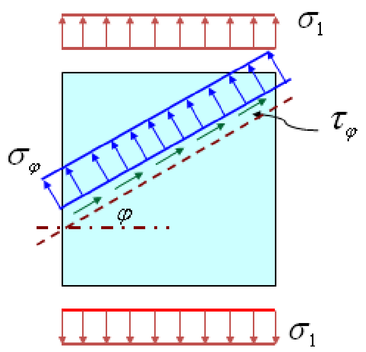
2. ESTADO PLANO Y ESPACIAL DE TENSIONES

2.1.- Estado Plano de Tensiones

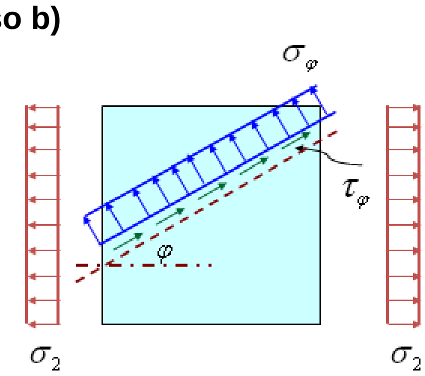
Caso a)



Tensión Normal: $\sigma_\varphi = \sigma_1 \cos^2 \varphi$ (1)

Tensión de Corte: $\tau_\varphi = \sigma_1 sen\varphi \cos\varphi$ (2)

Caso b)



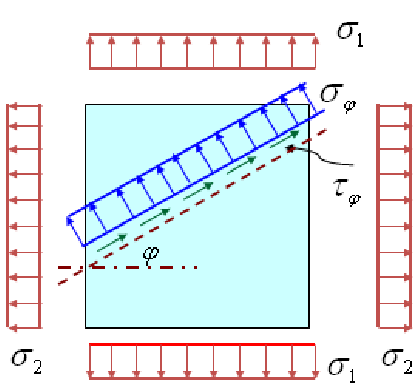
Tensión Normal: $\sigma_\varphi = \sigma_2 sen^2\varphi$

Tensión de Corte: $\tau_\varphi = -\sigma_2 sen\varphi \cos\varphi$

Se obtiene del caso a), pero con $\Rightarrow \ \psi = \varphi + 90°$

Caso c)

Se obtiene de la superposición de los casos a) y b)



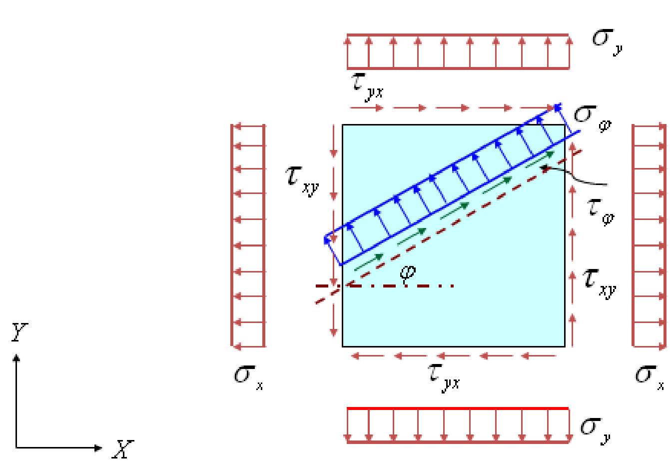
Tensión Normal:

$$\sigma_\varphi = \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 sen^2\varphi$$

