UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
(Universidad del Perú, Decana de América)

El modelo de Solow-Swan con progreso tecnológico

En esta parte hablaremos de la mejora tecnológica y del crecimiento de largo plazo, por que se permite introducir el progreso tecnológico de largo plazo.

Supuestos del modelo
A los supuestos básicos de *Solow* se le añaden los siguientes supuestos:

- ✓ Sea una economía con progreso tecnológico.
- ✓ Sea un progreso tecnológico exógeno, se asume que la tasa de progreso tecnológico es constante.
- ✓ Sea un progreso tecnológico desincorporado.
- ✓ Existe un progreso tecnológico neutral a lo *Harrod.*

Análisis

Sea la función de producción dinámica aumentativa de la eficiencia de los factores.

$$Y_t = F(A_{(t)}.K_t, B_{(t)}L_t)$$

Puesto que se asume que el progreso tecnológico neutral a lo *Harrod* $A_{(t)} = 1$.

$$Y_t = F(K_t, B_{(t)}L_t)$$

Si dividimos entre la fuerza de trabajo eficiente ($B_{(t)}L_t$).

$$\frac{Y_t}{B_{(t)}L_t} = F(\frac{K_t}{B_{(t)}L_t}, \frac{B_{(t)}L_t}{B_{(t)}L_t})$$

$y_t = f(k_t^e, 1) \Rightarrow y_t = f(k_t^e) \ldots (FPI)$ en unidades eficiente

Donde:
$B_{(t)}$: Factor aumentativo de la eficiencia de trabajo.
$B_{(t)}L_t$: Fuerza de trabajo eficiente.
$\frac{Y_t}{B_{(t)}L_t} = \frac{y_t}{B_{(t)}} = \bar{y}_t = y^e$: Producto por trabajador eficiente.
$\frac{K_t}{B_{(t)}L_t} = \frac{k_t}{B_{(t)}} = \bar{k}_t = k^e$: Capital por trabajador eficiente.
Subíndice e: Es eficiente.

Inversión neta por trabajador eficiente

$$k_t^e = \frac{k_t}{B_{(t)}} = \frac{K_t}{B_{(t)}L_t} \quad \Rightarrow \quad K_t = k_t^e.B_{(t)}L_t$$

Dividiendo entre $B_{(t)}L_t$

$$\frac{I^n}{B_{(t)}L_t} = \frac{1}{B_{(t)}L_t}.\frac{d\left[k_t^e.B_{(t)}L_t\right]}{dt} = k_t^e + \frac{d(B_{(t)}L_t)}{dt}.k_t^e$$

$$\frac{I^n}{B_{(t)}L_t} = \frac{\partial k_t^e}{\partial t} + (n+m).k_t^e$$

Ecuación fundamental de *Solow* con progreso tecnológico

De la condición de equilibrio macroeconómico, tenemos:

$$S^b = I^b$$

$$s.Y = I^n + I^{rep}$$

$$s.F(K, B_{(t)}L) = I^n + \delta.K$$

Dividiendo entre $B_{(t)}L$

$$s.F\left(\frac{K}{B_{(t)}L}, \frac{B_{(t)}L}{B_{(t)}L}\right) = \frac{I^n}{B_{(t)}L} + \delta.\frac{K}{B_{(t)}L} \quad \Rightarrow \quad s.f(k^e, 1) = \frac{\partial k_t^e}{\partial t} + (n+m_L).k^e + \delta.k^e$$

$$\boxed{s.f(k^e) = \frac{\partial k_t^e}{\partial t} + (n+m_L+\delta).k^e, \textit{ Solow-Swan con progreso tecnológico}}$$

Donde:
δ : Tasa de depreciación del stock de capital.

Es una ecuación del proceso de acumulación de capital y del progreso tecnológico en una economía capitalista.

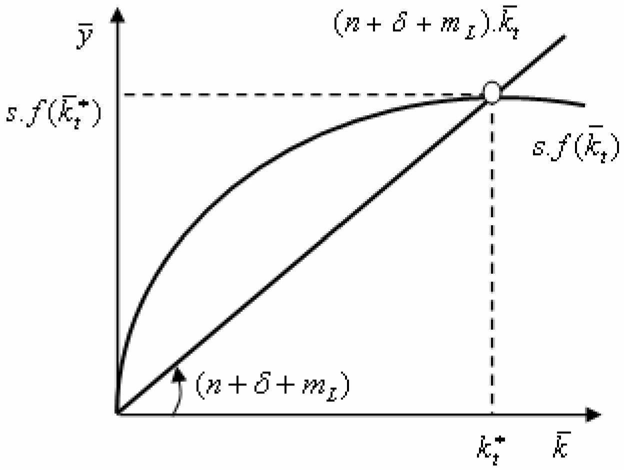
Señala que la tasa de cambio del capital por trabajador eficiente será igual al remante del ahorro bruto por trabajador eficiente, respecto a la ampliación bruta de capital considerando el progreso tecnológico.

Crecimiento proporcionado

El crecimiento proporcionado se da cuando $\frac{\partial \bar{k}_t}{\partial t} = 0$, entonces reemplazado en la ecuación de *Solow* con progreso tecnológico, tenemos:

Si $\frac{\partial \bar{k}_t}{\partial t} = 0$, entonces $s.f(k^e) = (n + m_L).k^e + \delta.k^e$, se determina el capital por trabajador $\bar{k}^*$. Como se puede apreciar en el Gráfico [3.3].

Gráfico [3.3]: Diagrama de *Solow* con progreso tecnológico



Versión de *Barro*

Dividiendo la ecuación fundamental de *Solow* con progreso tecnológico entre $\bar{k}_t$.

