



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
 (Universidad del Perú, Decana de América)

El Modelo de Harrod

Roy Harrod (1939) elabora un modelo que explica el crecimiento económico a largo plazo, de manera equilibrada (regular). Califico su teoría como el matrimonio entre “el principio de aceleración” y la “teoría del multiplicador” expresando con esto su posición keynesiana.

Por que usado el principio de *Keynes* que la inversión juega una doble función en la economía: Determina el ingreso y la demanda global, y por su característica del multiplicador que influya en la demanda y por su aparición de oferta aumenta la capacidad de producción. De manera que la condición para un crecimiento regular y equilibrado en la economía se realiza cuando el crecimiento de la oferta es igual al crecimiento de la demanda.

Keynes al introducir anticipadamente que el crecimiento es la determinación de la inversión en la economía, concluye que la relación que determina la tasa de crecimiento es inestable. Inspirando en este análisis, *Harrod* demostrará años más tarde que la inestabilidad del crecimiento económico, se puede obtener de la estabilidad y esta puede ser el fruto del azar o de intervenciones de estabilizaciones derivadas de instrumentos monetarios y presupuestarios del Estado.¹

Supuestos del modelo

Harrod considerara para su modelo que:

- ✓ Sea una economía sin relacionada con el exterior
- ✓ El ahorro agregado “S” es una fracción (proporción) constante “s” del ingreso nacional (renta) “Y”. $S = s.Y$, $0 < s < 1$
- ✓ la tasa de incremento del ingreso es un determinante importante de su demanda de ahorros.
- ✓ La fuerza de mano de obra “L” crece a una tasa constante. $L_t = L_0(1 + n)^t$
- ✓ La demanda es igual a la oferta. Con esto Harrod puede distinguir que las fluctuaciones en la trayectoria de crecimiento y las fluctuaciones, que en la actualidad se conoce como los ciclos de negocios, son cosas distintas, sin embargo, creía que ambos fenómenos deberían ser estudiados conjuntamente.

¹ El artículo de Harrod que se titula “An Essay in Dynamic Theory” (Un Ensayo en la Teoría Dinámica). Publicado en The Economic Journal (El Periódico Económico), Marzo 1939.

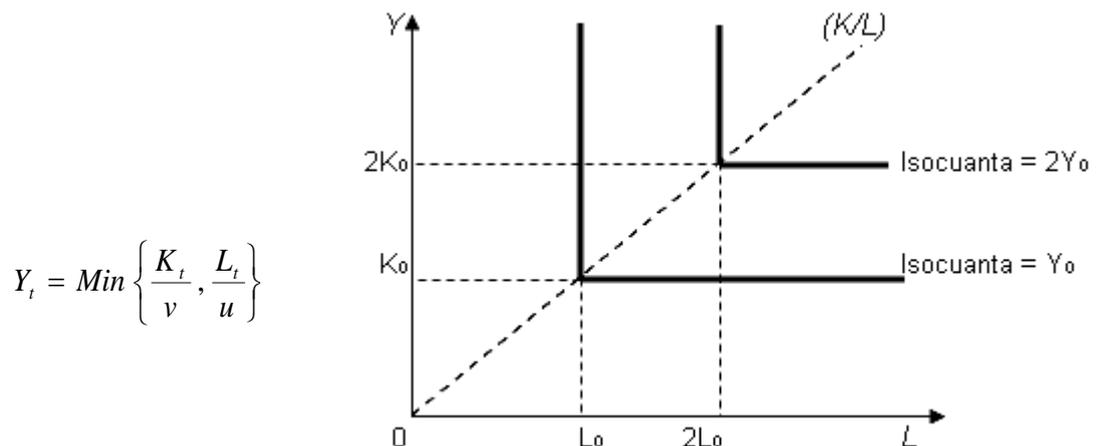
Función de Producción Agregada

Según *Harrod* la sociedad tiene una función de coeficientes fijos (capital y trabajo) de *Leontief*, de esta manera satisface el principio del acelerador.

