



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
 FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
 (Universidad del Perú, Decana de América)

Modelo de Ramsey con progreso tecnológico

En esta nota final al modelo de Ramsey introduciremos el progreso tecnológico exógeno en los modelos de crecimiento, dicho progreso es potenciado del trabajo, este es el nuevo supuesto que se agrega al modelo.

Entonces pasaremos a introducir el progreso tecnológico en 1^{er} Ecuación diferencial $\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (n + m_L + \delta)k_t$, planteamos nuestra función de utilidad agregada de la sociedad.

$$\text{Máx: } J = \int_0^{\infty} U(c_t) \cdot e^{-(\rho-n)t} dt \dots (\text{Función Objetivo})$$

$$\text{s.a: } \dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (n + m_L + \delta)k_t \dots (\text{Ecuación de Movimiento})$$

$$k(t_0) = k_0 \dots (\text{Condición Inicial})$$

$$k_0 > 0 : \text{Dado}$$

$$0 < c_t < f(k_t)$$

$$0 < t < \infty$$

Para solucionar el problema se debe cumplir que: $\rho > n + (1-\theta)m_L$ es decir que la función de utilidad este acotada en este caso.

- 1) Comenzaremos a solucionar el problema de control óptimo por el método que nos dejó *Pontryagin*, que se basa en la metodología del *Hamiltoniano*, para esto pasaremos a plantear el hamiltoniano.

$$H(c_t, k_t, \lambda_t, t) = U(c_t) \cdot e^{-(\rho-n)t} + \lambda_t [f(k_t) - c_t - (n + m_L + \delta)k_t]$$

Donde

k_t : Variable de estado.

c_t : Variable de control.

λ_t : Variable de coestado.

m_L : Progreso tecnológico.

Condición de Primer Orden (C1O)

- 2) Tomando la derivada del Hamiltoniano con respecto de la variable de control e

$$\text{igualándolo a cero. } \frac{\partial H}{\partial c_t} \equiv \frac{\partial U_t}{\partial c_t} + \frac{\partial \lambda_t}{\partial c_t} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = e^{-(\rho-n)t} U'(c_t) + \lambda_t(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{U'(c_t)}{e^{(\rho-n)t}} = \lambda_t \dots (I)$$

Valor actual de la utilidad = Multiplicador Dinámico

- 3) Tomando la derivada del Hamiltoniano con respecto a la variable de estado y imponiendo la igualdad al negativo de la derivada del multiplicador con respecto al tiempo.

$$\frac{\partial H}{\partial k_t} = -\dot{\lambda}_t \quad \Rightarrow \quad \lambda_t [f'(k_t) - (n + \delta + m_L)] = -\dot{\lambda}_t$$

$$[f'(k_t) - (n + m_L + \delta)] = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} \dots (II)$$

- 4) Tomando la derivada con respecto al multiplicado lagrangiano, tenemos:

$$\frac{\partial H}{\partial k_t} = \dot{k}_t \quad \Rightarrow \quad [f(k_t) - c_t - (n + m_L + \delta)] = \dot{k}_t$$

$$[f(k_t) - c_t - (n + m_L + \delta)] = \dot{k}_t \dots (III)$$

Condición de Segundo Orden (CIIO)

$$\frac{\partial^2 H}{\partial c_t^2} = e^{-(\rho-n)t} \underbrace{U''(c_t)}_{>0 \times 0<} < 0$$

Esta condición nos asegura un consumo máximo y La concavidad del consumo.

- 5) La condición de transversalidad multiplica la variable de estado por el precio implícito de capital (multiplicador de Lagrange) en el momento terminal y pone igual a cero.

