

## **Magnitud y medida. El lugar de las ideas previas de los niños en la estimación; la experimentación y las prácticas de medidas.\***

Maestros Ignacio Caggiani, Natalia Pastrana y Javier Alliaume

### **El lugar de las ideas previas en las teorías cognitivas del aprendizaje**

Entre las teorías cognitivas del aprendizaje se adjudica un lugar importante a las ideas previas del sujeto que aprende. Para Piaget el aprendizaje es un proceso de permanente equilibración de las estructuras cognitivas del sujeto con el mundo cognoscible mediante dos procesos complementarios de asimilación y acomodación. La “asimilación es la integración de elementos exteriores a estructuras en evolución o ya acabadas en el organismo”<sup>1</sup>; puede decirse entonces, que en términos psicológicos, es el proceso por el cual el sujeto interpreta la información que proviene del medio, en función de sus esquemas o estructuras conceptuales disponibles.

Ahora bien, si el aprendizaje procediera únicamente por asimilación, “gran parte de nuestros conocimientos serían fantásticos y conducirían a continuas equivocaciones”<sup>2</sup>. El proceso complementario de acomodación hace que nuestros conceptos e ideas se adapten recíprocamente a la realidad. Es este proceso de acomodación el que permite explicar el cambio de esos esquemas cuando no se adaptan a las características del mundo, resultando insuficientes para asimilar determinada situación. Piaget define la acomodación como “cualquier modificación de un esquema asimilador o de una estructura, modificación causada por los elementos que se asimilan”<sup>3</sup>.

Este proceso de acomodación puede producir además de la modificación de los esquemas previos en función de la información asimilada, la reasimilación o reinterpretación de los datos o conocimientos anteriores en función de los nuevos esquemas construidos. Es decir, un conocimiento nuevo puede asimilarse en forma de un esquema nuevo pero como un saber aislado, puede integrarse en esquemas y estructuras de conocimiento ya existentes, modificándolas levemente, o reestructurar por completo los conocimientos anteriores.

En consecuencia “no hay asimilación sin acomodación pero (...) la acomodación tampoco existe sin una asimilación simultánea”<sup>4</sup>.

Piaget elaboró varios modelos de funcionamiento de ese proceso de equilibración. En el último de ellos sostiene que el equilibrio entre asimilación y acomodación se produce –y se rompe– en tres niveles de complejidad creciente que se integran jerárquicamente:

1. En el primer nivel, los esquemas que posee el sujeto deben estar en equilibrio con los objetos que asimila. Cuando los objetos no se comportan de acuerdo a las predicciones del sujeto, se produce un desequilibrio entre sus esquemas de conocimiento y los hechos que estos asimilan;
2. En el segundo nivel, tiene que existir un equilibrio entre los diversos esquemas del sujeto, que deben asimilarse y acomodarse recíprocamente. De lo contrario, se produce un “conflicto cognitivo” o desequilibrio entre dos esquemas;
3. El nivel superior del equilibrio consiste en la integración jerárquica de esquemas previamente diferenciados, donde la acomodación de esquemas produce cambios en el resto de los esquemas asimiladores, generando coherencia y evitando conflictos y desequilibrios entre esos esquemas.

---

□ Maestros Ignacio Caggiani, Natalia Pastrana y Javier Alliaume

1 Piaget, 1970; citado en Pozo, 1997.

2 Pozo, 1997.

3 Piaget, 1970; citado en Pozo, 1997.

4 Piaget, 1970; citado en Pozo, 1997.

Piaget (1975) propone dos tipos globales de respuesta a las perturbaciones o desequilibrios que poseen una eficacia creciente y permiten acceder a niveles superiores de equilibrio:

1. Las respuestas no adaptativas en las cuales el sujeto no toma consciencia del conflicto generado por un desequilibrio, no percibe la contradicción entre sus esquemas asimiladores y la realidad; en consecuencia, no busca modificar / acomodar esos esquemas, no hay aprendizaje y el conflicto entre esquemas y objetos asimilados permanece latente.
2. Las respuestas adaptativas en las que el sujeto toma consciencia (en algún grado) del desequilibrio existente e intenta resolverlo:
  - a) corrigiendo o ignorando la perturbación sin acomodar las estructuras de conocimiento o considerando el contraejemplo como una molesta excepción (respuesta alpha);
  - b) integrando el elemento desequilibrante al sistema de conocimientos, pero como un caso más de variación (regularidad de la excepción) en el interior de la estructura (respuesta beta); en este tipo de respuesta es frecuente la simultaneidad de más de una teoría en acción alternativa;
  - c) reestructurando los esquemas de conocimiento de modo de anticipar las variaciones posibles que dejan de ser perturbaciones para convertirse en parte del juego de transformaciones del sistema (respuesta gamma).

En el marco de la teoría piagetiana del aprendizaje, la toma de conciencia de un conflicto cognitivo es una condición necesaria pero no suficiente para la reestructuración de los conocimientos, ya que sólo a través de una respuesta adaptativa en la que el sujeto toma conciencia del conflicto e intenta resolverlo acomodando sus estructuras cognitivas puede alcanzarse una reestructuración. Por otra parte, este tipo de respuestas son las menos frecuentes ya que en general el sujeto intenta evadir el conflicto o asimilar las perturbaciones e sus esquemas previos.

