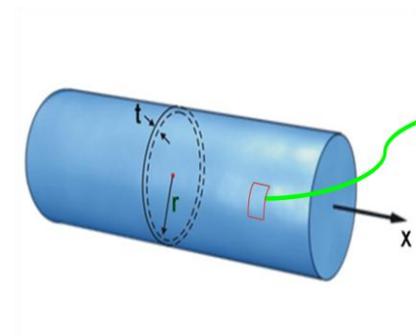
Calcularemos la **Tensión Tangencial** al Plano definido por la Normal  $\underline{N}$

$$\tau_n^2 = \|\underline{\vec{\rho}}_n\|^2 - \sigma_n^2 \Rightarrow \|\underline{\vec{\rho}}_n\| = \sqrt{7,3131^2 + 3,0792^2 + 1,9245^2} = 8,165 \text{ Ton/m}^2$$

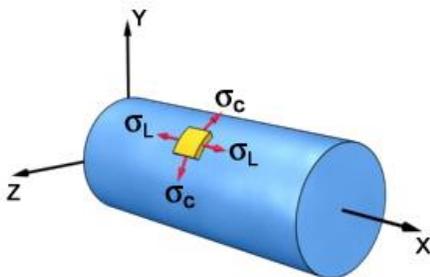
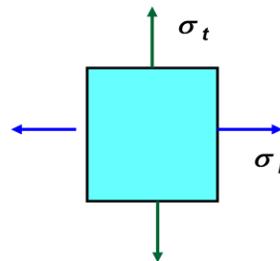
$$\Rightarrow \tau_n^2 = 66,667 - 8^2 = 2,667 \Rightarrow \tau_n = 1,633 \text{ Ton/m}^2$$

### 2.3.- Tensiones en Cáscaras de Pared Delgada

#### 2.3.1.- Cáscara Cilíndrica (tubo) de Pared Delgada sometida a una Presión Interna (cte.)



Cilindro de radio "r" y espesor "t" ( $t \ll r$ )

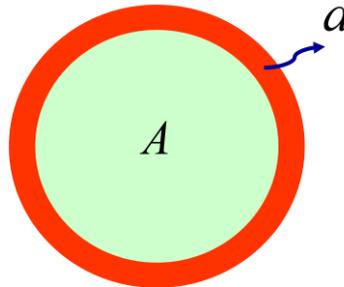
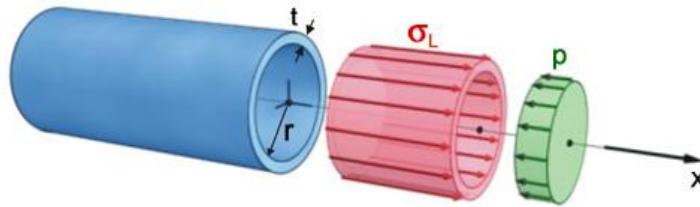


$\sigma_l$  = Tensión Longitudinal

$\sigma_t = \sigma_c$  = Tensión Tangencial

I. Calculemos la Tensión Longitudinal, para lo cual tenemos que:

- ✓ Realizar un corte transversalmente al cilindro (perpendicular al eje x y planteamos el equilibrio en dirección "X").



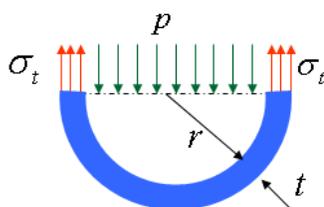
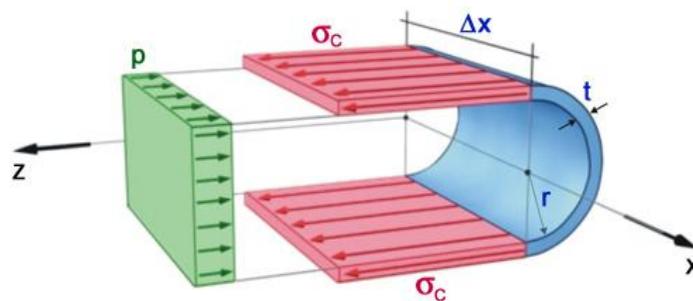
$$i) \sum F_x = 0 \Rightarrow F_{\sigma_L} - F_p = 0$$

$$\left. \begin{aligned} F_{\sigma_L} &= \sigma_L * a = \sigma_L * 2\pi r t \\ F_p &= p * A = p * \pi r^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\sigma_L = \frac{pr}{2t} : \text{Tensión Longitudinal}$$

II. Calculemos la tensión tangencial, para lo cual debemos:

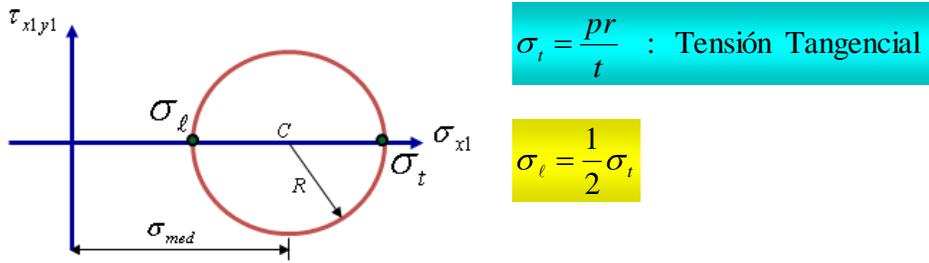
- ✓ Realizar un corte longitudinalmente al cilindro (paralelo al eje x y planteamos el equilibrio en dirección transversal).



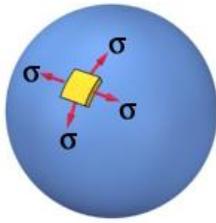
$$i) \sum F_z = 0 \Rightarrow 2F_{\sigma_t} - F_p = 0$$

$$\left. \begin{aligned} F_{\sigma_t} &= \sigma_t * a = \sigma_t * lt \\ F_p &= p * A = p * 2rl \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

- *Círculo de Mohr de Tensiones en un Cilindro de Pared delgada*

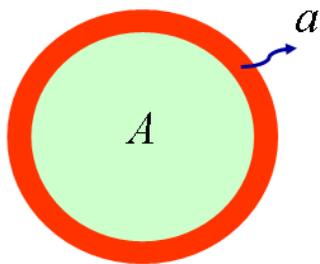
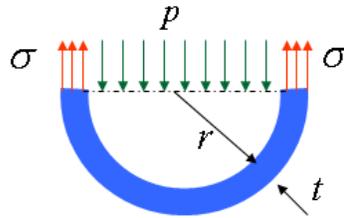