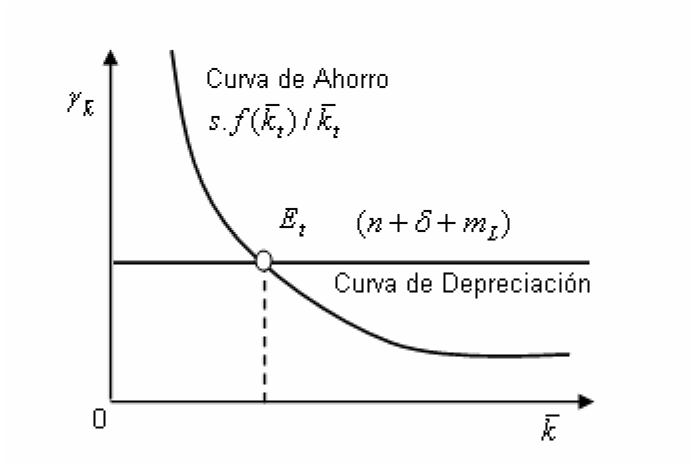
$$\frac{1}{\bar{k}_t} . \frac{\partial \bar{k}_t}{\partial t} = \frac{s.f(k_t)}{\bar{k}_t} - (n + \delta + m_L)$$

$$\gamma_{\bar{k}} = \frac{s.f(k_t)}{\bar{k}_t} - (n + \delta + m_L)$$

En el estado de crecimiento proporcionado $\gamma_{\bar{k}}$ es nulo.

Si $\gamma_{\bar{k}} = 0$ entonces $\frac{s.f(k_t)}{\bar{k}_t} = (n + \delta + m_L)$, se determina k_t^*

Gráfico Nº 1: Versión de *Barro* con progreso tecnológico



Solow –Swan con progreso tecnológico exógeno

Para generar el crecimiento sostenido se introduce el progreso tecnológico. Para genera el crecimiento de largo plazo que no se podía explicar en el Capítulo anterior.

Supuestos del modelo

A los siguientes supuestos básicos se le añaden el siguiente supuesto particular.
✓ Existe una función de producción Cobb-Douglas.

Análisis

Puesto que se asume el supuesto tecnológico neutral a lo *Harrod*

$$Y_t = F(K_t, B_{(t)}L_t)$$

Se asume que existe una función de producción *Cobb-Douglas.*

$$Y_t = K_t^{\alpha}.(B_{(t)}L_t)^{\beta} \ldots (FP)$$

s.a $\begin{cases} \text{Rendimiento decreciente} \\ \text{Rendimientos a escala constante } \alpha+\beta=1 \end{cases}$

Donde:
$B_{(t)}$: Factor aumentativo de la eficiencia de trabajo.
$B_{(t)}L_t$: Fuerza de trabajo eficiente.
α : Elasticidad del producto respecto al capital.
β : Elasticidad del producto respecto al trabajo eficiente.
Y_t : Producto agregado.
K_t : Stock de capital.

L_t: Fuerza de trabajo agregada.
Dividiendo la función de producción entre el trabajo eficiente ($B_{(t)}L_t$).

$$\frac{Y_t}{B_{(t)}L_t} = \frac{K_t^{\alpha}}{[B_{(t)}L_t]^{\alpha}} \cdot \frac{B_{(t)}L_t)^{\beta}}{[B_{(t)}L_t]^{\alpha-1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{y_t}{B_{(t)}} = \left(\frac{k_t}{B_{(t)}}\right)^{\alpha}$$

$$\bar{y}_t = \bar{k}_t^{\alpha} \ldots (FPI) \quad \Rightarrow \quad y_t^e = (k_t^e)^{\alpha}$$

Donde:
El superíndice $\{e\}$ de las variables en unidades eficientes.

Ecuación fundamental de *Solow-Swan* con progreso exógeno y desincorporado

De la condición de equilibrio macroeconómico sabemos:

$$F(K_t, B_{(t)}L_t) = \underbrace{C_t} + \underbrace{I_t}$$

$$F(K_t, B_{(t)}L_t) = (1-s).F(K_t, B_{(t)}L_t) + \dot{K}_t + \delta.K_t$$

$$0 = -s.F(K_t, B_{(t)}L_t) + \dot{K}_t + \delta.K_t \ldots \text{x } \frac{1}{B_{(t)}.L_t}$$

$$0 = -s.f(k_t^e) + \dot{k}_t^e + \delta.k_t^e$$

Despejando $\dot{k}_t^e$, tenemos:

$$\dot{k}_t^e = s.f(k_t^e) - \delta.k_t^e \ldots (I)$$

Para saber el comportamiento de k_t^e, calcularemos su derivada con respecto al tiempo

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \frac{\partial[K_t / B_{(t)}L_t]}{\partial t} = \frac{\dot{K}_t.B_{(t)}L_t - K_t.B_{(t)}\dot{L}_t - K_t.\dot{B}_{(t)}L_t}{(B_{(t)}L_t)^2}$$

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \underbrace{\frac{\dot{K}_t}{B_{(t)}L_t}} - \underbrace{\frac{\dot{L}_t}{L_t}}.\underbrace{\frac{K_t}{B_{(t)}L_t}} - \underbrace{\frac{\dot{B}_{(t)}}{B_{(t)}}}.\underbrace{\frac{K_t}{B_{(t)}L_t}}$$

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \dot{k}_t^e - n.k_t^e - m_L.k_t^e \ldots (II)$$

Reemplazando $\dot{k}_t^e$, que lo hallamos en la ecuación (I) y reemplazando la FPI de nuestro modelo tendremos:

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \dot{k}_t^e - n.k_t^e - m_L.k_t^e \ldots (II)$$

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = s.f(k_t^e) - (n + \delta + m_L).k_t^e$$

$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = s.\left[k_t^e\right]^\alpha - (n + \delta + m_L).k_t^e$, *la ecuación fundamental de Solow-Swan con progreso tecnológico.*

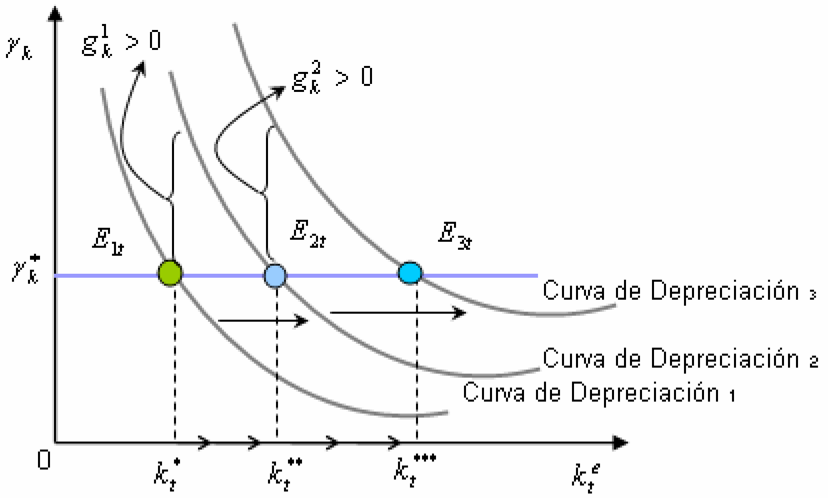
Es una ecuación diferencial que refleja la dinámica de la acumulación de capital en una economía capitalista con progreso tecnológico.

