



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
(Universidad del Perú, Decana de América)

El Modelo de Crecimiento de Uzawa

El economista japonés Hirofumi Uzawa crea un modelo de crecimiento de dos sectores que propuso¹.

Supuestos del modelo

- ✓ Sea una economía capitalista sin relación con el exterior.
- ✓ Dicha economía solo produce dos bienes: • Bienes de consumo con un subíndice (c_t)
 - Bienes de capital con un subíndice (m)
- ✓ Habrán dos sectores productivos:
 - Sector de bienes de consumo.
 - Sector de bienes de capital.
- ✓ Cada sector produce con una función de producción Neoclásica.
- ✓ El sector de bienes de consumo es mas intensivo que el sector de bienes de capital.
- ✓ Los mercados de bienes y factores son mercados de competencia perfecta.
- ✓ Los trabajadores no ahorran $PMg(s_w) = 0$.
- ✓ Los capitalistas ahorran todo su beneficio $PMg(s_k) = 1$.
- ✓ La fuerza de trabajo crece a una tasa constante (n).

Nótese que todo modelo de crecimiento de dos bienes por su propia naturaleza es mas complejo que el modelo de *Solow*. Ciertamente habrá precios relativos de los bienes, de los factores de capital por trabajador sectorial, etc.

¹ El título de su trabajo se llamo "On a Two-Sector Model of Economic Growth, I"(En Modelo de Dos-sector de Crecimiento Económico, yo), 1961, RES.

Este modelo de equilibrio general de dos bienes es un modelo reducido. Obsérvese que *Uzawa*, simplifica el análisis con lo cual, los trabajadores no ahorran todo.

Sector de bienes de consumo

Se produce una función de producción Neoclásica de bienes de consumo.

$$Y_c = F(K_c, L_c)$$

Dividiendo la función entre L_c , tenemos:

$$\frac{Y_c}{L_c} = F\left(\frac{K_c}{L_c}, \frac{L_c}{L_c}\right) \Rightarrow \boxed{y_c = f(k_c) \dots \text{Función de producción intensiva}}$$

El producto del sector de bienes de consumo, Y_c , es igual al consumo real de bienes

de consumo: $Y_c = \frac{c}{P_c}$.

Donde;

c : Consumo nominal de bienes de consumo.

P_c : Precio del bien de consumo.

$\frac{c}{P_c}$: Consumo real de bienes de consumo.

El sector de bienes de capital

Se produce una función de producción Neoclásica de buen comportamiento.

$$Y_m = F(K_m, L_m)$$

Dividiendo entre L_m , tenemos:

$$\frac{Y_m}{L_m} = F\left(\frac{K_m}{L_m}, \frac{L_m}{L_m}\right) \Rightarrow \boxed{y_m = f(k_m) \dots \text{Función de producción intensiva}}$$

Donde;

I : Inversión nominal.

P_m : Precio de bien de capital.

$\frac{I}{P_m}$: Inversión real de bienes de capital.

Subíndice: m representa el bien de capital (maquinaria).

El producto del sector de bienes de capital Y_m , es igual a la inversión real de bienes

de capital: $Y_m = \frac{I}{P_m}$.

El equilibrio en el crecimiento proporcionado

Se asume que se llega al estado de crecimiento proporcionado, los mercados de factores van estar en equilibrio.

Mercado de trabajo

Se plantea que existe el sector de mercado de consumo y el mercado de bienes de capital.

a. Mercado de trabajo del sector de bienes de consumo

Que las empresas capitalistas van a contratar trabajadores en aquella cantidad, donde el salario real se iguale al salario nominal.

b. Mercado de trabajo del sector de capital

Las empresas capitalistas contratan trabajadores hasta, que la cantidad de salario nominal de consumo se iguale al salario de bienes de capital.

