UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
(Universidad del Perú, Decana de América)

El Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

En esta nota estudiaremos las decisiones de las familias de como toman sus decisiones de consumo y ahorro. Un supuesto del modelo neoclásico que parecía poco realista, es que en el modelo neoclásico las familias eran a la vez consumidoras y productoras, como si se tratase de *Robinson Crusoe*.

También analizaremos las decisiones que toman los agentes económicos, consumidores y empresas. Por un lado, analizaremos como las familias toman sus decisiones de consumo y ahorro. Paralelamente analizaremos las decisiones de inversión y contratación de mano de obra que hacen las empresas. El objetivo es estudiar cual es el resultado que obtiene una economía en la que dejamos que sean los consumidores los que toman sus decisiones de consumo y las empresas sus decisiones de inversión. En el contexto de esta economía estaremos preocupados por analizar cuales son los determinantes del crecimiento económico.

Como sabemos en la vida real las empresas y los consumidores son instituciones separadas que interactúan en un lugar llamado mercado. Las familias distribuyen su renta entre consumo y ahorro. Las empresas contratan trabajo a cambio de un salario y venden el producto a cambio de un precio. Empresas y familias se encuentran en el mercado y los precios del trabajo y el capital son tales que los tres mercados se vacía. (Modelo de equilibrio general de *Ramsey* (1928)).

Esta nota esta basada en el modelo de *Ramsey* (1928) y que, posteriormente perfecciona do por *Cass* (1965) y Koopmans (1965), donde incorpora la función de producción neoclásica y va considerar también el modelo de *Solow.*

El modelo de *Ramsey-Cass-Koopmans* también es conocido como el modelo d e horizonte infinito y para los economistas, este modelo es la continuación del modelo de *Solow*, pero desarrollado en un contexto de optimización de los agentes económicos (firmas, familias). Algunas características de este modelo son: Que las firmas competitivas rentan capital y contratan trabajo para producir, un numero fijo de familias que viven por siempre, ofrecen la fuerza laboral, consumen y ahorran, excluye todas las imperfecciones de los mercados.

Supuestos del modelo

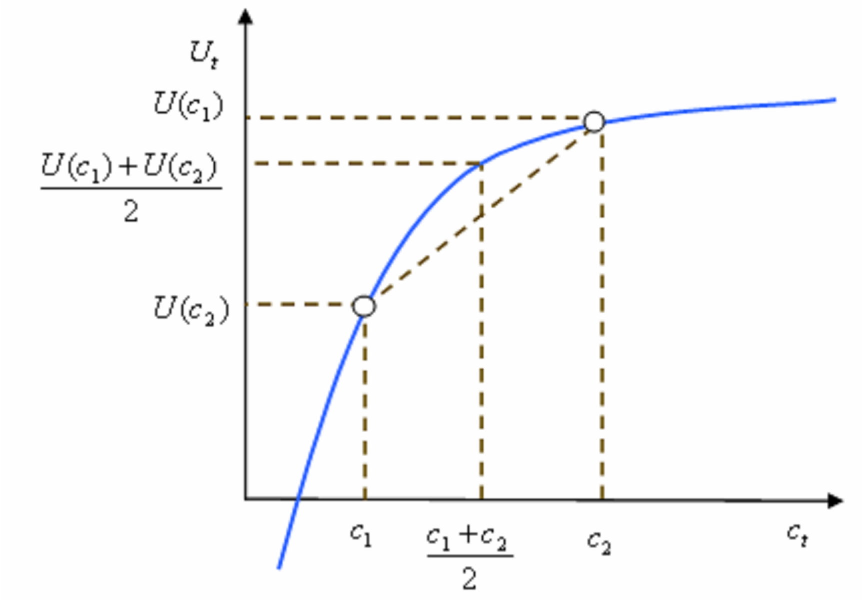
A los supuestos básicos del modelo de *Solow* se le añaden los siguientes supuestos:

- ✓ Existe una función neoclásica agregada de buen comportamiento.

- ✓ Las familias son consumidoras y productoras (tipo *Robinson Crusoe*).
- ✓ Las familias son de linaje y viven muchos años, esto quiere decir que los agentes de este modelo son de dinastía o familias, siendo L_t la dinastía del modelo.
- ✓ Existe una función de utilidad de los individuos, que depende del consumo por trabajador $U_t = U(c_t)$.