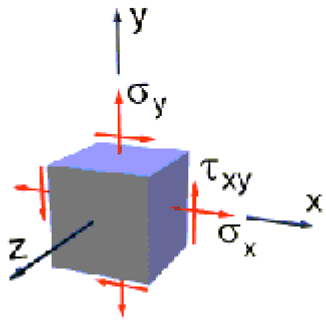
Tensión de Corte:

$$\tau_\varphi = (\sigma_1 - \sigma_2) sen\varphi \cos\varphi$$

Caso General del Estado Plano de Tensiones

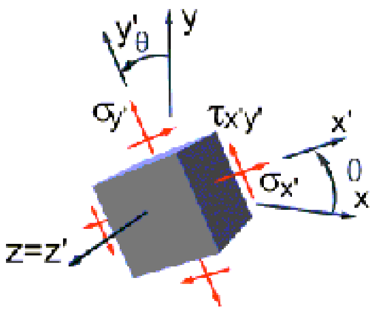


2.1.1.- Rotación de Tensiones (Estado Plano)



Elemento Original Sist. XY

Conocidos σ_x , σ_y , τ_{xy}

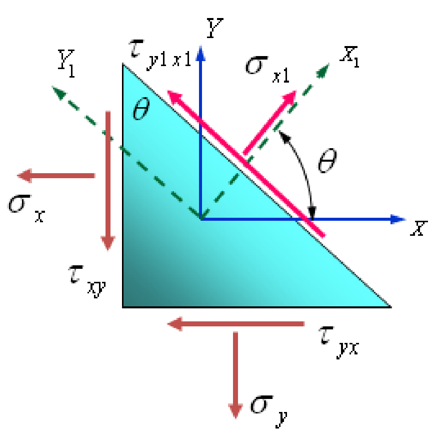


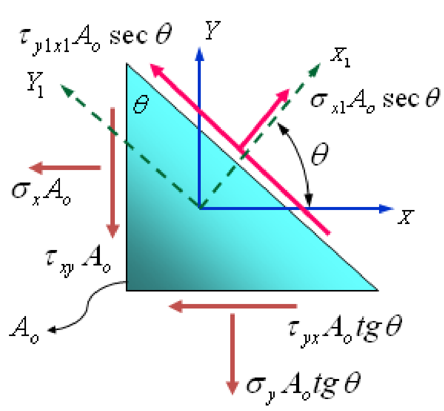
Elemento Rotado Sist. X'Y'

Desconocidos $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$, $\tau_{x'y'}$

- ✓ *Los Esfuerzos sobre un elemento girado a un sistema X_1Y_1, pueden expresarse en función de los esfuerzos sobre el elemento del sistema XY.*

a) Tensiones **b) Fuerzas**





- *Planteamos el equilibrio de Fuerzas*

$i)\ \sum F_{x1} = 0 \Rightarrow$

$$\sigma_{x1}A_o \sec\theta - \sigma_x A_o \cos\theta - \tau_{xy}A_o sen\theta - \sigma_y A_o tg\theta sen\theta - \tau_{yx}A_o tg\theta \cos\theta = 0$$

$ii)\ \sum F_{y1} = 0 \Rightarrow$

$$\tau_{x1y1}A_o \sec\theta + \sigma_x A_o sen\theta - \tau_{xy}A_o \cos\theta - \sigma_y A_o tg\theta \cos\theta + \tau_{yx}A_o tg\theta sen\theta = 0$$

- *Mediante la relación de $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ y despejando los términos de interés, se obtiene:*

$$\sigma_{x1} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y sen^2\theta + 2\tau_{xy} sen\theta\cos\theta \qquad (1)$$

$$\tau_{x1y1} = -(\sigma_x - \sigma_y) sen\theta\cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - sen^2\theta) \qquad (2)$$

- *Utilizando las identidades trigonométricas:*

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) \qquad sen^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) \qquad sen2\theta = 2sen\theta\cos\theta$$

- *Se obtienen la Ecuaciones de Transformación de Esfuerzo Plano*

$$\sigma_{x1} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos(2\theta) + \tau_{xy} sen(2\theta) \qquad (3)$$

$$\tau_{x1y1} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) sen(2\theta) + \tau_{xy}\cos(2\theta) \qquad (4)$$