**2.3.2.- Recipiente (estanque) Esférico de Pared Delgada sometida a una Presión Interna (cte.)**



Esfera de radio "r" y espesor "t" (t << r)

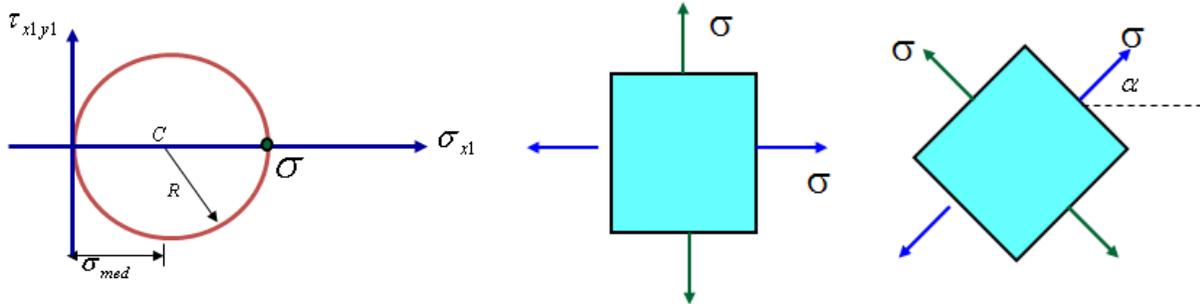
- Calculemos la tensión Normal que se desarrolla en el recipiente.
- Realizar un corte transversal en el estanque esférico



$$i) \sum F_x = 0 \Rightarrow F_\sigma - F_p = 0$$

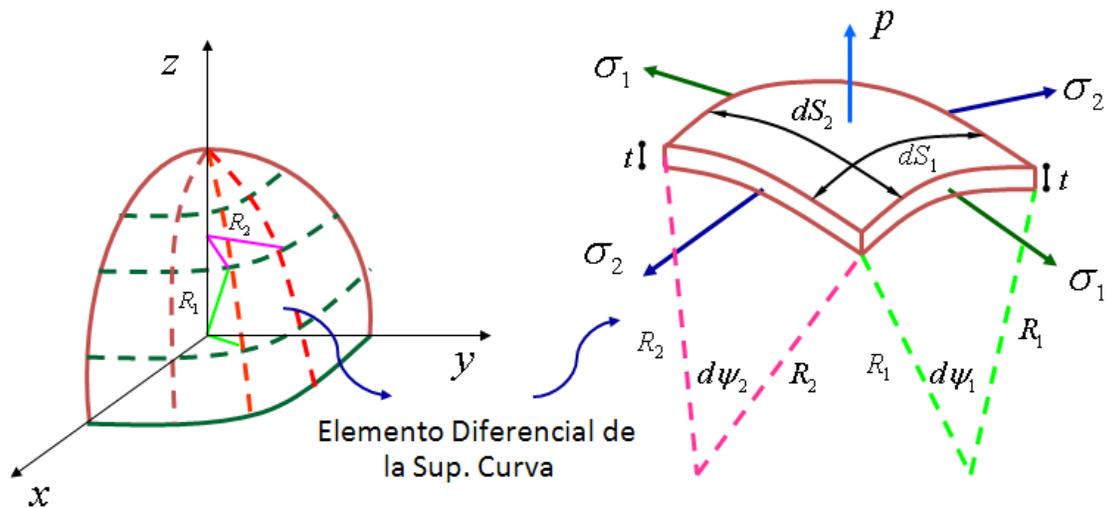
$$\left. \begin{aligned} F_\sigma &= \sigma * a = \sigma * 2\pi r t \\ F_p &= p * A = p * \pi r^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\sigma = \frac{pr}{2t} : \text{Tensión Normal}$$



## 2.4.- Estructuras de Superficie Curva y Pared Delgada

### 2.4.1.- Caso General de Cáscaras con Presión Interna (p)



- ✓ La Superficie Curva queda definida por 2 Radios de Curvatura “**R1 y R2**”
- ✓ Planteando Equilibrio del Elemento diferencial de la Superficie Curva

$$\Rightarrow p dS_1 dS_2 = 2\sigma_2 t dS_2 \sin(d\psi/2) + 2\sigma_1 t dS_1 \sin(d\psi/2)$$

$$\Rightarrow \text{pero } dS_1 = R_1 d\psi \text{ ; } dS_2 = R_2 d\psi \text{ y } \sin(d\psi/2) \approx d\psi/2$$

Reemplazando en la ecuación de equilibrio

$$\Rightarrow p R_1 R_2 d\psi^2 = \sigma_2 t R_2 d\psi^2 + \sigma_1 t R_1 d\psi^2$$

$$\Rightarrow \frac{p}{t} = \frac{\sigma_1}{R_2} + \frac{\sigma_2}{R_1}$$

#### Ejemplos:

I. Cilindro:

$$\Rightarrow R_1 = R \text{ ; } \sigma_1 = \sigma_t \\ R_2 = \infty \text{ ; } \sigma_2 = \sigma_l$$

$$\Rightarrow \sigma_t = \frac{pR}{t}$$

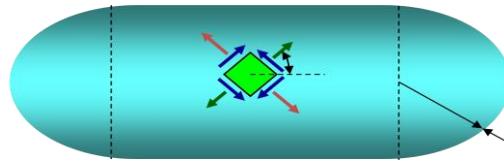
II. Esfera:

$$\Rightarrow R_1 = R \text{ ; } \sigma_1 = \sigma \\ R_2 = R \text{ ; } \sigma_2 = \sigma$$

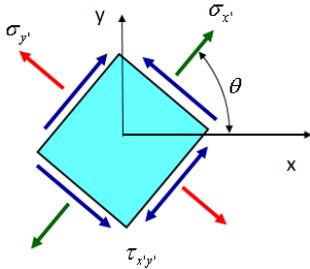
$$\Rightarrow \sigma = \frac{pR}{2t}$$

#### Ejemplo:

- ✓ Se tiene un estanque cilíndrico de pared delgada sometida a una presión interna “ $P_i$ ”. Si se tiene un elemento infinitesimal sobre el manto del cilindro girado un ángulo  $q$  con respecto a la horizontal. Se pide determinar la presión interna del estanque, el ángulo  $q$  en que se encuentra el elemento girado y el valor del respectivo esfuerzo de corte.
- ✓ Datos:  $r = 2,50 \text{ m.}$  ,  $t = 10 \text{ cm.}$ ,  $s_x = 166 \text{ kg/cm}^2$ ,  $s_y = 209 \text{ kg/cm}^2$