Condición de Transversalidad

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t k_t = 0$$

Esto quiere decir que $\lambda_t = 0$ (el precio implícito de capital en el periodo final) o que $k_t = 0$ (el stock de capital en el momento que muere).¹

$$(1/\infty) \approx 0$$

¹ En la economía de Ramsey se supone que los individuos "fenece" en el infinito. $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t = 0$, esto indica que el valor del stock de activasen el ultimo momento del horizonte temporal debe ser cero.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t = \frac{1}{e^{(\rho-n)t}} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t = 0$$

De la ecuación (II) tenemos $f'(k_t) - (n + m_L + \delta) = -g_\lambda \Rightarrow Pmgk - (n + m_L + \delta) = -g_\lambda$

Aplicando logaritmo neperiano a la ecuación (I) tenemos:

$$-(\rho - n)t \cdot \ln e + \ln U'(c_t) = \ln \lambda_t \Rightarrow -(\rho - n)t + \ln U'(c_t) = \ln \lambda_t$$

Aplicando la derivada temporal (derivada con respecto a "t") a la ecuación tenemos:

$$\begin{aligned} -(\rho - n) \frac{dt}{dt} + \frac{d[\ln U'(c_t)]}{dt} &= \frac{d(\ln \lambda_t)}{dt} \\ -(\rho - n) + \frac{1}{U'(c_t)} \cdot \frac{dU'(c_t)}{\partial c_t} \cdot \frac{\partial c_t}{dt} &= \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} \\ -(\rho - n) + \frac{1}{U'(c_t)} U''(c_t) \cdot c_t &= \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} \end{aligned}$$

A la ecuación anterior multiplicaremos y dividiremos entre el consumo por trabajador (c_t)

$$\begin{aligned} -(\rho - n) + \frac{1}{U'(c_t)} U''(c_t) \cdot \frac{1}{c_t} \cdot \frac{\dot{c}_t}{c_t} &= \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} \\ -(\rho - n) - \theta \cdot \frac{\dot{c}_t}{c_t} &= \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} \dots (\xi) \end{aligned}$$

Donde

$\theta = \frac{1}{U'(c_t)} U''(c_t) \cdot \frac{1}{c_t}$: Representa la elasticidad de la utilidad marginal con respecto al consumo por trabajador.

Multiplicando por -1 a la ecuación (ξ), tenemos:

$$(\rho - n) + \theta \cdot \frac{\dot{c}_t}{c_t} = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} \dots (IV)$$

Iguando las ecuación (II) con la ecuación (IV)

$$f'(k_t) - (n + m_L + \delta) = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = (\rho - n) + \theta \cdot \frac{\dot{c}_t}{c_t}$$

Despejando $\frac{\dot{c}_t}{c_t}$, tenemos:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{f'(k_t) - (\rho + m_L + \delta)}{\theta} \dots (V), \text{ La proposición Ramsey - Keynes}$$

Esta ecuación nos dice que la tasa óptima del consumo por trabajador es la razón del producto marginal del capital menos la tasa de depreciación, la tasa de aumento tecnológico debido a la eficiencia del trabajo y la tasa de descuento intertemporal dividido sobre la elasticidad de la utilidad marginal con respecto al consumo por trabajador.

$\gamma_c = \frac{1}{\theta} [f'(k_t) - (\rho + \delta)]$: Evolución del consumo por unidad de trabajo efectivo.

Así mismo se puede expresar la ecuación como: $\dot{c}_t = \frac{1}{\theta} [f'(k_t) - (\rho + m_L + \delta)] c_t \dots (VI)$

Sistema de Ecuaciones Diferenciales (Diagrama de fases)

Existen dos ecuaciones diferenciales que nos ayudan a graficar el diagrama de fases de este modelo son:

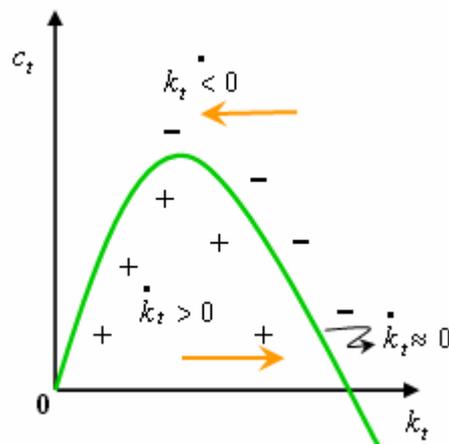
1^{er} Ecuación diferencial: $\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (n + m_L + \delta)k_t$

2^{da} Ecuación diferencial: $\dot{c}_t = \frac{1}{\theta} [f'(k_t) - (\rho + m_L + \delta)] c_t$

Encontrando la curva: $\dot{k} = 0$

De la 1^{er} Ecuación diferencial

Si $\dot{k}_t = 0 \Rightarrow$ $0 = f(k_t) - c_t - (n + m_L + \delta)k_t$
Entonces $c_t = f(k_t) - (n + m_L + \delta)k_t$

Gráfico N° 1: Diagrama de fases con progreso tecnológico de $\dot{k} = 0$ 

Si nos situamos por encima de la curva $\dot{k}_t = 0$, vemos que un pequeño movimiento de c_t irá asociada a una disminución de $\dot{k}_t < 0$. Dado que la 1^{er} Ecuación diferencial, donde el consumo aparece con signo negativo, entonces concluimos que por encima de la $\dot{k}_t = 0$, el capital decrece $\dot{k}_t < 0$. Denotamos el movimiento de flechas así la izquierda, tal como aparece en el gráfico N° 1. Las flechas se dirigen en forma horizontal por que en el eje horizontal aparece k_t .

Derivando la primera ecuación diferencial con respecto a c_t se obtiene:

$$\frac{d\dot{k}_t}{dc_t} = -1 < 0$$

Donde se demuestra que al aumentar el valor de c_t disminuye el valor de \dot{k}_t

De la misma manera analizaremos que pasa si ubicamos un vector por debajo de la curva $\dot{k}_t = 0$, las flechas apuntan así la derecha, diciéndonos que por debajo de la curva $\dot{k}_t = 0$, el capital crece $\dot{k}_t > 0$, en este caso las flechas apuntan hacia la derecha.

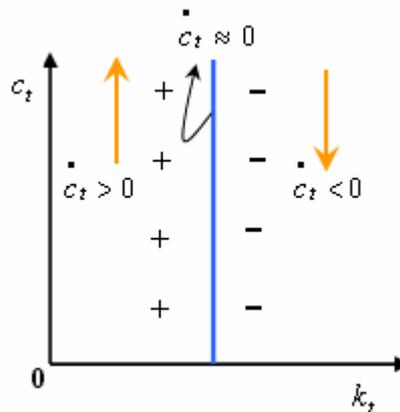
Encontrando la curva: $\dot{c} = 0$

De la 2^{da} ecuación diferencial

$$\text{Si } \dot{c}_t = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{c_t}{\theta} [f'(k_t) - (\rho + m_L + \delta)]$$

$$\text{Entonces } f'(k_t) = (\rho + m_L + \delta) \quad \Rightarrow$$

$Pmgk = (\rho + m_L + \delta)$, Representa la ecuación de una recta que es paralela al eje de ordenadas

Gráfico N° 2: Diagrama de fases con progreso tecnológico de $\dot{c} = 0$ 

Esto quiere decir si nos encontramos por encima de la curva $\dot{c}_t = 0$, por un aumento de un poquito de k_t , Dado que $f'(k_t)$ es una función creciente, por lo que el valor de \dot{c} de la 2^{da} Ecuación diferencial pasa hacer negativo $\dot{c}_t < 0$. Concluimos que a la derecha de la curva, el consumo decrece, por lo que se dibuja las flechas apuntando hacia abajo.

