MODELO DE CRECIMIENTO CON GASTO PÚBLICO

Veremos en este modelo que el gobierno debe financiar sus acciones en l a economía con impuestos distorsionados, y esto disminuye la rentabilidad de las inversiones de las empresas privadas.

Supuestos del modelo

A los supuestos del modelo con crecimiento con gobierno se le añaden los siguientes supuestos:

- ✓ El gobierno decide el tamaño del gasto.
- ✓ El gobierno puede afectar a la economía con la regulación (ley antimonopolio, derecho de propiedad, etc.).
- ✓ Ele tamaño del gasto público esta en relación con el crecimiento de la economía.
- ✓ La función de producción presenta rendimientos constantes a escala.
- ✓ Solamente existe un impuesto y es sobre la renta.

La función de producción de la economía es la misma que el modelo anterior:

$$Y_t = AK_t^{\alpha} G_t^{1-\alpha} \ldots (FPA)$$

Dividiendo a la función de producción entre la cantidad de trabajadores de la economía

$$\frac{Y_t}{L_t} = A\frac{K_t^{\alpha} G_t^{1-\alpha}}{L_t} \Rightarrow y_t = A\frac{K_t^{\alpha}}{L_t^{\alpha}}\frac{G_t^{1-\alpha}}{L_t^{1-\alpha}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_t = Ak_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha} \ldots (FPI)}$$

De la condición de equilibrio macroeconómico en una economía cerrada tenemos:

$$Y_t = C_t + I^b + G_t$$

De las identidades: $C_t = Pmgc.Yd$

$$Yd = Y_t - T = Y_t - \tau . Y_t$$

$$I^b = \dot{K}_t + \delta . K_t \Rightarrow \frac{I^b}{L_t} = \frac{\dot{K}_t}{L_t} + \delta k_t$$

$$\frac{\dot{K}_t}{L_t} = \dot{k}_t + nk_t$$

$$\frac{I^b}{L_t} = \dot{k}_t + (n+\delta)k_t$$

$$Pmgc + Pmgs = 1 \Rightarrow 1 - c = s$$

En el largo plazo existe un equilibrio fiscal (Por que no se permiten la existencia de déficit público).

$$G_t = T = \tau.Y_t$$

Reemplazando todas las identidades antes mencionadas en las líneas anteriores

$$Y_t = Pmgc.Yd + \dot{K}_t + \delta K_t + \tau.Y_t$$

$$Y_t = c.(1-\tau)Y_t + \dot{K}_t + \delta K_t + \tau.Y_t$$

$$Y_t = (1-c).(1-\tau) + \dot{K}_t + \delta K_t$$

Dividiendo la ecuación anterior entre la cantidad de trabajadores de la economía y reemplazando la identidad $1 - c = s$

$$\frac{Y_t}{L_t} = (1-c).(1-\tau) + \frac{\dot{K}_t}{L_t} + \delta\frac{K_t}{L_t}$$

$$y_t = s.(1-\tau) + \dot{k}_t + (\delta + n)k_t$$

Despejando $\dot{k}_t$ reemplazando la (FPI)

$$\boxed{\dot{k}_t = s.(1-\tau)Ak_t^{\alpha}g_t^{1-\alpha} - (n+\delta)k_t \text{, la ecuación de movimiento}}$$

Siguiendo con el análisis de *Barro* (1990), que incorpora a los bienes públicos como flujos productivos y no como bienes de capital acumulado.

Para este modelo tomaremos al gasto público como dado, y seguiremos suponiendo que el gobierno tiene que equilibrar su presupuesto en todos los momentos del tiempo y que los agentes de la economía maximizan su utilidad como se aprecia en la siguiente función de utilidad.

$$Máx: \quad J = \int_0^{\infty}\left[\frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta}\right].e^{-(\rho - n).t}dt$$

Donde la restricción será la ecuación fundamental del modelo anterior

$$\dot{k}_t = s.(1-\tau)Ak_t^{\alpha}g_t^{1-\alpha} - (n+\delta)k_t$$

Para solucionar este problema se debe cumplir que: $\rho > n$ es decir que la tasa de descuento tiene que ser mayor que la tasa de crecimiento de la población.

Como los agentes individualmente toman al gasto publico como dado, resuelve el problema de la maximización

Planteamiento del problema

$$Máx: \quad J = \int_0^{\infty}\left[\frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right].e^{-(\rho-n).t}dt\ldots \text{(Función Objetivo)}$$

$$\dot{k}_t = s.(1-\tau)Ak_t^{\alpha}g_t^{1-\alpha} - (n+\delta)k_t\ldots \text{(Ecuación de movimiento)}$$

a. Comenzaremos a aplicar el método del *Hamiltoniano*.

$$H = \left[\frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right].e^{-(\rho-n)t} + \lambda_t\left[s.(1-\tau)Ak_t^{\alpha}g_t^{1-\alpha} - (n+\delta)k_t\right]$$

Donde

k_t: Variable de estado.

c_t: Variable de control.