El proceso de producción de la economía hay una sustituibilidad nula de los factores de la producción, de manera que para generar una unidad de producto (output) se necesitará de “*u*” (coeficiente fijo) unidades de capital y de “*v*” (también coeficiente fijo) unidades de mano de obra.

La función de producción escribe de la siguiente forma:

Gráfica N°1: La función de producción de Harrod



Donde:

Y_t : Producto agregado en el periodo “t”

K_t : Stock de capital agregado en el periodo “t”

L_t : Función de trabajo (La mano de obra o producción económica activa) en el periodo “t”

v : Relación capital – producto

u : Relación trajo – producto

En la gráfica N° 1, se observamos la imposibilidad de sustituir (K, L), o mejor dicho, dados los coeficientes fijos, las isocuantas toman la forma de ángulo recto, revisten la forma de una forma de escuadras con esquinas a lo largo de la línea $[0(\overline{K/L})]$.

Esa línea es el lugar geométrico en el que la ratio K y L es $\frac{v}{u}$, si los inputs están

plenamente empleados, el producto nacional será igual a la función de producción de Leontief. Además, hay que añadir que la unión de los vértices de los ángulos es el único camino para aumentar o disminuir la cantidad del producto.

Función de inversión

Harrod nos dice: Que la inversión es tipo aceleradora, esto significa que el volumen de la inversión va depender directamente de la variación del producto, dado el coeficiente de aceleración.

Partiendo de la condición de equilibrio en la que la demanda iguala a la oferta, establecemos que el ahorro iguala a la inversión (economía sin relación con el exterior). El ahorro es una fracción s del ingreso, mientras que la inversión es el incremento en el stock de capital. Esto que expresado por la ecuación.

$$I_t = v \cdot \Delta Y_t$$

Donde:

v : Coeficiente de aceleración, relación capital – producto.

I_t : Volumen de inversión.

ΔY_t : Variación del producto.

El crecimiento equilibrado se puede empezar por analizar por el ahorro ex-ante (deseado) y la inversión ex-ante sean iguales y después analizar de qué manera el crecimiento equilibrado requiere que se sostenga sin discontinuidad la proporción ex-ante entre el stock de capital y el ritmo de producción. El análisis ex post analiza la cantidad realizada efectiva.

a) Análisis Ex-ante

Antes que ocurra el fenómeno de los hechos que van hacer variables planeadas.

- Partiendo de la condición de equilibrio en la que la demanda iguala a la oferta, establecemos que el ahorro iguala a la inversión. El ahorro es una fracción s del ingreso, mientras que la inversión es el incremento en el stock de capital.
- La inversión se iguala con el volumen de ahorro se hay, como la razón de la propensión marginal ahorra requerida, respecto a la aceleración capital – producto requerida.
- La tasa de crecimiento garantizada es aquella tasa de decrecimiento del producto, que hace que los empresarios se sientan satisfechos por haber formulado un volumen.

Del equilibrio macroeconómico tenemos:

$$I = S = \Delta K \rightarrow v \cdot \Delta Y = s \cdot Y$$

Si describimos de esta forma como $Y = \frac{I}{s}$ se ve el rol del multiplicador tiene en esta teoría. Dividiendo ambos lados de la ecuación entre el cambio en el nivel de ingreso, ΔY . Obtenemos:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{s_r}{v_r}$$

La ecuación puede ser reescrito como

$$\frac{\Delta Y}{Y_r} = \frac{s_r}{v_r} = g_w, \text{ la ecuación fundamental de Harrod}$$

Debido a que $v = \frac{\Delta Y}{\Delta K}$ es el incremento que efectivamente ocurre en el stock de capital ante

un incremento en una unidad en el nivel de ingreso. Y constante, esta ecuación puede aproximarse con la siguiente formulación².

$$g_w = \frac{\frac{s}{\Delta Y_r}}{Y_r} \text{ La tasa de crecimiento efectiva, la que en realidad ocurre}$$

Donde:

r : Subíndice requerido o planeado.

g_w : Tasa de crecimiento garantizada.

s_r : Propensión marginal ahorrar.

v_r : Relación capital - producto requerido.

b) Análisis *Ex-post*

Este efectúa un análisis considerando las variables después del fenómeno ocurrido, partir de la identidad.