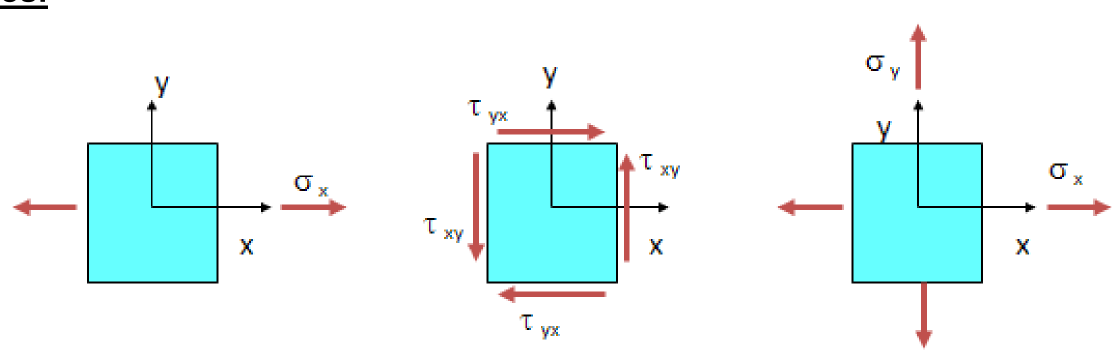
- *σ_{y1} que actúa sobre Y_1 del elemento girado se obtiene sustiyendo $\theta \Rightarrow \theta + 90°$ en (3)*

$$\sigma_{y1} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos(2\theta) - \tau_{xy} sen(2\theta) \qquad (5)$$

- *Si sumamos la ecuación (1) y (3) apreciamos que:*

$$\sigma_{x1} + \sigma_{y1} = \sigma_x + \sigma_y = \text{cte} \qquad (6)$$

<u>Ejemplos:</u>



(a) Esf. Uniaxial *(b) Esf. Corte Puro* *(c) Esf. Biaxial*

2.1.2.- Esfuerzos Principales y Esfuerzo de Corte Máximo

2.1.2.1.- <u>Esfuerzos Principales</u>

$$\sigma_{x1} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos(2\theta) + \tau_{xy} sen(2\theta) \qquad (3)$$

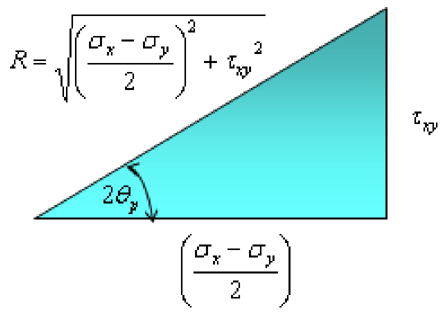
El máximo ocurre cuando:

$$\frac{d\sigma_{x1}}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y) sen(2\theta) + 2\tau_{xy}\cos(2\theta) = 0 \qquad \Rightarrow \quad tg(2\theta_p) = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} \qquad (7)$$

- El subíndice "p" indica que el ángulo θ define la orientación de los planos principales.

- El ángulo θ tiene 2 valores que difieren en 90°. Uno entre [0°,90°] y el otro entre [90°,180°], por lo que los Esfuerzos Principales actúan en planos mutuamente perpendiculares.

De la ecuación (7), se observa:



$$\cos(2\theta_p) = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}\right)$$

$$sen(2\theta_p) = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

- Se sustituye $\cos(2\theta_p)$ y $sen(2\theta_p)$ en la ecuación (1) y se obtiene:

$$\sigma_1 = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2}$$

El valor de σ_2 se puede determinar a partir de la condición:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$$

$$\sigma_2 = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2} \qquad (8)$$

- Signo positivo para el esfuerzo principal algebraicamente mayor (σ_1)

2.1.2.2.- <u>Esfuerzos Cortantes Máximos</u>

$$\tau_{x1y1} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) sen(2\theta) + \tau_{xy}\cos(2\theta) \qquad (5)$$