λ_t: Variable de coestado.

b. Tomando la derivada del hamiltoniano con respecto de la variable de control e imponiendo la condición igual a cero.

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = e^{-(\rho-n)t}.c_t^{-\theta} + \lambda_t(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-(\rho-n)t}.c_t^{-\theta} = \lambda_t\ldots(I)$$

c. Tomando la derivada del Hamiltoniano con respecto a la variable de estado e imponiendo la condición del negativo de la derivada del multiplicado con respecto al tiempo.

$$\frac{\partial H}{\partial k_t} = -\dot{\lambda}_t \quad \Rightarrow \quad \lambda_t\left[[(1-\tau)]\alpha A\left(\frac{g_t}{k_t}\right)^{1-\alpha} - (n+\delta)\right] = -\dot{\lambda}_t$$

$$\left[[(1-\tau)]\alpha A\left(\frac{g_t}{k_t}\right)^{1-\alpha} - (n+\delta)\right] = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}\ldots(II)$$

d. Tomando la derivada con respecto al multiplicador lagrangiano

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_t} = \dot{k}_t \quad \Rightarrow \quad s.(1-\tau)Ak_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha} - (n+\delta)k_t = \dot{k}_t$$

$$\dot{k}_t = s.(1-\tau)Ak_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha} - (n+\delta)k_t \ldots (III)$$

Condición de Segundo Orden (CIIO)

$$\underset{t\to\infty}{Lím}\, \lambda_t k_t = 0$$

Esto quiere decir que $\lambda_t = 0$ (el precio implícito de capital en el periodo final) o que $k_t = 0$ (el stock de capital en el momento que muere).

Condición de Transversalidad

$$\underset{t\to\infty}{Lím}\, \lambda_t = \cancelto{(1/\infty)\approx 0}{\frac{1}{e^{(\rho-n)\infty}}} \quad \Rightarrow \quad \underset{t\to\infty}{Lím}\, \lambda_t = 0$$

Aplicando logaritmo neperiano a la ecuación (I) tenemos:

$$-\theta Lnc_t - (\rho - n)t = Ln\lambda_t$$

Multiplicando por -1 a la ecuación y tomando la derivada temporal a la ecuación anterior

$$(\rho - n) + \theta . \frac{\dot{c}_t}{c_t} = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} \ldots (IV)$$

Igualando la ecuación (II) y (IV)

$$\left[[(1-\tau)\alpha]A\left(\frac{g_t}{k_t}\right)^{1-\alpha} - (n+\delta) \right] = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = (\rho - n) + \theta \frac{\dot{c}_t}{c_t}$$

Despejando $\frac{\dot{c}_t}{c_t}$ tenemos:

$$\boxed{\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta}\left[[(1-\tau)\alpha]A\alpha\left(\frac{g_t}{k_t}\right)^{1-\alpha} - (\rho+\delta) \right] \ldots (V), \text{ la proposición de } \textit{Barro – Ramsey}}$$

Esta ecuación nos dice que la tasa óptima del consumo por trabajador es la razón del producto marginal del capital menos la tasa de depreciación y la tasa de descuento intertemporal dividido sobre la elasticidad de la utilidad marginal con respecto al consumo por trabajador.

Del largo plazo, donde el gasto tiene que equilibrarse tenemos:

$$G_t = \tau . Y_t \Rightarrow \frac{G_t}{L_t} = \tau \frac{Y_t}{L_t} \quad \Longrightarrow \quad \tau = \frac{g_t}{y_t} = \frac{g_t}{Ak_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha}} = \frac{(g_t / k_t)^{\alpha}}{A}$$

$$\frac{g_t}{k_t} = (\tau . A)^{1/\alpha} \ldots (\xi)$$

Reemplazando la ecuación (ξ) en la proposición de *Barro-Ramsey*

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta}\left[(1-\tau)A^{1/\alpha}\alpha(\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (\rho + \delta)\right]$$

$$\gamma_c = \frac{1}{\theta}\left[(1-\tau)A^{1/\alpha}\alpha(\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (\rho + \delta)\right] \ldots (\psi)$$

Podemos apreciar que los valores de esta ecuación están dados, por lo que la tasa es constante.

En el estado de crecimiento proporcionado la tasa de consumo es igual a la tasa de crecimiento del capital $\gamma_c^* = \gamma_k^* = \gamma^*$.

Tipología

Para analizar el tamaño del estado y de la tasa impositiva, debemos ver los casos cuando existe tributación, cuando no existen impuesto y el caso intermedio.

