UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
(Universidad del Perú, Decana de América)

El Modelo de Solow – Swan

El modelo de crecimiento con función Cobb-Douglas, desarrollado por Solow y Swan de manera separada en 1956. Este modelo hace referencia a los supuestos, de ecuaciones fundamental, al examen de cómo se alcanza el equilibrio.

Todavía en esta parte se supone que no existe progreso tecnológico en el siguiente Capítulo de este libro (III), veremos como influye la tecnología en el crecimiento de producción de un país.

Supuestos del modelo

A los supuestos básicos del modelo de *Solow* se le añaden los siguientes supuestos particulares:

- ✓ Utiliza una función de producción Cobb-Douglas.
- ✓ El stock de capital se deprecia a una tasa constate exógena: δ

Función de Producción agregada (FPA)

La función de producción neoclásica, es homogénea de grado uno o linealmente homogénea, con rendimientos constantes a escala y, además, con rendimientos marginales de cada uno de los factores, positivos y decrecientes.

$$Y_t \equiv F(K_t, L_t, A) = A.K_t^{\alpha}.L_t^{1-\alpha} \ldots (I) \qquad \text{con: } 0 < \alpha < 1$$

s.a: { *Rendimientos de escala constante.*[1]
Rendimientos decrecientes.

Donde:

A : Índice de Nivel de tecnología[2].

α : Elasticidad del producto respecto al capital.
Y_t : Producción agregada en el instante "*t*".

---

[1] *Charles Cobb*[μ] y *Paul Douglas*[ψ] (1928) propusieron una función de producción, tal que los factores de producción cobran sus productos marginales. En su análisis de la manufactura de los EE.UU.

[μ] Fue un matemático amigo de charles.

[ψ] Fue senado por Illinois entre 1949-1966 y profesor de economía.

[2] Generalmente se supone o se asume que el índice de nivel de tecnológico es la unidad, donde $A_t = A$.

K_t : Stock de capital agregado en el instante "*t*".
L_t : Fuerza de trabajo agregada.

Si multiplicado a la ecuación (I) por $\lambda > 0$, comprobaremos que la función es homogénea de grado uno.

$$\lambda.Y_t = A(K_t.\lambda)^{\alpha}.(\lambda.L_t)^{1-\alpha} \Rightarrow \lambda.Y_t = A\lambda^{\alpha}.K_t^{\alpha}.\lambda^{1-\alpha}.L_t^{1-\alpha} \Rightarrow \lambda.Y_t = \lambda.A.K_t^{\alpha}.L_t^{1-\alpha}$$

Por lo tanto queda comprobado que a función es homogénea de grado uno.

Esta función también puede ser rescrita con la función de producción intensiva (FPI), de la siguiente forma:

Dividiendo a la ecuación (I), entre L_t

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{A.K_t^{\alpha}.L_t^{1-\alpha}}{L_t} \quad \Longrightarrow \quad y_t = A.K_t^{\alpha}.L^{-\alpha} \Rightarrow y_t = A.\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha} \quad \Longrightarrow \quad y_t = A.k_t^{\alpha} \ldots (FPI)$$

- La productivaza marginal de capita (k_t) es positiva.

$$\frac{df(k_t)}{dk_t} = f'(k_t) = \alpha.k_t^{\alpha-1} > 0$$

- La función es cóncava (por que la segunda derivada es negativa).

$$\frac{d^2 f(k_t)}{dk_t^2} = f''(k_t) = -\alpha(1-\alpha).k_t^{\alpha-2} < 0$$

- Satisface las condiciones correspondientes a INADA (Inada, 1964).

$$\approx 1/\infty$$

$$Límf'(k_t)_{k(t)\to\infty} = \alpha.\frac{1}{k^{1-\alpha}} = 0$$

$$\approx 1/0$$

$$Límf'(k_t)_{k(t)\to 0} = \alpha.\frac{1}{k^{1-\alpha}} = \infty$$

❖ **Crecimiento poblacional**

Solow considera que toda la población está empleada y, además, crece a una tasa constante determinada exógenamente. Su forma funcional es:

$$\frac{\dot{L}_t}{L_t} = n$$

Ecuación Fundamental de *Solow - Swan*

De la ecuación fundamental de *Solow* con depreciación tenemos:

$\dot{k}_t = s.f(k_t) - (n+\delta).k_t \; , \quad y_t = f(k_t)$

Pero la función de producción Cobb-Douglas; $y_t = A.k_t^{\alpha} \Rightarrow f(k_t) = A.k_t^{\alpha} \ldots (FPI)$

Reemplazando la (*FPI*) en la ecuación de *Solow.*

$$\boxed{\dot{k}_t = s.Ak_t^{\alpha} - (n+\delta).k_t \text{, } \textit{La Ecuación fundamental de Solow – Swan}^{3}}$$

Esta ecuación diferencial de acumulación de capital, donde la tasa de cambio del capital por trabajador es igual al remanente del ahorro bruto por trabajador respecto a la ampliación bruta de capital.

Estado de Crecimiento Proporcionado

Que lo traducen como *estado estacionario* (Growth steady state), en este estado de crecimiento proporcionado, cuando $\dot{k}_t = 0$, entonces $s.Ak_t^{\alpha} = (n-\delta).k_t$ se determina k_t^*.

Hallando k_t^*:

$$\frac{s.A}{n+\delta} = \frac{k_t}{k_t^{\alpha}} \Longrightarrow \frac{s.A}{n+\delta} = k_t^{1-\alpha} \Longrightarrow \boxed{k_t^* = \left(\frac{s.A}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

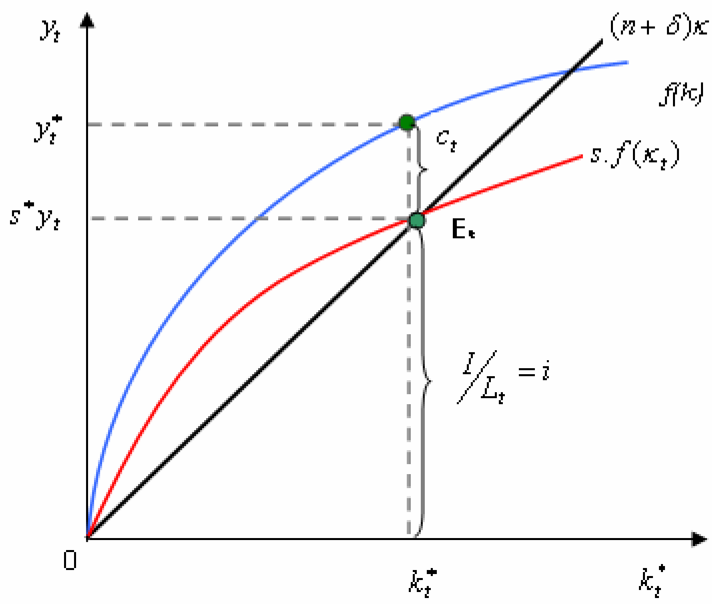
Donde el asterisco ($*$) denota el valor de equilibrio de la variable.