✓ La magnitud de la función de utilidad marginal del consumo es positiva esto quiere decir es una función es cóncava. La concavidad de la utilidad refleja el deseo de la gente de tener trayectorias de consumo más o menos lisas o suaves en el tiempo. Que la función de utilidad sea lisa, significa que los consumidores prefieren consumir un poco cada día que consumir un poco mucho y otro nada. La relación entre concavidad de la función de utilidad y el deseo de alisar el consumo (es decir querer consumir mas o menos lo mismo cada día) se puede apreciar en el gráfico Nº 1.

Gráfico Nº 1: Concavidad de la Utilidad



Que la función de utilidad se cóncava quiere decir que:

$$U(c_1)+U(c_2) < U\left[\frac{c_1+c_2}{2}\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[U(c_1)+U(c_2)\right] < U\left[\frac{c_1+c_2}{2}\right]$$

$c_t = c_1 + c_2$

La utilidad derivada de consumir c_t, es mayor cuando el consumo total se ha repartido, que cuando no se reparte.

Sea la función utilidad[1] :

$$\boxed{U(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta}}$$

En esta función, θ es una constante que representa el grado de concavidad de la función de utilidad. Contra mayor sea θ, mayor será la concavidad de la función de utilidad, mayor serán los deseos de los agentes de suavizar el consumo en el tiempo.

Si $\theta = 0$, no querrían suavizar su consumo en el tiempo y en caso:

$$U(c_1) + U(c_2) = 2U\left[\frac{c_1 + c_2}{2}\right]$$

- ✓ La curva de utilidad marginal es decreciente.
- ✓ Existen una función de preferencias intertemporal, siendo la tasa de descuento $\rho > 0$[2].

Ecuación de movimiento

De la condición macroeconómica tenemos:

$Y_t = C_t + I_t^b$

Dividiendo la condición entre el numero de trabajadores de la sociedad (L_t) tenemos;

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{C_t}{L_t} + \frac{I_t^b}{L_t} \quad \Longrightarrow \quad y_t = c_t + \frac{I^b}{L_t} \Rightarrow f(k_t) = c_t + \dot{k}_t + (n+\delta)k_t \ldots (I)$$

Despejando $\dot{k}_t$ de la ecuación (I)

$$\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (n+\delta)k_t \ldots (I)$$

Donde:

---

[1] Típicamente se usa una forma específica para la función de utilidad instantánea. Para la forma en este caso se denomina utilidad con aversión relativa al riesgo constante (ARRC).

[2] Para *Ramsey* esta tasa se debe a su aparición exclusivamente a la debilidad de la imaginación, por que los individuos aunque altruistas tienen un egonismo paterno dentro de un mundo de altruismo generacional. Pero veremos que para solucionar el problema de la convergencia tendremos que utilizar el factor de descuento que tiene el término $\rho > 0$.

$\dot{k}_t$: Representa la tasa de cambio por trabajador.

c_t: Consumo por trabajador.

y_t: Producto por trabajador.

k_t: Capital por trabajador.

δ : Tasa de descuento.

n: Tasa de crecimiento de la población.

Otro método de cómo obtener a ecuación de movimiento es mediante la maximización de la empresa.

Decisión de la empresa

Definimos los beneficios de la empresa en términos per cápita.

$$\pi = \frac{\Pi}{L_t} = f(k_t) - w - (r+\delta)\frac{K_t}{L_t}$$

Decisión de inversión de la empresa:

$$Máx: \quad \pi = f(k_t) - w - (r+\delta)k_t$$

$$C.P.O: \quad \frac{\partial \pi}{\partial k_t} = 0 \Rightarrow f'(k_t) = r + \delta \ldots (II)$$

Decisión de contratación de la empresa:

$$Máx: \quad \Pi = L_t f(k_t) - wL_t - (r+\delta)K_t$$

$$C.P.O: \quad \frac{\partial \Pi}{\partial L_t} = 0 \Rightarrow f(k_t) + L_t \frac{\partial f}{\partial k_t}\frac{\partial k_t}{\partial L_t} - w = 0$$

$$f(k_t) + L_t f'(k_t) k_t \frac{1}{L_t} = w \quad \Longrightarrow \quad \left[f(k_t) - f'(k_t)k_t \right] = w \ldots (III)$$

