



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
 (Universidad del Perú, Decana de América)

Modelo de Jones-Manuelli

En esta parte intentaremos presentar una tecnología que presente rendimientos decrecientes de capital, pero que viola las condiciones de Inada.

Esta función fue propuesta originalmente por *Kurz* (1968) y después fue reintroducida a la literatura del crecimiento económico por *Jones* y *Manuelli* (1990).

Supuestos del modelo

Abandona la función de producción Neoclásica y asumen:

- ✓ Asume una función de producción tipo *Sobelow*
- ✓ La función tiene rendimientos constantes a escala.
- ✓ La función presenta rendimientos positivos de capital y trabajo.
- ✓ Viola los supuestos de Inada.
- ✓ Representa una tasa de ahorro constante.

Función de producción agregada (*Sobelow*)

Sea una función de producción que combina la función *Cobb-Douglas* y la función de producción AK, mencionada en Capítulo anterior de este libro. Por lo que la función de producción tiene la forma:

$$Y_t = AK_t + BK_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \dots (FPA)$$

s.a : $0 < \alpha < 1$

Donde

Y_t : Producto agregado en el instante " t ".

K_t : Stock de capital agregado en el instante " t ".

L_t : Fuerza de trabajo agregada en el instante " t ".

A : Índice de nivel de tecnología de la función de producción AK.

B : Índice de nivel de trabajo en la función de producción tipo *Cobb-Douglas*.

α : Elasticidad del producto respecto al capital.

$1 - \alpha$: Elasticidad producto respecto a la fuerza de trabajo.

Propiedades de la función de producción

$$1^{\circ}. F(K_t, L_t) = AK_t + BK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

Si multiplicamos a la función por un $\lambda > 0$

$$F(\lambda K_t, \lambda L_t) = A(\lambda K_t) + B(\lambda K_t)^{\alpha} (\lambda L_t)^{1-\alpha}$$

$$F(\lambda K_t, \lambda L_t) = \lambda \cdot (AK_t + BK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}) = \lambda Y_t$$

La función presenta rendimientos de escala constante

2^o. Los productos marginales del capital y trabajo son positivos.

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = PmgK = A + \underbrace{\alpha BK_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha}}_{+ \quad +} > 0$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = PmgL = \underbrace{(1-\alpha)BK_t^{\alpha} L_t^{-\alpha}}_{+ \quad +} > 0$$

Recordemos que $0 < \alpha < 1$ entonces $-\alpha > -1 \dots +1 \Rightarrow 1 - \alpha > 0$, es un valor positivo

La derivada de los productos marginales es decreciente y negativa.

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial K_t^2} = \frac{\partial PmgK}{\partial K_t} = \underbrace{\alpha(\alpha-1)BK_t^{\alpha-2} L_t^{1-\alpha}}_{+ \quad - \quad +} < 0$$

Recordemos $0 < \alpha < 1$, entonces $0 < \alpha < 1 \dots -1 \Rightarrow -1 < \alpha - 1 < 0$ es una constante negativa.

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial L_t^2} = \frac{\partial PmgL}{\partial L_t} = \underbrace{(-\alpha)(1-\alpha)BK_t^{\alpha} L_t^{-(1+\alpha)}}_{- \quad + \quad +} > 0$$

Recordemos que $0 < \alpha < 1$, entonces $0 < \alpha < 1 \dots -1 \Rightarrow -1 < -\alpha < 0 \dots +1$ es una constante positiva $0 < 1 - \alpha < 1$.

3^o. Veremos que los límites requeridos por las condiciones de INADA se cumplen:

$$\lim_{K_t \rightarrow \infty} PmgK = A + \alpha B \frac{1}{K_t^{1-\alpha}} \cdot k_t^{\eta} L_t^{1-\alpha} = A$$

(1/∞) ≈ 0

$$\lim_{K_t \rightarrow 0} PmgK = A + \alpha B \frac{1}{K_t^{1-\alpha}} \cdot k_t^{\eta} L_t^{1-\alpha} = \infty$$

(1/0) ≈ ∞

$$\lim_{L_t \rightarrow \infty} PmgL = (1-\alpha)BK_t^{\alpha} \frac{1}{L_t^{\alpha}} = 0$$

(1/∞) ≈ 0

$$\lim_{L \rightarrow 0} PmgL = (1-\alpha)BK_t^\alpha \frac{1}{L_t^\alpha} \approx \infty$$

Vemos que cumple las condiciones de INADA pero solo parcialmente, por que la única diferencia es la primera condición de INADA.

Ecuación dinámica fundamental

- ❖ Para hallar la función en términos por trabajador pasa remos a dividir la función de producción de la economía entre la fuerza de trabajo agregada

❖

$$\frac{Y_t}{L_t} = A \frac{K_t}{L_t} + B \frac{K_t^\alpha}{L_t^\alpha} \frac{L_t^{1-\alpha}}{L_t^{1-\alpha}} \Rightarrow y_t = Ak_t + Bk_t^\alpha \dots (\text{FPI Sobelow})$$

De la ecuación fundamental de *Solow – Swan*

$$\dot{k}_t = sf(k_t) - (n + \delta)k_t$$

Se tiene: $y_t = Ak_t + Bk_t^\alpha$

Reemplazando en la ecuación de *Solow – Swan*

$$\dot{k}_t = sAk_t + sBk_t^\alpha - (n + \delta)k_t, \text{ la ecuación de Jones -Manuelli}$$

Significa que es una ecuación diferencial del proceso de acumulación de capital en una economía capitalista que tiene como función de producción *Sobelow*.