Reemplazando el k_t^* hallado en la (FPI), nos da el valor de producto por trabajador de equilibrio (y_t^*).

$$y_t = A.k_t^{\alpha} \Longrightarrow \boxed{y_t^* = \left(\frac{s.A}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

[3] Se recomienda al lector que trate de recordar esta ecuación ya que será utilizada a lo largo de este libro en los distintos modelos que se representaran en los capítulos siguientes.

Gráfica Nº 1: Estado Proporcionado de las variables



En el Gráfico Nº1, podemos apreciar que en el estado de crecimiento proporcionado se determina, k_t^* e y_t^*. Donde también se aprecia que la tasa de ahorro , s, donde esta determina el reparto entre consumo por trabajador (c_t) y inversión por trabajador (i_t). En el cualquier nivel de k_t la producción es $f(k_t)$, la inversión por trabajador es $s.f(k_t)$, y el consumo por trabajador es $f(k_t) - s.f(k_t)$.

❖ **Versión de *Barro***

A partir de la ecuación fundamental de *Solow – Swan* con depreciación;

$\dot{k}_t = s.f(k_t) - (n-\delta).k_t$, dividiendo a esta ecuación entre el capital por trabajador de equilibrio (k_t), tenemos:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = s.A.\frac{k_t^{\alpha}}{k_t} - (n+\delta)\ldots(II)$$

$$\boxed{\gamma_k = s.A.\frac{k_t^{\alpha}}{k_t} - (n+\delta), \textit{ La ecuación fundamenta Solow-Swan-Barro}}$$

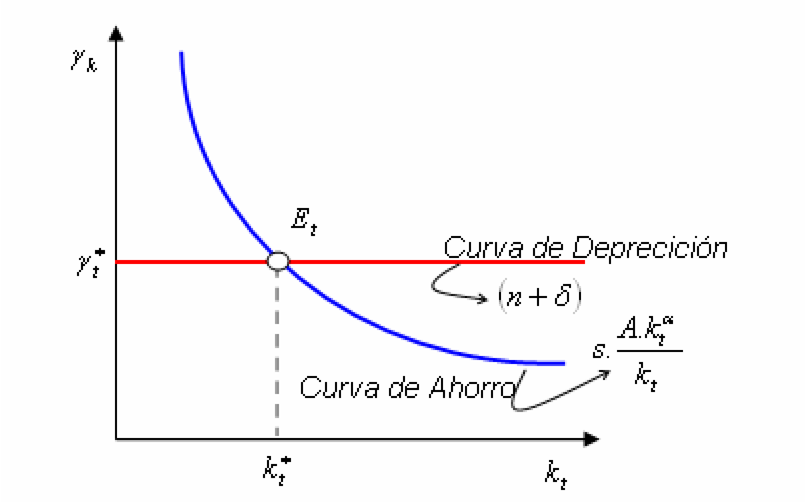
El miembro izquierdo de la ecuación (II) representa la tasa de crecimiento del capital per capita y es igual a la diferencia entre $s.k_t^{\alpha-1}$ (curva de ahorro) y $(n+\delta)$ (curva de depreciación).

En el crecimiento proporcionado la $g_k = 0$, entonces $\frac{s.A.k_t^{\alpha}}{k} = (n+\delta)$, se determina k_t^*.

Hallando k_t^*; $\frac{s.A}{n+\delta} = \frac{k}{k^{\alpha}} \Longrightarrow k_t^* = \left(\frac{s.A}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Donde: $\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \gamma_k = g_k$: Tasa de crecimiento del capital

Gráfica Nº 2: versión de *Barro*



En el Gráfico Nº 2, podemos apreciar que la curva de ahorro es decreciente, tiende a cero cuando k_t se aproxima a infinito y cuando k se acerca a cero (*CONDICIONES INADA*). En cuanto a la curva de depreciación es horizontal, es decir, es independiente de k . Considerando que ésta es estrictamente positiva y la curva $s.k_t^{\alpha-1}$ toma valores entre cero e infinito, las dos funciones (curvas) se cruzan una sola vez en la gráfica (punto E_t) y la k_t^* correspondiente que representa a este punto es el capital per capita que existe en el estado proporcionado.

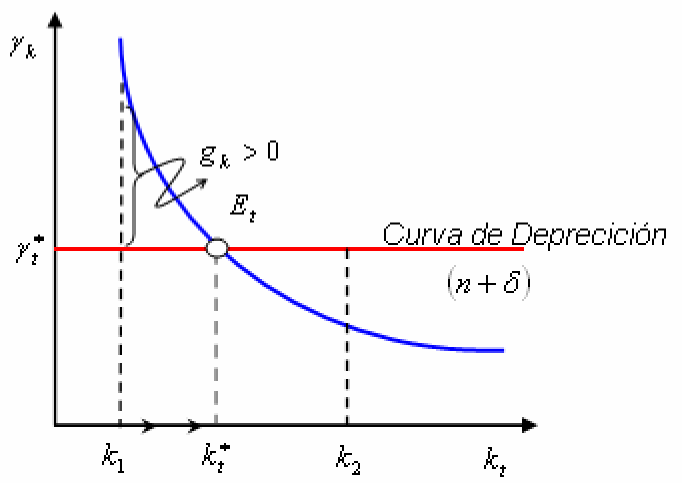
Acerca de la estabilidad

La economía capitalista en el largo plazo tiende a un estado de crecimiento proporcionado, y esto lo veremos en dos casos:

❖ **Caso I (**$k_1 > k^*$**)**

En este caso vemos en el Gráfico Nº 3, que, la economía tiene hoy un capital k_0, la inversión por trabajador (ahorro neto por trabajador) supera a la ampliación neta de capita. Esto quiere decir que va ocurrir una profundización (k_1 aumentara con el tiempo), hasta llegar a igualarse con el capital por trabajador k_t^*, cuando $\dot{k}_t = 0$, las curvas originado un punto $(n+\delta).k_t = s.f(k_t)$, que es llamado el estado proporcionado, donde la cantidad de capital por trabajador permanece constante.

Gráfica Nº 3: La Estabilidad Caso (I)



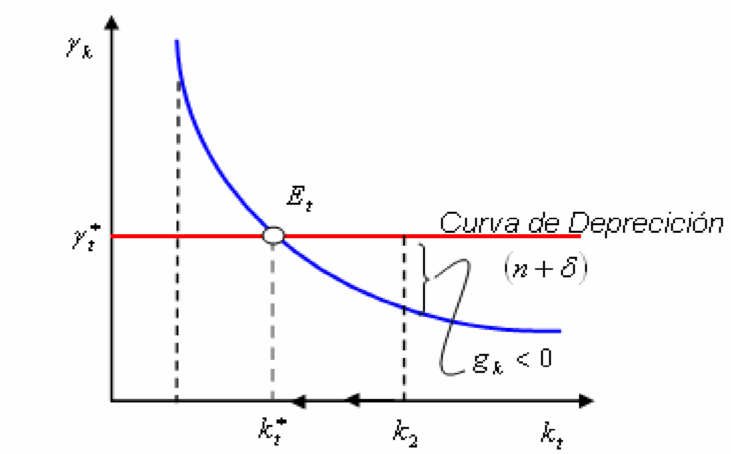
$$k_0 < k_t^* \Rightarrow Lím_{k(0)\to\infty} = k^*$$

❖ **Caso II (**$k_2 < k^*$**)**

Si el capital por trabajador se encuentra a la derecha k_t^*, como se puede apreciar en el Gráfico Nº 4, donde el capital por trabajador esta expresado como k_2.En esta región la ampliación neta de capital supera al ahorro por trabajador, esto quiere decir que el ahorro es menor a la cantidad necesaria para mantener la proporción capital-trabajo constante.

