



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
 (Universidad del Perú, Decana de América)

MODELOS AZ

Son aquellos modelos de crecimiento que tiene una tecnología lineal y utilizan una función de producción AZ_t , donde considera un capital compuesto, capital amplio que considera un capital físico y capital humano y estas se combinan en proporciones fijas.¹ La ausencia de rendimientos decrecientes y va existir rendimientos constantes del capital compuesto.

Donde

Z_t : Capital compuesto con tecnología lineal.

Los modelos AZ_t no cumplen con las propiedades de los modelos neoclásicos, como veremos.

Supuestos del modelo

- ✓ Sea una economía capitalista que no tiene relación con el exterior.
- ✓ Existe un capital compuesto Z_t , que es una combinación de capital físico y capital humano.
- ✓ Existe rendimientos constantes del capital compuesto o amplio.
- ✓ Exhibe rendimientos constantes a escala; dado que $A(\lambda Z_t) = \lambda AZ_t = \lambda Y_t$.
- ✓ Tiene rendimientos positivos pero no decrecientes de capital.
- ✓ Tiene una función de producción AZ_t .

Función de producción agregada (FPA)

Este modelo describe una función agregada que se encuentra representada por el gráfico.

$$Y_t = A.Z_t \dots (FPA)$$

Donde

Y_t : Producto agregado en el periodo "t".

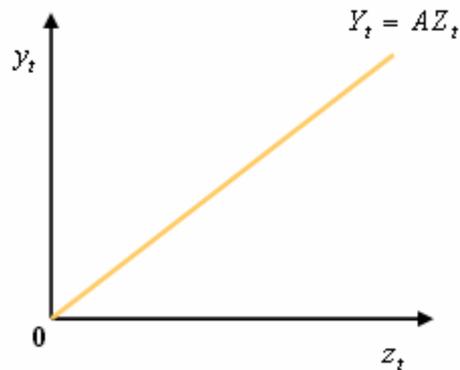
¹ Este modelo AZ_t , también es llamado "modelo de tecnología AK_t ", la introducción de este modelo a la literatura económica se la debemos Romer (1987) Rebelo (1991), cuando introduce el capital compuesto en los años ochenta.

Z_t : Stock de capital compuesto en el periodo "t".

A : Índice de nivel de tecnología.

Si queremos representar el producto marginal del capital compuesto, solo basta con aplicar la derivada de la función de producción agregada con respecto al stock de capital.

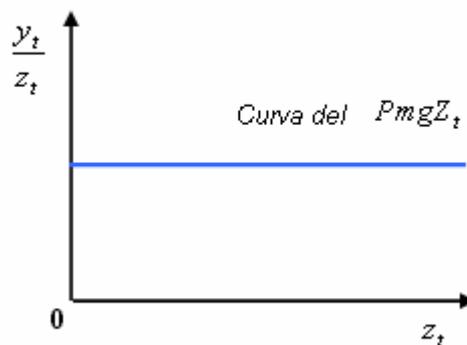
La función de producción agregada



$$PmgZ = \frac{dY_t}{dz_t} = A$$

Podemos ver que el producto marginal de la función es una constante, y en el gráfico], se encuentra representado como una línea recta horizontal.

El producto marginal del modelo AZ

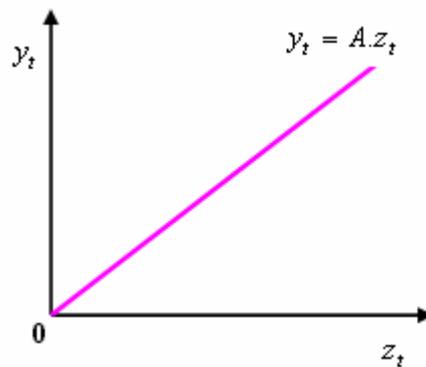


De la ecuación (FPA) dividiendo entre la cantidad de trabajadores obtenemos:

$$\frac{Y_t}{L_t} = A \cdot \frac{Z_t}{L_t} \quad \Rightarrow \quad y_t = A \cdot z_t \dots (FPI)$$