Podemos llegar a situar el lugar de las ideas previas en la teoría piagetiana como punto de partida para el aprendizaje pero también como obstáculo a superar para la asimilación de lo nuevo. En tanto esquemas asimiladores las ideas previas pueden resultar adecuadas para la integración de los nuevos aprendizajes pero frecuentemente resultan insuficientes o inadecuadas, produciendo un desequilibrio entre ellas y la realidad. Como hemos visto, en estos casos la única forma de superar ese desequilibrio es tomar conciencia del desequilibrio y acomodar los esquemas a las características de los nuevos conocimientos.

## ***Ideas previas, aprendizaje e instrucción***

Otra de las teorías cognitivas del aprendizaje que da especial atención a las ideas previas es la propuesta por Ausubel. A diferencia de la teoría piagetiana o como complejización, está centrada en el aprendizaje producido en contextos educativos en situaciones de instrucción. Se ocupa específicamente de los procesos de aprendizaje y de enseñanza de los conceptos científicos a partir de los conceptos previamente formados por el niño en su vida cotidiana. Para Ausubel el conocimiento del sujeto se organiza en estructuras que se reestructuran a partir de la interacción con la nueva información. Para que esa reestructuración tenga lugar debe intervenir la instrucción formalmente establecida que presente de modo organizado y explícito la información necesaria para desequilibrar las estructuras preexistentes.

En toda situación de aprendizaje, escolar o no, pueden analizarse dos dimensiones: i) el tipo de aprendizaje realizado por el alumno y ii) la estrategia de instrucción planificada para fomentar ese aprendizaje.

- i) El tipo de aprendizaje realizado por el alumno hace referencia a los procesos mediante los que codifica, transforma y retiene la información. Los tipos de aprendizaje constituyen un continuo (y no una dicotomía) cuyos extremos son el aprendizaje memorístico o repetitivo y

el aprendizaje significativo. No son excluyentes sino que coexisten.

- ii) La estrategia de instrucción planificada para fomentar ese aprendizaje puede ubicarse también en un continuo que va desde la enseñanza puramente transmisiva, donde el docente expone de modo explícito lo que debe aprender el alumno, a la enseñanza basada en la libre exploración y descubrimiento del alumno.

La distinción entre aprendizaje y enseñanza supone la superación de la vieja y falsa dicotomía entre la enseñanza tradicional y la enseñanza “activa”, dicotomía sustentada en la indiferenciación entre procesos de aprendizaje y estrategias de enseñanza. Aunque el aprendizaje y la instrucción interactúan, son relativamente independientes, de tal modo que ciertas formas de enseñanza no conducen directamente a un tipo determinado de aprendizaje. En consecuencia, tanto el aprendizaje significativo como el memorístico son posibles en ambos tipos de enseñanza, la expositiva y la enseñanza por descubrimiento.

Ausubel define al aprendizaje significativo como aquel que “puede relacionarse, de modo no arbitrario y sustancial con lo que el alumno ya sabe”<sup>5</sup>. Por lo tanto, un aprendizaje es significativo cuando puede incorporarse a las estructuras de conocimiento que posee el sujeto, adquiriendo significado para él a partir del establecimiento de relaciones con sus conocimientos anteriores.

Como condición para un aprendizaje significativo debe cumplirse que:

- i) el material que debe aprenderse posea significado en sí mismo, existiendo una relación significativa (no asociativa ni arbitraria) entre sus partes; un material posee significado lógico o potencial cuando sus elementos están organizados en una estructura e interrelacionados y no sólo yuxtapuestos.
- ii) el alumno disponga de determinados requisitos cognitivos necesarios para asimilar ese significado en forma relacional:
  - una predisposición para el aprendizaje significativo, en tanto, comprender requiere siempre un esfuerzo, el sujeto debe tener algún motivo (implicación afectiva) para esforzarse por relacionar los nuevos conocimientos con experiencias, hechos y conocimientos previos,
  - la estructura cognitiva del alumno debe contener *ideas inclusoras*, conceptos de nivel superior, más inclusivos, ideas con las que pueda ser relacionado el nuevo material.

La transformación del significado lógico en significado psicológico no se asegura con la estructuración del material, se alcanza cuando una persona asimila un significado lógico dentro de su propia estructura cognitiva individual. Los significados son siempre una construcción individual, intrapersonal que supone una deformación personal de lo aprendido, no obstante, estos se adquieren generalmente en contextos interpersonales. La mayor parte de los significados se reciben, no se descubren. El aprendizaje significativo es la vía por la que las personas asimilan la cultura que les rodea.

En el otro extremo del continuo del tipo de aprendizaje realizado por el alumno encontramos el aprendizaje memorístico o por repetición, donde:

- los contenidos no están relacionados entre sí y se encuentran ordenados de modo arbitrario. En consecuencia, carecen de significado para el que aprende y su aprendizaje procede por asociaciones arbitrarias. Este tipo de aprendizaje no sustantivo, arbitrario y verbalista se apoya en estrategias de memorización.
- a pesar de que los materiales pueden poseer significado en sí mismos, puede aprenderse de forma memorística si no se cumplen las condiciones del aprendizaje significativo, ya expuestas.

Si bien el aprendizaje de estructuras conceptuales supone una comprensión de las mismas que no puede alcanzarse por procedimientos memorísticos u asociativos, Ausubel admite que en muchos

---

5 Ausubel, Novak y Hanesian, 1978; citado en Pozo, 1997.

momentos del aprendizaje escolar, puede haber aspectos memorísticos. Estos van perdiendo importancia a medida que el niño adquiere más conocimientos que le permiten el establecimiento de relaciones significativas con cualquier material.