Como $\dot{k}_t < 0$, por consiguiente la cantidad de capital por trabajador k_1 comienza a declinar hasta que se iguale con k_t^*.

Gráfica Nº 4: La Estabilidad Caso (II)



$$k_2 > k_t^* \Rightarrow Lím_{k(2)\to\infty} = k^*$$

Dinámica de transmisión sobre la convergencia

Se le da el nombre de "Dinámica de transmisión", por que hace preediciones del modelo que se relaciona con las tasa de crecimiento. En este sentido el modelo neoclásico trata de explicar la rapidez con la cual, la economía evoluciona hacia el estado proporcionado. En esta parte trataremos de explicar las implicarías de los dos tipos de convergencia:

(a) *Hipótesis de la convergencia Absoluta*

Esta primera hipótesis fue propuesta por historiadores económicos como Aleksander Gerschenkron (1952) y Moses Abramovitz (1986).

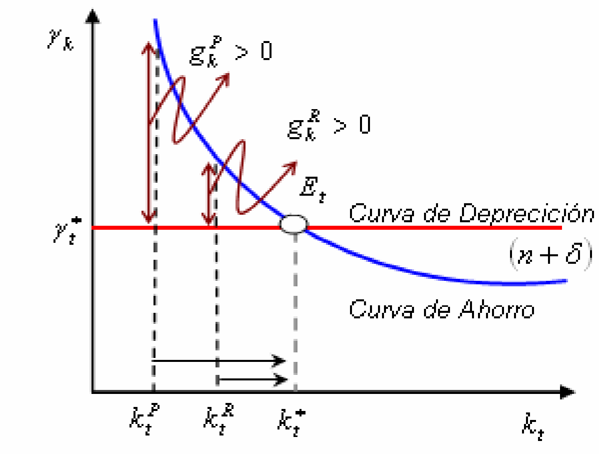
Plantean que a largo plazo los países del mundo que solo difieran en su relación capital trabajo, tenderán a un mismo estado de crecimiento proporcionado. En este sentido, aquellas economías que se encontraban en una situación menos favorable (nivel de ingreso per cápita inferior), tenderían a mostrar tasas de crecimiento superiores a las economías más desarrolladas (nivel de ingreso per cápita superior)[4].

❖ ***Implicancias***

Aquello países, que el mismo tiempo (inicio), tienen relativamente un menor capital por trabajador, crecen más rápido, que los países que tienen al inicio mayor capital por trabajador.

[4] Finalmente, por lo que respecta al concepto, debe mencionarse que en el caso de que las economías sean lo suficientemente parecidas si podrá esperarse la existencia de convergencia absoluta.

Gráfica Nº 5: La Convergencia Absoluta



En el Gráfico Nº 5, podemos apreciar que los países pobres que tienen menor capital por trabajador (k_t^P), en el largo plazo crecerán a una tasas mayores que los países ricos con mayor capital por trabajador (k_t^R).

$$k_t^P < k_t^R \Rightarrow g_k^P < g_k^R$$

Donde:

g_k^P : Tasa de crecimiento del país pobre.
g_k^R : Tasa de crecimiento del país rico.
P: Países pobres.
R: Países ricos.

William Baumol (1986), fue uno de los primeros en presentar evidencia documentada entre algunos países y la ausencia de convergencia de otros. La critica de *Bradford De Long* (1988), es que la convergencia de *Baumol* para países desarrollados en el siglo pasado, era una muestra sesgada (por que solo usaba países industrializados). En particular *De Long* observo dos cosas: Primero solo incluía países industrializado (de la década del 1980), segundo al incluir a Argentina en la muestra, que era más rico que Japón en 1870, no se cumplía la convergencia Absoluta.

Robert Barro (1992), como se muestra a continuación utilizando una muestra de 98 países constata que la hipótesis de convergencia absoluta es invalidad.

El argumento de la convergencia absoluta fue rechazado por la evidencia empírica, ya que si bien algunos países han logrado un alto nivel de crecimiento sostenido, alcanzando los niveles de ingreso per cápita de las economías desarrolladas, las diferencias presentes entre los países más pobres del planeta y los más ricos muestran un alto grado de persistencia.

La polémica en torno a la convergencia entre los países generó gran abundancia de estudios empíricos en la década de los noventa que buscaba determinar su existencia en diferentes grupos de países, presentamos un cuadro [1.1] con los resultados de algunos estudios[5].

Cuadro 1.1: La Convergencia en el mundo

Series analizadas	Referencia	Convergencia absoluta	Convergencia condicional
Mundo (110 países)	Salan-i-Martín (1996)	No	Si
Mundo (98 países)	Barro (1991)	No	Si
Mundo (98 países)	Mankiw, Romer, Weill (1992)	No	Si
Estados Unidos (48 estados)	Barro y Salan-i-Martín (1992)	Si	Si
OCDE (22 países)	Mankiw, Romer, Weill (1992)	Si	Si
Pacífico del sur (9 islas)	Cashin y Loayza (1995)	Si	Si
América Latina (12 países)	José de Gregorio (1995)	No	Si
América Latina (23 países)	Corbo y Rojas (1994)	No se responde	Si
México (32 estados)	Navarrete (1994)	No evidente	Si
México (31 estados)	J.Ramon y R.Bátiz (1996)	Si	Si

(b) *Hipótesis de la convergencia Condicional*

En el mundo existe una diversidad de economías que presenta un nivel de equilibrio particular, el cual depende de factores de carácter tecnológico, PBI per-cápita, tales como el nivel de alfabetismo y la esperanza de vida al nacer, institucional y social, hacia el cual se tiende a lo largo del tiempo.

Según el criterio del PBI per cápita (PPA en dólares), pueden haber distinto grupos de países[6].
El PNUD, distingue los países según su PBI per-cápita, como se puede apreciar en el cuadro [1.2], de la quinta columna, donde los países capitalista tiene un ingreso por persona superior o igual a 23,928 dólares.

---

[5] Véase la “Convergencia regional en América latina: 1980-2000” de Luís Fernando Cabrera Castellanos* Blanca García Alamilla**.
* Profesor Investigador de la Universidad de Quintana Roo.
** Estudiante de la Facultad de Economía de la Universidad Autónoma de Yucatán.
[6] PPA: paridad de poder de adquisición.

