UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
(Universidad del Perú, Decana de América)

El Modelo de Romer con Externalidad del Capital

En la década de los anos 70 hasta la década de los anos 80, se había generado un estancamiento en la teoría del crecimiento, debido a los modelos de crecimiento con progreso tecnológico exógeno.

Pero Romer en 1986 con su tesis doctoral, formula un modelo de crecimiento en el que se busca hallar las causas y los orígenes del progreso tecnológico, apara ello Romer considera explícitamente los rendimientos decrecientes del capital así como las externalidades del capital.

Con este articulo Paul Romer impulso a la literatura del crecimiento económico, por que introdujo la función de producción con externalidades.

Supuestos del modelo

- ✓ Romer abandona los supuestos de la función de producción agregada sujeta a rendimientos de escala constante, así mismo abandona el supuesto de rendimientos constantes de capital.
- ✓ Romer asume una función de producción agregada sujeta a los rendimientos de escala constantes y así mismo va asumir rendimientos crecientes de capital.
- ✓ Supone que existe una externalidad de capital y por simplificación se asume que la población es constante.
- ✓ Se asume que también toda la población trabaja en esta economía.

Función de producción agregada

La función que refleja las externalidades de la economía es:

$$Y_t = AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \kappa_t^{\eta} \ldots (FPA)$$

Donde

Y_t: Producto agregado en el instante "*t*".

K_t: Stock de capital agregado en el instante "*t*".

L_t: Fuerza de trabajo agregada en el instante "*t*".

κ_t : Representa la externalidad del capital en el instante "*t*".

A : Índice de nivel de tecnología.

η : Elasticidad producto respecto a la externalidad del capital.

α : Elasticidad producto respecto al capital.

$1-\alpha$: Elasticidad producto respecto al trabajo.

Si $\eta = 0$, entonces es una función de producción *Cobb-Douglas.*
Si $\eta > 0$, entonces expresa el grado de importancia de la externalidad del capital con lo cual $\alpha + 1 - \alpha + \eta > 1$.

Propiedades de la función agregada

1º. $F(K_t, L_t) = AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \kappa_t^{\eta}$

Si multiplicamos a la función por un $\lambda > 0$

$$F(\lambda K_t, \lambda L_t) = A(\lambda K_t)^{\alpha} (\lambda L_t)^{1-\alpha} \kappa_t^{\eta}$$

$$F(\lambda K_t, \lambda L_t) = \lambda . Y_t$$

La función presenta rendimientos de escala constante cuando κ_t permanece constante

2º. Los productos marginales del capital y trabajo son positivos.

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = PmgK = \underbrace{\alpha}_{+} \underbrace{AK_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} \kappa_t^{\eta}}_{+} > 0$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = PmgL = \underbrace{(1-\alpha)}_{+} \underbrace{AK_t^{\alpha} L_t^{-\alpha} \kappa_t^{\eta}}_{+} > 0$$

La derivada de los productos marginales es decreciente y negativa.

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial K_t^2} = \frac{\partial PmgK}{\partial K_t} = \underbrace{\alpha}_{+} \underbrace{(\alpha - 1)}_{-} \underbrace{AK_t^{\alpha-2} L_t^{1-\alpha} \kappa_t^{\eta}}_{+} < 0$$

Recordemos $0 < \alpha < 1$, entonces $0 < \alpha < 1 \ldots -1 \Rightarrow -1 < \alpha - 1 < 0$ es una constante negativa.

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial L_{tt}^2} = \frac{\partial PmgL}{\partial L_t} = \underbrace{(-\alpha)}_{-} \underbrace{(1-\alpha)}_{+} \underbrace{AK_t^{\alpha} L_t^{-(1+\alpha)} \kappa_t^{\eta}}_{+} > 0$$

Recordemos que $0 < \alpha < 1$, entonces $0 < \alpha < 1 \ldots x - 1 \Rightarrow -1 < -\alpha < 0 \ldots +1$ es una constante positiva $0 < 1 - \alpha < 1$.

