EL MODELO DE CRECIMIENTO CON GOBIERNO

En esta parte estudiaremos el tamaño del gobierno, donde el gobierno dedica sus acciones, (carreteras, empresas, tecnología, parques públicos, hospitales, subsidios, etc.), para el beneficio de la sociedad. Para financiar estas acciones el gobierno cobra impuestos (a la renta, la rentabilidad de las inversiones privadas, IGV, etc.) y veremos como estos impuestos están relacionados con la tasa de crecimiento de la economía.

También es esta parte veremos que el tamaño del gasto publico y su relación con el crecimiento económico, veremos los caso del aspecto positivo de tener gasto publico y los aspectos negativos de tener que financiar dicho gasto.

Para comenzar diremos que este modelo fue desarrollado por *Robert Barro (1990)* y es una extensión del modelo de *Solow*, según el cual nos dice que el gasto publico es productivo y para esto nos propone una función de producción con dos factores: Capital privado K_t y el gasto del sector publico G_t .

Sector Público

- ***Gasto Fiscal***: El estado propone bienes públicos a la sociedad (Educación, salud, seguridad, defensa nacional, etc.)
- ***Ingreso Fiscal:*** Como consigue el gobierno solventar el gasto tributación.

Supuestos del modelo

A los supuestos básicos del modelo de *Solow* se le añaden los siguientes supuestos:

- ✓ Existe estado.
- ✓ Existe el sector público.
- ✓ Hay gasto público: El estado proporciona bienes públicos.
- ✓ Existe gasto de gobierno: Refleja el hecho de que hay bienes públicos.
- ✓ La tributación es la única fuente de ingreso.
- ✓ La tributación es proporcional a la renta, dado la tasa marginal de tributación.
- ✓ En el largo plazo existe un equilibrio fiscal.
- ✓ La función de producción agregada considera el stock de capital privado y el gasto público.

- ✓ El ahorro depende directamente de la renta disponible., dado la propensión marginal ahorrar.
- ✓ Existe solo un impuesto y es a ala renta.

Función de producción agregada

Sea una función de producción tipo *Cobb-Douglas*, donde interviene además del stock de capital privado, el gasto de gobierno.

$$Y_t = AK_t^{\alpha} G_t^{1-\alpha} \ldots (FPA)$$
$$s.a: \quad 0 < \alpha < 1$$

Donde

Y_t: Producto agregado en el instante "*t*".

K_t: Stock de capital privado en el instante "*t*".

G_t: Volumen del gasto en el instante "*t*".

A: Índice de nivel de tecnología.

α : Elasticidad producto respecto al capital privado.

Dividiendo a la función de producción entre la cantidad de trabajadores de la economía

$$\frac{Y_t}{L_t} = A\frac{K_t^{\alpha} G_t^{1-\alpha}}{L_t} \Rightarrow y_t = A\frac{K_t^{\alpha}}{L_t^{\alpha}} \frac{G_t^{1-\alpha}}{L_t^{1-\alpha}} \Longrightarrow \boxed{y_t = Ak_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha} \ldots (FPI)}$$

Donde

g_t: Gasto de gobierno por trabajador en el instante "*t*".

y_t: Producto per cápita en el instante "*t*".

k_t: Stock de capital por trabajador en el instante "*t*".

Propiedades de la función de producción

1º. $F\left(K_t, L_t\right) = AK_t^{\alpha} G_t^{1-\alpha}$

Si multiplicamos a la función por un $\lambda > 0$

$F\left(\lambda K_t, \lambda G_t\right) = A(\lambda K_t)^{\alpha} (\lambda G_t)^{1-\alpha}$

$F\left(\lambda K_t, \lambda L_t\right) = \lambda . Y_t$

La función presenta rendimientos de escala constante

2º. Los productos marginales del capital y trabajo son positivos.

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = PmgK = \underbrace{\alpha}_{+}\underbrace{AK_t^{\alpha-1}G_t^{1-\alpha}}_{+} > 0$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial G_t} = PmgL = \underbrace{(1-\alpha)}_{+}\underbrace{AK_t^{\alpha}G_t^{-\alpha}}_{+} > 0$$

La derivada de los productos marginales es decreciente y negativa.