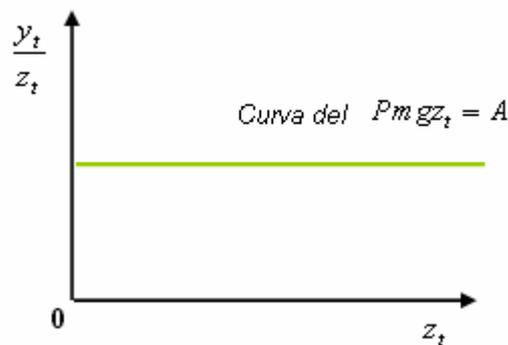
En el gráfico [6.3], podemos ver la representación de la función de producción intensiva.

La función de producción intensiva



Donde en el gráfico, esta representado el producto marginal de la función de producción intensiva.

El producto marginal de la FPI



$$Pmgz = \frac{dy_t}{dz_t} = A$$

Observación: Donde las variables minúsculas representan variables por trabajador, y las variables mayúsculas, representan valores agregados.

Ecuación fundamental

- ✓ Asume que el ahorro agregado es una proporción del ingreso nacional, dado el producto marginal ahorrar ($Pmgs$).
- ✓ Suponiendo que el stock de capital se deprecia a una tasa constante δ .
- ✓ Sea que la función de fuerza agregada crezca a una tasa constante y exógena n .
- ✓ Sea n el tamaño de la población total.

De la condición de equilibrio macroeconómico tenemos:

$$S = I^b$$

$$sY_t = I_K^n + I_K^{rep}$$

$$s.AZ_t = \dot{Z}_T + \delta.Z_t$$

Dividiendo la ecuación entre el número de trabajadores

$$s.A \frac{Z_t}{L_t} = \frac{\dot{Z}_T}{L_t} + \delta \frac{Z_t}{L_t} \Rightarrow s.Az_t - \delta.z_t = \frac{\dot{Z}_T}{L_t} \dots (I)$$

$$\text{Sabemos que: } z_t = \frac{Z_t}{L_t} \Rightarrow \frac{dz_t}{dt} = \frac{d(Z_t/L_t)}{dt} = \frac{\dot{Z}_t L_t - \dot{L}_t Z_t}{(L_t)^2}$$

$$\frac{dz_t}{dt} = \frac{\dot{Z}_t}{L_t} - \frac{\dot{L}_t}{L_t} \frac{Z_t}{L_t} \Rightarrow z_t + nz_t = \frac{\dot{Z}_t}{L_t} \dots (II)$$

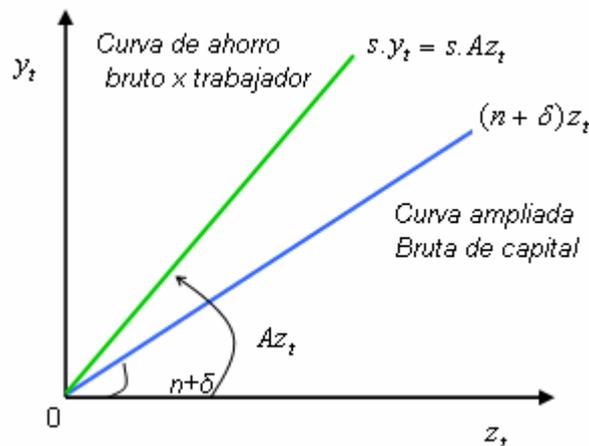
Reemplazando la ecuación (II) en la ecuación (I) y despejando \dot{z}_t tenemos:

$$\dot{z}_t = s.Az_t - (n + \delta)z_t \text{ La ecuación fundamental de Rebelo}$$

Es una ecuación dinámica del proceso de acumulación del capital compuesto, en una economía capitalista, donde existe en forma combinada el capital físico y el capital humano. Esta ecuación nos dice que la tasa de cambio del capital por trabajador va ser el remanente del ahorro bruto por trabajador, respecto a la ampliación bruta de capital compuesto.