3º. Veremos que los límites requeridos por las condiciones de INADA se cumplen:

$$\underset{K\to\infty}{Lím}\, PmgK = \alpha \cancelto{(1/\infty)\approx 0}{\frac{1}{K_t^{1-\alpha}}} .\kappa_t^{\eta} L_t^{1-\alpha} = 0$$

$$\underset{K\to 0}{Lím}\, PmgK = \alpha \cancelto{(1/0)\approx \infty}{\frac{1}{K_t^{1-\alpha}}} .\kappa_t^{\eta} L_t^{1-\alpha} = \infty$$

$$\underset{L\to\infty}{Lím}\, PmgL = (1-\alpha) K_t^{\alpha} \kappa_t^{\eta} \cancelto{(1/\infty)\approx 0}{\frac{1}{L_t^{\alpha}}} = 0$$

$$\underset{L\to 0}{Lím}\, PmgL = (1-\alpha) K_t^{\alpha} \kappa_t^{\eta} \cancelto{(1/)\approx \infty}{\frac{1}{L_t^{\alpha}}} = \infty$$

Con esto se demuestra que la función cumple con las propiedades neoclásicas

Romer asume que la externalidad de capital es igual al stock de capital agregado, esto quiere decir que:

$$\boxed{\kappa_t = k_t}$$

Dividiendo a la función de producción entre el numero de trabajadores (L_t)

$$\frac{Y_t}{L_t} = AK_t^{\alpha} \frac{L_t^{1-\alpha}}{L_t} \kappa_t^{\eta} \quad \Rightarrow \quad y_t = A \frac{K_t^{\alpha}}{L_t^{\alpha}} \kappa_t^{\eta} \quad \Rightarrow \quad y_t = Ak_t^{\alpha} \kappa_t^{\eta} \ldots (I)$$

Sabemos que $k_t = \kappa_t = K_t / L_t \Rightarrow K_t = k_t L_t \ldots (\psi)$

Reemplazando (ψ) en la ecuación (I)

$$y_t = Ak_t^{\alpha} (k_t L_t)^{\eta} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y_t = Ak_y^{\alpha+\eta} L_t^{\eta} \ldots (FPI)}$$

Ecuación fundamental

De la ecuación fundamental de *Solow – Swan* mencionada y demostrada en páginas anteriores de este libro tenemos:

$$\dot{k}_t = sf(k_t) - (\delta + n)k_t$$

Donde la FPI se $y_t = Ak_y^{\alpha+\eta} L_t^{\eta} \ldots (FPI)$ y la población es constante: $g_{pob} = n = 0$
Lo que nos da la siguiente ecuación:

$\boxed{\dot{k}_t = s.Ak_y^{\alpha+\eta}L_t^{\eta} - (\delta)k_t}$, la ecuación fundamental de *Romer*

Esta ecuación dinámica del proceso de acumulación del capital en una economía capitalista, donde existe una función de producción con rendimientos a escala constantes así como una economía que existe externalidad de capital.

Tipología

En el desenvolvimiento de esta economía depende crucialmente de la suma de los paramentos $\alpha + \eta$, que es inferior o superior o igual a uno, se puede distinguir los siguientes casos.

Caso *A*: $\alpha + \eta < 1$

Esto significa que la externalidad no es muy grande, $\eta > 0$ y que la suma de las elasticidades del capital y de la externalidad del capital es menor a la unidad, esto nos dice que presenta rendimientos decrecientes de capital.

En el largo plazo se va llegar a un estado de crecimiento proporcionado, teniendo un equilibrio dinámico de tipo estable, donde el exponente del capital, en la función de ahorro es negativo.

$$\gamma_k = \frac{s.AL_t^{\eta}}{k_t^{1-\alpha-\eta}} - \delta$$

Versión de *Barro*

Dividiendo entre k_t a la ecuación fundamental nos da:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{s.Ak_y^{\alpha+\eta}L_t^{\eta}}{k_t} - \delta \quad \Rightarrow \quad \gamma_k = \frac{s.Ak_y^{\alpha+\eta}L_t^{\eta}}{k_t} - \delta$$

En el estado de crecimiento proporcionado γ_k es nulo.

Si $\gamma_k = 0$ entonces $\frac{s.Ak_y^{\alpha+\eta}L_t^{\eta}}{k_t} = \delta$ se determina el capital por trabajador óptimo k_t^* de la economía.