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial K_t^2} = \frac{\partial PmgK}{\partial K_t} = \underbrace{\alpha}_{+}\underbrace{(\alpha-1)}_{-}\underbrace{AK_t^{\alpha-2}L_t^{1-\alpha}}_{+} < 0$$

Recordemos $0 < \alpha < 1$, entonces $0 < \alpha < 1 \ldots -1 \Rightarrow -1 < \alpha - 1 < 0$ es una constante negativa.

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial G_t^2} = \frac{\partial PmgG}{\partial G_t} = \underbrace{(-\alpha)}_{-}\underbrace{(1-\alpha)}_{+}\underbrace{AK_t^{\alpha}G_t^{-(1+\alpha)}}_{+} > 0$$

Recordemos que $0 < \alpha < 1$, entonces $0 < \alpha < 1 \ldots x - 1 \Rightarrow -1 < -\alpha < 0 \ldots +1$ es una constante positiva $0 < 1-\alpha < 1$.

3º. Veremos que los límites requeridos por las condiciones de INADA se cumplen:

$$\underset{K\to\infty}{Lím}\, PmgK = \alpha\, \overset{(1/\infty)\approx 0}{\frac{1}{\cancel{K_t^{1-\alpha}}}}.G_t^{1-\alpha} = 0$$

$$\underset{K\to 0}{Lím}\, PmgK = \alpha\, \overset{(1/0)\approx \infty}{\frac{1}{\cancel{K_t^{1-\alpha}}}}.G_t^{1-\alpha} = \infty$$

$$\underset{L\to\infty}{Lím}\, PmgG = (1-\alpha)K_t^{\alpha}\, \overset{(1/\infty)\approx 0}{\frac{1}{\cancel{G_t^{\alpha}}}} = 0$$

$$\underset{L\to 0}{Lím}\, PmgG = (1-\alpha)K_t^{\alpha}\, \overset{(1/)\approx \infty}{\frac{1}{\cancel{G_t^{\alpha}}}} = \infty$$

Ahora demostraremos que la función obtenida cumple con las propiedades Neoclásicas.
Para esto deberemos asumir que $0 < \alpha < 1$

Ecuación fundamental

De la condición de equilibrio macroeconómico en una economía cerrada tenemos:
$Y_t = C_t + I^b + G_t$

De las identidades: $C_t = Pmgc.Yd$

$$Yd = Y_t - T = Y_t - \tau .Y_t$$

$$I^b = \dot{K}_t + \delta .K_t \Rightarrow \frac{I^b}{L_t} = \frac{\dot{K}_t}{L_t} + \delta k_t$$

$$\frac{\dot{K}_t}{L_t} = \dot{k}_t + nk_t$$

$$\frac{I^b}{L_t} = \dot{k}_t + (n + \delta)k_t$$

$$Pmgc + Pmgs = 1 \Rightarrow 1 - c = s$$

En el largo plazo existe un equilibrio fiscal (Por que no se permiten la existencia de déficit público).

$$G_t = T = \tau .Y_t$$

Reemplazando todas las identidades antes mencionadas en las líneas anteriores

$$Y_t = Pmgc.Yd + \dot{K}_t + \delta K_t + \tau .Y_t$$

$$Y_t = c.(1-\tau)Y_t + \dot{K}_t + \delta K_t + \tau .Y_t$$

$$Y_t = (1-c).(1-\tau) + \dot{K}_t + \delta K_t$$

Dividiendo la ecuación anterior entre la cantidad de trabajadores de la economía y reemplazando la identidad $1 - c = s$

$$\frac{Y_t}{L_t} = (1-c).(1-\tau) + \frac{\dot{K}_t}{L_t} + \delta \frac{K_t}{L_t}$$

$$y_t = s.(1-\tau) + \dot{k}_t + (\delta + n)k_t$$

Despejando $\dot{k}_t$ reemplazando la (FPI)

$\boxed{\dot{k}_t = s.(1-\tau)Ak_t^{\alpha} g_t^{1-\alpha} - (n + \delta)k_t}$, la ecuación fundamental con sector público

Esta ecuación función diferencial del proceso de acumulación de capital en una economía capitalista con sector publico.