En el gráfico, podemos apreciar la grafica de la curva de ahorro bruto por trabajador y de la curva de ampliación bruta de capital compuesto.

El estado de crecimiento progresivo



Dinámica de transmisión

Debido a que esta economía tiene una tecnología muy productiva, va ocurrir que en el largo plazo no se genera un estado de crecimiento proporcionado, si no que en el largo plazo se va generar un estado de crecimiento progresivo, es aquel estado o situación en el largo plazo en el que se genera una tasa de cambio de capital compuesto.

En el largo plazo el estado de crecimiento progresivo: $\dot{z}_t > 0$

Si $\dot{z}_t > 0$ entonces $s.A > (n + \delta)$, lo cual genera que sea indeterminado z_t^* y esto ocurre por que no existe rendimientos constantes del capital compuesto.

Versión Barro

De la ecuación fundamental de *Rebelo*

$$\dot{z}_t = s.Az_t - (n + \delta)z_t$$

Dividiendo esta ecuación entre el capital compuesto

$$\frac{\dot{z}_t}{z_t} = s.A - (n + \delta) \quad \Rightarrow \quad \gamma_z = s.A - (n + \delta)$$

Donde

γ_z : La tasa de crecimiento del capital por trabajador.

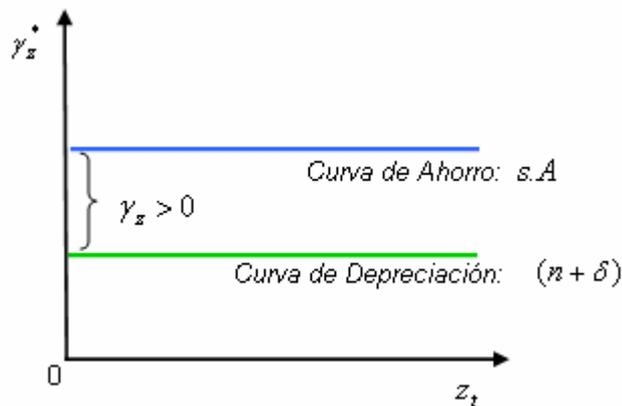
En el estado de crecimiento progresivo si $\gamma_z > 0$ entonces $s.A > (n + \delta)$, con lo cual se determina z_t^* .

Dicho de otra manera, observamos que la tasa de crecimiento de esta economía es constante y va ser la diferencia entre dos números.

En esta economía la curva de ahorro es una línea recta horizontal, si nuestra economía es productiva como para que $s.A > (n + \delta)$, la tasa de crecimiento será constante y positiva $\gamma_y = \gamma^* = s.A - (n + \delta)$.

En este modelo también el consumo crece a la misma tasa γ^* que la tasa de crecimiento per cápita $\gamma_y = \gamma_c = \gamma^* = s.A - (n + \delta)$.

Versión de Barro del modelo AZ



Determinación de $\gamma_y \wedge \gamma_c$

De la función de producción intensiva (FPI) tenemos:

$$y_t = Az_t \Rightarrow \ln(y_t) = \ln(A) + \ln(z_t), \text{ aplicando una derivada temporal}$$

$$\frac{d\ln(y_t)}{dt} = \frac{d\ln(A)}{dt} + \frac{d\ln(z_t)}{dt}$$

$\gamma_y = \gamma_z$ (with a small arrow pointing to the $\frac{d\ln(A)}{dt}$ term, which is zero)