El máximo ocurre cuando:

$$\frac{d\tau_{x1y1}}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y)\cos(2\theta) - 2\tau_{xy} sen(2\theta) = 0 \qquad \Rightarrow \quad tg(2\theta_s) = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}} \qquad (9)$$

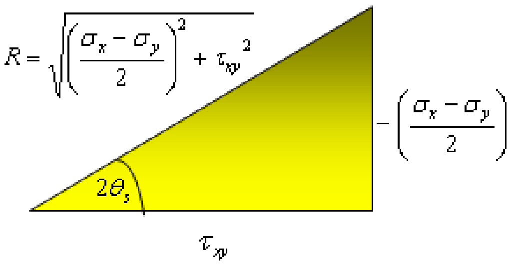
- El subíndice "s" indica que el ángulo θ define la orientación de los Esfuerzos Cortantes máximos.

$$\Rightarrow \quad tg(2\theta_s) = \frac{-1}{tg(2\theta_p)} = -\cot g(2\theta_p)$$

Por trigonometría: tg ($\alpha \pm 90°$) = - cotg(α)

$$\Rightarrow \quad 2\theta_s = 2\theta_p \pm 90° \quad \text{o bien} \quad \theta_s = \theta_p \pm 45°$$

De la ecuación (9), se observa:



$$\cos(2\theta_s) = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

$$sen(2\theta_s) = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}\right)$$

- Se sustituye $\cos(2\theta_s)$ y $sen(2\theta_s)$ en la ecuación (2) y se obtiene:

$$\tau_{máx} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (10)$$

O a partir de las Tensiones Principales:

$$\tau_{máx} = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \qquad (11)$$

2.1.2.3.- <u>Círculo de Mohr de Tensiones</u>

✓ Ecuaciones Paramétricas de un Círculo con ángulo 2θ como parámetro:

$$\sigma_{x1} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos(2\theta) + \tau_{xy} sen(2\theta) \qquad (4)$$

$$\tau_{x1y1} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) sen(2\theta) + \tau_{xy}\cos(2\theta) \qquad (5)$$

- Elevamos ambas ecuaciones al cuadrado y al sumarlas se elimina el parámetro; la ecuación resultantes es:

$$\left(\sigma_{x1} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x1y1}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \qquad (12)$$

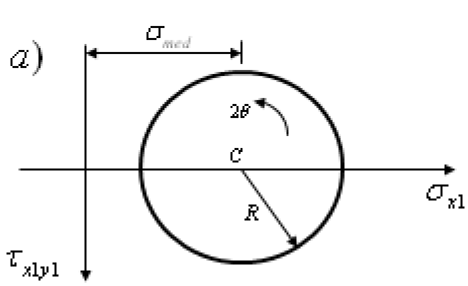
- Si definimos los siguientes términos:

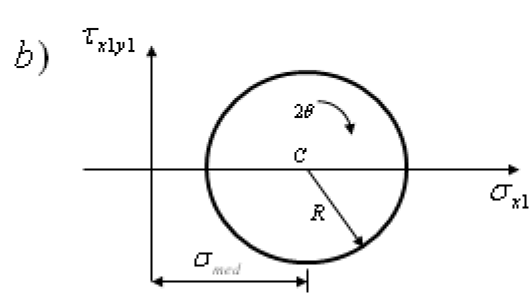
$$\sigma_{med} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) \qquad y \qquad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

✓ *Ec. de un Círculo y centro en coordenadas $\sigma_{x'} = \sigma_{med}$ y $\tau_{x'y'} = 0$*