En cualquier caso, según Ausubel, el aprendizaje significativo será generalmente más eficaz que el aprendizaje memorístico, ya que:

- produce una retención más duradera de la información;
- facilita nuevos aprendizajes relacionados y
- produce cambios profundos que persisten más allá de los detalles concretos.

## ***Las ideas previas en la enseñanza y aprendizaje de conocimientos matemáticos***

La escuela francesa de Didáctica de la Matemática sostiene la necesidad de investigar los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de conocimientos matemáticos evitando el trasvasamiento de teorías de otras disciplinas o la aplicación directa de teorías generales del aprendizaje surgidas en el campo de la psicología.

En relación al aprendizaje, Brousseau (1999) sostiene que una noción aprendida:

- es utilizable si está relacionada a otras. Estas relaciones constituyen su significación, su etiqueta, su método de evocación y activación.
- es aprehendida en la medida en que ella es utilizable y utilizada efectivamente en la práctica como solución a un problema. El conjunto de problemas que una noción permite resolver constituyen la significación de la noción.
- recibe particularizaciones, limitaciones, deformaciones del lenguaje y de sentido debido a su empleo localizado; esta particularización contribuye a crear el sentido de las adquisiciones posteriores.
- si tiene éxito por un tiempo suficiente, toma un valor, una consistencia, una significación, un desarrollo que hacen cada vez más difícil su modificación, su reconsideración, su generalización o su rechazo: se convierte a la vez, para las adquisiciones posteriores, un obstáculo pero también un punto de apoyo.

Por lo tanto, para Brousseau el aprendizaje no es un proceso de adquisición progresiva y continua que pueda descomponerse en una sucesión finita de adquisiciones de información tan pequeña como se quiera y como le sea equivalente. Por el contrario, “el aprendizaje se hace por la puesta a prueba de concepciones sucesivas, provisionales y relativamente buenas, que será necesario rechazar sucesivamente o retomar en una verdadera epistemología, nueva cada vez” (Brousseau 1999).

Apoyándose en los trabajos de Bachelard y Piaget que cuestionan el rol simplificado que se le asigna comúnmente al error y al fracaso, Brousseau sostiene:

“El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar que uno cree en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que, ahora, se revela falso, o simplemente inadecuado. Los errores de este tipo no son erráticos e imprevisibles, están constituidos de obstáculos. Tanto en el funcionamiento del maestro como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido.”

En conclusión, el aprendizaje de un conocimiento matemático –la constitución del sentido del mismo–, supone una interacción dialéctica donde el sujeto compromete conocimientos anteriores, los somete a revisión, los modifica, los completa o los rechaza para formar concepciones nuevas.

Así los problemas más interesantes serán aquellos que permitirán al alumno poner a prueba sus conocimientos, rechazando los que resulten inadecuados o insuficientes, superando un verdadero obstáculo.

## ***La cuestión de los obstáculos en didáctica***

Brousseau afirma la existencia de un paralelismo entre el aprendizaje a nivel individual y los descubrimientos realizados en la historia de las ciencias, ya que el mecanismo de adquisición de conocimientos a través de la superación de obstáculos puede aplicarse tanto a la epistemología o a la historia de las ciencias, como al aprendizaje y a la enseñanza.

En un caso como en el otro, la noción de obstáculo aparece como fundamental para plantear el problema del conocimiento científico.

El primero en referirse a la idea de obstáculos en el conocimiento científico ha sido Bachelard: "No se trata de considerar los obstáculos externos como la complejidad, la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar la debilidad de los sentidos y del espíritu humano; es en el acto mismo de conocer íntimamente que aparecen por una suerte de necesidad funcional lentitudes y problemas... Uno conoce contra un conocimiento anterior."

Él estudia esos obstáculos en las ciencias físicas: la experiencia primera, el conocimiento general, el obstáculo verbal, la utilización abusiva de las imágenes familiares, el conocimiento unitario y pragmático, el obstáculo substancialista, realista, animista, aquel del conocimiento cuantitativo.

Estos grandes obstáculos que han resistido largo tiempo y es probable que tengan su equivalente en el pensamiento del niño.

Un obstáculo se manifiesta, por tanto, por sus errores, que no son azarosos, fugaces, erráticos, sino que son reproducibles, persistentes. Además esos errores, cuando se manifiestan en un mismo sujeto, están interrelacionados por una fuente común, una manera de conocer, una concepción característica, coherente, antigua y que ha demostrado su eficacia en todo un dominio de acciones.

Esos errores no necesariamente pueden explicitarse, no desaparecen radicalmente; resisten, son persistentes, resurgen, incluso mucho después que el sujeto los haya rechazado de su sistema cognoscitivo.

El obstáculo está constituido como un conocimiento de objetos, relaciones, métodos de aprehensión, previsiones con evidencias, consecuencias olvidadas, ramificaciones imprevistas. resiste el rechazo adaptándose localmente (a la situación concreta o a un campo reducido).

Es por eso que para la superación de un obstáculo hace falta un flujo suficiente de situaciones nuevas, no asimilables por él, que van a desestabilizarlo, a evidenciar su ineficacia, su inutilidad, haciendo necesaria la reconsideración, el rechazo o el olvido. En consecuencia, la superación de un obstáculo exige un trabajo de igual naturaleza que el establecimiento de un conocimiento, es decir, interacciones rechazadas, dialécticas del alumno con el objeto de su conocimiento.