Si la inversión *ex post* es inferior a la *ex ante* entonces habrá un estímulo para el incremento de la producción, pues habría ocurrido una reducción indeseada de stocks de producción que son insuficientes. Lo contrario ocurrirá si la inversión *ex ante* es inferior a la *ex post*.

Para *Harrod* el equilibrio dinámico es intrínsecamente inestable³. Dado que la trayectoria de la producción que se sigue con la g_w es un movimiento en equilibrio, y ella representa que los productores han hecho las cosas tal como debían haber sido hechas. Por lo que los empresarios tendrán incentivos para seguir haciendo lo mismo.

De la identidad macroeconómica (Oferta igual a la demanda) tenemos;

$$I_e = S_e \Rightarrow v_e \cdot (\Delta Y_e) = s_e \cdot Y_e \Rightarrow \frac{\Delta Y_e}{Y_e} = \frac{s_e}{v_e}, \text{ entonces tenemos } g_e = \frac{s_e}{v_e}$$

² Si diferenciamos e igualamos cero a K/Y (que es constante, entonces) tenemos

$$\Delta (K / Y) = \Delta (v) \Rightarrow \frac{Y \Delta K - K \Delta Y}{Y^2} = 0, \text{ es decir. } \frac{\Delta K}{\Delta Y} = \frac{K}{Y}$$

³ Harrod no dice, que en el campo de la dinámica a diferencia de lo que ocurriría en el campo de la estática, una salida de la trayectoria de equilibrio en vez de autocorregirse se autoempeora. Debido a esto él consideró que g_w representa una trayectoria de equilibrio pero inestable

Donde:

e : Subíndice efectivo u observado.

g_e : Tasa de crecimiento efectiva.

s_e : Propensión marginal ahorrar efectiva.

v_e : Relación capital - producto efectivo.

Trayectoria de Crecimiento del producto

En esta parte se va definir la trayectoria de crecimiento garantizada y efectiva, con sus respectivas demostraciones.

a) Trayectoria de Crecimiento Garantizada

Es la ruta de crecimiento del producto que satisface a los empresarios, al igual que el ahorro y la inversión a través del tiempo.

$$Y_t = Y_0(1 + g_w)^t$$

Esta ecuación nos dice; que el producto en el periodo "t" crece a la tasa de crecimiento garantizada, partir de su valor inicial " Y_0 ".

Donde g_w es la tasa de crecimiento garantizada ("warranted rate of growth") de la economía, s : La propensión marginal ahorrar (la fracción del ahorro con respecto al PBI)

$$Y_t = Y_0 \left(1 + \frac{s_r}{v_r} \right)^t$$

Demostración; De la condición de equilibrio macroeconómico

$$I = S \Rightarrow v_r \underbrace{\Delta Y_{t+1}} = s_r \cdot Y_t$$

$$v_r \cdot [Y_{t+1} - Y_t] = s_r \cdot Y_t \Rightarrow v_r \cdot Y_{t+1} - v_r \cdot Y_t - s_r \cdot Y_t = 0$$

$$v_r \cdot Y_{t+1} - (v_r + s_r) \cdot Y_t = 0$$

Dividiendo a la ecuación anterior entre v_r

$$\frac{v_r}{v_r} \cdot Y_t - \underbrace{\left[\frac{v_r + s_r}{v_r} \right]} \cdot Y_t = 0$$

$$Y_{t+1} - b \cdot Y_t = 0$$

Características de la ecuación; Ecuación diferencial ordinaria, 1º orden (Primera diferencia), 1º grado (coeficiente constante "t") y termino nulo.