Al igual que vimos en el modelo de *Solow - Swan*, en una economía cerrada la inversión es igual al ahorro, por eso en esta economía se tiene que cumplir que la cantidad de capital que compran las empresas que denotamos por $\dot{k}_t$ es igual al ahorro de las familias que es igual a $\dot{b}_t$. Así, teniendo en cuenta que ahorro es igual a inversión la ecuación que describe el comportamiento del capital per-capita es la siguiente:

$$\dot{k}_t = w - c_t + (r-n)k_t \ldots (IV)$$

Que se obtiene de reemplazar $\dot{b}_t$ por $\dot{k}_t$ en la restricción presupuestaria de las familias.

Sustituyendo la ecuación (III) en la (IV) nos queda lo siguiente:

$$\dot{k}_t = f(k_t) - f'(k_t)k_t - c_t + (r-n)k_t \ldots (V)$$

Sustituyendo la ecuación (II) en la ecuación (V):

$\boxed{\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (n+\delta)k_t}$, Ley de evolución del capital per cápita

El problema de la convergencia

Esto se refiere a que en esta economía se va maximizar la función de utilidad social a través del tiempo.

$$Máx: \quad J = \int_0^{\infty} \frac{U(c_t)}{e^{\rho t}} dt$$

Si consideramos a la población.

La Población

Sea que la población que tenga una tasa de crecimiento exógena y constante: n

$$P_t = P_0 . e^{nt}$$

Si $P_{(0)} = 1 \quad \Rightarrow \quad P_t = e^{nt}$

Sea que la fuerza de trabajo agregada L_t, crezca a una tasa constante exógena: n

$$L_t = L_o e^{nt}$$

Demostración que la tasa de crecimiento es constante, tenemos:

$\frac{dL_t}{dt} = \dot{L}_t = nL_{(0)}e^{nt}$, dividiendo esta ecuación entre L_t, tenemos:

$$\frac{\dot{L}_t}{L_t} = \frac{nL_{(0)}e^{nt}}{L_{(0)}e^{nt}} = n$$

Si $L_{(0)} = 1 \quad \Rightarrow \quad L_t = e^{nt}$

Se asume que toda la población trabaja, luego se incorpora la población a la función "J".

$$Máx: \quad J = \int_0^{\infty} U(c_t) L_t e^{-\rho t} dt$$

Reemplazando: $L_t = P_t$

$$Máx: \quad J=\int_0^\infty U(c_t)e^{nt}.e^{-\rho t}dt$$

$$Máx: \quad J=\int_0^\infty U(c_t).e^{-(\rho-n)t}dt$$

Esta sociedad maximiza su utilidad a través del tiempo. En esta sociedad cada individuo busca su propio interés y sin proponérselo de ante mano, busca maximizar la función de bienestar general a través del tiempo, para ello busca determinar la trayectoria general optima del consumo por trabajador a través del tiempo.

Planteamiento del problema

$$Máx: \quad J=\int_0^\infty U(c_t).e^{-(\rho-n)t}dt\ldots\text{(Función Objetivo)}$$

$$s.a: \quad \dot{k}_t = f(k_t)-c_t-(n+\delta)k_t\ldots\text{(Ecuación de Movimiento)}$$

$$k(t_0)=k_0\ldots\text{(Condición Inicial)}$$

$$k_0>0: Dado$$

$$0<c_t<f(k_t)$$

$$0<t<\infty$$

Para solucionar el problema se debe cumplir que: $\rho>n$ es decir que la tasa de descuento tiene que ser mayor que la tasa de crecimiento de la población.

1) Comenzaremos a solucionar el problema de control optimo por el método que nos dejo *Pontryagin*, que se basa en la metodología del *Hamiltoniano*, para esto pasaremos a plantear el hamiltoniano.

$$H(c_t,k_t,\lambda_t,t)=U(c_t).e^{-(\rho-n).t}+\lambda_t\left[f(k_k)-c_t-(n+\delta)k_t\right]$$

Donde
k_t : Variable de estado.
c_t: Variable de control.
λ_t: Variable de coestado.