Si se pretende desestabilizar una noción bastante enraizada, será ventajoso que el alumno pueda invertir suficientemente sus concepciones dentro de situaciones:

- bastante numerosas e importantes para él;
- y, sobre todo, con condiciones informacionales suficientemente diferenciadas para que un salto cualitativo sea necesario.

Esta observación es fundamental para distinguir lo que es un verdadero problema; en tanto que situación que permite esta dialéctica y la motiva.

## Origen de los diversos obstáculos didácticos

Los obstáculos a la apropiación por el alumno de ciertas nociones pueden ser debidos a varias causas. En general es difícil y/o erróneo el asignarlo a uno solo de los sistemas de interacción.

La noción de obstáculo epistemológico tiende a substituirse por la de error de enseñanza, de insuficiencia del sujeto o de dificultad intrínseca de los conocimientos.

En todo caso, se pueden distinguir los orígenes de los obstáculos didácticos: “éste será el sistema tal que, modificándolo, se podría evitar el obstáculo, mientras que ninguna modificación de los otros sistemas permitiría evitarlo.” Brousseau (1999).

Entonces, se pueden clasificar, según su origen: **ontogenético**; **didáctico** y **epistemológico**.

Los **obstáculos de origen ontogenético** son los que derivan de las limitaciones o alteraciones del sujeto a un momento de su desarrollo. Por lo que desarrolla conocimientos apropiados a sus medios y a sus objetivos.

Los **obstáculos de origen didáctico** son los que parecen no depender más que de una elección o de un proyecto de la propuesta educativa.

Los **obstáculos de origen propiamente epistemológico** son aquellos a los cuales uno no puede, ni debe escapar. Pueden encontrarse en la historia de los conceptos mismos. Eso no quiere decir que se deba amplificar su efecto ni que deban reproducirse en el medio escolar las condiciones históricas en las que han sido vencidos.

## Carácter dialéctico del proceso de superación de un obstáculo

El proceso de superación de un obstáculo implica necesariamente una sucesión de interacciones entre el aprendiz y el medio. Sucesión de interacciones que cobran sentido en la medida en que se relacionan a un mismo proyecto en torno a un concepto, de cuya génesis ellas constituyen una etapa y en el cual funden la significación.

Esas interacciones ponen en juego sistemas de representación y pueden a menudo ser interpretados como intercambios de mensajes, asumiendo un carácter dialógico; además las informaciones intercambiadas son recibidas como hechos que confirman o niegan las hipótesis.

## El proceso de superación de un obstáculo.

“Si se admite que un conocimiento se establece oponiéndose a otro, sobre el cual se apoya y al cual reemplaza, se comprenderá que podemos decir que los procesos de superación tienen un carácter dialéctico: dialécticas del a priori y del a posteriori, del conocimiento y de la acción, del yo y de los otros ...” Brousseau (1999).

Por lo que planificar y organizar la superación de un obstáculo consistirá en proponer una situación susceptible de evolucionar y de hacer evolucionar al alumno según una dialéctica conveniente. Se tratará, no de comunicar las informaciones que se quieren enseñar, sino de encontrar una situación en la cual ellas son las únicas satisfactorias u óptimas –entre aquellas a las cuales ellas se oponen– para obtener un resultado en el cual el sujeto se ha involucrado.

Pero no es suficiente esto. Será necesario que esta situación permita al niño la construcción de entrada de una primera solución o de una posibilidad (una estrategia de base) a partir de sus conocimientos previos, que se revelaran insuficientes.

“La situación debe permitir la repetición o voluntad de la puesta a prueba de todos los recursos del sujeto. Ella debe automotivarse por un juego sutil de sanciones intrínsecas (y no por sanciones extrínsecas ligadas por el maestro a los progresos del aprendiz). Ella no puede, por tanto, ser programada, es solamente su elección la que puede serlo.” Brousseau (1999).

Se trata de identificar, mediante un análisis dialéctico, una situación que plantea al sujeto una pregunta cuya respuesta es "construible" dentro de una etapa del concepto que se pretende enseñar.

Se pueden distinguir en el funcionamiento tres tipos de preguntas que comandan tres tipos de situaciones didácticas:

- ⇒ **Las preguntas de validación:** el sujeto debe establecer la validez de una afirmación: debe dirigirse como un sujeto a otro sujeto capaz de aceptar o de rechazar sus afirmaciones, de pedirle administrar pruebas de lo que anticipa, de oponerle otras afirmaciones.  
Un problema de validación es mucho más un problema de comparación, de evaluación, de rechazo de pruebas, que de búsqueda de la demostración.
- ⇒ **Las preguntas de formulación:** para sus procesos de validación, el pensamiento debe apoyarse sobre formulaciones previas. Los lenguajes se elaboran también dentro de una dialéctica menos específica que las de la validación. La comunicación (y sus restricciones) juega un gran papel independiente, en parte, de los problemas de validez.
- ⇒ **Las cuestiones de acción o de decisión matemática** son aquellas donde el único criterio es la adecuación de la decisión –el sistema de elaboración de esta decisión puede quedar totalmente implícito, así como su justificación. No hay, a ese respecto, restricción alguna: ni de formulación ni de validación. Es la dialéctica más general, las otras son sólo casos particulares.

La superación de un obstáculo implica, muy a menudo, a la vez una re-estructuración de los modelos de acción, del lenguaje y del sistema de pruebas; a través de una dialéctica entre estos tres tipos de preguntas y situaciones pueden precipitarse las rupturas.