Estado de crecimiento proporcionado

La tasa de crecimiento per cápita a largo plazo es positiva cuando la tecnología mejora de forma continua.
Existe un estado de crecimiento proporcionado, en donde la tecnología debe estar multiplicando el factor trabajo, esto quiere decir que la tecnología hace más eficiente el trabajo.[1]

Imaginemos que la tecnología mejora como se puede apreciar en el Gráfico Nº 2, donde la curva de ahorro se ubica en el equilibrio (E_{1t}) y se desplaza a la derecha hasta intersectarse con la curva de depreciación hasta el punto de equilibrio (E_{2t}) y si el crecimiento con una tasa de crecimiento positiva es continuo se ubicara en (E_{3t}) con un capital por trabajador k_t^{***}[2].

Gráfico Nº 2: Versión de *Barro* aumento de la tecnología



En el estado de crecimiento proporcionado se tiene que $\frac{\partial k_t^e}{\partial t}$ es nulo.

Si $\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = 0$, entonces $s.(k_t^e)^\alpha = (n + m_L + \delta).k_t^e$, se determina el capital por trabajador en estado de crecimiento proporcionado $(k_t^e)^\alpha$.

[1] Revise *Sala-i-Martín*(1994) "Apuntes de Crecimiento Económico" Editorial: Antoni Bosch, pp. 39-43
[2] Si a largo plazo no existe un nuevo aumento de B(t) la economía converge a un estado proporcionado con un stock de capital superior, pero con crecimiento nulo.

$$\left(\frac{s}{n+m_L+\delta}\right)=\frac{k^e}{(k_t^e)^\alpha} \Rightarrow \left(\frac{s}{n+m_L+\delta}\right)=(k_t^e)^{1-\alpha}$$

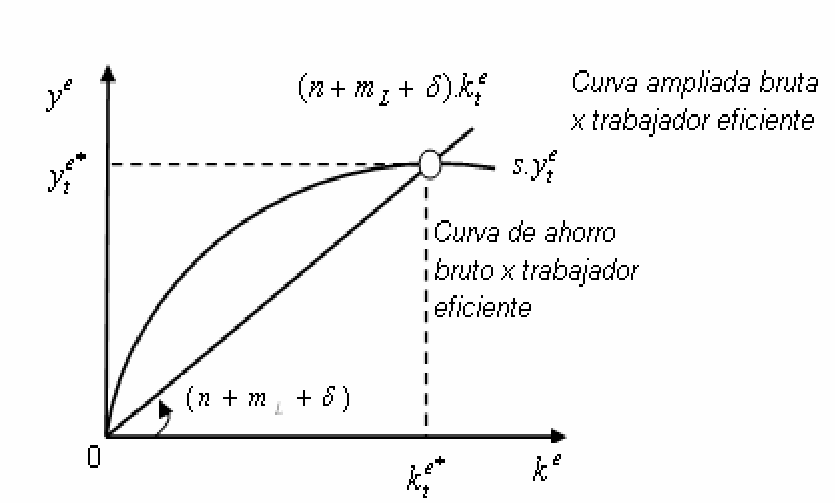
$$\boxed{(k_t^e)^* = \left(\frac{s}{n+m_L+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

De la función de producción intensiva se tiene $y_t^e = (k_t^e)^\alpha$, si reemplazamos en la ecuación anterior tenemos:

$$\boxed{(y_t^e)^* = \left(\frac{s}{n+m_L+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

Donde
Asterisco denota el valor de equilibrio de las variables

Gráfico Nº 3: Diagrama con tecnología



Versión de *Barro*

De la ecuación fundamental de *Solow – Swan* dividimos entre el capital por trabajador eficiente k_t^e.

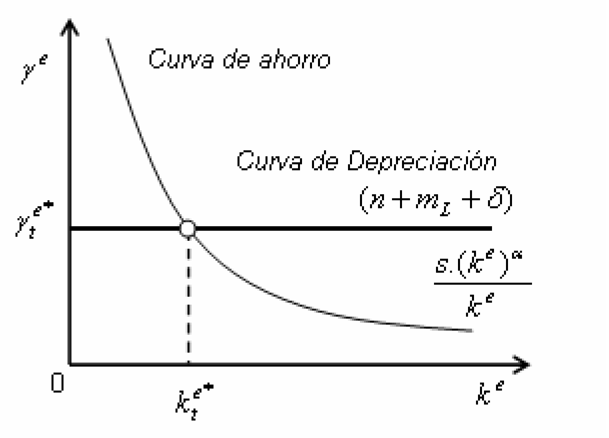
$$\frac{1}{k_t^e}.\frac{dk_t^e}{dt}=\frac{s(k_t^e)^\alpha}{k_t^e}-(n+m_L+\delta)\frac{k_t^e}{k_t^e}$$

$$\gamma_k^e = \frac{s(k_t^e)^\alpha}{k_t^e} - (n + m_L + \delta)\frac{k_t^e}{k_t^e}$$

En el crecimiento proporcionado de largo plazo, la tasa de crecimiento de capital es nula esto quiere decir que $\gamma_k^{LP^e} = 0$.

Si $\gamma_k^e = 0$ entonces $\frac{s(k_t^e)^\alpha}{k_t^e} = (n + m_L + \delta)\frac{k_t^e}{k_t^e}$, esta ecuación determina el capital por trabajador en equilibrio ($k_t^{e^*}$) como se aprecia en el gráfico

Gráfico Nº 4: Gráfico de la versión de *Barro*



Política de crecimiento ejercicios resueltos

Problema #1

Su Suponga que existe una economía capitalista cuya función de producción dinámica: $Y_t = K_t^{1/2}\left[B_{(t)}L_t\right]^{1/2}$ y se sabe que la tasa de ahorro de esta sociedad es de 24% del producto agregado cada año, también se sabe que la tasa de depreciación del capital es de 5% al ano, la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo es del 1.5% y por ultimo se sabe que la tasa de progreso tecnológico debido a la eficiencia del trabajo es de 1.5% al año.

a) Hallar la ecuación fundamental de *Solow – Swan* con progreso tecnológico.
b) Determinar el estado de crecimiento proporcionado con su respectivo gráfico.
c) Hallar los valores de equilibrio por unidad de trabajo eficiente.
d) Hallar la tasa de salario y la tasa de rendimientos bruto de l capital y graficar los valores.
e) Hallar la participación de los salarios y de los beneficios brutos en el ingreso nacional.