Mercado de capital

a. Mercado de capital en el sector de bienes de consumo

Las empresas maximizadoras de beneficios contratan maquinas, hasta que esta se iguale con la tasa de rendimiento real.

$$PMgK_c = \frac{r_c}{P_c}$$

b. Mercado de capital de bienes de capital

Se asume que el nivel de tasas de rendimiento nominal del capital, $r_c = r_m = r$ y también se asume el pleno uso de los factores, $L_c + L_m = \bar{L}$ y $K_c + K_m = \bar{K}$, donde:

$$PMK_m = \frac{r_m}{P_m}$$

$\frac{r_c}{P_c}$: Tasa de rendimiento real del capital en términos de bienes de consumo.

$\frac{r_m}{P_m}$: Tasa de rendimiento real del capital en términos de bienes de capital.

Ecuación fundamental de Uzawa

Partiendo de la condición de equilibrio macroeconómico, tenemos:

$$S^{real} \equiv I^{real} \Rightarrow \frac{S}{P_m} = \frac{I}{P_m}$$

Asume todos los capitalistas ahorran todo su beneficio.

$$\frac{S}{P_m} = s_K \cdot \frac{B}{P_m} \quad \text{donde: } s_K = PmgK_{capital} = 1$$

Reemplazando el valor que tenemos s_K .

$$\frac{S}{P_m} = \frac{B}{P_m} \Rightarrow \frac{S}{P_m} = \frac{r}{P_m} \cdot K$$

$$\text{Reemplazando } \frac{r}{P_m} \cdot K = \frac{I}{P_m} \dots (I)$$

Dividiendo a la ecuación (I) entre L , tenemos:

$$\frac{r}{P_m} \cdot \frac{K}{L} = \frac{I}{P_m} \cdot \frac{1}{L} \dots (II)$$

Recordando que la inversión neta por trabajador esta definida como: $\frac{I^n}{L} = \dot{k}_t + n \cdot k_t$, reemplazando la inversión neta en la ecuación (II).

$$\frac{r}{P_m} \cdot k_t = \dot{k}_t + n \cdot k_t \dots (III)$$

De la función de producción intensiva de $\frac{\partial y_m}{\partial k_m} = f'_m(\bullet) = PMK_m = \frac{r_m}{P_m}$

Reemplazando en la ecuación (III), tenemos:

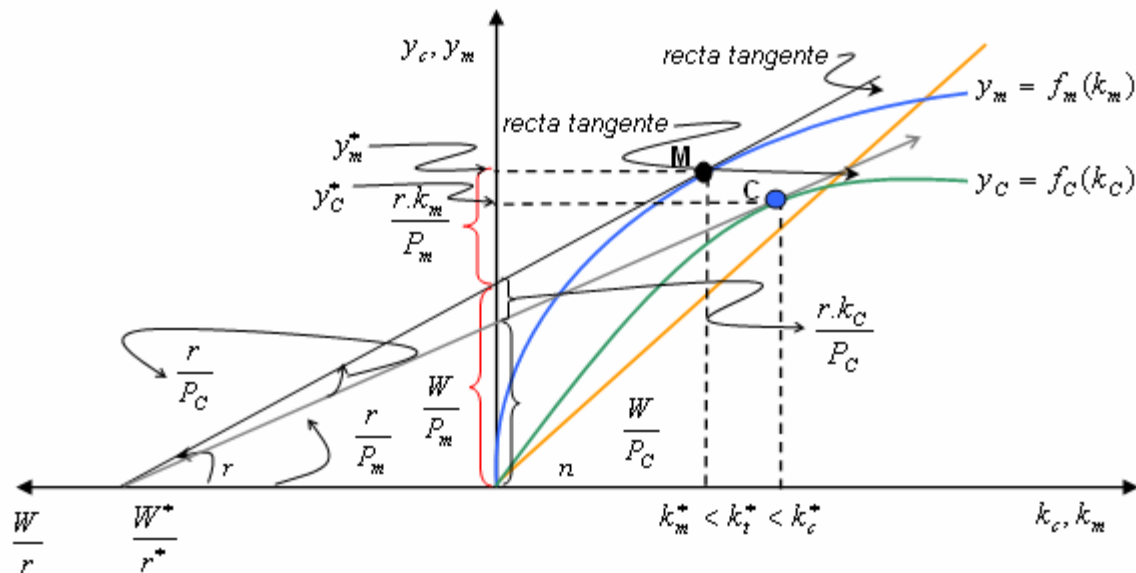
$$\dot{k}_t = f'_m \cdot k_t - n \cdot k_t, \text{ la ecuación fundamental de Uzawa}$$