Condición de Primer Orden (CIO)

2) Tomando la derivada del Hamiltoniano con respecto de la variable de control e igualándolo a cero. $\frac{\partial H}{\partial c_t}\equiv\frac{\partial U_t}{\partial c_t}+\frac{\partial \lambda_t}{\partial c_t}=0$

$$\frac{\partial H}{\partial c_t}=e^{-(\rho-n)t}.U'(c_t)+\lambda_t(-1)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{U'(c_t)}{e^{(\rho-n)t}}=\lambda_t\ldots(I)$$

Valor actual de la utilidad = Multiplicador Dinámico

3) Tomando la derivada del Hamiltoniano con respecto a la variable de estado y imponiendo la igualdad al negativo de la derivada del multiplicador con respecto al tiempo.

$$\frac{\partial H}{\partial k_t} = -\dot{\lambda}_t \quad \Rightarrow \quad \lambda_t\left[f'(k_t)-(n+\delta)\right] = -\dot{\lambda}_t$$

$$\left[f'(k_t)-(n+\delta)\right] = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} \ldots (II)$$

4) Tomando la derivada con respecto al multiplicado lagrangiano, tenemos:

$$\frac{\partial H}{\partial k_t} = \dot{k}_t \quad \Rightarrow \quad \left[f(k_t)-c_t-(n+\delta)\right] = \dot{k}_t$$

$$\left[f(k_t)-c_t-(n+\delta)\right] = \dot{k}_t \ldots (III)$$

Condición de Segundo Orden (CIIO)

$$\frac{\partial^2 H}{\partial c_t^2} = \underbrace{e^{-(\rho-n)t}}_{>0}\;\text{x}\;\underbrace{.U''(c_t)}_{0<} < 0$$

Esta condición nos asegura un consumo máximo y La concavidad del consumo.

5) La condición de transversalidad-multiplica la variable de estado por el precio implícito de capital (multiplicador de Lagrange) en el momento terminal y pone igual a cero.

Condición de Transversalidad

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_t k_t = 0$$

Esto quiere decir que $\lambda_t = 0$ (el precio implícito de capital en el periodo final) o que $k_t = 0$ (el stock de capital en el momento que muere).

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_t = \underbrace{\frac{1}{e^{(\rho-n)\infty}}}_{(1/\infty)\approx 0} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \lambda_t = 0$$

De la ecuación (II) tenemos $f'(k_t)-(n+\delta) = -g_\lambda \Rightarrow Pmgk-(n+\delta) = -g_\lambda$

Aplicando logaritmo neperiano a la ecuación (I) tenemos:

$$-(\rho - n)t.\overset{\approx 1}{\cancel{\ln e}} + \ln U'(c_t) = \ln\lambda_t \quad \Rightarrow \quad -(\rho - n)t + \ln U'(c_y) = \ln\lambda_t$$

Aplicando la derivada temporal (derivada con respecto a "*t*") a la ecuación tenemos:

$$-(\rho - n.\frac{dt}{dt} + \frac{d[\ln U'(c_t)]}{dt} = \frac{d(\ln\lambda_t)}{dt}$$

$$-(\rho - n) + \frac{1}{U'(c_t)}.\underbrace{\frac{dU'(c_t)}{\partial c_t}}.\underbrace{\frac{\partial c_t}{dt}} = \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}$$

$$-(\rho - n) + \frac{1}{U'(c_t)}.U''(c_t).\dot{c}_t = \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}$$

A la ecuación anterior multiplicaremos y dividiremos entre el consumo por trabajador (c_t)

$$-(\rho - n) + \underbrace{\frac{1}{U'(c_t)}.U''(c_t).\frac{1}{c_t}}.\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}$$

$$-(\rho - n) - \theta.\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}\ldots(\xi)$$

Donde

$\theta = \frac{1}{U'(c_t)}.U''(c_t).\frac{1}{c_t}$: Representa la elasticidad de la utilidad marginal con respecto al consumo por trabajador.