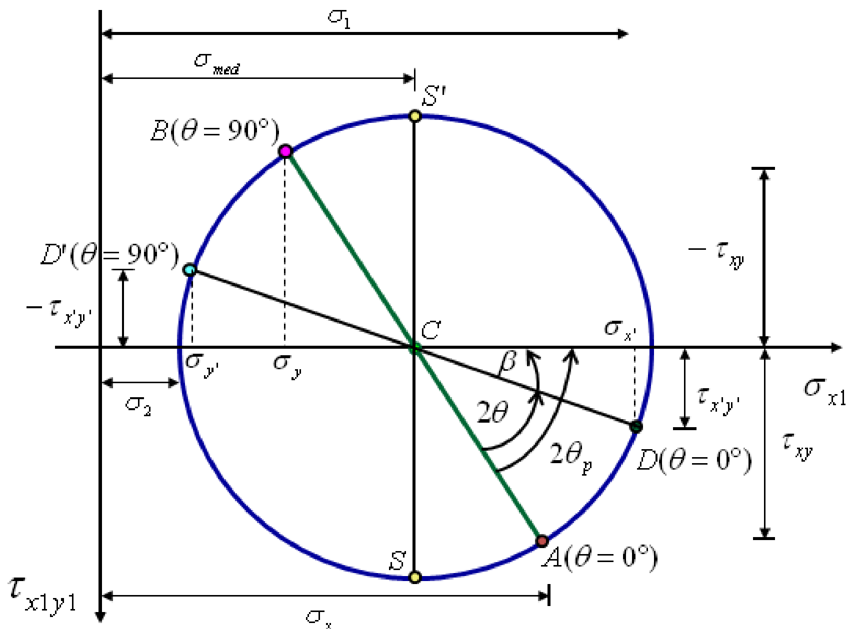
$$(\sigma_{x1} - \sigma_{med})^2 + \tau_{x1y1}^2 = R^2 \qquad (13)$$

✓ Existen 2 formas de graficar el Círculo de Mohr de Tensiones:





- ✓ ***Metodología para graficar el Círculo de Mohr de Tensiones:***



i. Localizar el Centro C del Círculo en ptos. Coordenados $\sigma_{x1} = \sigma_{med}$ y $\tau_{x1y1}=0$

ii. Localizar el pto. A sobre el Círculo que representa las condiciones de esfuerzo sobre la cara "x" del elemento ($\theta=0°$): $\sigma_{x1} = \sigma_x$ y $\tau_{x1y1}=\tau_{xy}$

iii. Localizar el pto. B sobre el Círculo que representa las condiciones de esfuerzo sobre la cara "y" del elemento ($\theta=90°$): $\sigma_{x1} = \sigma_y$ y $\tau_{x1y1}=-\tau_{xy}$

iv. Dibujar el Círculo de Mohr a través de A y B y centro en C.

v. Determinar los esfuerzos sobre la cara inclinada un ángulo θ con respecto a la horizontal.

- ✓ Utilicemos el ángulo b para demostrar las ecuaciones de transformación de Esfuerzo Plano.

Ecuaciones (*):

$$\sigma_{x1} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + R\cos\beta \qquad \tau_{x1y1} = R sen\beta$$

Del Círculo de Mohr se tiene que:

$$\cos(2\theta+\beta) = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}\right) \qquad sen(2\theta+\beta) = \frac{\tau_{xy}}{2R}$$

Desarrollando las expresiones del cos(α+β) y del sen(α+β), se tiene:

$$\cos(2\theta)\cos\beta - sen(2\theta) sen\beta = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}\right) \qquad \text{(i)}$$

$$sen(2\theta)\cos\beta + \cos(2\theta) sen\beta = \frac{\tau_{xy}}{2R} \qquad \text{(ii)}$$

- *Multiplicando la ecuación (i) por cos (2θ) y la ecuación (ii) por sen (2θ), y sumando ambas expresiones se obtiene:*

$$\cos\beta = \frac{1}{R}\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos(2\theta) + \tau_{xy} sen(2\theta)\right) \qquad \text{(iii)}$$