## ***Magnitud y medida***

### **Medida**

El concepto de medida tiene un origen muy antiguo en la historia y su utilización es universal. El uso corriente en la vida cotidiana, es el puente entre la aritmética y el mundo físico. Permite explorar el espacio físico y describirlo por medio de las magnitudes longitud, área, volumen y abertura de ángulo, a la vez que interpretar otros fenómenos menos perceptivos como el peso, el dinero y el tiempo (Dickson, 1991). En consecuencia, se tiende a pensar que es simple desestimando la necesidad de clarificar las dificultades encontradas en la práctica o en la enseñanza.

Por otra parte, su carácter universal y familiar ha conducido a una proliferación de términos involucrados en usos ambiguos, no coincidentes con las definiciones matemáticas necesarias, que dan lugar a contradicciones culturales que frecuentemente obstaculizan la enseñanza.

Este carácter familiar y primitivo de la noción de medida constituye pues un obstáculo cultural para la clarificación del concepto según los usos de los niveles de enseñanza obligatoria. Numerosas concepciones de la medida se constituyen en obstáculos epistemológicos o contra obstáculos epistemológicos.

En la escuela suele reducirse su tratamiento al manejo del Sistema Métrico Decimal, de forma algorítmica. Lo cual instala además un nuevo obstáculo, medir es una cuestión aritmética, si solamente se ve así.

Según Brousseau (1991 – 1992), el concepto de medida sólo ha sido esclarecido con gran dificultad y muy tardíamente en la historia de la humanidad. Además presenta todavía zonas de penumbra (la medida en las ciencias humanas por ejemplo).

“La medida” es un objeto complejo debido a las distintas nociones que pone en juego. Brousseau (1991 – 1992) sostiene que pueden distinguirse al menos ocho “*objetos*” distintos en los problemas de medida, que pertenecen a *entornos* o medios diferentes, siguen reglas distintas y son definibles mediante situaciones distintas. Son “conocidos” en instituciones diferentes que les han llamado de maneras diversas. Todos intervienen en la concepción y la práctica de las medidas.

Estos ocho entornos son:

1. Los objetos “soportes” de los caracteres a medir: objetos concretos (una mesa, un pájaro) o ya “matematizados” (un rectángulo, su “longitud” o su “anchura” en tanto que segmentos, el conjunto de puntos que constituyen su superficie) o “conceptualizados” (por ejemplo una envergadura).
2. La magnitud, concepto que permite aprehender “lo que puede hacerse más grande o más pequeño”, relativamente a objetos del ítem (1). La magnitud es un conjunto de propiedades comunes a varios (tipos de) magnitudes particulares: el área, la masa, la capacidad, el débito, por ejemplo. (Observación: la longitud y la anchura de un rectángulo son segmentos –objetos del ítem 1– de los que se puede apreciar la magnitud “longitud”). Una estructura matemática (semimódulo, módulo, etc.) explicita estas propiedades comunes y describe lo que es susceptible de medir, un conjunto medible: los objetos (conjuntos, sucesos, segmentos, superficies, etc.) que pueden ser objeto de una medida en el sentido (4) que se indicará después. Esta estructura enumera el tipo de operaciones a las cuales se deben ajustar estos elementos (unión, complementario, intersección, ...) y, si corresponde, indica una invarianza respecto de ciertas transformaciones (desplazamientos, particiones, etc.) de manera que permita hacer comparaciones.
3. El valor particular de esta magnitud, relativo a un objeto preciso, sin tener en cuenta el sistema utilizado para cuantificarla, en particular sin tener en cuenta las unidades.
4. Una medida (medida-función) es una **aplicación** aditiva y positiva de un conjunto medible en  $\mathbb{R}$ . Hace corresponder a cada elemento de un conjunto medible (un segmento, una superficie, un suceso, una masa,...) un número real positivo. En este sentido, la unidad, en tanto que [cantidad de] magnitud, cambia con la medida: es el objeto cuya imagen es 1 (la unidad de medida o referente).
5. El valor de esta medida (medida-**imagen**) de un objeto de (3) es el número positivo (natural, decimal, racional o real) que la medida en el sentido (4) hace corresponder a un objeto (1) en el cual se interesa. Esta “medida” no comporta ninguna traza de la aplicación medida: 3 es solamente un número (3 es la imagen por la medida en centímetros de tal segmento).
6. La medida a veces llamada concreta o número concreto: **par** formado por la imagen en el sentido (5) (el número) y por la función (medida en el sentido 4), representada por una “unidad”:
7. La medida. La palabra designa la **operación material** o el método que permite determinar efectivamente, para un objeto de tipo (1), **un número y un intervalo** (o una familia de intervalos) de incertidumbre (o de confianza). La palabra designa también su resultado (como en (4) y (5)).
8. La evaluación de las medidas: una especie de juicio o de “medida” sobre la medida, sobre su expresión, que representa el tamaño, la magnitud relativa, la rareza, la calidad, la precisión, etc., y que sirve como medio de control en las actividades de medición, en los cálculos o las comparaciones.

Ahora bien, como señala Brousseau, sería prematuro enseñar todas estas nociones a los alumnos de la escuela primaria, pero renunciar a ello completamente conduce a abstenerse de tratar correctamente tanto los problemas prácticos como las nociones teóricas.

Frecuentemente, la enseñanza tiene tendencia a ignorar las actividades efectivas de medición y a dejar para más tarde las aclaraciones teóricas, restringiéndose a un saber escolar débilmente utilizable, evitando contradicciones, errores y dificultades propias de las mismas.