**Solución:**



$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{x'} = 166 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_{y'} = 209 \text{ kg/cm}^2 \\ \tau_{x'y'} = ??? \end{cases}$$

Del Invariante de tensiones ( $I_1$ ), se tiene:

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y = \frac{3}{2} \sigma_t \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2} \sigma_t = 375 \text{ kg/cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_t = 250 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_t = 125 \text{ kg/cm}^2 \end{cases}$$

Pero:

$$\Rightarrow \sigma_t = \frac{P_i * r}{t} = \frac{P_i * 250}{10} = 250 \text{ kg/cm}^2 \quad \Rightarrow \quad P_i = 10 \text{ kg/cm}^2$$

De las Ecuaciones de Transformación de Tensiones Planas, se tiene:

$$\sigma_{x'} = \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) + \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

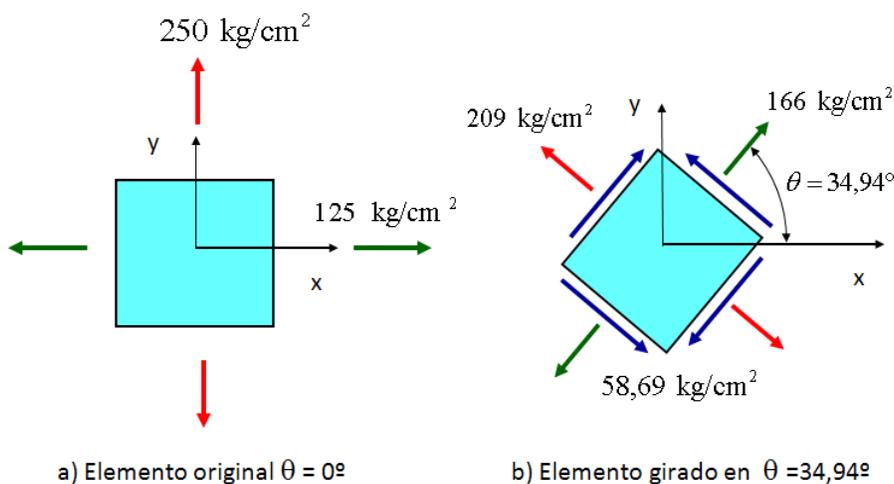
$$\Rightarrow \sigma_{x'} = \left( \frac{\sigma_t + \sigma_t}{2} \right) + \left( \frac{\sigma_t - \sigma_t}{2} \right) \cos 2\theta \quad \Rightarrow \quad 166 = \frac{3}{4} \sigma_t - \frac{1}{4} \sigma_t \cos 2\theta = \frac{\sigma_t}{4} \left( 3 - \cos 2\theta \right)$$

$$\Rightarrow 3 - \cos 2\theta = \frac{664}{\sigma_t} = 2,656 \quad \Rightarrow \quad \cos 2\theta = 0,344 \quad \Rightarrow \quad \theta = 34,94^\circ$$

La tensión de corte del elemento girado en un ángulo  $\theta = 34,94^\circ$  será:

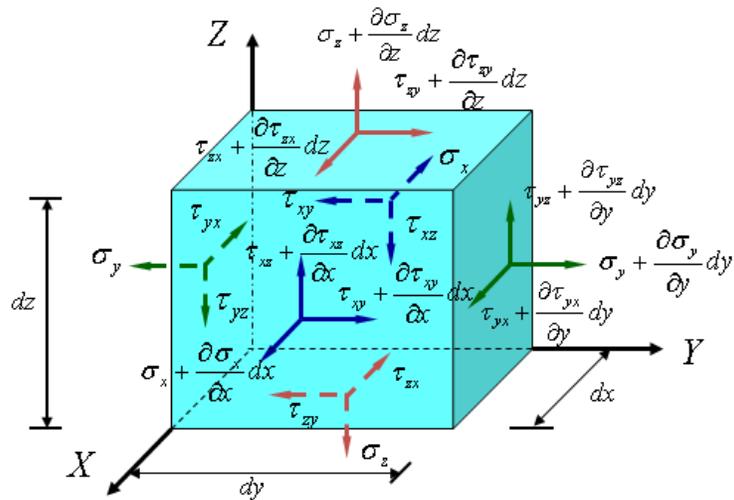
$$\Rightarrow \tau_{x'y'} = - \left( \frac{\sigma_t - \sigma_t}{2} \right) \sin 2\theta = - \left( \frac{125 - 250}{2} \right) \sin(2 * 34,94^\circ) \quad \Rightarrow \quad \tau_{x'y'} = 58,69 \text{ kg/cm}^2$$

Dibujemos los Estados Tensionales que se obtienen en el punto en análisis



## 2.5.- Ecuaciones de Equilibrio de Tensiones

Analicemos un paralelepípedo de dimensiones  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  con fuerzas internas por unidad de volumen  $f_x$ ,  $f_y$  y  $f_z$ :



- Planteando Equilibrio en la dirección "X" del elemento infinitesimal

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx}_{\text{Fuerza cara x}} \underbrace{dydz}_{\text{área}} + \underbrace{\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy}_{\text{Fuerza cara y}} \underbrace{dxdz}_{\text{área}} + \underbrace{\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz}_{\text{Fuerza cara z}} \underbrace{dxdy}_{\text{área}} + \underbrace{f_x}_{\text{Fuerza por unid.Vol.}} \underbrace{dxdydz}_{\text{Volumen}} = 0$$

con  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$  y  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$   $\Rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$

- Análogamente para las otras direcciones:

$$\Rightarrow \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0$$

- Las ecuaciones anteriores se pueden escribir en **Notación Tensorial**:

$$\Rightarrow \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \Rightarrow \begin{matrix} i=1,2,3 \\ j=1,2,3 \end{matrix}$$

Donde:

$$\sigma_{ij,j} = \sum_{x_i=1}^3 \sum_{x_j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{x_i x_j}}{\partial x_j}$$

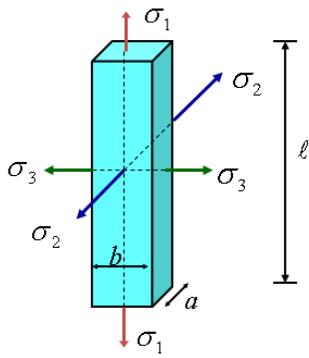
Por ejemplo:

$$\begin{matrix} i=1 \\ j=1,2,3 \end{matrix} \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{x_1 x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{x_1 x_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{x_1 x_3}}{\partial x_3} + f_{x_1} = 0$$

$$\begin{matrix} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \end{matrix} \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$$