Solución homogénea; $Y_t = A \cdot b^t$, $A > 0$, $b > 0$ y $t > 0$

Donde; $b = \left[1 + \frac{s_r}{v_r} \right]$, $A =$ es constante Y_0

Reemplazando en la solución homogénea

$$Y_t = Y_0 \left(1 + \frac{s_r}{v_r} \right)^t$$

b) Trayectoria de Crecimiento Efectivo

Es la ruta de crecimiento de la producción efectiva a través del tiempo

$$Y_t = Y_0 (1 + g_e)^t$$

$$Y_t = Y_0 \left(1 + \frac{s_e}{v_e} \right)^t$$

Crece a una tasa constante y lo hace a través del tiempo del producto efectivo en el periodo “ t ” a la tasa constante efectiva “ g_e ” y lo hace a partir de su valor inicial.

Harrod considera también que hay una tasa de crecimiento el cual la llama tasa natural. Esta depende del incremento de la población. No existe tendencia inherente alguna coincidan pues, para empezar, no existe una única tasa de crecimiento garantizado ya que esta depende del nivel de actividad.

Para esto plantea un análisis de dinámica, el equilibrio de mercado de trabajo ocurre cuando se igualan las tasas de crecimiento de la oferta con la demanda de trabajo.

El sistema económico no puede avanzar a una velocidad mayor que la que la tasa natural. Si la tasa de crecimiento posible fuera superior a la tasa natural se produciría una tendencia a la depresión, por el mecanismo explicado previamente. Por esto, cuando la tasa garantizada empieza a exceder la tasa natural, aquella debe ser reducida⁴.

$$g_s^L = g_d^L \Rightarrow m \equiv g$$

Donde;

g_s^L : Tasa de crecimiento de la oferta de trabajo (m)

g_d^L : Tasa de crecimiento de la demanda de trabajo (g)

Acerca del Crecimiento Proporcional

Harrod nos dice que el crecimiento en el cual todas las variables agregadas crecen a la misma tasa constante, en el cual su modelo de crecimiento proporcional se expresa cuando se iguala a las tres tasa de crecimiento.

$$g_e = g_w = g_n$$

➤ Proposición

⁴ El lector puede concluir que, la tasa de crecimiento garantizado no puede superar a la tasa natural, sino que debería ser igual.

La economía capitalista en el largo plazo puede lograr el crecimiento proporcionado, pero ello tiene la baja probabilidad. Harrod señala que es muy difícil que en el capitalismo se de el crecimiento proporcionado, por que ello significa lograr un crecimiento con el pleno uso productivo a través del tiempo, debido a que en el capitalismo existe incertidumbre, riesgo y que los capitalista para inversión, debe tomar en cuenta dichas situaciones, en consecuencia es muy difícil que se igualen las tres tasas de crecimiento por que cada uno de ellos es independiente.

➤ **Proposición de keynes**

Keynes nos dice que la economía en el corto plazo puede tener un equilibrio con desempleo (diferencia con los clásicos).

➤ **Proposición de harrod**

Harrod extiende la proposición de Keynes al largo plazo y propone una hipótesis que se formule y que se demuestre.

Acerca de la Inestabilidad

Harrod no da su proposición en que la economía en el largo plazo tiende a un equilibrio inestable, donde cualquier diferencia entre la tasa de crecimiento efectivo y la tasa de crecimiento garantizado lleva a la economía alejarse del equilibrio, por eso nos plantea dos casos:

Caso I ($g_e < g_w$)

Este es el caso de recesión e inflación, se plantea a que el incremento del capital efectivo supera al incremento del capital requerido ante lo cual los empresarios disminuyen la tasa de crecimiento efectivo, ampliando la brecha de diferencia con la cual se expresa la recesión de la economía.