Estable que la tasa de cambio de capital por trabajador es el remanente del ahorro bruto disponible por trabajador respecto a la ampliación bruta de capital.

Donde

τ : representa la tasa marginal de tributación.

k_t : Capital por trabajador.

δ : Tasa de depreciación del stock de capital.

s : Representa el producto marginal ahorrar.

g_t : Gasto de gobierno por trabajador.

n : Tasa de crecimiento de la población.

Versión de *Barro*

Dividiendo a la ecuación fundamental entre k_t

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = s.(1-\tau)A\frac{k_t^{\alpha}}{k_t}g_t^{1-\alpha} - (n+\delta)$$

$$\gamma_k = s.(1-\tau)A\frac{k_t^{\alpha}}{k_t}g_t^{1-\alpha} - (n+\delta)\ldots(I)$$

Donde
γ_k : Tasa decrecimiento por trabajador.

En el largo plazo no existe desequilibrio fiscal

$$G_t = T \qquad \Rightarrow \qquad G_t = \tau.Y_t$$

Dividiendo a la ecuación anterior entre la cantidad de trabajadores de la economía

$$\frac{G_t}{L_t} = \tau\frac{Y}{L_t} \quad \Rightarrow \quad g_t = \tau.y_t \qquad \text{Donde: } y_t = Ak_t^{\alpha}g_t^{1-\alpha}$$

$$g_t = \tau.Ak_t^{\alpha}g_t^{1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad g_t = \left[\tau.Ak_t^{\alpha}\right]^{1/\alpha}\ldots(II)$$

Reemplazando la ecuación (II) en la ecuación (I) y dividiendo la ecuación entre el numero de trabajadores de la economía (k_t)

$$\gamma_k = s(1-\tau)A\frac{k_t^{\alpha}}{k_t}\left[(\tau A)^{1/\alpha}k_t\right]^{1-\alpha} - (n+\delta)$$

$$\boxed{\gamma_k = s(1-\tau)A^{\frac{1}{\alpha}}.\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (n+\delta)}$$

Análisis

En esta parte analizaremos los casos, cuando la tasa marginal de tributación es cero, el cien por ciento y el caso intermedio.

Caso I: $\tau = 0$ (cuando la tasa marginal de tributación es nula)

Si la tasa marginal de tributación es nula, entonces el ingreso fiscal será nulo y esto significa, que no habrá financiamiento para el gasto de gobierno (educación pública, Salud pública, seguridad pública, defensa, justicia, etc.)

Esto implica que en esta economía habrá protesta popular, rebeliones, etc. La tasa de crecimiento de capital por trabajador será negativa.

Si $\tau = 0$ entonces $\gamma_k = s(1-0)A^{\frac{1}{\alpha}}.0^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (n+\delta)$

$$\gamma_k = -(n+\delta)$$

Caso II: $\tau = 1$ (cuando la tasa marginal de tributación es del cien por ciento)

El estado va obtener recursos de los productores, entonces para los productores no va haber incentivos para producir, entonces va ver disminución del nivel de producción y va haber salida de capitales en el país.

Esto implica que se obtendrá una tasa de crecimiento de capital por trabajador negativa.

Si $\tau = 1$ entonces $\gamma_k = s(1-1)A^{\frac{1}{\alpha}}.1^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (n+\delta)$

$$\gamma_k = -(n+\delta)$$

Caso III: $0 < \tau < 1$ (caso intermedio)

En este caso intermedio el estado va obtener ingresos fiscales y a su vez las empresas s e van a sentir incentivadas a producir. De otro lado dicha tasa de tributación τ , se puede financiar dicho gasto público

Si $0 < \tau < 1$ entonces $\gamma_k = s(1-\tau)A^{\frac{1}{\alpha}}.\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (n+\delta)$

Para maximizar la función se puede hallar igualando a cero la derivada de la tasa de crecimiento con respecto a τ .