Cuadro [1.2]: INDICE DE DESARROLLO HUMANO. 1998

Grupo de países	Esperanza de vida al nacer (años)	Tasa de alfabetización de adultos (% de edad 15 y superior)	Tasa bruta de matriculación (primaria, secundaria y terciaria combinadas (%)	PIB per cápita (PPA en dólares)	Valor del Indice de Desarrollo Humano
Países con alto ingreso	77,8	98,6	92	23.928	0,920
Países con ingreso medio	68,8	87,8	73	6.241	0,750
Países con ingreso bajo	63,4	68,9	56	2.244	0,602
América Latina y el Caribe	69,7	87,8	74	6.510	0,758
Colombia	70,7	91,2	71	6.006	0,764
Total mundial	66,9	78,8	64	6.526	0,712

Fuente: Elaborado con base en: PNUD. Informe sobre desarrollo humano 2000, p.157

Para nuestro análisis de la convergencia condicional nos centraremos en quinta columna de este cuadro, donde distingue los grupos por ingresos por persona.

Donde los países pobres no tienen necesariamente que alcanzar a los países más ricos en el estado estacionario; por el contrario, es probable que los países pobres tengan un stock de capital por trabajo efectivo muy cercano a "su correspondiente" estado estacionario. Esta hipótesis también implica que los países pobres.

❖ ***Planteamiento***

✓ Cada grupo de países tiende a largo plazo, a su propio estado de crecimiento proporcionado.

✓ Aquello países que al inicio tenían relativamente un menor capital por trabajador, crecerán dentro de su propio grupo , más rápido que los otros países que al inicio tenían más capital por trabajador.

Esto quiere decir que se dará la convergencia dentro de su propio grupo. Lo mismo se efectúa con los otros grupos de países si se constata que la convergencia condicional en plausible.

Un ejemplo de esto son; Japón, Corea, Singapur y Hong Kong, que 1960, crecieron con mayor rapidez en los últimos treinta años, tal como se expresa la hipótesis de convergencia condicional.

La regla de Oro de la acumulación

Esta regla nos quiere decir que el valor de k_t del estado proporcionado que maximiza el consumo se le llama la *regla de oro de la acumulación de capital* y lo denotaremos con k_t^{Oro}[7].

Para encontrar el stock de capital que se refiere *Phelps*, lo primero que debemos hacer es encontrar el estado proporcionado de la ecuación de *Solow – Swan*, por lo que $\dot{k}_t = 0$. Por lo que si reescribimos la ecuación, teniendo en cuenta que el ahorro es igual a la producción menos el consumo. Para expresar al consumo de estado proporcionado, $\dot{c}_t$, con función del capital en el estado proporcionado.

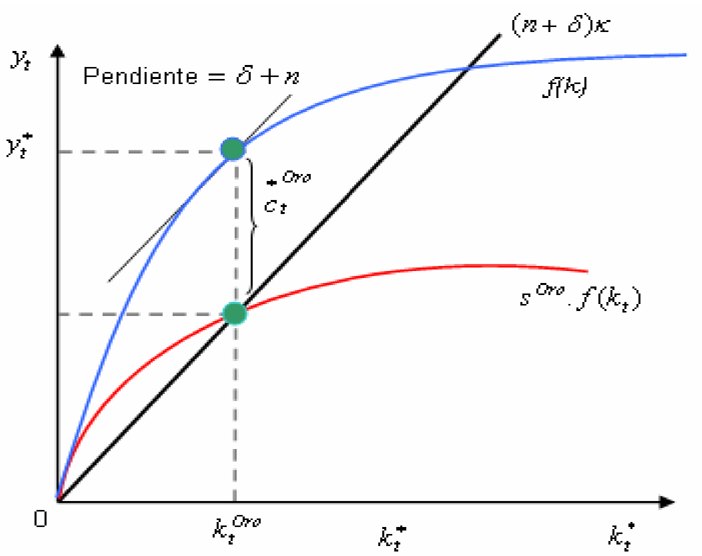
$$0 = f(k_t^*) - c_t^* - (\delta + n).k_t^* \quad \Rightarrow \quad c_t^* = f(k_t^*) - (\delta + n).k_t^* \ldots(\Psi).$$

La ecuación [Ψ] nos dice que el consumo en el estado proporcionado, es igual a la producción menos la depreciación. Esto quiere decir que un aumento del capital aumentara $f(k_t^*)$, el consumo en el estado proporcionado y por ultimo aumenta la cantidad de maquinas utilizadas en la producción, de esta manera se afecta a $(\delta + n).k_t^*$.

Para encontrar la regla mencionada ahora tenemos que maximizar el consumo en el estado proporcionado con respecto a k_t^*, entonces derivando a c_t^* de la ecuación (Ψ), con respecto a k_t^*.

$$\frac{dc_t^*}{dk_t^*} = f'(k_t^*) - (\delta + n) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(k_t^{Oro}) = PMgk = \delta + n \ldots(\Omega)$$

Gráfica Nº 6: La regla de Oro

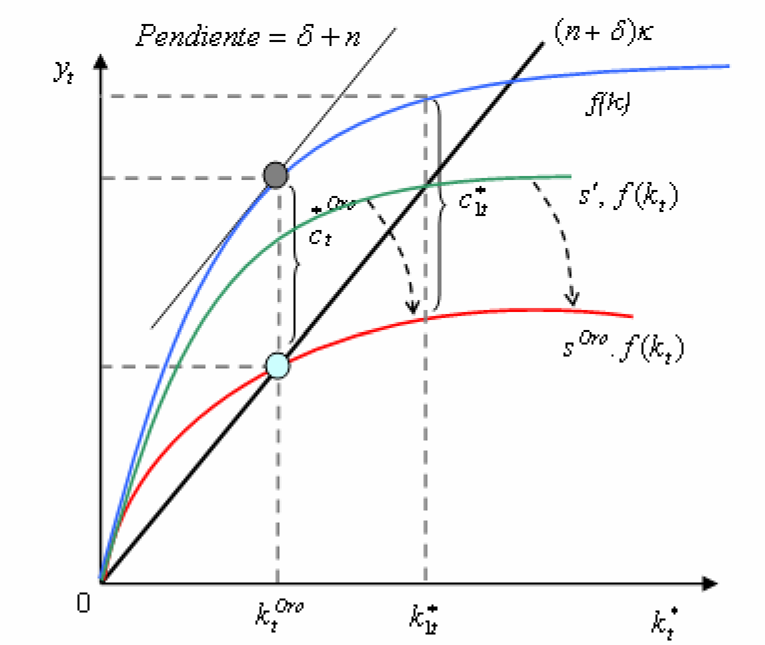


[7] Así es como lo llama *Phelps* (1961) cuando hace referencia a la tasa de ahorro que maximiza el consumo en el estado proporcionado.

Como se puede apreciar en el Gráfico Nº 6, que la ecuación (Ω), expresa la pendiente de la curva, donde el punto de distancia entre las dos curvas es máxima y determina el consumo de oro (c^{*Oro}_{t}). Pero para alcanzar este punto es necesario encontrar el ahorro que haga que en el crecimiento proporcionado sea precisamente k^{*Oro}_{t}.