En contraste, la realización sin discernimiento de todas las actividades “naturales” de medición (con todo su vocabulario, procedimientos, conceptos, etc.) refuerza la confusión y hace



imposible las adquisiciones matemáticas o culturales fundamentales.

No obstante, es fundamental que el propio docente distinga estos objetos y sus entornos, reconociendo su importancia cultural mediante una cierta vigilancia y asegurando (por medio de un uso flexible de la lengua, la precisión y la pertinencia del pensamiento del alumno) la aproximación y frecuentación sobre estos temas.

## La génesis psicológica de la medida

El surgimiento y la construcción del concepto de medida requiere de numerosas experiencias y es, a su vez, un lento proceso. Presenta como prerequisites las operaciones de conservación de la cantidad y la transitividad entre cantidades, principalmente. En el primero de los casos para poder comprender que no importa el estado, la medida se conserva, como cantidad. En el segundo, para poder comparar y ordenar.

Sabido es que para Piaget, la conservación de la cantidad y la transitividad son condiciones primeras para que el alumno adquiera el concepto y los procedimientos de la medida, pero también que un buen trabajo en la medición (prácticas efectivas de medición) puede contribuir al desarrollo de estas operaciones, y no depender de ellas. Aunque siempre es preciso recordar que la conservación de la cantidad no se construye y desarrolla al mismo tiempo en todas las magnitudes, aunque suponga las mismas estructuras lógicas (reversibilidad, transitividad).

Dado que el manejo de la conservación no se da al mismo tiempo en todas las magnitudes, se hace necesario trabajar al mismo tiempo y en forma secuenciada lógicamente, con muchas magnitudes. Enfrentando a los sujetos a los diferentes obstáculos. Entre estos obstáculos, se deben tener en cuenta que cuando los niños se encuentran construyendo la conservación de cantidades es común que confundan atributos de los objetos con los atributos medibles de los mismos.

Es el caso de los volúmenes y los pesos, dado que en realidad según la densidad, un objeto más pequeño, puede ser más pesado que uno más grande, etc.

Por ello es que es preciso ayudarlos a desvincular la cantidad a medir de otros datos que tienen que ver con la percepción, por ejemplo, la longitud con la forma y la configuración espacial de lo que se mide; la masa (y el peso), del tamaño; etc.

El proceso de medición tiene como prerequisite también la comprensión de que un todo está compuesto de partes agregadas y por ello es pasible de ser subdividido. Así como los principios de sustitución e iteración, en tanto se mide transportando la unidad de referencia a otras partes de dicha totalidad.

## Magnitud

Una magnitud, desde un punto de vista físico es todo atributo cuantificable. Desde el punto de vista matemático una magnitud es un conjunto de cantidades que reúnen determinadas propiedades: el ser sumables y por ende multiplicables por un número real. Se trata así de magnitudes extensivas.

Si bien lo común es definir la suma en una magnitud a través de la suma de medidas, es posible también el definir la suma sin recurrir a un campo numérico como intermediario. Para ello se utilizan procedimientos e instrumentos propios de la medida. A modo de ejemplo, la medida de una vara es la de otra más pequeña repetida  $n$  cantidad de veces.

Aunque esta propiedad no es verificable en todas las magnitudes. Esas magnitudes se denominan no extensivas, lo son por ejemplo la temperatura, la resistencia eléctrica y la densidad. Por ello es que no tiene sentido ni es posible definir la suma en ellas; reciben el nombre de *magnitudes intensivas o no medibles*.

A su vez, las magnitudes extensivas se pueden clasificar en dos tipos: discretas y continuas. Agrupándose en el primer caso, las que pueden cuantificarse en base a números naturales. Las segundas, las continuas, requieren de los números reales positivos (rationales e irracionales).

## Mediciones

Desde el punto de vista físico, medir, es ver cuántas veces entra una unidad en una cantidad determinada. Desde el punto de vista matemático, consiste en atribuir un número real a una cantidad.

Se denominará medida al número de veces que una cantidad cualquiera contiene a la unidad o cantidad de referencia que se toma para hacer la valoración del resto de las cantidades de su especie.

### ***Medida y medición en la escuela***

Para Brousseau (1991 – 1992), el universo de la medida y de la medición enfrenta a los alumnos a dos dominios bastante claramente separados:

- el ámbito de los objetos concretos y de las magnitudes con su entorno de propiedades y de manipulaciones,
- el ámbito de los números y el entorno de cálculo.

Las relaciones que puedan establecerse entre estos dos ámbitos juega un papel importante en las representaciones epistemológicas escolares de las matemáticas (el lugar que se le asigna a las matemáticas en las actividades humanas) y las relaciones entre la teoría y la práctica enseñada implícitamente en la escuela.

Dentro del primer dominio (manipulación de los objetos medibles a partir de sus propiedades relacionadas con una o más magnitudes), la complejidad de la realización efectiva de las mediciones, las dificultades materiales y conceptuales ligadas a estas prácticas, han conducido usualmente a los docentes a renunciar a la mayor parte de las actividades *efectivas* de medición (en particular las que son difíciles de controlar en las situaciones escolares).

De esta forma, se restringe el área de las mediciones al segundo dominio relacionado con el número y el cálculo (situaciones simplificadas o metafóricas y actividades de cálculo), simplificando el acto de enseñanza, postergando la adquisición del concepto de medida y desestimando el papel de las matemáticas como medio eficaz y simplificador para la realización y control de actividades cotidianas.