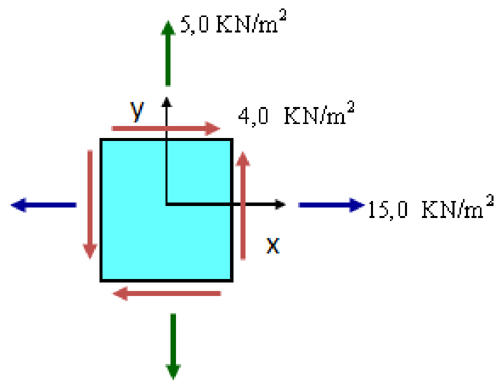
- *Multiplicando la ecuación (i) por sen (2θ) y la ecuación (ii) por cos (2θ), y restando ambas expresiones se obtiene:*

$$sen\beta = \frac{1}{R}\left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} sen(2\theta) + \tau_{xy}\cos(2\theta) \right) \qquad \text{(iv)}$$

- *Se sustituye la ecuación (iii) y la ecuación (iv) en las ecuaciones (*) y se obtienen las* ***Ecuaciones de Transformación de Esfuerzo Plano (4) y (5)****.*

<u>Ejemplo:</u>

✓ *Un punto de un sólido cualquiera, se encuentra solicitado por el estado tensional mostrado en la figura adjunta.*



Se pide determinar:
i) Los esfuerzos en el punto, si el elemento se gira en 40º
ii) Las Tensiones Principales y la Tensión de Corte Máxima

<u>Solución:</u>

- Determinamos el sentido de las tensiones en las caras positivas “x” e “y”

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_x = 15{,}0 \\ \tau_{xy} = 4{,}0\end{array}\right\} \text{cara positiva "x"} \qquad \left.\begin{array}{l}\sigma_y = 5{,}0 \\ \tau_{xy} = -4{,}0\end{array}\right\} \text{cara positiva "y"}$$

- Calculamos el Centro y el Radio del Círculo de Mohr de Tensiones

$$\sigma_{med} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) = \left(\frac{15+5}{2}\right) = 10{,}0 \text{ KN/m}^2$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2} = \sqrt{\left(\frac{15-5}{2}\right)^2 + 4^2} = 6{,}403 \text{ KN/m}^2$$

- Calculamos el ángulo con que se generan las tensiones principales

$$tg(2\theta_p) = \frac{2*4}{(15-5)} = \frac{4}{5} \qquad \Rightarrow 2\theta_p = 38{,}66° \qquad \Rightarrow \theta_p = 19{,}33°$$

- Calculamos las Tensiones al girar el elemento en un ángulo de 40º

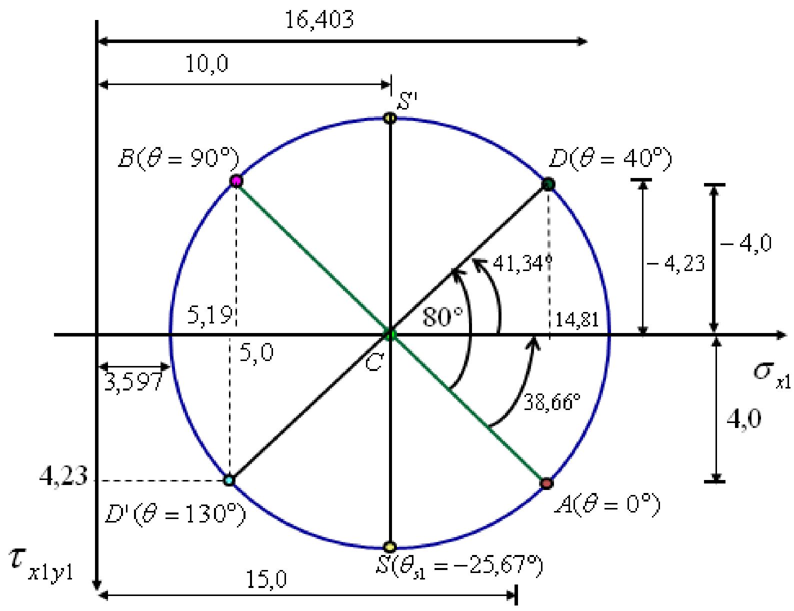
Del Círculo de Mohr, se aprecia que: $\Rightarrow \beta = 80° - 38{,}66° = 41{,}34°$