Ahora analicemos que pasa con la economía según el Gráfico Nº 7, si tenemos un stock de capital superior a k^{*Oro}_{t}, entonces en este punto la economía se encontrara en un estado ineficiente.

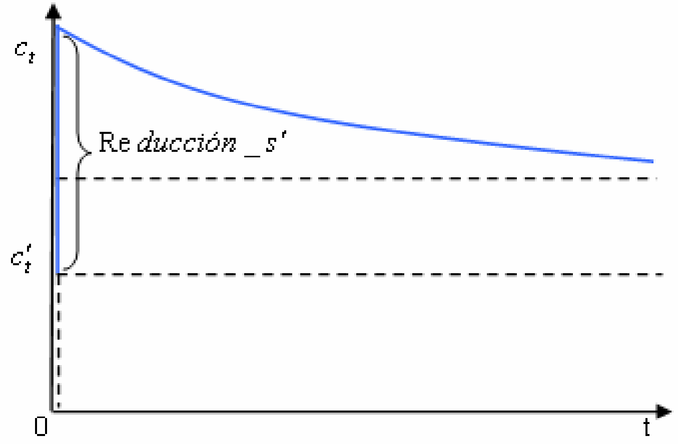
Gráfica Nº 7: Tasa de ahorro superior a la regla de Oro



Esta economía podría aumentar su consumo si reduce la tasa de ahorro, a un nivel de la "*regla de oro*" ya que la tasa de ahorro esta relacionada con el consumo. Al reducir la tasa de ahorro, la curva de ahorro de la economía desplaza hacia abajo, durante este proceso el consumo queda definido como la diferencia entre la función de producción, $f(k_t)$, y la curva de ahorro $s^{Oro}.f(k_t)$.

Para apreciar mejor como a evolucionado el consumo con esta disminución del ahorro pasa remos a observar el Gráfico Nº 8.

Gráfica Nº 8: Variación del consumo ante una reducción de s'



A largo plazo la economía convergerá a k^{*Oro}_{t}, donde el consumo es superior y también es superior k_t^*. Entonces si la economía encuentra un k_t^*, entonces reducimos la tasa de ahorro a un s^{Oro} y con esto conseguí aumentar el consumo en todos los momentos del tiempo.

Entonces podemos concluir que el consumo en el estado proporcionado es máximo en el estado proporcionado de la *regla de oro*.

Política de Crecimiento ejercicios resueltos

Problema #1

Suponga que existe una economía capitalista cuya función de producción agregada es $Y_t = A.K_t^{3/5}.L_t^{2/5}$, y se sabe que la tasa de ahorro de esta sociedad es de 30% del producto agregado cada año, también se sabe que; La tasa de depreciación del capital es de 8% al año, la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo es del 2% al año y por ultimo se sabe que el índice de nivel de tecnología es la unidad. Se pide:

a) Hallar la ecuación fundamental de *Solow – Swan*.
b) Hallar el estado de crecimiento proporcionado.
c) Hallar los valores de capital por trabajador y de producto por trabajador del estado proporcionado.
d) Hallar la tasa de salario y la tasa de rendimientos bruto del capital y graficar los valores.
e) Hallar la participación de los salarios y de los beneficios brutos en el ingreso nacional.

Rpt:

a) Hallar la ecuación fundamental de *Solow – Swan*.

De los datos tenemos: $s = 0.30$, $\delta = 0.08$, $n = 0.02$ $A = 1$

$Y_t = A.K_t^{3/5}.L_t^{2/5}$, dividiendo la función de producción entre la cantidad de trabajadores (L_t) tenemos:

Para operar con facilidad usaremos un viejo truco matemático $L_t = L_t^{\alpha}.L_t^{\beta}$, donde $\alpha + \beta = 1$

$$\frac{Y_t}{L_t} = A.\frac{K_t^{3/5}}{L_t^{3/5}}.\frac{L_t^{2/5}}{L_t^{2/5}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{Y_t}{L_t} = A\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{3/5} \Rightarrow y_t = A.k_t^{3/5} \ldots(FPI)$$

Ahora deduciremos la ecuación de *Solow – Swan*

$$I_t = \dot{K}_t + \delta.K_t \qquad C_t = (1-s).F(K_t, L_t, A)$$

$$Y_t = C_t + I_t \Rightarrow F(K_t, L_t, A) = (1-s).F(K_t,.L_t, A) + \dot{K}_t + \delta.K_t$$

$$\dot{K}_t = F(K_t, A.L_t) - \delta.K_t \ldots x\frac{1}{L_t} \quad \Longrightarrow \quad \dot{k}_t = f(k_t) - \delta.k_t \ldots(I)$$

$$k_t = \frac{K_t}{L_t} \Longrightarrow \frac{dk_t}{dt} = \frac{\dot{K}_t.L_t - \dot{L}_t.K_t}{L_t^2} \Longrightarrow \dot{k}_t = \frac{\dot{K}_t}{L_t} - \frac{\dot{L}_t}{L_t}.\frac{K_t}{L_t} \Rightarrow \frac{dk_t}{dt} = \dot{k}_t - n.k_t \ldots(II)$$

Reemplazando la ecuación (I) en la ecuación (II)

$$\frac{dk_t}{dt} = (f(k_t) - \delta.k_t) - n.k_t \quad \Longrightarrow \quad \dot{k}_t = f(k_t) - (n+\delta).k_t \ldots(III)$$

La ecuación (III) representa la ecuación fundamental de *Solow – Swan* que hemos deducido por única vez, solo la mencionaremos y la aplicaremos de forma directa en las siguientes paginas del libro.

Reemplazado los datos en la ecuación fundamental de *Solow – Swan*.

$\boxed{\dot{k}_t = (0.30).(1)k_t^{3/5} - (0.10)k_t \text{, la ecuación de fundamental de } \textit{Solow – Swan}.}$

b) Hallar el estado de crecimiento proporcionado.

Para el crecimiento proporcionado tenemos que: $\gamma_k = 0 \Rightarrow \dot{k}_t = 0$

Dividiendo la ecuación de fundamental de *Solow – Swan*, entre el capital por trabajador (k_t), tenemos:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = (0.30).(1).\frac{1}{k_t^{2/5}} - 0.10 \Rightarrow \gamma_k = 0.30\left(\frac{1}{k_t^{2/5}}\right) - 0.10 \quad \Longrightarrow \quad 0 = 0.30\left(\frac{1}{k_t^{2/5}}\right) - 0.10$$