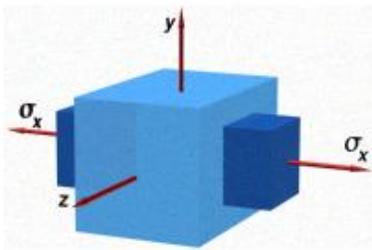
## 2.6.- Deformaciones en el Estado Espacial de Tensiones

- Analicemos un paralelepípedo de dimensiones  $a$ ,  $b$ ,  $L$  sometido a un estado triaxial de tensiones.



$$\Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{\Delta l}{l} \quad ; \quad \varepsilon_2 = \frac{\Delta a}{a} \quad y \quad \varepsilon_3 = \frac{\Delta b}{b}$$

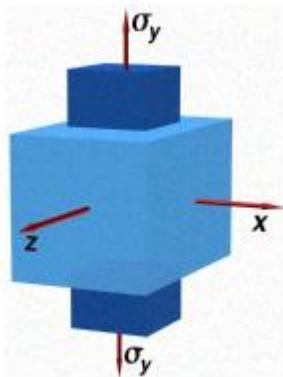
### a) Estado axial de Tensiones $\sigma_1 \neq 0$ y $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$



$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} = \frac{\sigma_x}{E} \\ \Rightarrow \varepsilon_2 &= -\mu\varepsilon_1 = \frac{-\mu\sigma_1}{E} = \frac{-\mu\sigma_x}{E} \\ \varepsilon_3 &= -\mu\varepsilon_1 = \frac{-\mu\sigma_1}{E} = \frac{-\mu\sigma_x}{E} \end{aligned}$$

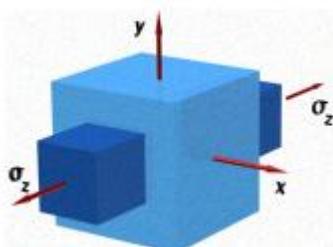
Análogamente si:

### a1) $\sigma_2 \neq 0$ y $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$



$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} = \frac{\sigma_y}{E} \\ \Rightarrow \varepsilon_1 &= -\mu\varepsilon_2 = \frac{-\mu\sigma_2}{E} = \frac{-\mu\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_3 &= -\mu\varepsilon_2 = \frac{-\mu\sigma_2}{E} = \frac{-\mu\sigma_y}{E} \end{aligned}$$

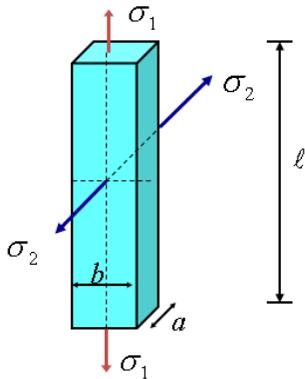
### a2) $\sigma_3 \neq 0$ y $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$



$$\begin{aligned} \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E} = \frac{\sigma_z}{E} \\ \Rightarrow \varepsilon_1 &= -\mu\varepsilon_3 = \frac{-\mu\sigma_3}{E} = \frac{-\mu\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_2 &= -\mu\varepsilon_3 = \frac{-\mu\sigma_3}{E} = \frac{-\mu\sigma_z}{E} \end{aligned}$$

**b) Estado Plano de Tensiones  $\sigma_1, \sigma_2 \neq 0$  y  $\sigma_3 = 0$**

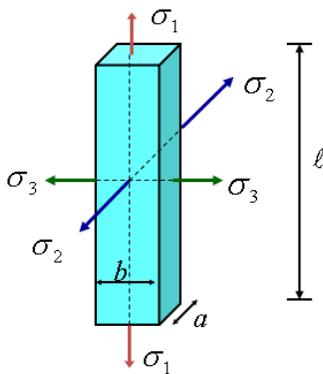
- Las deformaciones unitarias normales se obtienen por superposición de los casos a) y a1).



$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\mu\sigma_2}{E} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \Rightarrow \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\mu\sigma_1}{E} = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\mu\sigma_1}{E} - \frac{\mu\sigma_2}{E} = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned}$$

**c) Estado Espacial de Tensiones  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3 \neq 0$**

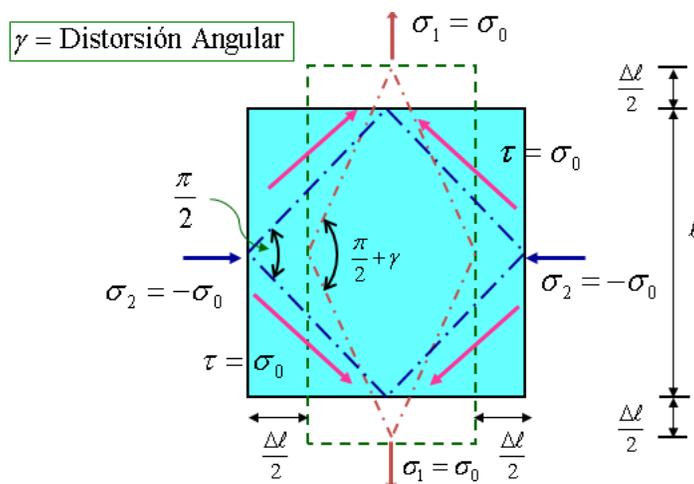
- Las deformaciones unitarias normales se obtienen por superposición de los casos b) y a2).



$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\mu\sigma_2}{E} - \frac{\mu\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z) \right] \\ \Rightarrow \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\mu\sigma_1}{E} - \frac{\mu\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\mu\sigma_1}{E} - \frac{\mu\sigma_2}{E} = \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) \right] \end{aligned}$$

**2.7.- Deformaciones por Corte Puro**

Analicemos un cuadrado de dimensiones L x L sometido a un estado biaxial de tensiones, que me genera un estado de corte puro.



$$\Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}(\sigma_0 + \mu\sigma_0) = \frac{(1+\mu)}{E}\sigma_0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{l}{2} + \frac{\Delta l}{2}}{\frac{l}{2} - \frac{\Delta l}{2}} = \frac{1 + \frac{\Delta l}{l}}{1 - \frac{\Delta l}{l}} = \frac{1 + \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 + \frac{\gamma}{2}}{1 - \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 + \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1}$$

$$\Rightarrow \gamma = 2\varepsilon_1 = \frac{2(1 + \mu)}{E} \sigma_0 = \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau$$

- De la expresión anterior, se define la **Ley de Hooke para el Cizallamiento (Corte)** como:

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\tau}{G} \quad \text{donde} \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

- En que G se denomina **Módulo de Elasticidad al Corte o Módulo de Cizalle**.
- Sólo dos constantes definen un material homogéneo e isótropo, la tercera constante es dependiente. Por ejemplo para el acero  $E = 2,1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$  y  $\mu = 0,30$ , entonces  $G \approx 8,1 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ .

## 2.8.- Resumen de Relaciones Deformación vs Tensión

### ✓ Deformaciones Normales:

$$i) \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z) + \alpha_t \Delta T$$

$$ii) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} \sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z) + \alpha_t \Delta T$$

$$iii) \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) + \alpha_t \Delta T$$

### ✓ Distorsiones Angulares:

$$iv) \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau_{xy}$$

$$v) \quad \gamma_{xz} = \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau_{xz}$$

$$vi) \quad \gamma_{yz} = \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau_{yz}$$

✓ Relaciones expresadas en forma Matricial:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_{mec} + \underline{\varepsilon}_{temp}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & & & \\ -\mu & 1 & -\mu & & & \\ -\mu & -\mu & 1 & & & \\ & & & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ & & & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ & & & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} + \alpha_t \Delta T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{D} \equiv \underline{E}^{-1}$

## 2.9.- Resumen de Relaciones Tensión vs Deformación

✓ **Tensiones Normales:**

$$\begin{aligned} i) \quad \sigma_x &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ (1-\mu)\varepsilon_x + \mu(\varepsilon_y + \varepsilon_z) - \frac{E\alpha_t \Delta T}{1-2\mu} \right] \\ ii) \quad \sigma_y &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ (1-\mu)\varepsilon_y + \mu(\varepsilon_x + \varepsilon_z) - \frac{E\alpha_t \Delta T}{1-2\mu} \right] \\ iii) \quad \sigma_z &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ (1-\mu)\varepsilon_z + \mu(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{E\alpha_t \Delta T}{1-2\mu} \right] \end{aligned}$$

✓ **Distorsiones Angulares:**

$$\begin{aligned} iv) \quad \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} \\ v) \quad \tau_{xz} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xz} \\ vi) \quad \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{yz} \end{aligned}$$

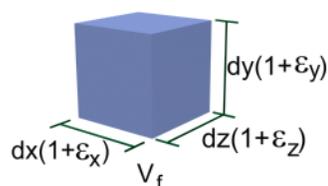
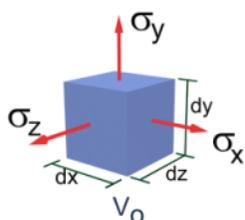
✓ Relaciones expresadas en forma Matricial:

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_{mec} - \underline{\sigma}_{temp}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & & & \\ \mu & 1-\mu & \mu & & & \\ \mu & \mu & 1-\mu & & & \\ & & & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} - \frac{E\alpha_t \Delta T}{1-2\mu} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{E} \equiv \underline{D}^{-1}$

## 2.10.- Cambio de Volumen



✓ Volumen Inicial elemento Infinitesimal ( $V_o$ ):  $V_o = dx dy dz$

✓ Las tensiones Normales son *Tensiones Principales*

✓ Volumen final elemento Infinitesimal ( $V_f$ ):

$$V_f = (V_o + \Delta V) = (dx + \partial x)(dy + \partial y)(dz + \partial z)$$

$$\Rightarrow V_f = (dx + \varepsilon_x dx)(dy + \varepsilon_y dy)(dz + \varepsilon_z dz)$$

$$\Rightarrow V_f = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) dx dy dz$$

✓ Despreciando los productos de segundo orden y superiores de  $\varepsilon$ , se tiene:

$$V_f = (V_o + \Delta V) \approx V(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)$$

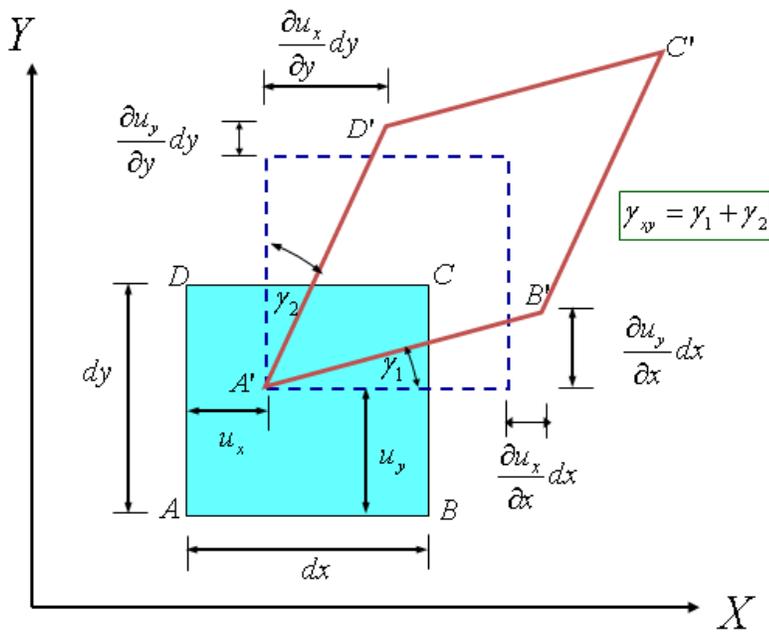
$$e = \frac{\Delta V}{V_o} \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

✓ El término "e" se denomina **Cambio Específico de Volumen** o **Extensión Cúbica**.

✓ Usando las Fórmulas para el estado espacial de tensiones:

$$\Rightarrow e = \frac{1}{E}(1 - 2\mu)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

## 2.11.- Relaciones Deformación vs Desplazamiento



**Def. en el Plano XY :**

$$\begin{aligned} \text{i) } \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \text{ii) } \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \text{iii) } \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} \text{iv) } \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \text{v) } \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \text{vi) } \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{aligned}$$

• Las ecuaciones anteriores se pueden escribir en **Notación Tensorial**:

$$\Rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \Rightarrow \begin{matrix} i = 1,2,3 \\ j = 1,2,3 \end{matrix}$$

Donde:

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_{x_i}}{\partial x_j}$$

Por ejemplo:

$$\begin{matrix} i=1 \\ j=2 \end{matrix} \Rightarrow \varepsilon_{x_1 x_2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{x_2}}{\partial x_1} \right)$$

$$\begin{matrix} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \end{matrix} \Rightarrow \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

## 2.12.- Estado Espacial de Deformaciones

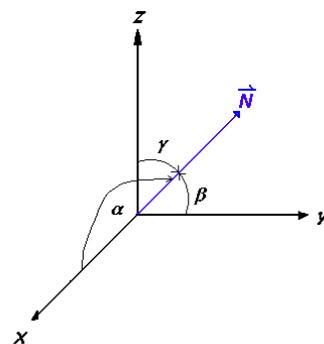
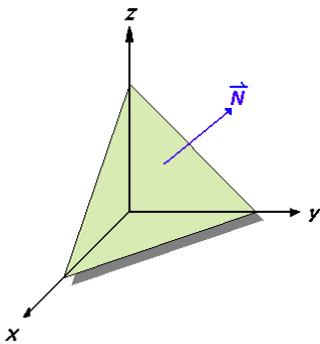
- El estado espacial de Deformaciones en un punto, puede ser representado al igual que las tensiones, a través de una **matriz (tensor) de deformaciones**

$$\underline{\pi}^\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad \underline{\pi}^\varepsilon : \text{Tensor de Deformaciones}$$

Donde:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \gamma_{ij} \quad \text{con } i \neq j \quad \begin{cases} i=1,2,3 \\ j=1,2,3 \end{cases}$$

Sea  $\underline{N}$ , el vector normal a un plano ubicado en el espacio.

