



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
 (Universidad del Perú, Decana de América)

Modelo Neoclásico con capital Humano

El capital humano es definido como el stock de conocimientos que es valorizado económicamente e incorporado por los individuos (calificación, estado de salud, higiene...). Esta idea de la acumulación de capital humano fue puesta en valor en 1988 por Lucas, que desarrollo en su modelo el capital humano voluntario que corresponde a una acumulación de conocimientos (*schooling*) y la acumulación involuntaria (*learning by doing*).

Al mejorar su nivel de educación y de formación cada persona aumenta el stock de capital humano de una nación y de allí contribuye al mejoramiento de la productividad de la economía nacional, es decir, la productividad privada del capital humano tiene un efecto externo positivo.¹

Veamos ahora que nos dice Schultz, T. (1961), "Investment in human capital". La inversión en capital humano constituye uno de los principales elementos explicativos del crecimiento económico, siendo responsable en buena medida de la divergencia apreciada entre el crecimiento del producto y el de la cantidad de factores productivos utilizados, al originar una mejora cualitativa del factor trabajo que aumenta su capacidad productiva y genera crecimiento económico. Abundando en esta idea, la inversión en capital humano fue rápidamente incorporada.²

Supuestos del modelo

- ✓ Sea una economía capitalista sin relación con el exterior.
- ✓ Dicha economía tiene dos sectores:
 - Un sector de producción de bien final, representado con el subíndice "t".
 - Un sector educación, representado con el subíndice "E".³
- ✓ Los mercados de bienes y factores son de competencia perfecta.
- ✓ La fuerza de trabajo crece a una tasa constante y exógena: n
- ✓ Existen dos tipos de capital.
- ✓ El stock de capital físico se deprecia a una tasa constante: δ_K
- ✓ El stock de capital humano se deprecia a una tasa constante: δ_H ⁴

¹ Es la definición de capital humano a sido extraído de *Gerald Destinobles, A.: (2007) Introducción a los modelos de crecimiento económico exógeno y endógeno. Edición electrónica gratuita. Texto completo en www.eumed.net/libros/2007a/243/*

² *Schultz, T. (1961), "Investment in human capital", American Economic Review, 51, Pag.:1-17*

³ Ha medida que un país se desarrolla, el estado general de salud y educación de su población mejora. Esto es un síntoma de bienestar social, en si mismo, pero también por ello la economía se hace mas productiva.

- ✓ El ahorro se destina para la inversión del sector de producción del bien final.
- ✓ Toda la población trabaja.
- ✓ La economía produce un bien final.

Sector de producción del bien final

En este sector se considera que la tecnología utilizada por el bien final es distinta a la tecnología para la obtención del capital humano y físico. Su función de este sector se encuentra representada de la siguiente manera:

$$Y_t = K_t^\alpha H_t^\beta (BL_t)^{1-\alpha-\beta}$$

Donde

Y_t : Producto del sector de bien final en el instante “ t ”.

K_t : Stock de capital físico destinado al sector de bien final en el instante “ t ”.

L_t : Fuerza de trabajo destinada al sector de bien final en el instante “ t ”.

H_t : Stock de capital humano destinado al sector de bien final en el instante “ t ”.

BL_t : Fuerza de trabajo eficaz destinada al sector de bien final.

α : Elasticidad producto respecto al capital físico.

β : Elasticidad producto respecto al capital humano.

B : Índice de nivel de tecnología del sector de bien final.

El ahorro destinado a la acumulación de capital físico en el sector de producción del bien final, es una proporción s_K , del producto del bien final.

$$S_K = s_K \cdot Y_t \quad \text{s.a: } 0 < s_K < 1$$

Función de Producción intensiva

Para hallar esta función de producción intensiva debemos de dividir a la función de producción del bien final, entre la cantidad de trabajo eficaz: BL_t

$$\frac{Y_t}{BL_t} = K_t^\alpha H_t^\beta \frac{(BL_t)^{1-\alpha-\beta}}{BL_t} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y_t}{BL_t} = \frac{K_t^\alpha H_t^\beta}{(BL_t)^{\alpha+\beta}}$$

⁴ Esta depreciación del capital humano se interpreta, como la imposibilidad que los padres transmitan todo su capital humano a sus hijos, antes que los padres fenezcán.

$$\frac{Y_t}{BL_t} = \frac{K_t^\alpha}{(BL_t)^\alpha} \frac{H_t^\beta}{(BL_t)^\beta} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y_t}{BL_t} = \left[\frac{K_t}{BL_t} \right]^\alpha \left[\frac{H_t}{BL_t} \right]^\beta$$

$$\frac{y_t}{BL_t} = \left[\frac{k_t}{BL_t} \right]^\alpha \left[\frac{h_t}{BL_t} \right]^\beta \quad \Rightarrow \quad \bar{y}_t = \bar{k}_t^\alpha \bar{h}_t^\beta \dots (FPI)$$

La ecuación que se encuentra en el recuadro es la función de producción intensiva del sector del bien final.