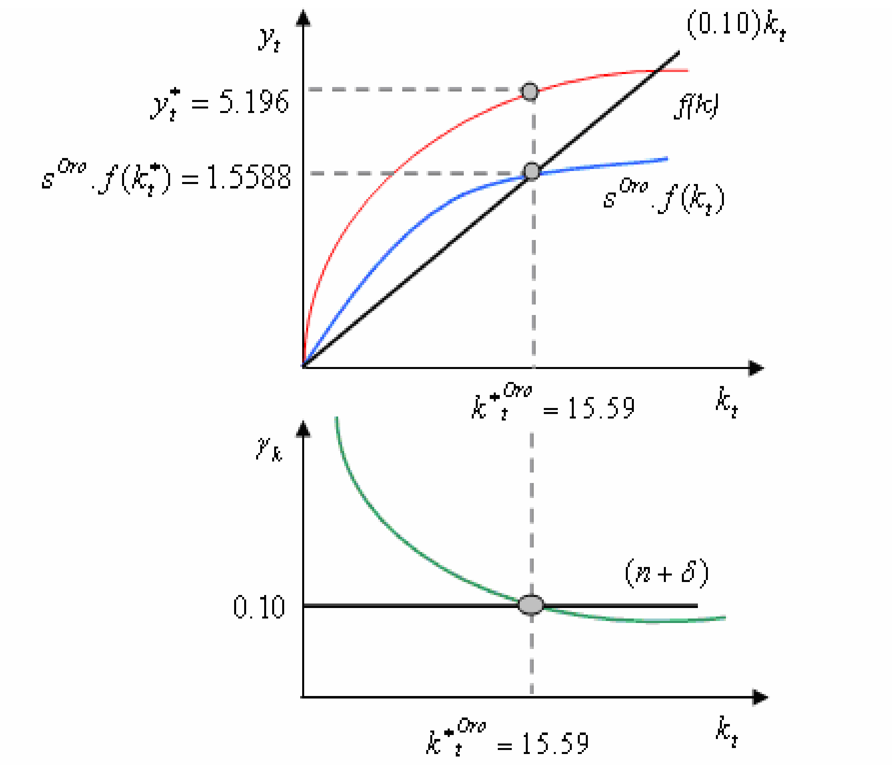
c) Hallar los valores de capital por trabajador y de producto por trabajador del estado proporcionado.

Despejando, k_t, de la ecuación anterior, tenemos $k_t^* = \left(\frac{0.30}{0.10}\right)^{5/2} \Rightarrow$ $\boxed{k_t^{*Oro} = 15.589}$

Reemplazando, k_t, en la función de producción intensiva (FPI)

$y_t^* = (15.589)^{3/5} \Rightarrow$ $\boxed{y_t^* = 5.196}$ $\boxed{s^{Oro}.f(k_t^*) = 1.5588}$

Gráfico del Problema #1



d) Hallar la tasa de salario y de rendimiento bruto de capital y graficar los valores.

Mercado de capital:

$$PMgk = r \Rightarrow PMgk = \frac{d(k_t^{3/5})}{dk_t} = \frac{3}{515.589}.\left(\frac{1}{15.589}\right)^{2/5} \Rightarrow \boxed{r = 0.1999972}$$

Mercado de trabajo:

$$PMgL = W \Rightarrow PMgL = f(k_t) - f'(k_t).k_t \Rightarrow W = A.k_t^{3/5} - \frac{3}{5}.A.\frac{1}{k_t^{2/5}}.(k_t)$$

$$W = \frac{2}{5}.A.k_t^{2/5} \Rightarrow W = \frac{2}{5}.(1).(15.589)^{3/5} \Rightarrow \boxed{W = 2.079}$$

e) Hallar la participación de los salarios y de los beneficios brutos en el ingreso nacional.

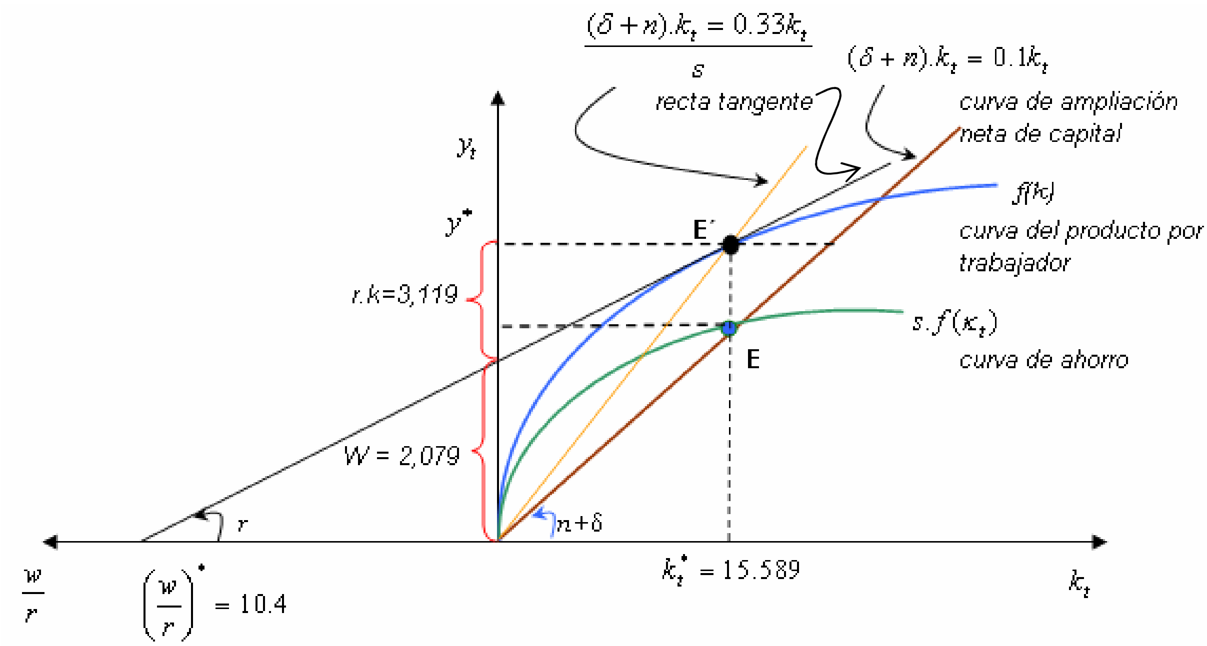
La participación del salario:

$\frac{w}{y} = \frac{W}{Y} = \frac{2.079}{5.196} = 0.40$, La participación del salario en el ingreso nacionales del 40%.

La participación del beneficio:

$\frac{r.k}{y} = \frac{B}{Y} = \frac{(15.589)0.19999972}{5.196} = 0.6$, la participación del beneficio en el ingreso nacional es del 60%.

Gráfico de la distribución del ingreso nacional



Problema #2
Analice el impacto de una reducción permanente de la tasa de depreciación del stock de capital sobre el crecimiento.