Como consecuencia de esta “aritmétización” de las mediciones, los estudiantes se limitan a aprender de memoria el uso del Sistema Métrico Decimal tratando de encontrar las reglas mecánicas que le permitan esquivar los problemas o ejercicios planteados. Chamorro (1995).

Para el docente el problema no es menor ya que la dificultad esta planteada desde el punto de vista didáctico, por la gran variedad de magnitudes que se incluyen en el programa actual: Longitud, Superficie, Capacidad, Masa, Tiempo, Sistema Monetario.

Tomando conciencia de la complejidad del concepto de medida y sus dimensiones, y la amplia variedad de magnitudes posibles, el problema del tiempo didáctico va a obligarle a realizar una elección entre las diferentes magnitudes, buscando en cada ocasión aquellas más significativas y más adaptadas al nivel étéreo, la práctica social y las prácticas culturales.

Ésto supone contar con un abanico amplio de situaciones de medida, que le proporcionen al alumno las experiencias necesarias que le permitan la construcción y apropiación de los conocimientos matemáticos que se encuentran bajo el título de medida.

Será necesario utilizar la experiencia y prácticas cotidianas de los alumnos como punto de partida del proceso de construcción matemática, para trabajar la medida de magnitudes en la escuela.

Las experiencias a las que debemos enfrentar a nuestros alumnos deberían posibilitarles relacionar los conocimientos nuevos a las ideas previas y generar en ellos un conflicto, y por tanto una ruptura en sus esquemas mentales; entre las imágenes intuitivas y las deducciones lógicas de ciertas propiedades de las que forman parte entre otras la superficie, la longitud o el volumen. Para ello es fundamental la identificación de magnitudes y la comparación de magnitudes.

### **Precisión y error**

Por otra parte, para que la experimentación sea viable será necesario ampliar el manejo de instrumentos de medida fundamentales a otros más complejos, sofisticados y precisos, procurando promover la capacidad de elaborar estrategias personales de medición exacta y aproximada, según las necesidades concretas.

No obstante, la familiarización con instrumentos de medida cada vez más precisos no debe eliminar el problema del error en las mediciones.

Según Brousseau (1991 – 1992), uno de los nudos centrales en la realización efectiva de mediciones es el lugar del error en la medida. A través de la práctica de variadas experiencias de medición los alumnos pueden entender que un valor observado (obtenido en una medición) está afectado de error; o sea puede asociarse a un cierto intervalo de tal manera que:

- en su interior, los restantes valores de este intervalo podrían ser observados por otra persona que midiera y, por tanto, deben ser aceptados como valores teóricos de la medida,
- y en el exterior de este intervalo, estaría justificado suprimir los valores que se observen.

Este error no es completamente desconocido: se puede estimar, a priori, que será inferior a un cierto valor.

Por lo tanto, cuando se realiza una **medición** no encontramos un único número, sino un intervalo en función de la precisión y lo bien calibrado del instrumento de medida, la experiencia del sujeto que mide, etc. Jamás se estará seguro de encontrar la medida exacta, ya que ésta no existe en la práctica, pero sin embargo, la medida, en tanto que aplicación, proporciona siempre un único número.

## Las desviaciones y los errores en las mediciones

Otro aspecto que debe trabajarse de modo intencionado, es la naturaleza y el origen de los errores en las mediciones.

El papel que juegan las diferentes **categorías de errores**, la distinción entre **error absoluto** y los **errores relativos** en la medición, los errores de cálculo y los errores de redondeo también deben ser abordados para que no existan cuestiones que confundan entre lo que se entiende por aproximación y lo que se entiende por errores. Esta distinción permitirá en la actividad escolar salir de la confusión, diferenciando unos errores de otros, dándoles un estatuto fijo y convenido en la clase, permitiendo que los alumnos adquieran estrategias personales para llevar a cabo estimaciones de medidas en situaciones cotidianas.

Señala Brousseau (1991 - 1992) que, los alumnos pueden aprender a identificar y controlar el efecto de estos errores, si se les enseña a distinguir entre:

- las desviaciones debidas a la elección del sistema numérico de referencia. Por ejemplo, la utilización de números enteros, o decimales con un número limitado de cifras después de la coma (2 por ejemplo), no permite diferenciar ciertas “magnitudes” consideradas diferentes en el entorno.
- los errores ligados al cálculo: errores de redondeo.
- las incertidumbres debidas a la imprecisión del instrumento de medida, a su falta de fidelidad, a su falsedad.
- las incertidumbres ligadas a la inestabilidad del objeto medido o a las condiciones de medida.
- las faltas: errores de procedimiento o de cálculo que hacen el resultado inaceptable.

## Obstáculos de origen didáctico y epistemológico en las mediciones

Uno de los obstáculos de origen didáctico más habitual, identificado por Brousseau (1991 – 1992), que se relaciona con el problema del error en las mediciones es la eliminación del intervalo

de medida, ya que es usual que los docentes elijan un valor central en este intervalo y continúen el problema con este valor único, lo que no da a los alumnos ningún medio de prever lo que supondrá este error en los cálculos que se deben hacer. Esto supone eliminar, junto al intervalo de medida el problema del error.

Por el contrario, debe atraerse la atención de los niños hacia el hecho de que se acepta a priori toda la distribución de las medidas de un cierto intervalo. Luego, esta idea debe ser constantemente retomada hasta el esclarecimiento de las diferentes fuentes de error (errores debidos a la imprecisión del aparato, una falta de fiabilidad, error de lectura, error absoluto, relativo, ¿qué consecuencias tiene el error en las sumas y en los productos?).