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial \tau} = 0$$

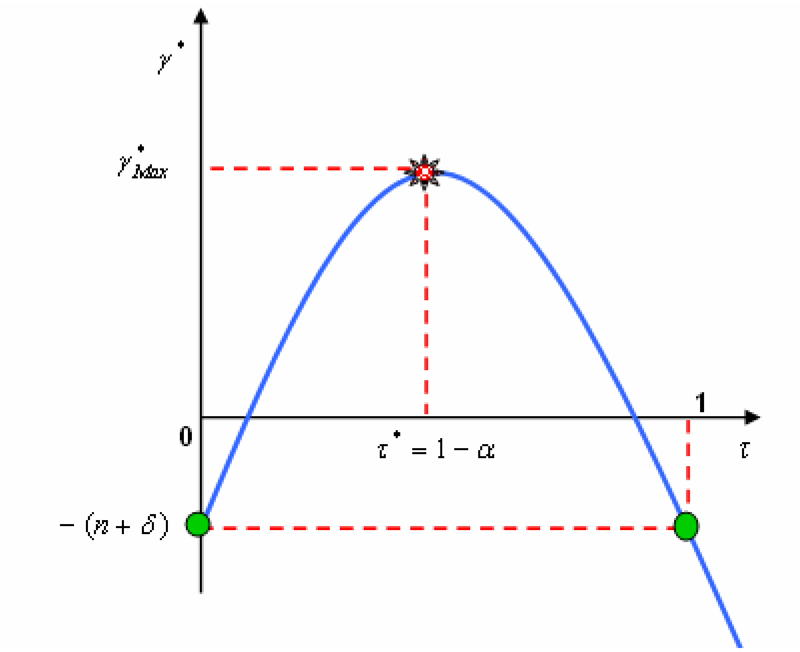
$$\partial\frac{\gamma_k}{\partial\tau} = sA^{\frac{1}{\alpha}}\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\right].\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}-1} - \frac{s.A^{1/\alpha}}{\alpha}.\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

$$\partial\frac{\gamma_k}{\partial\tau} = \underbrace{sA^{\frac{1}{\alpha}}\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}_{>0}\underbrace{\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\alpha}\right]}_{=0} = 0$$

$$\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{1}{\tau^*} - \frac{1}{\alpha}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau^* = 1-\alpha}$$

Por lo que el tipo impositivo que maximiza la tasa de crecimiento de la economía es $\tau^* = 1-\alpha$.

Relación entre τ y tasa de crecimiento de la economía



Problemas resueltos

Problema Nº1

Del modelo de crecimiento con sector publico, se tiene la función de producción dinámica $Y_t = 36K_t^{3/4}G_t^{1/4}$ se sabe que el ahorro agregado es del 36% del producto agregado cada año, la tasa de depreciaciones 6.5% cada año y la fuerza de trabajo es 2.5% al año. Se pide hallar:

a) La ecuación fundamenta con sector público.
b) Hallar la tasa de crecimiento del capital por trabajador.
c) Hallar la tasa de tributación que maximiza la tasa de crecimiento de la economía.
d) Hallar la tasa de crecimiento de la economía.

Rpt:

a) Dividiendo entre L_t a la función de producción agregada de la economía

$$\frac{Y_t}{L_t} = 36\frac{K_t^{3/4}}{L_t^{3/4}}\frac{G_t^{1/4}}{L_t^{1/4}} \Rightarrow \boxed{y_t = 36k_t^{3/4}g_t^{1/4}\ldots(FPI)}$$