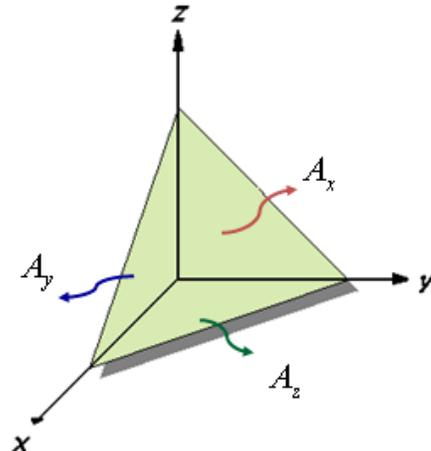
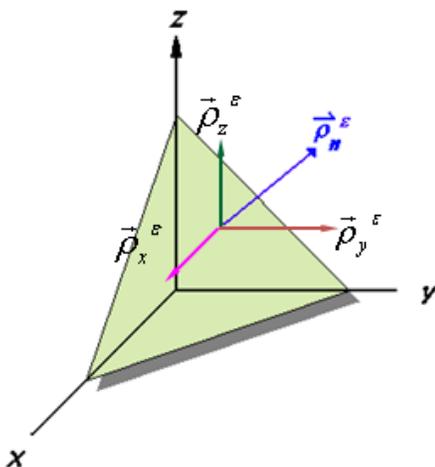


$$\hat{N} = (L, M, N) \quad \text{donde } \Rightarrow$$

$$\left. \begin{matrix} L = \cos \alpha \\ M = \cos \beta \\ N = \cos \gamma \end{matrix} \right\} \text{ y } L^2 + M^2 + N^2 = 1$$

L, M, N: cosenos directores del vector N

- Sea  $\underline{p}_n^\varepsilon$ , el vector de deformaciones que actúa sobre el plano orientado por  $\underline{N}$ .



$$\vec{\rho}_n^\varepsilon = (\vec{\rho}_x^\varepsilon, \vec{\rho}_y^\varepsilon, \vec{\rho}_z^\varepsilon) \quad \text{Vector de Deformaciones}$$

$$\begin{aligned} A_x &= A * \hat{x} * \hat{N} & \text{donde } \hat{x} &= (1,0,0) \\ A_y &= A * \hat{y} * \hat{N} & \text{donde } \hat{y} &= (0,1,0) \\ A_z &= A * \hat{z} * \hat{N} & \text{donde } \hat{z} &= (0,0,1) \end{aligned}$$

$$A_x = A \cos \alpha ; A_y = A \cos \beta ; A_z = A \cos \gamma$$

- Al igual que en las tensiones podemos obtener el **Vector de Deformaciones** como:

$$\vec{\rho}_n^\varepsilon = \underline{\pi}^\varepsilon \cdot \hat{N} \Rightarrow \begin{bmatrix} \rho_x^\varepsilon \\ \rho_y^\varepsilon \\ \rho_z^\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix}$$

- Calculemos la **Deformación Normal y Tangencial** que se genera en el Plano definido por el vector Normal  $\underline{N}$ .
- Nota: Para realizar lo anterior, se hará de igual forma como para las tensiones.

$$\varepsilon_n = \vec{\rho}_n^\varepsilon \cdot \hat{N}$$

- La **distorsión angular normal** puede ser calculada a partir del vector de deformaciones o calculada a partir de  $\varepsilon_n$

$$\frac{\gamma_n}{2} = \vec{\rho}_n^\varepsilon \cdot \hat{T}$$

$$\left(\frac{\gamma_n}{2}\right)^2 = \|\vec{\rho}_n^\varepsilon\|^2 - \varepsilon_n^2$$

## 2.12.1.- Deformaciones Principales en el Estado Espacial de Deformaciones

### 2.12.1.1.- Deformaciones Principales

En el plano Principal  $\tau = 0$ , entonces  $\gamma = 0 \Rightarrow \vec{\rho}_n^\varepsilon = \varepsilon \hat{N}$

Por definición el vector de deformaciones es  $\Rightarrow \vec{\rho}_n^\varepsilon = \underline{\pi}^\varepsilon \cdot \hat{N}$

- Igualando expresiones, llegamos al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\Rightarrow (\underline{\pi}^\varepsilon - \varepsilon \underline{I}) \hat{N} = 0 \quad \text{donde } \underline{I} = \text{matriz Identidad de } 3 \times 3$$

- Nota : Aprecie la similitud que existe con el análisis hecho para las tensiones
- Sistema de ecuaciones de la forma  $\Rightarrow \underline{A} \underline{X} = \underline{0}$
- Dicho sistema para no tener la **Solución Trivial** ( $\underline{X} = \underline{0}$ ), debe cumplirse que:

$$\text{Det}|A| = 0 \quad , \text{ es decir } \Rightarrow \text{Det}|\underline{\pi}^\varepsilon - \varepsilon \underline{I}| = 0$$

- El problema de la solución del sistema de ecuaciones mencionado, recibe el Nombre de “**PROBLEMA DE VALORES PROPIOS**”.
- De la *Solución no Trivial* se obtienen tres pares de vectores, conocidos como “**Vectores Propios**” y son:

$$(\underline{\varepsilon}_1, \hat{n}_1^\varepsilon); (\underline{\varepsilon}_2, \hat{n}_2^\varepsilon) \text{ y } (\underline{\varepsilon}_3, \hat{n}_3^\varepsilon)$$

$\underline{\varepsilon}_1, \underline{\varepsilon}_2 \text{ y } \underline{\varepsilon}_3 \Rightarrow$  Deformaciones Unitarias Principales