Rpt:

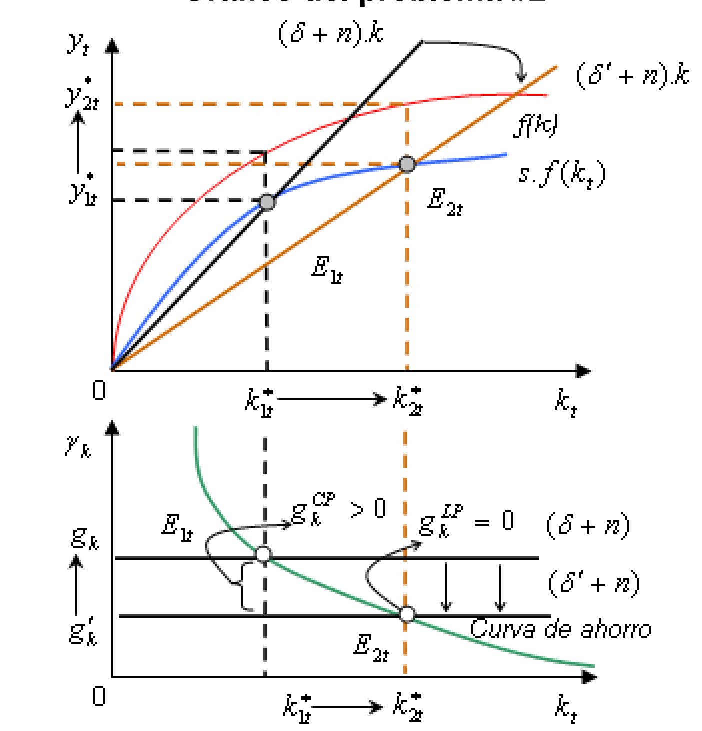
Cuando se produce una reducción del stock de capital, entonces la curva de ampliación del capital, comenzara a rotar en sentido horario, como se muestra en el Gráfico, de tal modo que cuando se interfecta a la curva de ampliación neta de capital, determina el nuevo estado de crecimiento proporcionado (E_{2t}), donde la tasa de crecimiento de largo plazo ($g_k^{LP} = 0$) es cero. En este punto existe mayor capital por trabajador (k_{2t}^*) y un producto por trabajador (y_{2t}^*) mayor que el inicial.

En el Gráfico posterior podemos apreciar la versión de *Barro*, donde la reducción de la depreciación se desplaza así abajo, y cuando llega a intersecarse con la curva de ahorro determina mayor capital por trabajador (k_{2t}^*) en equilibrio.

$\dot{k}_{2t} = s.f(k_{2t}) - (\delta + n).k_{2t}$ Si: $\dot{k}_{2t} = 0$

$s.f(k_{2t}) = (\delta + n).k_{2t} \Rightarrow \dfrac{d(f(k_{2t}))}{d\delta} = k_{2t}^* > 0$ Donde: $k_{1t}^* < k_{2t}^*$

Gráfico del problema #2



Problema #3

Suponga que existe una economía capitalista cuya función de producción agregada es $Y_t = AK_t^{3/4}.L_t^{1/4}$, y se sabe que la tasa de ahorro de esta sociedad es de 35% del producto agregado cada año, también se sabe que; La tasa de depreciación del capital es de 10% al año, la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo es del 1% al año y por ultimo se sabe que el índice de nivel de tecnología es la unidad. Se pide:

a) Hallar la ecuación fundamental de *Solow – Swan*.
b) Hallar el estado de crecimiento proporcionado.
c) Hallar los valores de capital por trabajador y de producto por trabajador del estado proporcionado.
d) Hallar la tasa de salario y la tasa de rendimientos bruto del capital y graficar los valores.
e) Hallar la participación de los salarios y de los beneficios brutos en el ingreso nacional.

Rpt:

a) Hallar la ecuación fundamental de *Solow – Swan*.

De los datos tenemos: $s = 0.35$, $\delta = 0.10$, $n = 0.01$ $A = 1$

$Y_t = A.K_t^{3/4}.L_t^{1/4}$, dividiendo la función de producción entre la cantidad de trabajadores (L_t) tenemos:

Para operar con facilidad usaremos un viejo truco matemático $L_t = L_t^{\alpha}.L_t^{\beta}$, donde $\alpha + \beta = 1$

$$\frac{Y_t}{L_t} = A.\frac{K_t^{3/4}}{L_t^{3/4}}.\frac{L_t^{1/4}}{L_t^{1/4}} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y_t}{L_t} = A\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{3/4} \Rightarrow y_t = A.k_t^{3/4} \ldots (FPI)$$

Reemplazado los datos en la ecuación fundamental de *Solow – Swan*.

$\boxed{\dot{k}_t = (0.35).(1)k_t^{3/4} - (0.11)k_t}$, la ecuación de fundamental de *Solow – Swan*.

b) Hallar el estado de crecimiento proporcionado.

Para el crecimiento proporcionado tenemos que: $\gamma_k = 0 \Rightarrow \dot{k}_t = 0$

Dividiendo la ecuación de fundamental de *Solow – Swan*, entre el capital por trabajador (k_t), tenemos:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = (0.35).(1).\frac{1}{k_t^{1/4}} - 0.11 \Rightarrow \gamma_k = 0.35\left(\frac{1}{k_t^{1/4}}\right) - 0.11 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0.35\left(\frac{1}{k_t^{1/4}}\right) - 0.11$$

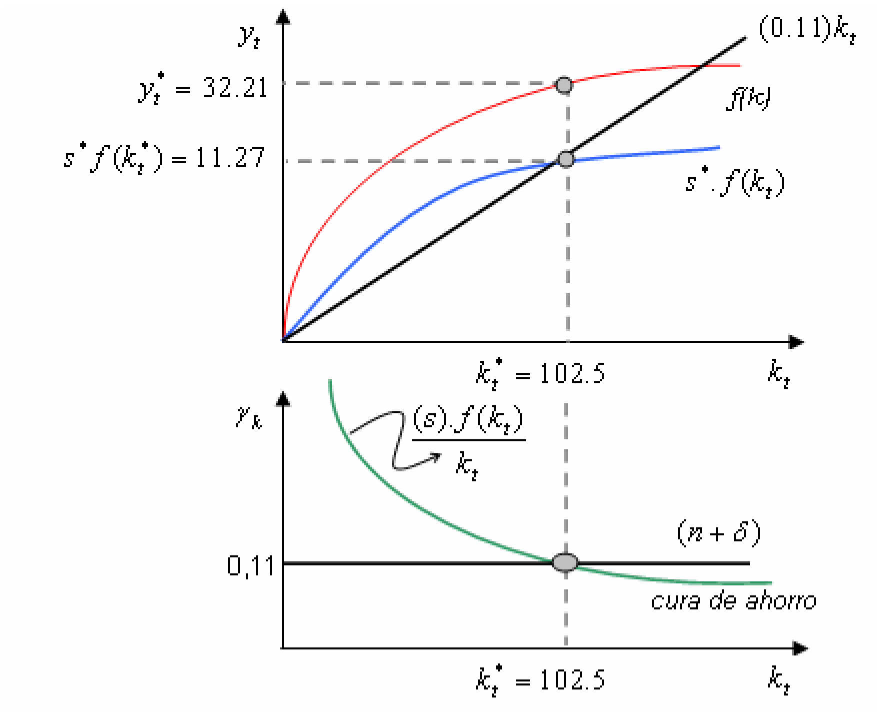
c) Hallar los valores de capital por trabajador y de producto por trabajador del estado proporcionado.