Multiplicando por -1 a ala ecuación (ξ), tenemos:

$$(\rho - n) + \theta.\frac{\dot{c}_t}{c_t} = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}\ldots(IV)$$

Igualando las ecuación (II) con la ecuación (IV)

$$f'(k_t) - (n + \delta) = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = (\rho - n) + \theta.\frac{\dot{c}_t}{c_t}$$

Despejando $\frac{\dot{c}_t}{c_t}$, tenemos:

$$\boxed{\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{f'(k_t) - (\rho + \delta)}{\theta}\ldots(V)\text{, La proposición } \textit{Ramsey - Keynes}}$$

Esta ecuación nos dice que la tasa óptima del consumo por trabajador es la razón del producto marginal del capital menos la tasa de depreciación y la tasa de descuento intertemporal dividido sobre la elasticidad de la utilidad marginal con respecto al consumo por trabajador.

$\gamma_c = \frac{1}{\theta}[f'(k_t) - (\rho + \delta)]$: Evolución del consumo por unidad de trabajo efectivo.

Así mismo se puede expresar la ecuación como: $\dot{c}_t = \frac{1}{\theta}[f'(k_t) - (\rho + \delta)]c_t \ldots (VI)$

5.1.1 Sistema de Ecuaciones Diferenciales (Diagrama de fases)

Existen dos ecuaciones diferenciales que nos ayudan a graficar el diagrama de fases de este modelo son:

1er Ecuación diferencial: $\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (n+\delta)k_t$

2da Ecuación diferencial: $\dot{c}_t = \frac{1}{\theta}[f'(k_t) - (\rho + \delta)]c_t$

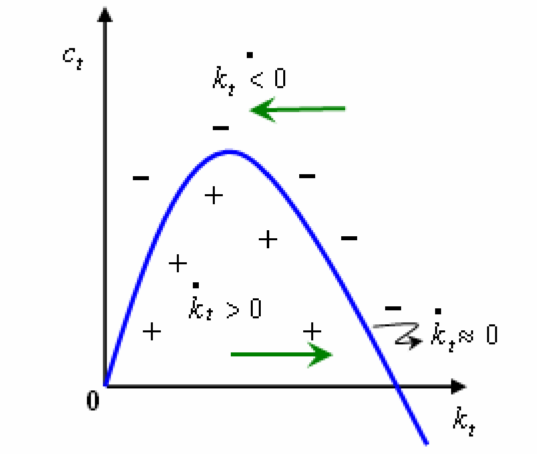
Encontrando la curva: $\dot{k} = 0$

De la 1er Ecuación diferencial

Si $\dot{k}_t = 0$ $\Rightarrow$ $0 = f(k_t) - c_t - (n+\delta)k_t$

Entonces $c_t = f(k_t) - (n+\delta)k_t$

Gráfico Nº 2: Comportamiento de $\dot{k} = 0$



Si nos situamos por encima de la curva $\dot{k}_t = 0$, vemos que un pequeño movimiento de c_t irá asociada a una disminución de $\dot{k}_t < 0$. Dado que la 1er Ecuación diferencial, donde el consumo aparece con signo negativo, entonces concluimos que por encima de la $\dot{k}_t = 0$, el capital decrece $\dot{k}_t < 0$. Denotamos el movimiento de flechas así la izquierda, tal como aparece en el gráfico Nº 2. Las flechas se dirigen en forma horizontal por que en el eje horizontal aparece k_t.

Derivando la primera ecuación diferencial con respecto a c_t se obtiene:

$$\frac{d\dot{k}_t}{dc_t} = -1 < 0$$

Donde se demuestra que al aumentar el valor de c_t disminuye el valor de $\dot{k}_t$

De la misma manera analizaremos que pasa si ubicamos un vector por debajo de la curva $\dot{k}_t = 0$, las flechas apuntan así la derecha, diciéndonos que por debajo de la curva $\dot{k}_t = 0$, el capital crece $\dot{k}_t > 0$, en este caso las flechas apuntan hacia la derecha.

Encontrando la curva: $\dot{c} = 0$

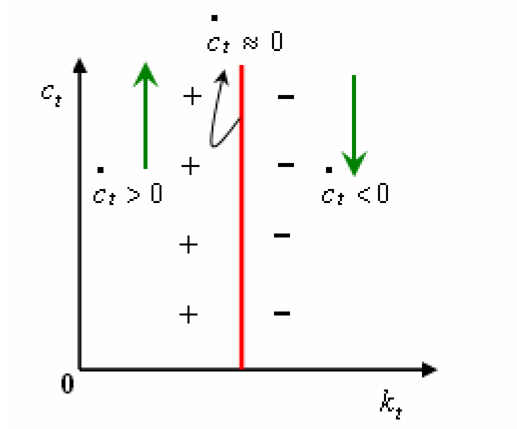
De la 2da ecuación diferencial

Si $\dot{c}_t = 0 \Rightarrow 0 = \frac{c_t}{\theta}\left[f'(k_t) - (\rho + \delta)\right]$