De la condición de equilibrio macroeconómico en una economía cerrada tenemos:

$$Y_t = C_t + I^b + G_t$$

Reemplazando todas las identidades

$$Y_t = Pmgc.Yd + \dot{K}_t + \delta K_t + \tau .Y_t$$

$$Y_t = c.(1-\tau)Y_t + \dot{K}_t + \delta K_t + \tau .Y_t$$

$$Y_t = (1-c).(1-\tau) + \dot{K}_t + \delta K_t$$

Dividiendo la ecuación anterior entre la cantidad de trabajadores de la economía y reemplazando la identidad $1-c=s$

$$\frac{Y_t}{L_t} = (1-c).(1-\tau) + \frac{\dot{K}_t}{L_t} + \delta\frac{K_t}{L_t}$$

$$y_t = s.(1-\tau) + \dot{k}_t + (\delta + n)k_t$$

Despejando $\dot{k}_t$ reemplazando la (FPI)

$$\boxed{\dot{k}_t = 0.36(1-\tau)36k_t^{3/4}g_t^{1/4} - 0.09k_t\text{, la ecuación fundamental}}$$

b) De la condición fundamental dividiendo entre el capital por trabajador k_t

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = 0.36(1-\tau)36\frac{k_t^{3/4}}{k_t}g_t^{1/4} - 0.09\ldots(\xi)$$

$$G_t = \tau.Y_t \Rightarrow \frac{G_t}{L_t} = \tau.\frac{Y_t}{L_t} \quad \Rightarrow \quad g_t = \tau.(36k_t^{3/4}g_t^{1/4}) \Rightarrow g_t = (36.\tau)^{4/3}k_t\ldots(\psi)$$

Reemplazando (ψ) en la ecuación (ξ) y dividiendo entre k_t

$$\gamma_k = 0.36(1-\tau)36\frac{k_t^{3/4}}{k_t}\left[(36\tau)^{4/3}k_t\right]^{1/4} - 0.09$$

Representa esta ecuación la tasa de crecimiento por trabajador

c) Como se asume $0<\tau<1$ en este caso intermedio, donde el estado de crecimiento de la economía se maximiza

$$\frac{\partial\gamma_k}{\partial\tau^*} = 0$$

$$\frac{\partial\gamma_k}{\partial\tau^*} = 0.36x(36)^{1/3}x\frac{1}{3}x\tau^{-2/3} - \frac{4}{3}0.36x(36)^{1/3}x\tau^{1/3}$$

$$\frac{\partial\gamma_k}{\partial\tau^*} = 0.36x(36)^{4/3}x\tau^{1/3}\left[\frac{1}{3}x\frac{1}{\tau} - \frac{4}{3}\right] = 0$$

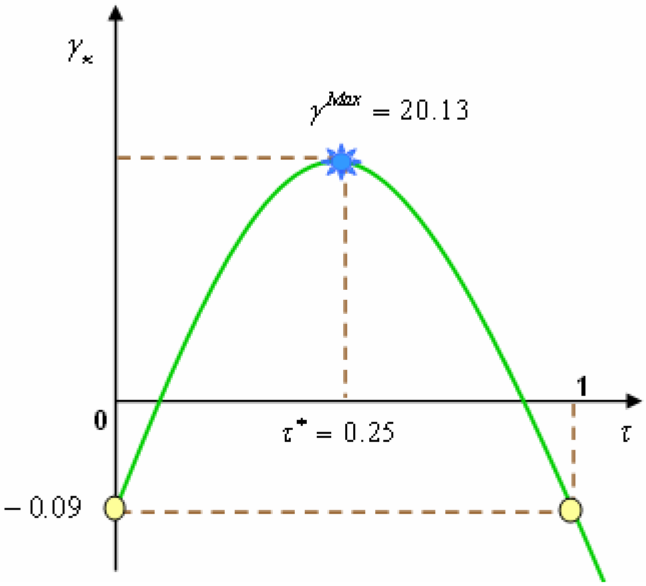
$$\left[\frac{1}{3}x\frac{1}{\tau} - \frac{4}{3}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau^* = 0.25 \approx 25\%}$$

d) De la tasa de crecimiento por trabajador tenemos
e)

$$\gamma_k^{Máx} = 0.36(1-0.25)36\left[36x0.25\right]^{1/3} - (0.09)$$

$$\boxed{\gamma_k^{Máx} = 20.1284}$$

Dibujando del problema Nº1



Problema Nº2

Del modelo de crecimiento con sector publico, se tiene la función de producción dinámica $Y_t = 25K_t^{4/5}G_t^{1/5}$ se sabe que el ahorro agregado es del 35% del producto agregado cada año, la tasa de depreciaciones 7% cada año y la fuerza de trabajo es 2% al año. Se pide hallar:

a) La ecuación fundamenta con sector público.