$$\sigma_{x1} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + R\cos\beta = \left(\frac{15+5}{2}\right) + 6{,}403\cos 41{,}34° = 14{,}810 \text{ KN/m}^2$$

$$\tau_{x1y1} = -6{,}403\, sen 41{,}34° = -4{,}230 \text{ KN/m}^2$$

$$\sigma_{y1} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) - R\cos\beta = \left(\frac{15+5}{2}\right) - 6{,}403\cos 41{,}34° = 5{,}190 \text{ KN/m}^2$$

- Círculo de Mohr de Tensiones:



i. Localizamos el Centro C del Círculo en ptos. Coordenados σ_{x1}= 10 y τ_{x1y1}=0

ii. Localizamos el pto. A sobre el Círculo que representa las condiciones de esfuerzo sobre la cara "x" del elemento (θ=0°): σ_{x1}= 15,0 y τ_{x1y1}=4,0

iii. Localizamos el pto. B sobre el Círculo que representa las condiciones de esfuerzo sobre la cara "y" del elemento (q=90°): σ_{x1}= 5,0 y τ_{x1y1}=-4,0

iv. Dibujamos el Círculo de Mohr a través de A y B y centro en C.

v. Determinamos los esfuerzos sobre la cara inclinada un ángulo 40º c/r a la horizontal.

- Calculamos las Tensiones Principales a partir del Círculo de Mohr

$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R = 10 + 6{,}403 = 16{,}403 \ \ \mathrm{KN/m^2}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R = 10 - 6{,}403 = 3{,}597 \ \ \mathrm{KN/m^2}$$

- Calculamos la Tensión de Corte Máxima a partir del Círculo de Mohr

$$\tau_{máx} = R = 6{,}403 \ \ \mathrm{KN/m^2}$$

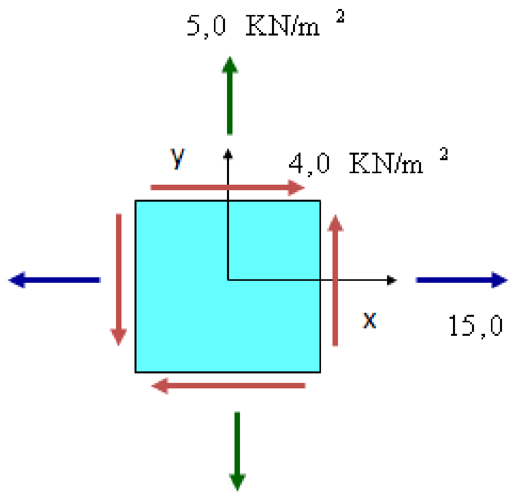
- Calculamos el ángulo con que se genera la tensión de corte máxima

$$2\theta_s = 2\theta_p - 90° = 38{,}66° - 90° = -51{,}34°$$ $$\Rightarrow \theta_s = -25{,}67°$$

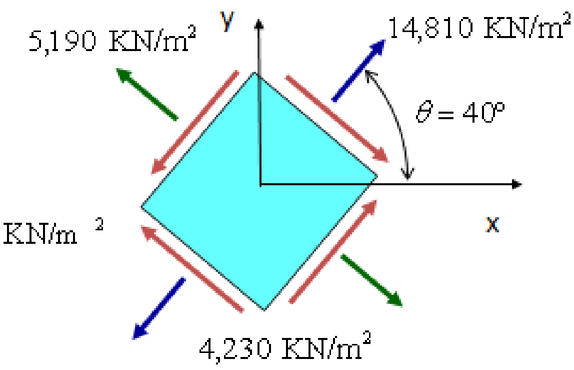
- Otra forma de calcular el ángulo θ_S es:

$$tg(2\theta_s) = \frac{-(15-5)}{2*4} = -\frac{5}{4}$$ $$\Rightarrow 2\theta_s = -51{,}34°$$ $$\Rightarrow \theta_s = -25{,}67°$$