Entonces $f'(k_t) = (\rho + \delta) \Rightarrow$

$Pmgk = (\rho + \delta)$, Representa la ecuación de una recta que es paralela al eje de ordenadas

Gráfico Nº 3: Comportamiento de $\dot{c} = 0$



Esto quiere decir si nos encontramos por encima de la curva $\dot{c}_t = 0$, por un aumento de un poquito de k_t, Dado que $f'(k_t)$ es una función creciente, por lo que el valor de $\dot{c}$ de la 2da Ecuación diferencial pasa hacer negativo $\dot{c}_t < 0$. Concluimos que a la derecha de la curva, el consumo decrece, por lo que se dibuja las flechas apuntando hacia abajo.

Para demostrar esto pasaremos a derivar la segunda ecuación con respecto a k_t

$$\frac{d\dot{c}_t}{dk_t} = -\frac{1}{U''(c_t)}.U'(c_t).f''(k) < 0$$

Lo que nos dice que a la derecha de $\dot{c}_t = 0$ será $\dot{c}_t < 0$

De la misma manera una disminución de k_t hará que $\dot{c}_t > 0$ sea positivo. Esto significa que nos encontramos a la izquierda de $\dot{c}_t = 0$, las flechas apuntarán hacia arriba como se aprecia en el gráfico Nº 3, donde las flechas positivas se denota por $\dot{c}_t > 0$.

Análisis Cualitativo

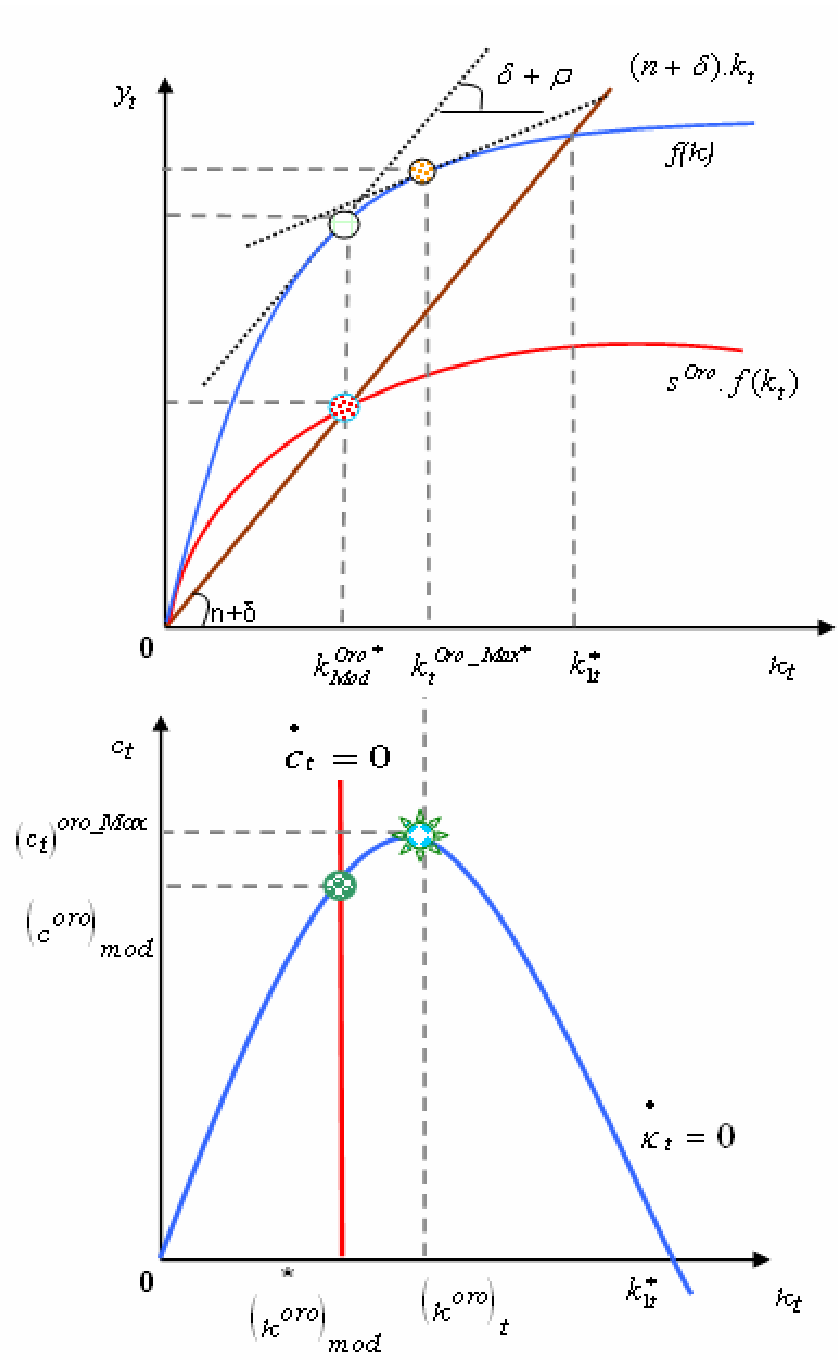
Ahora antes de juntar los dos diagramas de fases en un solo pasaremos a hallar el consumo de oro modificado $c_{\text{mod}}^{Oro^*}$, que es aquel consumo que maximiza el bienestar de los agentes de la sociedad en su conjunto y también se tendrá un nuevo capital por trabajador modificado con en nuevo consumo.