Rpt:

a) Hallar la ecuación fundamental de *Solow – Swan* con progreso tecnológico.

De los datos tenemos $s = 24, \delta = 0.05, n = 1.5\%, m_L = 1.5\%$

$Y_t = K_t^{1/2}\left[B_{(t)}L_t\right]^{1/2}$, dividiendo a la función de producción entre la cantidad de trabajadores eficientes $B_{(t)}L_t$

$$\frac{Y_t}{B_{(t)}L_t} = \frac{K_t^{1/2}}{\left(B_{(t)}L_t\right)^{1/2}}\left[\frac{B_{(t)}L_t}{B_{(t)}L_t}\right]^{1/2} \Longrightarrow \quad y_t^e = \frac{K_t^{1/2}}{\left(B_{(t)}L_t\right)^{1/2}} \Rightarrow y_t^e = (k_t^e)^{1/2} \ldots (FPI)$$

De la condición de equilibrio macroeconómico sabemos:

$$F(K_t, B_{(t)}L_t) = C_t + I_t$$

$$F(K_t, B_{(t)}L_t) = (1-s)F(K_t, B_{(t)}L_t) + \dot{K}_t + \delta K_t$$

Dividiendo entre la cantidad de trabajadores eficientes

$$0 = -sF(K_t, B_{(t)}L_t) + \dot{K}_t + \delta K_t \ldots \frac{1}{B_{(t)}L_t}$$

$$0 = -sf(k_t^e) + \dot{k}_t^e + \delta k_t$$

Despejando $\dot{k}_t^e$, tenemos:

$$\dot{k}_t^e = sf(\dot{k}_t^e) - \delta\, \dot{k}_t^e \ldots (I)$$

Para saber el comportamiento de k_t^e, calcularemos su derivada con respecto al tiempo

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \frac{\partial\left[K_t / B_{(t)}L_t\right]}{\partial t} = \frac{\dot{K}_t . B_{(t)}L_t - K_t . B_{(t)}L_t - K_t . \dot{B}_{(t)}\, L_t}{\left(B_{(t)}L_t\right)^2}$$

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \underbrace{\frac{\dot{K}_t}{B_{(t)}L_t}} - \underbrace{\frac{\dot{L}_t}{L_t}} . \underbrace{\frac{K_t}{B_{(t)}L_t}} - \underbrace{\frac{\dot{B}_{(t)}}{B_{(t)}}} . \underbrace{\frac{K_t}{B_{(t)}L_t}}$$

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \dot{k}_t^e - n.k_t^e - m_L.k_t^e \ldots (II)$$

Reemplazando $\dot{k}_t^e$, que lo hallamos en la ecuación (I) y reemplazamos en la FPI de nuestro modelo tenemos:

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \dot{k}_t^e - n.k_t^e - m_L.k_t^e \ldots (II)$$

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = sf(k_t^e) - (n + m_L + \delta).k_t^e$$

Nos da la ecuación fundamental de *Solow – Swan* con progreso tecnológico.

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = s(k_t^e)^{\alpha} - (n + m_L + \delta).k_t^e \ldots (III)$$

Reemplazando los datos en la ecuación (III)

$$\boxed{\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = 0.24(k_t^e)^{1/2} - 0.08k_t^e \text{, \textit{la ecuación fundamental con progreso tecnológico}}}$$

b) En el estado de crecimiento proporcionado se obtiene dividiendo la ecuación anterior (ecuación fundamental de *Solow - Swan*) entre el capital por trabajador eficiente e igualándolo a la tasa de crecimiento que es nula $\gamma_k^e = 0$.

$$\frac{1}{k_t^e}.\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \frac{0.24(k_t^e)^{1/2}}{k_t^e} - 0.08 \quad \Rightarrow \quad \gamma_k^e = \frac{0.24(k_t^e)^{1/2}}{k_t^e} - 0.08$$

Donde la tasa de crecimiento del capital es nula $\gamma_k^e = 0$. En el estado proporcionado esta dado por la siguiente ecuación:

$$\boxed{0 = \frac{0.24(k_t^e)^{1/2}}{k_t^e} - 0.08}$$

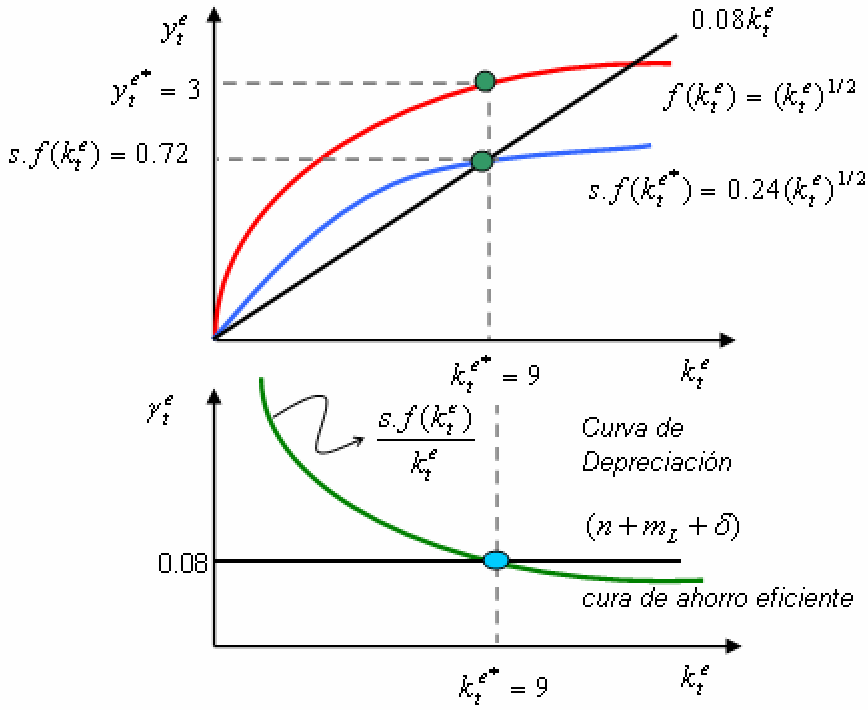
c) Hallar los valores de equilibrio por unidad de trabajo eficiente.

$$\frac{0.24(k_t^e)^{1/2}}{k_t^e} = 0.08 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_t^{e*} = 9}$$

Remplazando k_t^{e*}, en la FPI tenemos el producto por trabajador eficiente:

$$y_t^e = (9)^{1/2} \Rightarrow \boxed{y_t^{e*} = 3}$$

Gráfico del problema #1



d) Hallar la tasa de salario y la tasa de rendimientos bruto de l capital y graficar los valores.