Un ejemplo de obstáculo epistemológico en las mediciones, identificado por Brousseau, (1991 – 1992), es la fuerte tendencia en las mediciones de masa a olvidar que el continente pesa, fundamentalmente en casos donde continente es inseparable del contenido (líquido, polvo, etc.).

## La estimación de medidas

La estimación es una estrategia de pensamiento de gran valor práctico para resolver innumerables problemas de la vida cotidiana en los que las respuestas exactas son imposibles o innecesarias.

“La estimación de medidas es un proceso mental que se basa en el conocimiento internalizado de referentes y unidades de medida convencionales. Sirve tanto para anticipar con rapidez el valor de una determinada cantidad, continua o discontinua, como para juzgar el resultado de una medición efectivamente realizada o calculada.” Bressan, A. M., Yaksich, F., (2001)

La operación mental básica que interviene en la estimación de medidas es la comparación, asociando la cantidad a estimar directamente con alguna unidad o referente (presente o no).

En tanto proceso mental, la estimación supone la internalización de la unidad de medida o el referente adecuado a las características de la situación (tamaño, naturaleza del objeto a medir, etc.): el sujeto será capaz de reconocer e identificar cantidades cuya medida sea aproximadamente la de cada una de estas unidades o referentes. Los referentes que funcionan como unidad de medida internalizada, son objetos usuales (tazas, baldosas, goteros, cuerdas, etc.) o partes de nuestro cuerpo (dedos, brazos, palmas, pies, etc.) con los cuales es posible establecer una correspondencia con las unidades convencionales (metro,  $\frac{1}{4}$  kilo, 25 cm, etc.).

Para que el alumno utilice la **estimación** de forma sistemática en sus **prácticas de medida** debe primeramente estar familiarizado con el **orden de magnitud** que empleará. En cada caso se determinará y definirá el carácter medible del objeto; es decir el objeto será medido en relación con una **magnitud** y en tanto que **cantidad de esa magnitud**. A continuación deberá elegir, dentro del repertorio disponible, el referente más adecuado a la cantidad de magnitud que se quiera estimar. Finalmente, se realizará la comparación referente – referido estableciendo comparaciones globales (mayor que, menor que, igual a) o calculando en forma aproximada cuántas veces entra el referente en el referido.

## Estrategias para medir

Para Bressan y Yaksich (2001) las estrategias generalmente utilizadas para medir son:

a) *La comparación directa:*

Implica conocer si  $a > b$  ó  $a < b$  ó  $a = b$ , comparándolas en base a la percepción visual directa o bien por superposición de las cantidades a comparar.

b) *La comparación indirecta*

Implica utilizar instrumentos (al principio el mismo cuerpo o partes de él) o la estimación. Se distinguen dos procedimientos:

1. El sujeto utiliza un elemento b como intermediario de manera que con él compara la cantidad a medir como totalidad, sin partirla. El cuerpo y sus partes suelen ser buenos

intermediarios en nuestras mediciones en la vida cotidiana.

2. El sujeto utiliza unidades arbitrarias o convencionales pensando el objeto a medir como descomponible en partes iguales. El proceso seguido al inicio en forma habitual por los niños consiste en cubrir completamente con unidades la cantidad a medir en el caso que sea posible (por ejemplo, en la medición de longitudes, áreas, capacidades y volúmenes cubre todo con palillos, lentejas o bloques) para luego pasar a transportar esa unidad, iterándola. En ambos casos obtiene un número que es la medida.

c) *El uso de fórmulas*

En otras ocasiones las medidas de ciertas magnitudes físicas se obtienen también de manera indirecta, por cálculo *a través de fórmulas* que implican el conocimiento de otras medidas.

Por ejemplo, para medir el perímetro de un polígono regular basta medir un lado y multiplicarlo por el número de lados, o bien, para medir el área de un rectángulo basta multiplicar las medidas de su largo y ancho, o en el caso de la velocidad se han de conocer el espacio y el tiempo, etc.

## Referencias bibliográficas

- Bressan, A. M., Yaksich, F., (2001). “La enseñanza de la medida en la Educación General Básica. Obra colectiva de los docentes de la Red de escuelas de Campana”, Bs. As.
- Brousseau, G. (1999) “Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas”, Traducción con fines de trabajo educativo sin referencia. Reeditado como documento de trabajo para el PMME de la UNISON por Hernández y Villalba del original en francés: Brousseau, G. (1983), ‘Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques’, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.
- Brousseau, G. y Brousseau, N. (1991 – 1992) “El peso de un recipiente. Estudio de los problemas de la medición en CM.”, “Gran N”, n° 50, pp. 65 a 87.
- Chamorro, M. C., (2003). “El tratamiento de las magnitudes escolares y su medida”, en “Didáctica de las matemáticas para Primaria”, Pearson Education, Madrid.
- Chamorro, M. C., (1995). “Aproximación a la medida de magnitudes en la Enseñanza Primaria”, Revista Uno, N ° 3, Graó, Barcelona.
- DICKSON, L., BROWN, M., GIBSON, O. (1991): “*El aprendizaje de las matemáticas*”, Ed. Labor. España.
- Pozo, J. I., (1997), “Teorías cognitivas del aprendizaje”, Morata, Madrid.
- Rodríguez Rava, B. y Xavier de Mello, M. A., “El quehacer matemático en la escuela. Construcción colectiva de docentes uruguayos”, Fondo Editorial Queduca, 2005, Montevideo.