Sea

$$\frac{y_t}{B} = \bar{y}_t : \text{Producto por trabajador eficaz.}$$

$$\frac{k_t}{B} = \bar{k}_t : \text{Capital físico por trabajador eficaz.}$$

$$\frac{h_t}{B} = \bar{h}_t : \text{Capital humano por trabajador eficaz.}$$

Nota: Las barra de las variables denotan que son variables en unidades de eficiencia.

Sector educación

Este sector de producción se encuentra representado por la siguiente función:

$$Y_E = K_E^\alpha H_E^\beta (BL_E)^{1-\alpha-\beta}$$

Donde

Y_E : Producto del sector educacional.

K_E : Stock de capital físico destinado al sector educacional.

L_E : Fuerza de trabajo destinada al sector educacional.

H_E : Stock de capital humano destinado al sector educacional.

BL_E : Fuerza de trabajo eficaz destinada al sector educacional.

α : Elasticidad producto respecto al capital físico.

β : Elasticidad producto respecto al capital humano.

B : Índice de nivel de tecnología del sector educacional.

El ahorro destina a la acumulación de capital humano en el sector educacional, es una proporción s_H , del producto del bien final.

$$S_H = s_H \cdot Y_t \quad \text{s.a.} : 0 < s_H < 1$$

Función de Producción intensiva

Para hallar esta función de producción intensiva debemos de dividir a la función de producción del sector educacional, entre la cantidad de trabajo eficaz: BL_t

$$\frac{Y_{Et}}{BL_E} = K_E^\alpha H_E^\beta \frac{(BL_E)^{1-\alpha-\beta}}{BL_E} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y_E}{BL_E} = \frac{K_E^\alpha H_E^\beta}{(BL_E)^{\alpha+\beta}}$$

$$\frac{Y_E}{BL_E} = \frac{K_E^\alpha}{(BL_E)^\alpha} \frac{H_E^\beta}{(BL_E)^\beta} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y_E}{BL_E} = \left[\frac{K_E}{BL_E} \right]^\alpha \left[\frac{H_E}{BL_E} \right]^\beta$$

$$\frac{y_E}{BL_E} = \left[\frac{k_E}{BL_E} \right]^\alpha \left[\frac{h_E}{BL_E} \right]^\beta \quad \Rightarrow \quad \bar{y}_t = \bar{k}_t^\alpha \bar{h}_t^\beta \dots (FPI)$$

La ecuación que se encuentra en el recuadro es la función de producción intensiva del sector del bien final.

Sea

$$\frac{y_E}{B} = \bar{y}_E : \text{Producto por trabajador eficaz en el sector educacional.}$$

$$\frac{k_E}{B} = \bar{k}_E : \text{Capital físico por trabajador eficaz en el sector educacional.}$$

$$\frac{h_E}{B} = \bar{h}_E : \text{Capital humano por trabajador eficaz en el sector educacional.}$$

Ecuación dinámica del sector de producción del bien final

De la ecuación fundamental de *Solow – Swan* con progreso tecnológico tenemos:

$$\dot{\bar{k}}_t = sf(\bar{k}_t) - (n + m_L + \delta)\bar{k}_t$$

$$\text{Se tiene } \bar{y}_t = f(\bar{k}_t) = \bar{k}_t^\alpha \bar{h}_t^\beta \dots (FPI) \quad 0 < s_K < 1$$

$$\dot{\bar{k}}_t = s_K \bar{k}_t^\alpha \bar{h}_t^\beta - (n + m_L + \delta_K)\bar{k}_t$$

Es una ecuación del proceso de acumulación del capital físico en el sector de producción de bienes finales.