Mercado de capital:

$$Pmgk = R^e \Rightarrow Pmgk = \frac{d\left(k_t^{1/2}\right)}{dk_t} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R^r = 0.16666}$$

Mercado de trabajo:

$$pmgL = W^e \Rightarrow Pmgk = f(k_t^e) - f'(k_t^e).k_t^e \Rightarrow W^e = (k_t^e)^{1/2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{k_t^{1/2}}.k_t$$

$$W^e = \frac{1}{2}k_t^{1/2} \Rightarrow W^e = \frac{1}{2}(9)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W^e = 1.5}$$

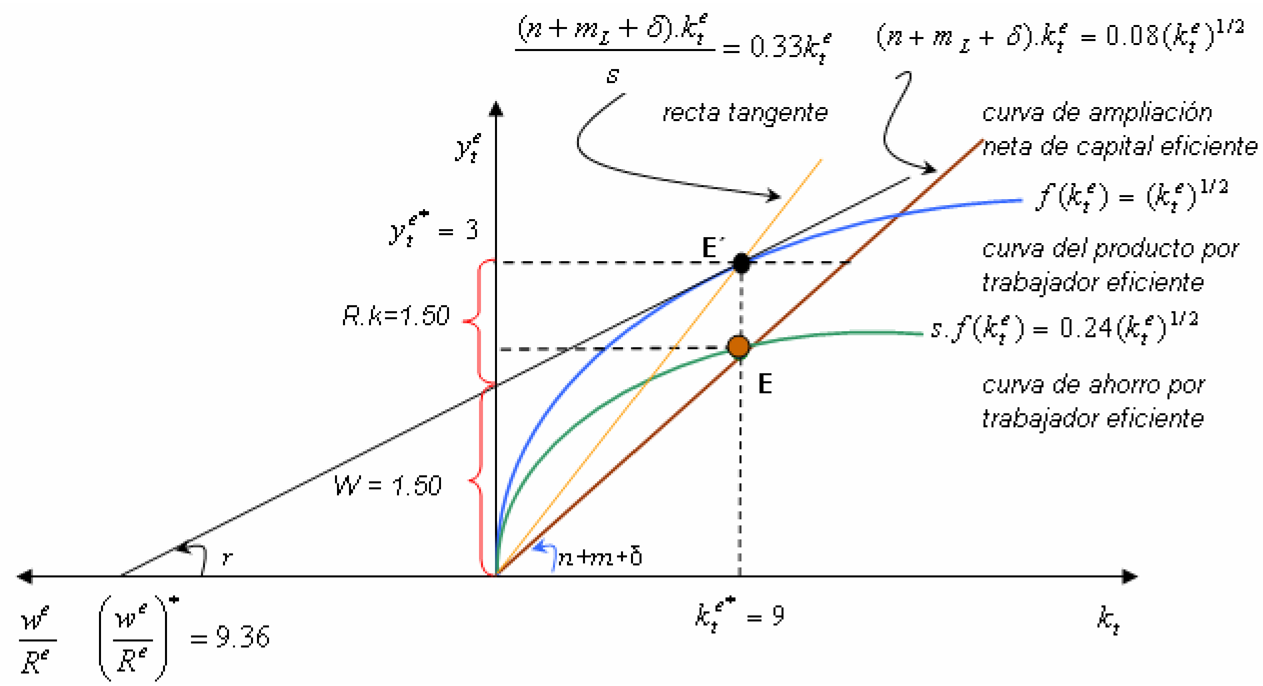
e) Hallar la participación de los salarios y de los beneficios brutos en el ingreso nacional.

$\frac{w^e}{y^e} = \frac{W}{Y} = \frac{1.5}{3} = 0.5 \approx 50\%$, la participación del beneficio en el ingreso nacional es del 50%.

La participación del beneficio:

$\frac{R^e k^e}{y^e} = \frac{B}{Y} = \frac{(0.16666)x9}{3} = 0.498 \approx 50\%$, la participación del beneficio en el ingreso nacional es del 50%.

Gráfico de la distribución del ingreso nacional



Problema #2

Examine el impacto de un aumento permanente en la tasa de inversión sobre el crecimiento de la economía en el modelo de *Solow – Swan* con progreso tecnológico.

Rpt:

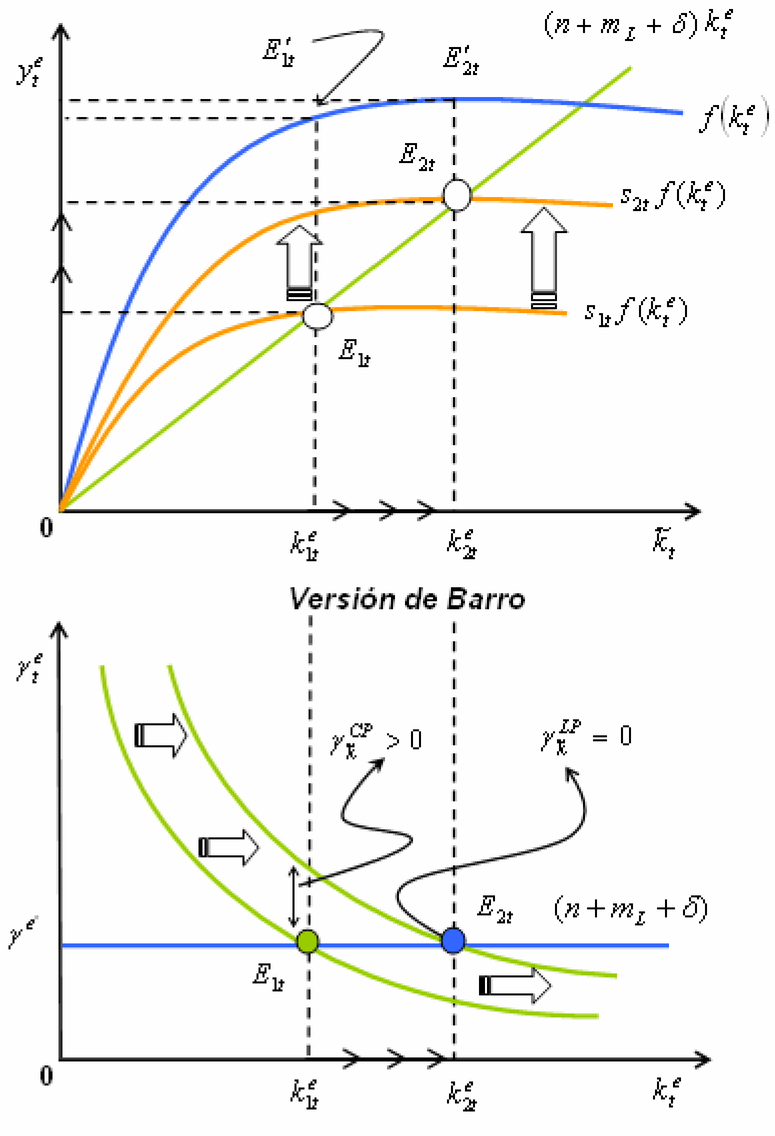
Como en la economía se decidido aumentar de forma permanente la tasa de inversión, desde "s_{1t} " hasta "s_{2t} ". La respuesta de esta economía como se puede ver el grafico del problema #2.

Que el aumento de la inversión se desplaza en forma ascendente de $s_{1t}.f(k_{1t}^e)$ hasta la curva, llegando al equilibrio E_{2t}, con esto la nueva inversión (k_{2t}^e) supera a la inversión anterior por trabajado eficiente, esto significa que la economía comienza de nuevo la profundización, hasta llegar a igualarse $s_{2t} f(k_{2t}^{e}) = (n + m_L + \delta) k_{2t}^{e}$.

Por lo que la función de producción eficiente llega a un valor más alto que el capital por trabajador eficiente con una producción per -capita más alta.

$$s.f(k_{2t}) = (n + m_L + \delta).k_{2t} \Rightarrow \frac{d(f(k_{2t}))}{dt} = k_{2t}^{*} > 0$$ Donde $k_{1t}^{*} < k_{2t}^{*}$

Gráfico del problema #2



$$\frac{\uparrow s.f(k_t^e)}{k_t^e} - (n + m_L + \delta) = \gamma_t^e > 0$$

Si $\Delta s > 0$

$$\uparrow k_t^e = \left(\frac{\uparrow s}{n + m_L + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \wedge \uparrow y_t^e = \left(\frac{\uparrow s}{n + m_L + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Problema #3

Suponga que existe una economía capitalista cuya función de producción agregada es $Y_t = K_t^{5/9}\left[B_{(t)}L_t\right]^{4/9}$, y se sabe que la tasa de ahorro de esta sociedad es de 36% del producto agregado cada año, también se sabe que; La tasa de depreciación del capital es de 8% al año, la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo es del 2% al año y por ultimo se sabe que la tasa de progreso tecnológico debido a la eficiencia del trabajo es de 2% al año.

a) Hallar la ecuación fundamental de *Solow* – *Swan* con progreso tecnológico.
b) Determine el estado de crecimiento proporcionado.
c) Halle el valor de equilibrio de capital por unidad trabajo eficiente y del producto por unidad eficiente y graficar.
d) Halle la remuneración de los factores.
e) Hallar la participación de los salarios y de los beneficios brutos en el ingreso nacional y por ultimo grafique todos los datos encontrados en un solo grafico.

Rpt:

a) De los datos tenemos: $s = 0.36, \delta = 0.08, n = 2\%, m_L = 2\%$

$Y_t = K_t^{5/9}\left[B_{(t)}L_t\right]^{4/9}$, dividiendo la función de producción entre la cantidad de trabajadores eficientes $B_{(t)}L_t$, tenemos:

$$\frac{Y_t}{B_{(t)}L_t} = \frac{K_t^{15/9}}{\left(B_{(t)}L_t\right)^{5/9}}\left[\frac{B_{(t)}L_t}{B_{(t)}L_t}\right]^{4/9} \qquad y_t^e = \frac{K_t^{4/9}}{\left(B_{(t)}L_t\right)^{49}} \Rightarrow y_t^e = (k_t^e)^{5/9} \ldots (FPI)$$

De la condición de equilibrio macroeconómico sabemos:

$$F(K_t, B_{(t)}L_t) = C_t + I_t$$

$$F(K_t, B_{(t)}L_t) = (1-s)F(K_t, B_{(t)}L_t) + \dot{K}_t + \delta K_t$$

Dividiendo entre la cantidad de trabajadores eficientes

$$0 = -sF(K_t, B_{(t)}L_t) + \dot{K}_t + \delta K_t \ldots \frac{1}{B_{(t)}L_t}$$

$$0 = -sf(k_t^e) + \dot{k}_t^e + \delta k_t$$

Despejando $\dot{k}_t^e$, tenemos:

$$\dot{k}_t^e = sf(\dot{k}_t^e) - \delta\, \dot{k}_t^e \ldots (I)$$

Para saber el comportamiento de k_t^e, calcularemos su derivada con respecto al tiempo

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \frac{\partial\left[K_t / B_{(t)}L_t\right]}{\partial t} = \frac{\dot{K}_t . B_{(t)}L_t - K_t . B_{(t)}\dot{L}_t - K_t . \dot{B}_{(t)} L_t}{\left(B_{(t)}L_t\right)^2}$$

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \frac{\dot{K}_t}{\underbrace{B_{(t)}L_t}} - \frac{\dot{L}_t}{\underbrace{L_t}} . \frac{K_t}{\underbrace{B_{(t)}L_t}} - \frac{\dot{B}_{(t)}}{\underbrace{B_{(t)}}} . \frac{K_t}{\underbrace{B_{(t)}L_t}}$$

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \dot{k}_t^e - n.k_t^e - m_L.k_t^e \ldots (II)$$

Reemplazando $\dot{k}_t^e$, que lo hallamos en la ecuación (I) y reemplazamos en la FPI de nuestro modelo tenemos:

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \dot{k}_t^e - n.k_t^e - m_L.k_t^e \ldots (II)$$

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = sf(k_t^e) - (n + m_L + \delta).k_t^e$$

Nos da la ecuación fundamental de *Solow – Swan* con progreso tecnológico.

$$\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = s(k_t^e)^{\alpha} - (n + m_L + \delta).k_t^e \ldots (III)$$

Reemplazando los datos en la ecuación (III)

$$\boxed{\frac{\partial k_t^e}{\partial t} = 0.36(k_t^e)^{5/9} - 0.12k_t^e \text{ , } \textit{la ecuación fundamental con progreso tecnológico}}$$

b) En el estado de crecimiento proporcionado se obtiene dividiendo la ecuación anterior (ecuación fundamental de *Solow - Swan*) entre el capital por trabajador eficiente e igualándolo a la tasa de crecimiento que es nula $\gamma_k^e = 0$.

$$\frac{1}{k_t^e} . \frac{\partial k_t^e}{\partial t} = \frac{0.36(k_t^e)^{5/9}}{k_t^e} - 0.12 \quad \Rightarrow \quad \gamma_k^e = \frac{0.36(k_t^e)^{5/9}}{k_t^e} - 0.12$$

Donde la tasa de crecimiento del capital es nula $\gamma_k^e = 0$. En el estado proporcionado esta dado por la siguiente ecuación:

$$\boxed{0 = \frac{0.36(k_t^e)^{5/9}}{k_t^e} - 0.12}$$

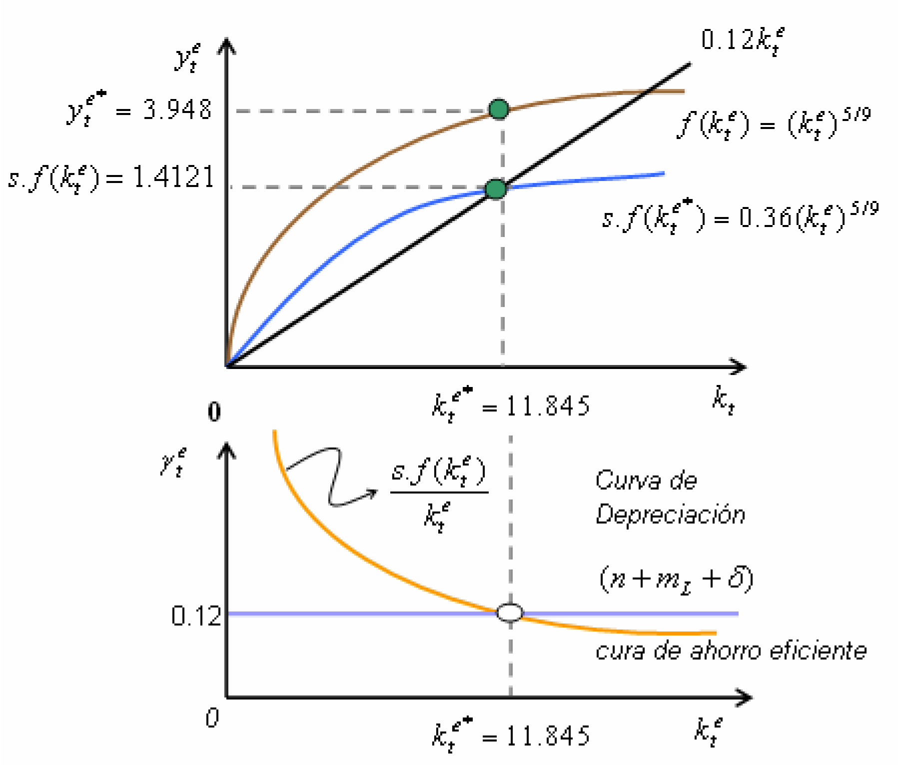
c) Hallar los valores de equilibrio por unidad de trabajo eficiente.

$$\frac{0.36(k_t^e)^{5/9}}{k_t^e} = 0.12 \Rightarrow \boxed{k_t^{e^*} = 11.845}$$

Remplazando $k_t^{e^*}$, en la FPI tenemos el producto por trabajador eficiente:

$$y_t^e = (11.845)^{5/9} \Rightarrow \boxed{y_t^{e^*} = 3.948}$$

Gráfico del problema #3



d) Hallar la tasa de salario y la tasa de rendimientos bruto de l capital y graficar los valores.

Mercado de capital:

$$Pmgk = R^e \Rightarrow Pmgk = \frac{d\left(k_t^{5/9}\right)}{dk_t} = \frac{5}{9}\left(\frac{1}{k_t}\right)^{4/9} \Rightarrow \boxed{R^r = 0.1852}$$

Mercado de trabajo:

$$pmgL = W^e \Rightarrow Pmgk = f(k_t^e) - f'(k_t^e).k_t^e \Rightarrow W^e = (k_t^e)^{5/9} - \frac{5}{9}.\frac{1}{k_t^{4/9}}.k_t$$

$$W^e = \frac{4}{9}k_t^{5/9} \Rightarrow W^e = \frac{4}{9}(11.845)^{5/9} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{W^e = 1.754}$$