Versión de *Solow*

Dividiendo la ecuación fundamental entre k_t

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = sA + sB \frac{k_t^\alpha}{k_t} - (n + \delta)$$

$$\gamma_k = sA + sB \frac{k_t^\alpha}{k_t} - (n + \delta)$$

Como se puede apreciar en la ecuación de la tasa de crecimiento, donde la curva de depreciación parece descrita por, $n + \delta$ que representa una línea horizontal, en cambio la curva de ahorro es representada por una hipérbola.

Analizaremos que pasa si k_t se acerca cada vez mas acero, entonces la curva de ahorro tiende al infinito por que el término $sBk_t^{\alpha-1}$, tiende al infinito, esto se puede verificar mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \gamma_k &= s.A + s.B \frac{1}{k_t^{1-\alpha}} - (n + \delta) \quad (1/0) \approx \infty \\ \lim_{k \rightarrow 0} \gamma_k &= s.A + \infty - (n + \delta) \\ \lim_{k \rightarrow 0} \gamma_k &= \infty \end{aligned}$$

En cambio cuando k_t aumenta cada vez mas hasta tender al infinito, la curva de ahorro se aproxima a sA , donde converge. En este caso podemos apreciar que cuando $t k$ va al infinito la tasa de crecimiento que da expresada como la diferencia entre sA y $n + \delta$, como se puede verificar mediante la siguiente ecuación:

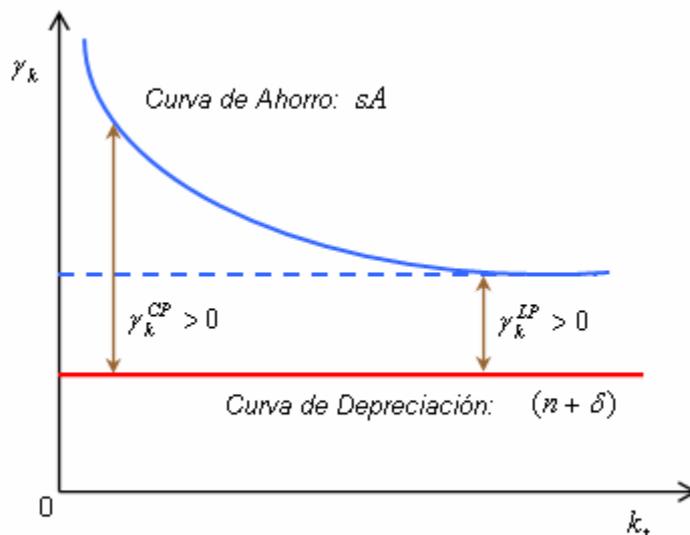
$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \gamma_k &= s.A + s.B \frac{1}{k_t^{1-\alpha}} - (n + \delta) \quad (1/\infty) \approx 0 \\ \lim_{k \rightarrow 0} \gamma_k &= s.A + 0 - (n + \delta) \\ \lim_{k \rightarrow 0} \gamma_k &= s.A - (n + \delta) \end{aligned}$$

En esta parte analizaremos que el desenvolvimiento dinámico esta economía va depender del desenvolvimiento de sus componentes.

Análisis

Caso I

Un alto nivel de tecnología (A) tal que la curva de ahorro supera a la curva de depreciación $s.A > (n + \delta)$, como se puede apreciar en el gráfico.

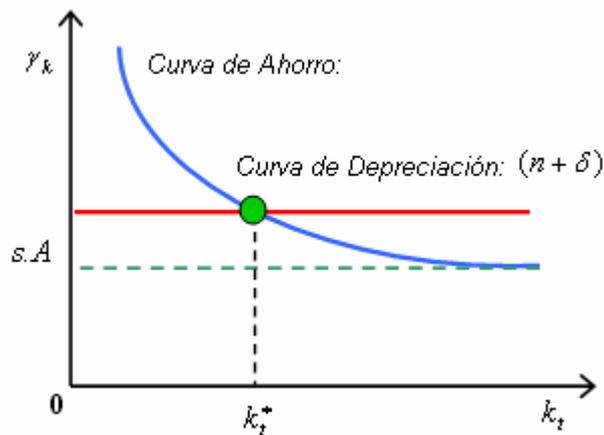
Un alto nivel de tecnología**Características:**

- La curva de ahorro es decreciente pero asintótica a sA .
- La curva de ahorro supera a la curva de depreciación $s.A > (n + \delta)$.
- La tasa de crecimiento por trabajador en el corto plazo es mayor que la tasa de crecimiento por trabajador de largo plazo $\gamma_k^{CP} > \gamma_k^{LP} > 0$.
- En el largo plazo no existe un crecimiento proporcionado, sino existe un crecimiento progresivo en donde $\gamma_k > 0$ entonces $s.A > (n + \delta)$, el capital por trabajador queda indeterminado.
- Este caso es similar a los modelos de crecimiento AZ.

CASO II

Un bajo nivel de tecnología (A), tal que la curva de ahorro se corta en un punto $s.A < (n + \delta)$ como se aprecia en el gráfico

Un bajo nivel de tecnología



Características

- La curva de ahorro es una curva decreciente pero asintótica a $s.A$.
- En el largo plazo $s.A > (n + \delta)$.
- En el largo plazo existe un estado proporcionado (la curva de ahorro y la curva de depreciación se intersecan) en un punto.
- Si $\gamma_k > 0$ entonces $s.A \geq (n + \delta)$ se determina el capital por trabajador óptimo k_t^* .
- Este caso se parece a los modelos Neoclásico de crecimiento.