Equilibrio dinámico en el sector de producción de bienes finales

En el crecimiento promocionado se llega cuando $\gamma_{\bar{k}} = 0$

Si la tasa de crecimiento es nula $\frac{1}{\bar{k}_t} \frac{\partial \bar{k}_t}{\partial t} = 0$, entonces $\frac{s_K \bar{k}_t^\alpha \bar{h}_t^\beta}{\bar{k}_t} = (n + m_L + \delta_K)$ se determina el capital por trabajador eficaz (\bar{k}_t^*)

$$\frac{s_K \bar{h}_t^\beta}{n + m_L + \delta_K} = \frac{\bar{k}_t}{\bar{k}_t^\alpha} \Rightarrow \boxed{\bar{k}_t^* = \left[\frac{s_K \bar{h}_t^\beta}{n + m_L + \delta_K} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

Ecuación dinámica del sector educación

De la ecuación fundamental de Solow – Swan con progreso tecnológico tenemos:

$$\dot{\bar{h}}_t = sf(\bar{h}_t) - (n + m_L + \delta) \bar{h}_t$$

Se tiene $\bar{y}_t = f(\bar{k}_E) = \bar{k}_E^\alpha \bar{h}_E^\beta \dots (FPI) \quad 0 < s_H < 1$

$$\boxed{\dot{\bar{h}}_E = s_K \bar{k}_E^\alpha \bar{h}_E^\beta - (n + m_L + \delta_H) \bar{h}_E}$$

Es una ecuación del proceso de acumulación del capital humano en el sector educacional.

Equilibrio dinámico en el sector educacional

En el crecimiento promocionado se llega cuando $\gamma_{\bar{h}} = 0$

Si la tasa de crecimiento es nula $\frac{1}{\bar{h}_t} \frac{\partial \bar{h}_t}{\partial t} = 0$, entonces $\frac{s_K \bar{k}_t^\alpha \bar{h}_t^\beta}{\bar{h}_t} = (n + m_L + \delta_H)$ se determina el capital humano por trabajador eficaz (\bar{h}_t^*)

$$\frac{s_K \bar{k}_t^\alpha \bar{h}_t^\beta}{n + m_L + \delta_H} = \frac{\bar{h}_t}{\bar{h}_t^\beta} \Rightarrow \boxed{\bar{h}_t^* = \left[\frac{s_K \bar{k}_t^\alpha}{n + m_L + \delta_H} \right]^{\frac{1}{1-\beta}}}$$

Diagrama de fases

Para analizar el diagrama de fases adecuadamente plantearemos, el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$1^{\text{er}} \text{ Ecuación diferencial: } \dot{\bar{k}}_t = s_K \bar{k}_t^\alpha \bar{h}_t^\beta - (n + m_L + \delta_K) \bar{k}_t$$

$$2^{\text{da}} \text{ Ecuación diferencial: } \dot{\bar{h}}_t = s_H \bar{k}_t^\alpha \bar{h}_t^\beta - (n + m_H + \delta_H) \bar{h}_t$$

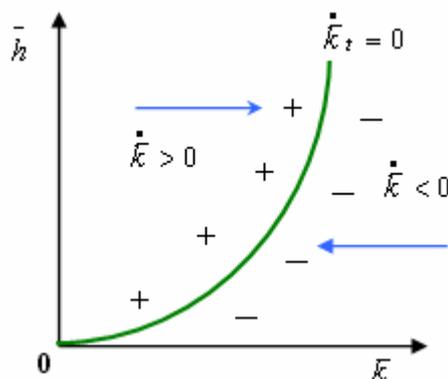
Encontrando la curva $\dot{\bar{k}}_t$

De la primera ecuación diferencial

$$\text{Si } \dot{\bar{k}}_t = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = s_K \bar{k}_t^\alpha \bar{h}_t^\beta - (n + m_L + \delta_K) \bar{k}_t$$

$$\text{Entonces: } s_K \bar{k}_t^\alpha \bar{h}_t^\beta = (n + m_L + \delta_K) \bar{k}_t$$

Comportamiento de $\dot{\bar{k}} = 0$



Si nos situamos por encima de la curva $\dot{\bar{k}}_t = 0$, vemos que un pequeño movimiento de \bar{h}_t irá asociado a un crecimiento de $\dot{\bar{k}}_t > 0$: De la primera ecuación diferencial, tenemos que la derivada de $\dot{\bar{k}}_t$, con respecto a \bar{h}_t nos da el sentido de las flechas como veremos a continuación:

$$\frac{\partial \dot{\bar{k}}_t}{\partial \bar{h}_t} = \beta \cdot s_K \bar{k}_t^\alpha \bar{h}_t^{\beta-1} > 0$$