De $C_t = Pmgc.Y_t$

Dividiendo entre L_t

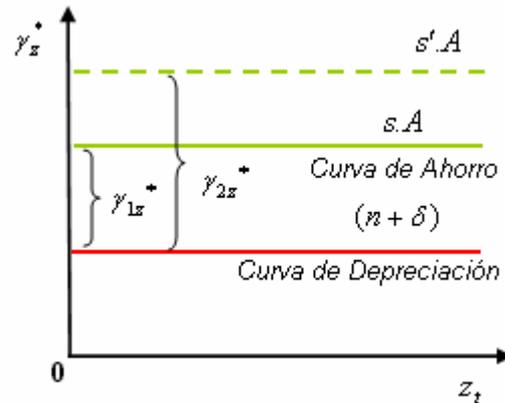
$$\frac{C_t}{L_t} = Pmgc. \frac{Y_t}{L_t}$$

$\gamma_c = \gamma_y$ \Rightarrow $\gamma_c = \gamma_y = \gamma_z$

Característica del modelo

- a) La tasa de crecimiento del modelo puede ser positiva sin necesidad de suponer, que las variables crecen continuamente y exógenamente.
- b) Un aumento de la tasa de ahorro provoca un incremento de la tasa de crecimiento, como se puede ver en el gráfico, donde un aumento de las tasa de ahorro hace saltar a la curva de ahorro hacia arriba y la distancia entre las dos curvas aumenta.

Aumento de la tasa de ahorro



- c) Esta economía carece de una transición hacia el estado proporcionado, por que siempre crece a una tasa constante igual $\gamma_z^* = s.A - (n + \delta)$, sin importar el valor que adopte el stock de capital.²
- d) El modelo predice que no existe relación entre la tasa de crecimiento de la economía y el nivel alcanzado, por lo que el modelo no alcanza convergencia, ni condicional, ni absoluta.
- e) El modelo AZ_t predice que los efectos recesivos temporal serán permanente, esto quiere decir que el capital, disminuye temporalmente por una causa exógena.
- f) Un aspecto de este modelo es el que menciona *Saint-Paul* (1992), que la tecnología AZ_t , no puede haber demasiada inversión.

Como la tasa de crecimiento per cápita es igual $\gamma_z^* = s.A - (n + \delta)$, la tasa de crecimiento agregado es $\gamma_z^* = s.A - (n + \delta)$, la tasa de crecimiento agregada esta expresada como $\gamma_Y^* = \gamma_y^* + \gamma_L = \gamma_y^* + n = S.A - (n + \delta)$, para que exista eficiencia $r^* < \gamma_y^*$, donde la tasa de interés siempre es igual a $r^* = A - \delta$, entonces $A - \delta < s.A - \delta$ recordemos que la desigualdad no puede darse por que la tasa de ahorro es siempre inferior a 1 ($0 < s < 1$), por lo que A es siempre mayor que $s.A$, por lo tanto con tecnología AZ_t pues no puede ser dinámico ineficiente.

² Esto quiere decir que el modelo AZ carece de un estado proporcionado, por lo que la curva de ahorro no se corta con la curva de depreciación y por ende el modelo no converge.

Modelo AZ con la función de producción Cobb-Douglas

Este modelo va considerar la producción tiene una función de producción *Cobb-Douglas*

Función de producción agregada (FPA)

$$Y_t = AZ_t^\alpha L_t^\beta \dots (FPA)$$

Dividiendo la función de producción agregada entre L_t

$$\frac{Y_t}{L_t} = A \frac{Z_t^\alpha}{L_t^\alpha} \frac{L_t^\beta}{L_t} L_t^\alpha \Rightarrow \boxed{y_t = AZ_t^\alpha L_t^{\alpha+\beta-1} \dots (FPI)}$$

De la condición de equilibrio macroeconómico tenemos:

$$S = I^b$$

$$sY_t = I_K^n + I_K^{rep}$$

$$s.Y_t = \dot{Z}_T + \delta.Z_t$$

Dividiendo la ecuación entre el número de trabajadores

$$s \cdot \frac{Y_t}{L_t} = \frac{\dot{Z}_T}{L_t} + \delta \frac{Z_t}{L_t} \Rightarrow s.y_t - \delta.z_t = \frac{\dot{Z}_T}{L_t} \dots (I)$$

$$\text{Sabemos que: } z_t = \frac{Z_t}{L_t} \Rightarrow \frac{dz_t}{dt} = \frac{d(Z_t/L_t)}{dt} = \frac{\dot{Z}_t L_t - \dot{L}_t Z_t}{(L_t)^2}$$

$$\frac{dz_t}{dt} = \frac{\dot{Z}_t}{L_t} - \frac{\dot{L}_t}{L_t} \frac{Z_t}{L_t} \Rightarrow \dot{z}_t + nz_t = \frac{\dot{Z}_t}{L_t} \dots (II)$$