Para esto de la 2da Ecuación diferencial $\dot{c}_t = \frac{1}{\theta}[f'(k_t) - (\rho + \delta)]c_t$, reemplazando el valor de $\dot{c}_t = 0$, con esto $0 = [f'(k_t) - (\rho + \delta)]$, entonces $f'(k_t) = (\rho + \delta)$ es el punto de tangencia de la función $f(k_t)$ que es estrictamente decreciente y como se puede apreciar en el gráfico Nº 4. La función $f(k_t)$ es estrictamente de creciente y convexa. Al cortarse estas la tangencia con la función generan un punto que se llama el capital de oro modificado ($k_{\text{mod}}^{Oro^*}$), al proyectar este punto, al grafico inferior nos da el consumo de oro modificado óptimo ($c_{\text{mod}}^{Oro^*}$) que estábamos buscando.

En el caso de una función *Cobb-Douglas*, nos da un capital por trabajador de oro modificado óptimo $k_{\text{mod}}^{Oro^*} = \left(\frac{\alpha A}{\delta + \rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Donde $k_{\text{mod}}^{Oro^*}$ esta representado por una línea vertical. El lector habrá notado que el stock de capital por trabajador hallado es menor que el stock de capital de oro y eso es por que $\rho > n$ y $f(k_t)$ es una función decreciente.

Gráfico Nº 4: El consumo de Oro óptimo modificado



Estado de crecimiento proporcionado

El estado de crecimiento proporcionado, se halla cuando las curvas $\dot{c}_t = 0$ y $\dot{k}_t = 0$ se cruzan y esto se puede observar en el grafico Nº 5, que se curtan en tres puntos.

El primer punto que esta representado por de un sol de color naranja, es el eje de coordenadas donde $\dot{c}_t = 0$ y $\dot{k}_t = 0$.

El segundo punto que representa al estado proporcionado, que esta representado por un sol de color verde fosforescente, es el punto k_{mod}^{Oro}, que corresponde a la intersección de $\dot{k}_t = 0$, de la 1[er] Ecuación diferencial $\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (n+\delta)k_t$, reemplazando $\dot{k}_t = 0$ y $c_t = 0$ obtenemos el capital k_{mod}^{Oro} que satisface $f(k_{\text{mod}}^{Oro}) = (n+\delta)k_t$, donde este capital esta a la derecha del capital máximo.

El tercer punto es en la intersección de $\dot{k}_t = 0$ y k_{1t}^* en este punto esta representado en el grafico con un solo de color amarillo. El capital en este punto en el largo plazo esta economía converge necesariamente a un estado de proporcionado que conlleva a cantidades positivas del consumo.