Esta ecuación diferencial del proceso de acumulación en una economía capitalista de dos bienes. Va significar que la tasa de cambio del capital por trabajador es un remanente del producto marginal del capital del sector de maquinas, respecto a la ampliación de capital.

Estado de crecimiento proporcionado

En el estado de crecimiento proporcionado, la tasa de crecimiento del capital (g_k) es nula, entonces si $g_k = 0$, esto nos da: $f'_m = n$, que determina k^*_m .

Gráfica N° 1: Distribución del ingreso del modelo de Uzawa



En el Gráfico N°1, se puede apreciar la distribución del ingreso entre el sector de bienes capitalista y el sector de bienes de consumo, donde la función de producción de bienes de capital, es más intensiva que la función intensiva de bienes de consumo.

Nótese:

$$k_m^* < k_t^* < k_c^*$$

$$k_t^* = \theta.k_m^* + (1-\theta).k_c^* \quad i = c, m$$

Donde:

k_i^* : Capital por trabajador del sector i-ésimo.

y_i^* : Producto por trabajador del i-ésimo sector.

P_i : Precio del bien i-ésimo.

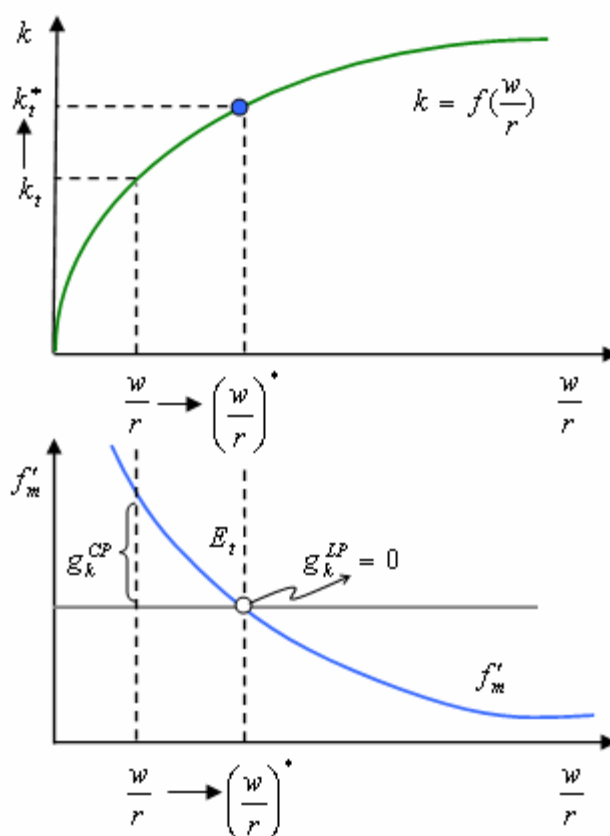
$\frac{W}{P_i}$: Salario real del bien i-ésimo.

$\frac{r}{P_i}$: Tasa de rendimiento real del capital en términos del bien i-ésimo.

$\frac{w}{r}$: Precio relativo de los factores.

$\frac{P_c}{P_m}$: Precio relativo de los bienes.

Gráfica N° 2: Estado de crecimiento proporcionado de *Uzawa*



Dividiendo la ecuación fundamental de *Uzawa* entre k_t , tenemos:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = f'_m - n \quad \Rightarrow \quad \boxed{g_k = f'_m - n}$$