Caso I: $\tau = 0$ (cuando la tasa marginal de tributación es nula)

Si reemplazamos $\tau = 0$ en la ecuación (ψ) que representa la tas de crecimiento de la economía se tendrá una tasa de crecimiento negativa y con esto el estado no puede proporcionad bienes públicos.

Si $\tau = 0$ entonces $\gamma_k = \frac{1}{\theta}\left[(1-0)A^{1/\alpha}\alpha(0)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (\rho + \delta)\right]$

La tas de crecimiento por trabajador será negativa

$$\gamma_k = \frac{1}{\theta}\left[-(\rho + \delta)\right] \ldots (\psi)$$

Caso II: $\tau = 1$ (cuando la tasa marginal de tributación es del cien por ciento)

Cuando el estado se lleva todas las ganancias las empresas no se ven incentivadas a producir y con esto se obtiene nuevamente una tasa de crecimiento negativa.

Si $\tau = 1$ entonces $\gamma_k = \frac{1}{\theta}\left[(1-1)A^{1/\alpha}\alpha(1)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (\rho + \delta)\right] \ldots (\psi)$

Esto implica que se obtendrá una tasa de crecimiento de capital por trabajador negativa.

$$\gamma_k = -\frac{(\rho + \delta)}{\theta}$$

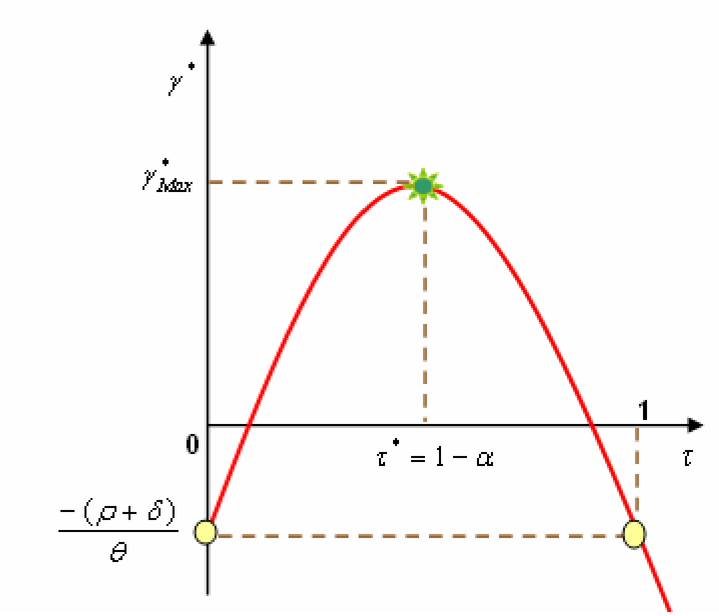
Caso III: $0 < \tau < 1$ (caso intermedio)

En este caso intermedio el estado va obtener ingresos fiscales y a su vez las empresas s e van a sentir incentivadas a producir. De otro lado dicha tasa de tributación τ , se puede financiar dicho gasto público.

Si $0 < \tau < 1$ entonces $\gamma_k = \frac{1}{\theta}\left[(1-\tau)A^{1/\alpha}\alpha(\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (\rho + \delta)\right]$

Para ver los casos mencionados anteriormente y la tasa de tributación que maximiza la tasa de crecimiento de la economía, para esto se puede apreciar en la grafica, donde la curva tiene forma de U invertida.

Relación entre τ y tasa de crecimiento



Para maximizar la función se puede hallar igualando a cero la derivada de la tasa de crecimiento con respecto a τ .

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial \tau} = 0$$

$$\partial \frac{\gamma_k}{\partial \tau} = sA^{\frac{1}{\alpha}} \left[\frac{1-\alpha}{\alpha} \right] . \tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}-1} - \frac{s.A^{1/\alpha}}{\alpha} . \tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

$$\partial \frac{\gamma_k}{\partial \tau} = \underbrace{sA^{\frac{1}{\alpha}} \tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}_{>0} \underbrace{\left[\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\alpha} \right]}_{=0} = 0$$

$$\left[\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{1}{\tau^*} - \frac{1}{\alpha} \right] = 0 \Rightarrow \boxed{\tau^* = 1-\alpha}$$

Por lo que el tipo impositivo que maximiza la tasa de crecimiento de la economía es $\tau^* = 1-\alpha$.

Para la tasa de impuesto que resulta si el gobierno escoge $\tau^* = 1-\alpha$, entonces la tasa de crecimiento sería.

$$\boxed{\gamma_{Max}* = \frac{1}{\theta} \left[\alpha^2 A^{1/\alpha} (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (\rho + \delta) \right]}$$