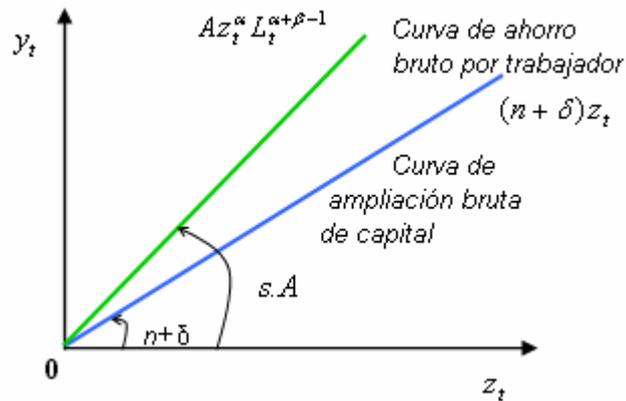
Reemplazando la ecuación (II) en la ecuación (I) y despejando \dot{z}_t

$$\dot{z}_t = s.y_t - (n + \delta)z_t$$

Reemplazando la función de producción intensiva (FPI) en la ecuación fundamental

$$\boxed{\dot{z}_t = s.Az_t^\alpha L_t^{\alpha+\beta-1} - (n + \delta)z_t, \text{ la ecuación fundamental con una función } \textit{Cobb-Douglas}}$$

Estado de crecimiento progresivo



En el gráfico [6.8] se puede apreciar la dinámica de transmisión en el estado de crecimiento progresivo $\dot{z}_t > 0$, entonces $s.Az_t^\alpha L_t^{\alpha+\beta-1} > (n + \delta)z_t$ implica tener un z_t^* indeterminado.

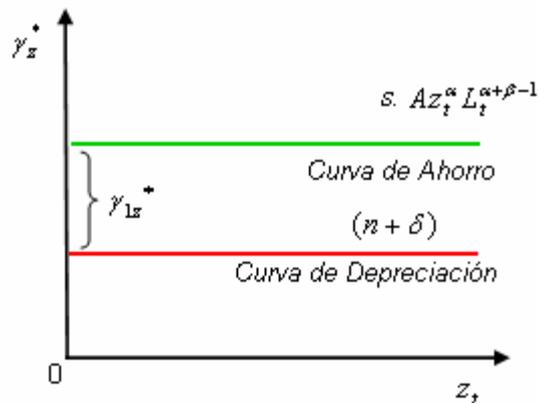
Versión de Barro

Dividiendo la ecuación fundamental entre z_t

$$\gamma_z = \frac{s.Az_t^\alpha L_t^{\alpha+\beta-1}}{z_t} - (n + \delta)$$

Como se puede apreciar en el gráfico, el estado de crecimiento progresivo $\gamma_z > 0$, entonces $s.Az_t^\alpha L_t^{\alpha+\beta-1} > (n + \delta)z_t$ esto implica obtener un z_t^* indeterminado.

Versión de Barro del modelo AZ



En el gráfico se puede observar que la curva de ahorro es representada como una línea recta horizontal y la curva de depreciación también, por esto este modelo no alcanza un estado de crecimiento proporcionado, sino un estado de crecimiento progresivo.

Observación

Si $Y_t = AZ_t^\alpha L_t^\beta$ se tiene que la elasticidad del producto respecto a los trabajadores no calificados es nulo entonces $\beta = 0$ y $\alpha = 1$ se tendrá una función $Y_t = AZ_t$.