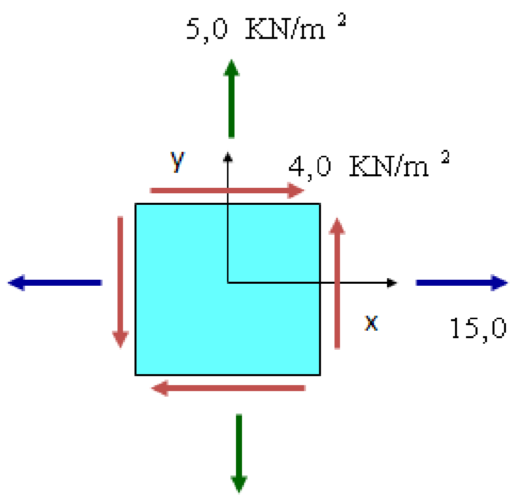
- Dibujemos los Estados Tensionales que se obtienen en el punto en análisis



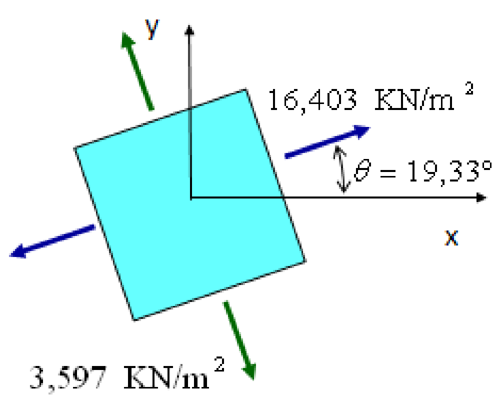
a) Elemento original θ = 0º



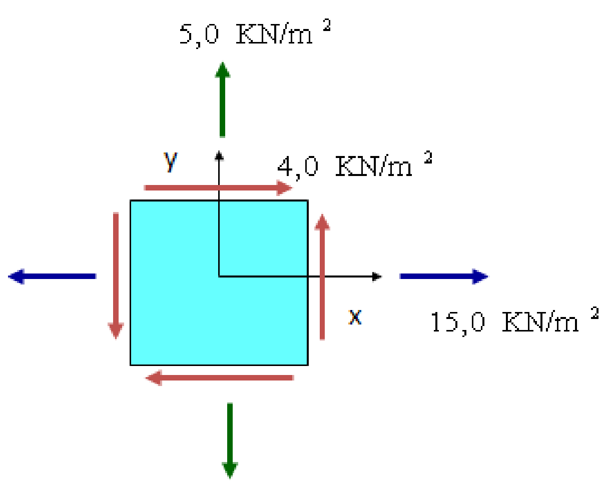
b) Elemento girado en θ =40º



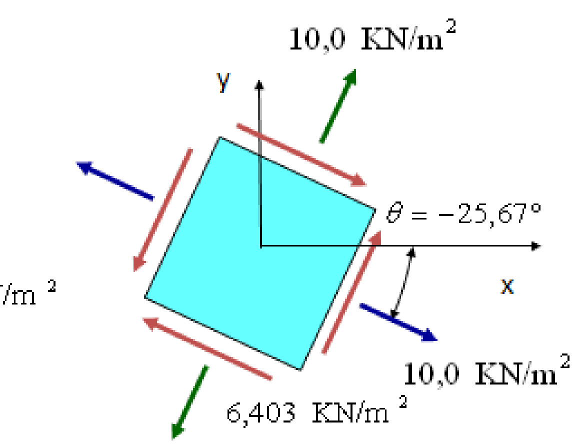
a) Elemento original θ = 0º



c) Elemento Tens.Ppales θ = 19,33º



a) Elemento original θ = 0º



d) Elemento Tens.Corte Máx. θ = -25,67º