Despejando, k_t, de la ecuación anterior, tenemos $k_t^* = \left(\frac{0.35}{0.11}\right)^4 \Rightarrow \boxed{k^*_t = 102.5}$

Reemplazando, k_t, en la función de producción intensiva (FPI)

$$y_t^* = (1).(102.5)^{3/4} \Rightarrow \boxed{y_t^* = 32.21} \qquad \boxed{s^*.f(k_t^*) = 11.27}$$

Gráfico del Problema #3



d) Hallar la tasa de salario y de rendimiento bruto de capital y graficar los valores.

Mercado de capital:

$$PMgk = r \Rightarrow PMgk = \frac{d(k_t^{3/4})}{dk_t} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{102.5}\right)^{1/4} \Rightarrow \boxed{r = 0.2357112}$$

Mercado de trabajo:

$$PMgL = W \Rightarrow PMgL = f(k_t) - f'(k_t).k_t \Rightarrow W = A.k_t^{3/4} - \frac{3}{4}.A.\frac{1}{k_t^{1/4}}.(k_t)$$

$$W = \frac{1}{4}.A.k_t^{2/4} \Rightarrow W = \frac{1}{4}.(1).(102.5)^{3/4} \Rightarrow \boxed{W = 8.05347}$$

e) Hallar la participación de los salarios y de los beneficios brutos en el ingreso nacional.

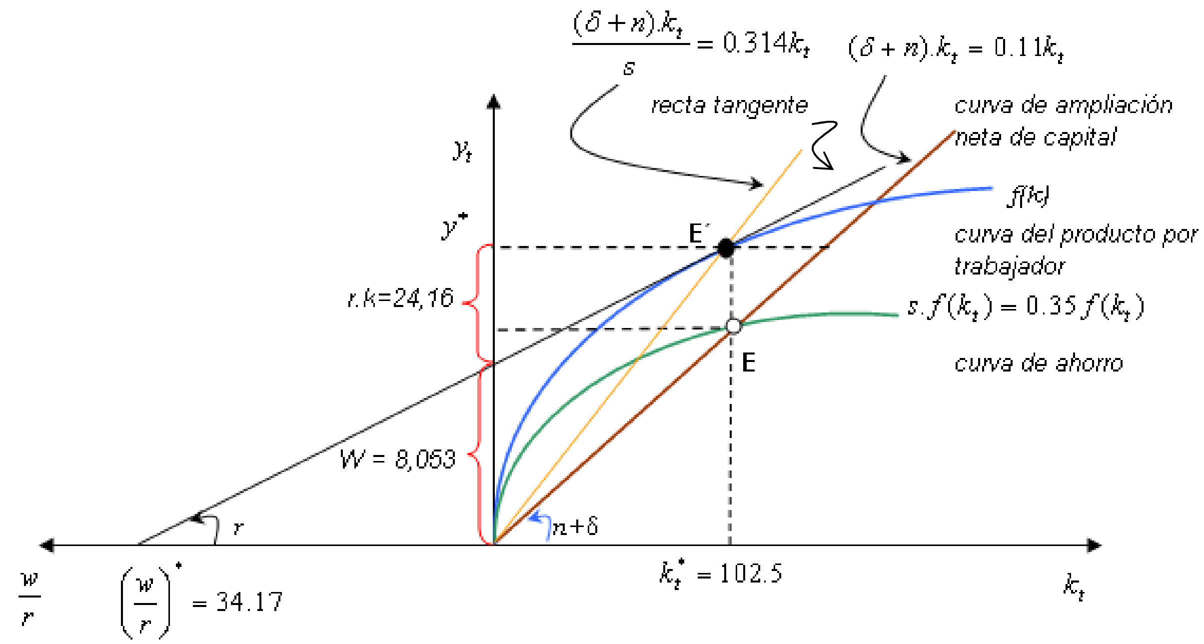
La participación del salario:

$\frac{w}{y} = \frac{W}{Y} = \frac{8.05347}{32.21} = 0.25$, La participación del salario en el ingreso nacionales del 25%.

La participación del beneficio:

$\frac{r.k}{y} = \frac{B}{Y} = \frac{(102.5)0.2357112}{32.21} = 0.75$, la participación del beneficio en el ingreso nacional es del 75%.

Gráfico de la distribución del ingreso nacional

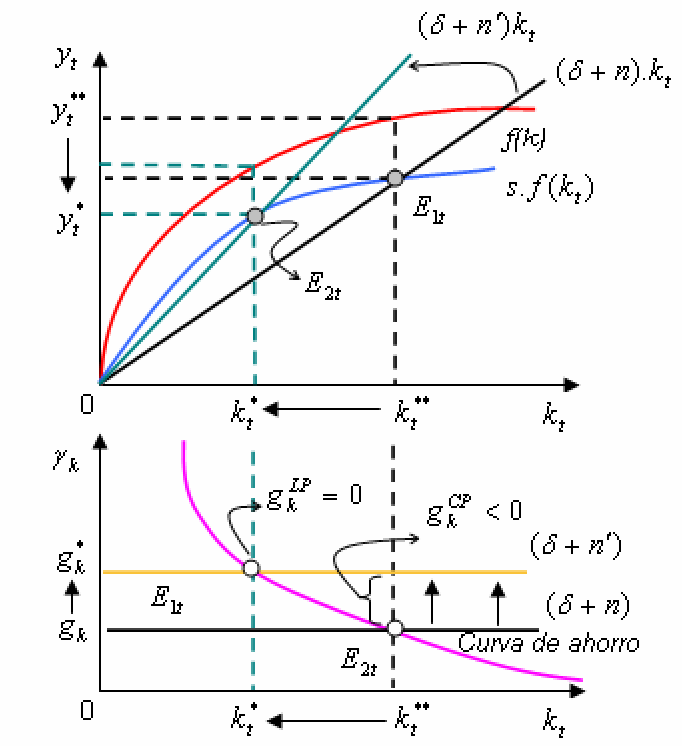


Problema #4
Imaginemos que China en la década de los 80 experimentos un incremento de su población, considerablemente, y debido a estos se quiere analizar este incremento permanente de la tasa de crecimiento de la población, sobre el crecimiento de su economía.

Rpt:

Con el aumento permanente de la tasa se crecimiento de la población (n'), la curva de ampliación de capital rota en sentido antihorario, de tal modo que cuando se interfecta con la curva de ampliación neta de capital determina el nuevo estado de crecimiento proporcionado, con mayor capital (k_t^*) y con mayor producto por trabajador (y_t^*).

Gráfico del problema #4



En la versión de *Barro* que se muestra en la parte inferior de nuestro Gráfico presentado, podemos apreciar, que el aumento de la tasa de crecimiento de la población hace que la curva de depreciación se desplace así arriba y al intersecarse con la curva de ahorro genere el nuevo punto de equilibrio (E_{2t}). En este punto existe un menor capital por trabajador.

Nótese que este mismo aumento de la tasa de crecimiento potencial de la economía.

$$g_{Potencial\_LP} = n + tasa\_progreso\_tecnológico$$

Si $n \uparrow \rightarrow g_{Potencial} \uparrow$