En el estado proporcionado es una situación en que las variables per cápita crecen a una tasa constante. Se describe el comportamiento del consumo, para que el consumo crezca una tasa constante el capital tiene que ser siempre el mismo:

$\gamma_c = cte$ si y solo si, $k_t = k_{t+1}$ lo que implica que $\gamma_k = 0$

El stock de capital no cambie se tiene que cumplir que el consumo per cápita no varíe.

$\gamma_k = cte$ si y solo si, $c_t = c_{t+1}$ lo que implica que $\gamma_c = 0$

En el estado de crecimiento proporcionado: $\gamma_k = 0$ y $\gamma_c = 0$

Si $\gamma_c = 0 \Rightarrow \alpha A k_t^{-(1-\alpha)} = \rho + \delta$

$$\boxed{k_{\text{mod}}^{Oro*} = \left(\frac{\alpha A}{\delta + \rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \text{Stock de capital del estado proporcionado}}$$

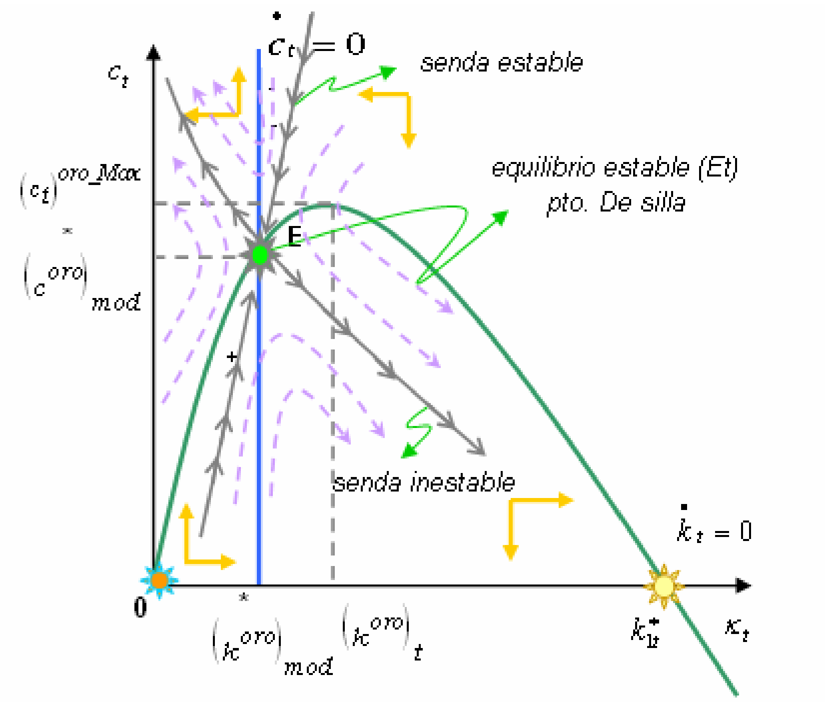
El PIB per capita de estado estacionario, se obtiene sustituyendo el capital de estado proporcionado en la función de producción:

$$\boxed{y_{\text{mod}}^{Oro*} = A\left(\frac{\alpha A}{\delta + \rho}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \text{Producción en el estado proporcionado}}$$

Sabiendo que el consumo per cápita es la renta menos el ahorro, lo calculamos como:

$c_{\text{mod}}^{Oro\,*} = (1-s)A\left(\dfrac{\alpha A}{\delta+\rho}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$	Consumo per cápita en el estado proporcionado

Gráfico Nº 5: El equilibrio en el modelo de *Ramsey*



Dinámica de Crecimiento

La dinámica que esta representada por las flechas como se observa en el grafico Nº 5, donde en el origen existe un estado inestable, por que nunca llegamos a un estado proporcionado.

El segundo estado proporcionado, k_{1t}^{*} es estable en todas sus flechas que existen alrededor apuntan hacia este punto.

El tercer estado proporcionado es k_{mod}^{Oro} con estabilidad este punto es llamado *"punto de silla"* en estado trayectoria llamamos "*saddle paht stability*" o "trayectoria estable" que converge a un estado proporcionado. Este tercer punto también genera el punto de silla, por que existen líneas aerodinámicas que convergen y divergen alrededor del punto.

La dinámica de transmisión nos dice que si aumentara el consumo, el capital en el largo plazo, la economía converge hacia un estado proporcionado k_{mod}^{Oro}.