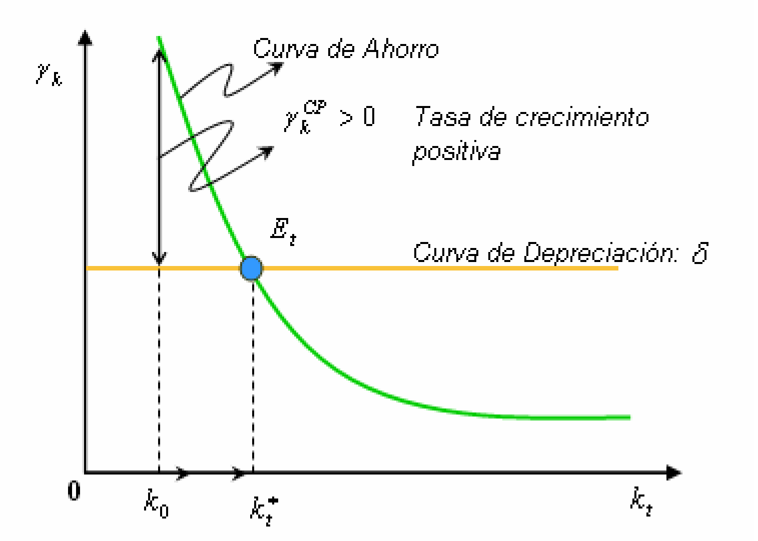
$$\boxed{k_t^* = \left(\frac{sAL_t^{\eta}}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\eta}}}$$

Por lo que la curva de ahorro toma valores infinitos, cuando k_t se aproxima a cero, es decreciente y cuando se aproxima a cero k_t va hacia el infinito, y como vemos en el grafico], la curva de depreciación en corta en un solo punto a la curva de ahorro y esto genera un estado de crecimiento proporcionado en la economía.

Cuando nos ubicamos a la izquierda del punto, la tasa de crecimiento es positiva, en la economía.

La dinámica del modelo nos dice, que si nos movemos un poquito a la derecha y esto genera una tasa de crecimiento positiva en el corto plazo, y a largo plazo es nulo $\gamma_k^{LP} = 0$.

Caso cuando $\alpha + \eta < 1$



En este caso, señala que la tasa de crecimiento del capital por trabajador esta correlacionado con el tamaño de la población.

$$\gamma_k = f(tamaño\_de\_la\_población)$$

Esta hipótesis fue falsa debido a que no coincidía con la realidad, por lo que Romer nos dice que este efecto escala es falsa. Por lo que *Romer* asume que la población es constante $n = 0$.[1]

Efecto Escala

En esta parte hablaremos del efecto escala, que nos dice que la tasa de crecimiento esta correlacionada positivamente con el tamaño de la población.

La predicción de este modelo dice que los países con mayor población como: China, Mongolia, Rusia, México, Brasil o la India, que deberían crecer mucho más rápido que los que los países con menor población como: Suecia, Japón, Chile, Manama, Argentina o Perú.

[1] Esta hipótesis fue desmentida por que, en la vida real no se puede dar el caso que la economías que tengan tasas de crecimiento vayan aumentando en el tiempo o que el capital desaparezca con el paso de los años.

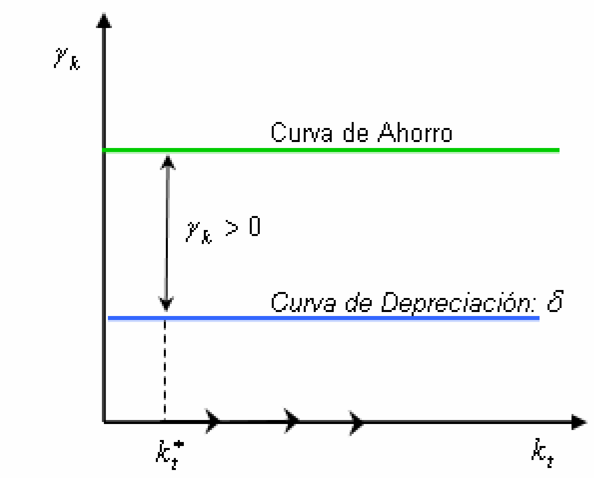
Esta predicción se le conoce como "*El efecto escala*", en conclusión lo que nos quiere decir es que los países con mayor escala de población deberían crecer mas.