Esta derivada nos quiere decir que a medida que aumenta el capital humano la secuencia de signos es creciente: $\{-, 0, +\}$ entonces concluimos por encima de la curva $\dot{\bar{k}}_t = 0$, entonces el capital crece $\dot{\bar{k}}_t > 0$, como se puede visualizar en el gráfico

[6.25], que se muestra en la parte superior de la página. Denotamos el movimiento de flecha hacia la derecha, por que el eje horizontal aparece \bar{k}_t y también por que a medida que nos ubiquemos más a la derecha el capital físico por trabajador crecerá.

De la misma manera analizaremos que pasa si ubicamos un vector por debajo de la curva $\dot{\bar{k}}_t = 0$, las flechas apuntan así la izquierda, diciéndonos que por debajo de la curva $\dot{\bar{k}}_t = 0$ el capital decrece $\dot{\bar{k}}_t < 0$, en este caso las flechas apuntaran hacia la izquierda, denotando que el capital a medida que se acerca al origen decrece.

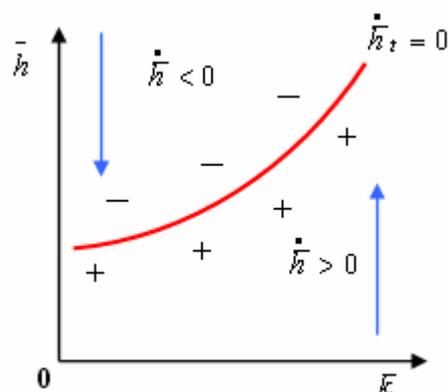
Encontrando la curva $\dot{\bar{h}}_t$

De la segunda ecuación diferencial

Si $\dot{\bar{h}}_t = 0$ \Rightarrow $0 = s_H \cdot \bar{k}_t^\alpha \bar{h}_t^\beta - (n + m_L + \delta_H) \bar{h}_t$

Entonces: $s_H \cdot \bar{k}_t^\alpha \bar{h}_t^\beta = (n + m_L + \delta_H) \bar{h}_t$

Comportamiento de $\dot{\bar{h}} = 0$



Si nos situamos por debajo de la curva $\dot{\bar{h}}_t = 0$, vemos que un pequeño movimiento de \bar{k}_t irá asociado a un crecimiento de $\dot{\bar{h}}_t = 0$. De la segunda ecuación diferencial tenemos que la derivada de $\dot{\bar{h}}_t$ con respecto a \bar{k}_t nos da el sentido de las flechas como veremos a continuación.

$$\frac{\partial \dot{\bar{h}}_t}{\partial \bar{k}_t} = \alpha \cdot s_H \bar{k}_t^{\alpha-1} \bar{h}_t^\beta > 0$$

Esta derivada nos quiere decir que a medida que aumenta el capital físico por trabajador la secuencia de signos es creciente: $\{-, 0, +\}$ entonces concluimos por encima de la curva, $\dot{\bar{h}}_t = 0$ entonces el capital humano crece $\dot{\bar{h}}_t > 0$, como se puede

visualizar en el gráfí], que se muestra. Denotamos el movimiento de flecha hacia arriba, por que el eje vertical aparece \bar{h}_t y también por que a medida que nos ubiquemos más arriba el capital humano crecerá.

De la misma manera analizaremos que pasa si ubicamos un vector por encima de la curva $\dot{\bar{h}}_t = 0$, las flechas apuntan hacia abajo, diciéndonos que por debajo de la curva $\dot{\bar{h}}_t = 0$ el capital humano decrece $\dot{\bar{h}}_t < 0$, en este caso las flechas apuntaran hacia abajo, denotando que el capital humano a medida que se acerca al origen decrece.

Análisis cuantitativo

Después de haber unido los dos gráfícos anteriores, veremos que la grafico que se forma al juntar estos grafico tiene la siguiente forma, como se puede apreciar en la grafíca], donde lo primero que se puede apreciar, que el modelo converge en todos los p untos a un solo estado de crecimiento proporcionado, donde este equilibrio dinámico es estable en el tiempo.

Por lo que el modelo en el largo plazo presenta un equilibrio aerodinámico estable, donde todas las líneas convergen hacia un punto de equilibrio.

Equilibrio del Modelo de Crecimiento con Capital Humano