$\hat{n}_1^\varepsilon, \hat{n}_2^\varepsilon \text{ y } \hat{n}_3^\varepsilon \Rightarrow$  Vectores Unitarios Normales a los planos que actúan las deformaciones  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \text{ y } \varepsilon_3$ , respectivamente

- Resolviendo el **Problema de Valores Propios**, se tiene:

$$\text{Det} \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

$$(\varepsilon_x - \varepsilon) \begin{vmatrix} \varepsilon_y - \varepsilon & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} - \varepsilon_{xy} \begin{vmatrix} \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} + \varepsilon_{xz} \begin{vmatrix} \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} \end{vmatrix} = 0$$

- Desarrollando la expresión anterior, llegamos a una ecuación cúbica, de la forma:

$$\varepsilon^3 - I_1^\varepsilon \varepsilon^2 + I_2^\varepsilon \varepsilon - I_3^\varepsilon = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \text{ Deformaciones Unitarias Principales} \\ \varepsilon_3 \end{cases}$$

- Donde los términos  $I_1^\varepsilon, I_2^\varepsilon$  e  $I_3^\varepsilon$  se denominan “**INVARIANTES DE DEFORMACIONES**”
- Nota : Obtenga Ud. las expresiones de los términos  $I_1^\varepsilon, I_2^\varepsilon$  e  $I_3^\varepsilon$  y compárelos con los “**INVARIANTES DE TENSIONES**”

### 2.12.1.2.- Direcciones Principales

El Problema de Valores propios parte del sistema de ecuaciones de:

$$\Rightarrow (\underline{\pi}^\varepsilon - \varepsilon \underline{I}) \hat{N} = 0 \quad \text{donde } \underline{I} = \text{matriz Identidad de } 3 \times 3$$

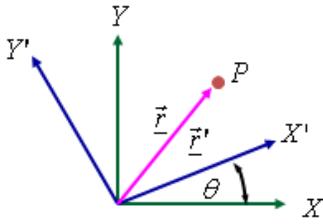
- Resolviendo para cada deformación unitaria principal, encontramos sus **direcciones principales**

$$\Rightarrow (\underline{\pi}^\varepsilon - \varepsilon_1 \underline{I}) \hat{n}_1^\varepsilon = 0 \quad \hat{n}_1^\varepsilon = (L_1, M_1, N_1) \quad \text{en que } L_1^2 + M_1^2 + N_1^2 = 1$$

$$\Rightarrow (\underline{\pi}^\varepsilon - \varepsilon_2 \underline{I}) \hat{n}_2^\varepsilon = 0 \quad \hat{n}_2^\varepsilon = (L_2, M_2, N_2) \quad \text{en que } L_2^2 + M_2^2 + N_2^2 = 1$$

$$\Rightarrow (\underline{\pi}^\varepsilon - \varepsilon_3 \underline{I}) \hat{n}_3^\varepsilon = 0 \quad \hat{n}_3^\varepsilon = (L_3, M_3, N_3) \quad \text{en que } L_3^2 + M_3^2 + N_3^2 = 1$$

✓ Ejemplo: Apliquemos lo anteriormente visto, al **caso plano**



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ r' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\pi/2 - \theta) \\ \cos(\pi/2 + \theta) & \cos \theta \end{bmatrix}}_R \begin{bmatrix} x \\ y \\ r \end{bmatrix}$$

$$\underline{\pi}^\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

Tensor de Deformaciones Estado Plano

$$\hat{n} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad \text{Vector unitario de la direcci3n } x'$$

$$\underline{\rho}_n^\varepsilon = \underline{\pi} \hat{n}$$

Luego, se tiene que:

$$\underline{\rho}_n^\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \cos \theta + \varepsilon_{xy} \sin \theta \\ \varepsilon_{yx} \cos \theta + \varepsilon_y \sin \theta \end{bmatrix}$$

Pero la deformaci3n Normal es:  $\varepsilon_n = \underline{\rho}_n^\varepsilon \cdot \hat{N}$

$$\varepsilon_n = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta \cos \theta$$

- Utilizando las mismas Identidades Trigon3micas que usamos en las tensiones, podemos obtener:

$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_n = \left( \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \right) + \left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right) \cos 2\theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta \quad (1)$$

- De igual forma, podemos determinar la distorsi3n angular quedando la siguiente expresi3n:

$$\frac{\gamma_n}{2} = - \left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right) \sin 2\theta + \varepsilon_{xy} \cos 2\theta \quad (2)$$

- Para determinar, la **Deformaci3n Unitaria Normal M3xima** (Principal), debemos derivar la ecuaci3n (1) e igualarla a cero:

$$\frac{d\varepsilon_{x'}}{d\theta} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin(2\theta) + 2\varepsilon_{xy} \cos(2\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(2\theta_p) = \frac{2\varepsilon_{xy}}{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)} \quad (3)$$

- El sub3ndice "p" indica que el 3ngulo  $\theta$  define la orientaci3n de los planos principales.

Reemplazando  $\theta$  por  $\theta + 90^\circ$  en la ecuaci3n (1), se obtiene:

$$\varepsilon_{y'} = \left( \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \right) - \left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right) \cos 2\theta - \varepsilon_{xy} \sin 2\theta \quad (4)$$

Se comprueba que:

$$\varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'} = \varepsilon_x + \varepsilon_y \quad (5)$$

Las Deformaciones Unitarias Principales son:

$$\varepsilon_{1,2} = \left( \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} \quad (6)$$

### 2.12.1.3.- Círculo de Mohr de Deformaciones

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{x'} &= \left( \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \right) + \left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right) \cos(2\theta) + \varepsilon_{xy} \sin(2\theta) & (1) \\ \varepsilon_{x'y'} &= - \left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right) \sin(2\theta) + \varepsilon_{xy} \cos(2\theta) & (2) \end{aligned} \right\} \text{ Ec. Paramétricas de un Círculo con ángulo } 2\theta \text{ como parámetro.}$$

- Elevamos ambas ecuaciones al cuadrado y al sumarlas se elimina el parámetro; la ecuación resultante es:

$$\left( \varepsilon_{x'} - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \varepsilon_{x'y'}^2 = \left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \varepsilon_{xy}^2 \quad (7)$$