Esta predicción es falsa como se puede revisar en *Bakus, Kehoe y Kehoe (1992)*, que realiza un estudio para ver los efectos escala, donde tomo los datos los anos posteriores a la segunda guerra mundial, donde indico que la tasa de crecimiento per -capita no esta correlacionada ni positivamente ni negativamente con el tamaño del país.[2]

Caso *B*: $\alpha + \eta = 1$

En este caso las externalidades del capital son grandes y positivas, tal que la suma de las elasticidades del capital y de la externalidades es igual a la unidad, lo cual significa que presenta rendimiento constantes del capital.

Caso cuando $\alpha + \eta = 1$



Entonces la tasa de crecimiento en la versión de *Barro* pasa a ser $\gamma_k = s.A - \delta$, esta tasa de crecimiento coincide con el modelo AK, y nos da un Y=AK. Esto significa que en el largo plazo habrá una esta de crecimiento progresivo como se puede apreciar en la grafica, lo cual implica que el capital por trabajador es indeterminado.

En conclusión en el largo plazo se alcanza un crecimiento progresivo entonces $\gamma_k > 0$ se no alcanza un capital por trabajador por lo que queda indeterminado.

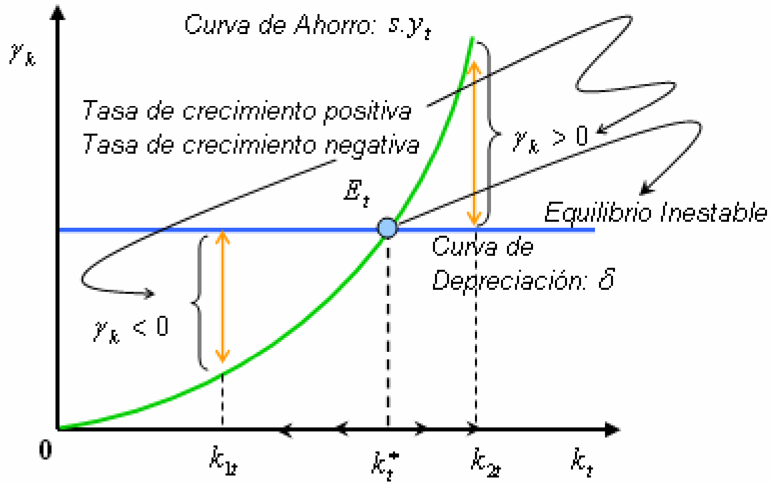
Caso *C*: $\alpha + \eta > 1$

En este caso las externalidad del capital es muy grande, tal que la suma de las elasticidades del capital y de la externalidad es mayor que la unidad, con lo cual se presentan rendimientos decrecientes.

[2] Para comprender mejor este efecto léase: Sala-I-Martin Xavier, (1999) "Apuntes de Crecimiento Económico". Segunda edición. Anthoni Bosch editor, Pág.: 150 -152

Implicaría es que la economía en el largo plazo, tiende a un estado de crecimiento proporcionado, teniendo la característica central que presenta un equilibrio dinámico estable, donde la tasa de crecimiento es positivo.

Caso cuando $\alpha + \eta > 1$



Como se puede apreciar en el grafico, la curva de ahorro pasa por el origen y es creciente y va hacia el infinito cuando k_t va hacia el infinito. Como las dos curvas se cruzan una sola vez, esto genera un estado proporcionado, donde existe un único k_t^*.

El estado proporcionado es inestable como lo hemos mencionado, por que si el stock de capital es un poco superior a k_t^*, entonces el crecimiento es positivo. Pero si el stock de capital un inferior a k_t^*, entonces la tasa de crecimiento es negativa, el capital disminuye y la economía se aproxima a la extinción (por que existe capital).

Como se puede apreciar en el grafico siguiente, donde la función de ahorro de la sociedad es creciente, y la curva de inversión neta por trabajador es una recta con pendiente positiva. Ente caso la economía converge hacia un punto de equilibrio que se encuentra representado en la grafica como E_t, por encima de este punto, ósea el capital que se encuentra a la derecha de este punto obtiene tasa de variación del capital por trabajador positiva, pero si disminuimos un poquito el capital por trabajador, nos ubicaremos al izquierda del punto de equilibrio inestable y en este caso la tasa de variación de capital por trabajador será negativa y menor que la existía originalmente en el equilibrio.

Función de ahorro por trabajador para el caso cuando $\alpha + \eta > 1$