Caso II ($g_e > g_w$)

En este caso de auge e inflación, esto se da cuando el incremento del capital efectivo es inferior al crecimiento del capital garantizado requerido. Ante lo cual los empresarios aumentan la inversión y con ello elevan el proceso de producción efectivo, elevando la tasa de crecimiento efectivo y con ello ampliando la brecha.

Políticas de Crecimiento ejercicios resueltos

Problema #1

Hallar la tasa de ahorro de la sociedad que permite una tasa de crecimiento del producto de 8.2%, conociendo que la relación capital – producto es 1.5.

Rpt:

Sabiendo que $g_w = \frac{s}{v} \Rightarrow s = g_w \cdot v \Rightarrow s = 8.2\% \cdot 1.5 = 0.123$

Entonces el ahorro de la sociedad es de 12.3%.

Problema #2

Se sabe que la tasa de crecimiento del producto per cápita es de 8%, la relación capita – producto es de 3 y la tasa de crecimiento de la población es de 1% al año. Se pide hallar la tasa de ahorro de la sociedad.

Rpt:

Se sabe la relación per cápita esta expresada como; $\frac{Y_t}{L_t} = y_t \Rightarrow Y_t = y_t \cdot L_t \dots (I)$

Adelantando un periodo a la relación per-cápita⁵. $Y_{t+1} = y_{t+1} \cdot L_{t+1} \dots (II)$

Dividiendo (II) entre (I)

$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \frac{y_{t+1}}{y_t} \cdot \frac{L_{t+1}}{L_t}$ Aplicando logaritmo neperiano

$$\ln\left(\frac{Y_{t+1}}{Y_t}\right) = \ln\left(\frac{y_{t+1}}{y_t}\right) + \ln\left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right) \Rightarrow g_Y = g_y + g_L$$

$$g_{PBI} = g_{PBI(per-cápita)} + g_{(pobla)}$$

Donde:

g_{PBI} : Tasa de crecimiento del producto

g_{pobla} : Tasa de crecimiento poblacional

$g_{PBI(per-cápita)}$: tasa de crecimiento del producto per-cápita

⁵ Otra manera de expresar esta relación y poder obtener tasas de crecimiento de forma sencilla es mediante un truco matemático, para esto expresaremos la relación per-cápita, luego aplicaremos logaritmo y por ultimo tomaremos una derivada parcial a la ecuación.

$$\frac{Y_t}{L_t} = y_t \Rightarrow Y_t = L_t \cdot y_t \Rightarrow \ln(Y_t) = \ln(L_t) + \ln(y_t) \Rightarrow \frac{d(\ln Y_t)}{dt} = \frac{d(\ln y_t)}{dt} + \frac{d(\ln L_t)}{dt}$$

Entonces esto queda expresado en tasas de crecimiento como se aprecia $g_{Y(t)} = g_{y(t)} + g_{L(t)}$

De la ecuación de Harrod $g_w = \frac{s}{v} \Rightarrow s = (g_w) \cdot v \Rightarrow s = (g_{PBI(per-cápita)} + g_{(pobla)}) \cdot v$
 $s = (8\% + 1\%) \cdot 3 = 0.27$

La tasa de ahorro de la sociedad es de 27%.

Problema #3

Se sabe que la tasa de crecimiento de un país el año 2008 fue de 9.3% y el capital utilizado fue de 21,000 mil millones de dólares y el producto fue de 5,500 mil millones de dólares. Se pide hallar la tasa de ahorro de la sociedad.

Rpt:

De la relación capital – producto $v = \frac{K}{L} = \frac{21,000}{5,500} = 3.81$

Reemplazando este resultado en la ecuación de Harrod

$g_w = \frac{s}{v} \Rightarrow s = g_w \cdot v \Rightarrow s = 9.3\% \cdot 3.81 = 0.35443$

Entonces la tasa de ahorro de esta sociedad es de 35.4443%