b) Hallar la tasa de crecimiento del capital por trabajador.

c) Hallar la tasa de tributación que maximiza la tasa de crecimiento de la economía.

d) Hallar la tasa de crecimiento de la economía.

Rpt:

a) Dividiendo entre L_t a la función de producción agregada de la economía

$$\frac{Y_t}{L_t} = 36\frac{K_t^{4/5}}{L_t^{4/5}}\frac{G_t^{1/5}}{L_t^{1/5}} \Longrightarrow \boxed{y_t = 25k_t^{4/5}g_t^{1/5}\ldots(FPI)}$$

De la condición de equilibrio macroeconómico en una economía cerrada tenemos:

$$Y_t = C_t + I^b + G_t$$

Reemplazando todas las identidades

$$Y_t = Pmgc.Yd + \dot{K}_t + \delta K_t + \tau.Y_t$$

$$Y_t = c.(1-\tau)Y_t + \dot{K}_t + \delta K_t + \tau .Y_t$$

$$Y_t = (1-c).(1-\tau) + \dot{K}_t + \delta K_t$$

Dividiendo la ecuación anterior entre la cantidad de trabajadores de la economía y reemplazando la identidad $1-c=s$

$$\frac{Y_t}{L_t} = (1-c).(1-\tau) + \frac{\dot{K}_t}{L_t} + \delta \frac{K_t}{L_t}$$

$$y_t = s.(1-\tau) + \dot{k}_t + (\delta + n)k_t$$

Despejando $\dot{k}_t$ reemplazando la (FPI)

$$\boxed{\dot{k}_t = 0.35(1-\tau)25k_t^{34/5}g_t^{1/5} - 0.09k_t \text{, la ecuación fundamental}}$$

b) De la condición fundamental dividiendo entre el capital por trabajador k_t

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = 0.35(1-\tau)25\frac{k_t^{4/5}}{k_t}g_t^{1/5} - 0.09\ldots(\xi)$$

$$G_t = \tau .Y_t \Rightarrow \frac{G_t}{L_t} = \tau .\frac{Y_t}{L_t} \quad \Longrightarrow \quad g_t = \tau .(25k_t^{3/4}g_t^{1/4}) \Rightarrow g_t = (25.\tau)^{4/3}k_t\ldots(\psi)$$

Reemplazando (ψ) en la ecuación (ξ) y dividiendo entre k_t

$$\gamma_k = 0.35(1-\tau)25\frac{k_t^{4/5}}{k_t}\left[(25\tau)^{4/5}k_t\right]^{1/5} - 0.09$$

Representa esta ecuación la tasa de crecimiento por trabajador

c) Como se asume $0<\tau<1$ en este caso intermedio, donde el estado de crecimiento de la economía se maximiza

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial \tau^*} = 0$$

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial \tau^*} = 0.35x(25)^{1/3}x\frac{1}{4}x\tau^{-3/4} - \frac{5}{4}0.35x(25)^{15/4}x\tau^{1/4}$$

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial \tau^*} = 0.35x(25)^{5/4} x\tau^{1/4}\left[\frac{1}{4}x\frac{1}{\tau} - \frac{5}{4}\right] = 0$$

$$\left[\frac{1}{4}x\frac{1}{\tau} - \frac{5}{4}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau^* = 0.20 \approx 20\%}$$

d) De la tasa de crecimiento por trabajador tenemos:

$$\gamma_k^{Máx} = 0.35(1-0.20)25[25x0.2]^{1/4} - (0.09)$$

$$\boxed{\gamma_k^{Máx} = 10.38}$$

Dibujando del problema Nº2