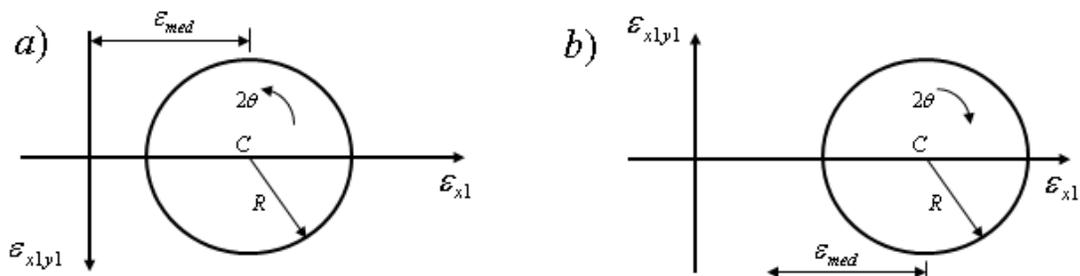
- Si definimos los siguientes términos:

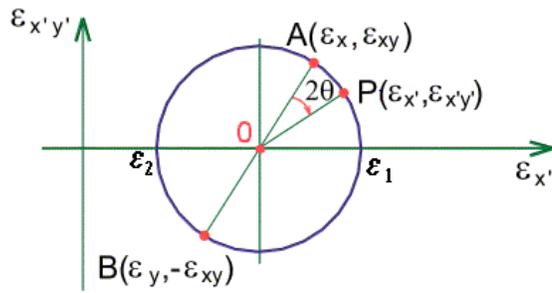
$$\varepsilon_{med} = \left( \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \right) \quad \text{y} \quad R = \sqrt{\left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \varepsilon_{xy}^2}$$

- *Ec. de un Círculo y centro en coordenadas  $\varepsilon_{x'} = \varepsilon_{med}$  y  $\varepsilon_{x'y'} = 0$*

$$\left( \varepsilon_{x'} - \varepsilon_{med} \right)^2 + \varepsilon_{x'y'}^2 = R^2 \quad (8)$$

- Existen 2 formas de graficar el Círculo de Mohr de Deformaciones:

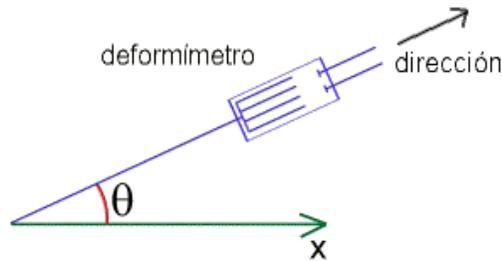




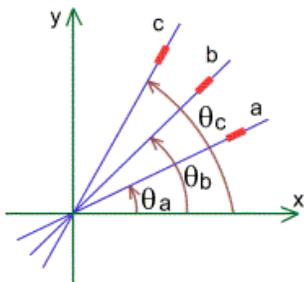
*Círculo de Mohr de Deformaciones*

### 2.13.- Roseta de Deformaciones

- Se puede determinar el estado de deformación en un punto en forma experimental, empleando medidores de deformación lineal llamados deformímetros (strain-gauge).
- Estos instrumentos nos dan directamente las deformaciones lineales en la dirección en que están instalados.



- **La Roseta de Deformaciones** corresponde a tres deformímetros ubicados en direcciones conocidas, tal como lo muestra la figura adjunta.



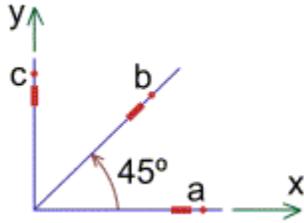
$\left. \begin{matrix} \varepsilon_a, \varepsilon_b \text{ y } \varepsilon_c \\ \theta_a, \theta_b \text{ y } \theta_c \end{matrix} \right\} \text{ conocidos}$

### Usos de las Rosetas de Deformación

- Determinación de los esfuerzos en un punto de un material a partir de la medición de las deformaciones.
- La orientación de los dispositivos puede ser arbitraria con respecto a un sistema XY.
- Los deformímetros miden las deformaciones unitarias en un punto en cualquier dirección tangente a la superficie del cuerpo.

**Ejemplo de Aplicación:**

- ✓ En un punto de un sólido se encuentra solicitado por cierto nivel de esfuerzo. El material del sólido es del tipo "CHILE" (Continuo – Homogéneo-Isotrópico – Linealmente – Elástico) y se instala tres deformímetros tal como lo muestra la figura adjunta, midiendo su nivel de deformaciones. Se pide determinar las tensiones máximas a la cual está sometido dicho punto del material.
- Indicación: Analice su problema como un estado plano de tensiones.



Datos :  
 $\epsilon_a = 0,004$  ;  $\epsilon_b = 0,003$  y  $\epsilon_c = -0,002$   
 $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y  $\mu = 0,25$

**Solución:**

- ✓ Se pide determinar los esfuerzos principales y el esfuerzo de corte máximo.

$$\epsilon_{x'} = \left( \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \right) + \left( \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \right) \cos 2\theta + \epsilon_{xy} \text{sen} 2\theta$$

Sea :  $\epsilon_x = \epsilon_a$   
 $\epsilon_y = \epsilon_c$

$$\Rightarrow \epsilon_b = \epsilon_{x'} (\theta = 45^\circ) = \left( \frac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} \right) + \left( \frac{\epsilon_a - \epsilon_c}{2} \right) \cos 90^\circ + \frac{\gamma_{xy}}{2} \text{sen} 90^\circ$$

$$\Rightarrow \epsilon_b = \left( \frac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} \right) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \text{sen} 90^\circ$$

$$\Rightarrow \gamma_{xy} = 2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c = 0,004$$

**Cálculo de Tensiones:**

En un Estado Plano de Tensiones  $\sigma_z = 0$  y  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

i)  $\epsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x - \mu \sigma_y$   
 ii)  $\epsilon_y = \frac{1}{E} \sigma_y - \mu \sigma_x$   
 iii)  $\epsilon_z = \frac{1}{E} \mu (\sigma_x + \sigma_y)$

iv)  $\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}$   
 v)  $\gamma_{xz} = 0$   
 vi)  $\gamma_{yz} = 0$

De i)  $\Rightarrow \sigma_x - \mu \sigma_y = E \epsilon_x$  (\*)

De ii)  $\Rightarrow \sigma_y - \mu \sigma_x = E \epsilon_y$  (\*\*)

$$\Rightarrow \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} \\ \varepsilon_z &= \frac{-\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned}$$

- Reemplazando los datos se obtiene que:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 7840 \text{ kg/cm}^2 \\ \Rightarrow \sigma_y &= -2240 \text{ kg/cm}^2 \\ \tau_{xy} &= 3360 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

- La Tensiones Principales se obtienen de:

$$\sigma_{1,2} = \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow \begin{aligned} \sigma_1 &= 8857,33 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_2 &= -3257,33 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

- El Esfuerzo de Corte Máximo se obtienen de:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow \tau_{m\acute{a}x} = 6057,33 \text{ kg/cm}^2$$