Para demostrar esto pasaremos a derivar la segunda ecuación con respecto a k_t

$$\frac{d\dot{c}_t}{dk_t} = -\frac{1}{U''(c_t)} \cdot U'(c_t) \cdot f''(k) < 0$$

Lo que nos dice que a la derecha de $\dot{c}_t = 0$ será $\dot{c}_t < 0$

De la misma manera una disminución de k_t hará que $\dot{c}_t > 0$ sea positivo. Esto significa que nos encontramos a la izquierda de $\dot{c}_t = 0$, las flechas apuntarán hacia arriba como se aprecia en el gráfico N° 2, donde las flechas positivas se denota por $\dot{c}_t > 0$.

Ahora antes de juntar los dos diagramas de fases en un solo pasaremos a hallar el consumo de oro modificado $c_{\text{mod}}^{\text{Oro}^*}$, que es aquel consumo que maximiza el bienestar de los agentes de la sociedad en su conjunto y también se tendrá un nuevo capital por trabajador modificado con en nuevo consumo.

Para esto de la 2^{da} Ecuación diferencial $\dot{c}_t = \frac{1}{\theta} [f'(k_t) - (\rho + m_L + \delta)]c_t$, reemplazando el valor de $\dot{c}_t = 0$, con esto $0 = [f'(k_t) - (\rho + m_L + \delta)]$, entonces $f'(k_t) = (\rho + m_L + \delta)$ es el punto de tangencia de la función $f(k_t)$ que es estrictamente decreciente, la función $f(k_t)$ es estrictamente de creciente y convexa. Al cortarse estas la

tangencia con la función generan un punto que se llama el capital de oro modificado ($k_{\text{mod}}^{\text{Oro}^*}$), al proyectar este punto, al gráfico inferior nos da el consumo de oro modificado óptimo ($c_{\text{mod}}^{\text{Oro}^*}$) que estábamos buscando.

En el caso de una función *Cobb-Douglas*, nos da un capital por trabajador de oro

modificado óptimo $k_{\text{mod}}^{\text{Oro}^*} = \left(\frac{\alpha A}{\delta + m_L + \rho} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Donde $k_{\text{mod}}^{\text{Oro}^*}$ está representado por una línea vertical. El lector habrá notado que el stock de capital por trabajador hallado es menor que el stock de capital de oro y eso es por que $\rho > n$ y $f(k_t)$ es una función decreciente.

Estado de crecimiento proporcionado

El estado de crecimiento proporcionado, se halla cuando las curvas $\dot{c}_t = 0$ y $\dot{k}_t = 0$ se cruzan.

El primer punto que está representado por un sol de color naranja, es el eje de coordenadas donde $\dot{c}_t = 0$ y $\dot{k}_t = 0$.

El segundo punto que representa al estado proporcionado, que está representado por un sol de color verde fosforescente, es el punto $k_{\text{mod}}^{\text{Oro}}$, que corresponde a la intersección de $\dot{k}_t = 0$, de la 1^{er} Ecuación diferencial $\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (n + m_L + \delta)k_t$, reemplazando $\dot{k}_t = 0$ y $c_t = 0$ obtenemos el capital $k_{\text{mod}}^{\text{Oro}}$ que satisface $f(k_{\text{mod}}^{\text{Oro}}) = (n + m_L + \delta)k_t$, donde este capital está a la derecha del capital máximo.

El tercer punto es en la intersección de $\dot{k}_t = 0$ y k_t^* en este punto está representado en el gráfico con un sol de color amarillo. El capital en este punto en el largo plazo esta economía converge necesariamente a un estado de proporcionado que conlleva a cantidades positivas del consumo.

En el estado proporcionado es una situación en que las variables per cápita crecen a una tasa constante. Se describe el comportamiento del consumo, para que el consumo crezca a una tasa constante el capital tiene que ser siempre el mismo.²

² En este estado proporcionado, la tasa de crecimiento de las variables en términos per cápita es m_L .

Gráfico N° 3: El equilibrio en el modelo de Ramsey con progreso tecnológico