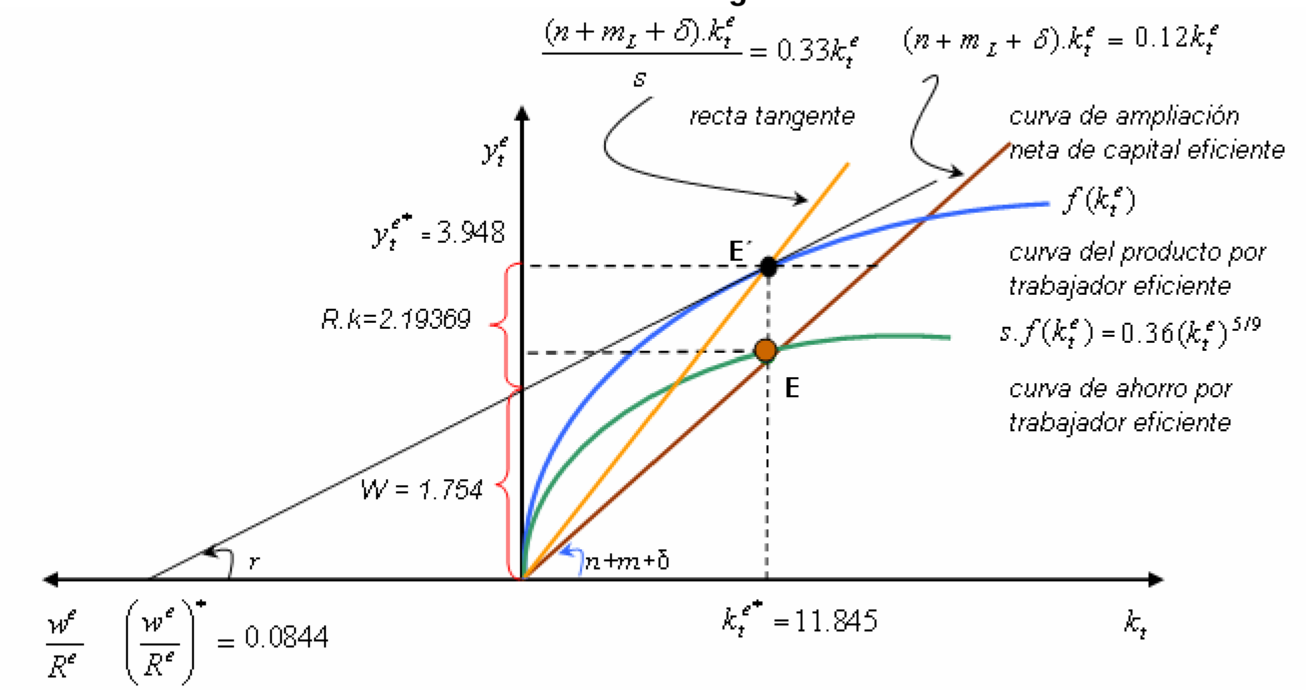
e) Hallar la participación de los salarios y de los beneficios brutos en el ingreso nacional.

$\frac{w^e}{y^e} = \frac{W}{Y} = \frac{1.754}{3.948} = 0.445 \approx 50\%$, la participación del beneficio en el ingreso nacional es del 44.5%.

La participación del beneficio:

$\frac{R^e k^e}{y^e} = \frac{B}{Y} = \frac{(0.1852)x11.845}{3.948} = 0.555 \approx 55.5\%$, la participación del beneficio en el ingreso nacional es del 55.5%.

Gráfico de la distribución del ingreso nacional



Problema #4

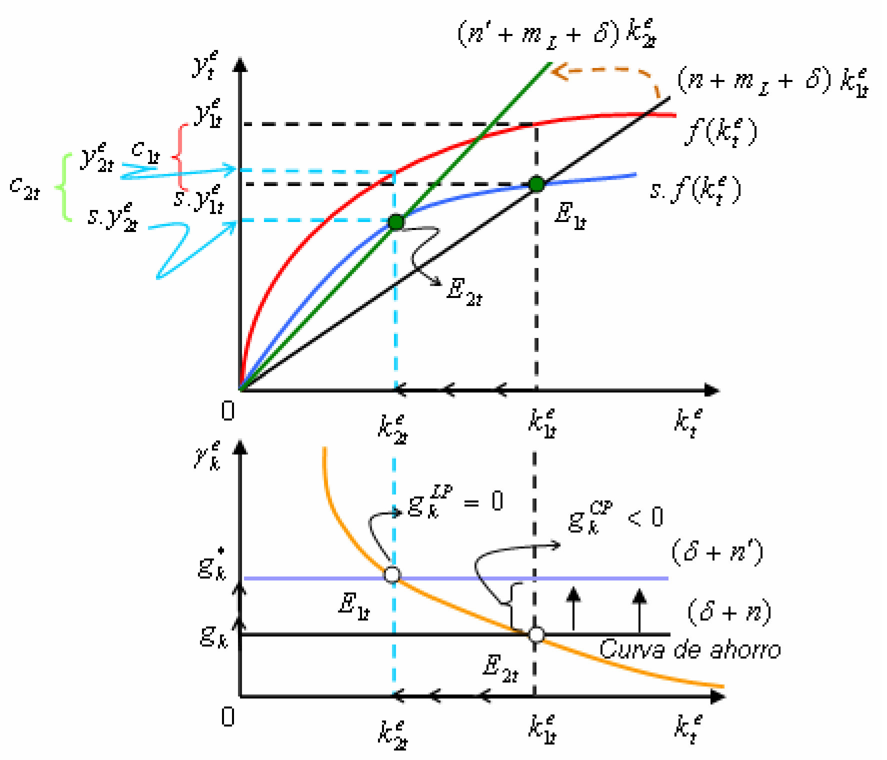
Imaginemos en el país "A" se ha producido un aumento de la población debido a la no planificación familiar esto ha aumentado la tasa de crecimiento poblacional, considerablemente, y debido a estos se quiere analizar este aumento permanente de la tasa de crecimiento de la población, sobre el crecimiento de su economía.

Rpt:

Un aumento permanente de la tasa se crecimiento de la población (n'), la curva de ampliación de capital rota en sentido antihorario, de tal modo que cuando se interfecta con la curva de ampliación neta de capital determina el nuevo estado de crecimiento proporcionado, con menor capital (k_{2t}^e) y menor producto por trabajador (y_{2t}^e), como se puede ver en el grafico del problema #4.

En el corto plazo el capital por trabajador eficiente comienza a disminuir, como se puede apreciar en la versión de *Barro*, teniendo una tasa de crecimiento negativa, hasta llegar el equilibrio (E_{2t}) donde la tasa de crecimiento proporcionado es nula. También podemos apreciar en la grafica que con mayor "n" se obtiene un nuevo consumo por trabajador eficiente (c_{2t}), y un nuevo ingreso per cápita por trabajador (k_{2t}^e).

Gráfico del problema #4



$$\frac{sf(k_t^e)}{k_t^e} - (n + m_L + \delta) = \gamma_t^e < 0$$

Si $\Delta n > 0$

$$\downarrow k_t^e = \left(\frac{s}{\uparrow n + m_L t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \wedge \downarrow y_t^e = \left(\frac{s}{\uparrow n + m + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Por lo tanto una aumento de la tasa crecimiento de la población afecta de manera negativa al capital por trabajador eficiente, el nivel de producción por trabajador, y nos da una tasa de
Crecimiento negativa.