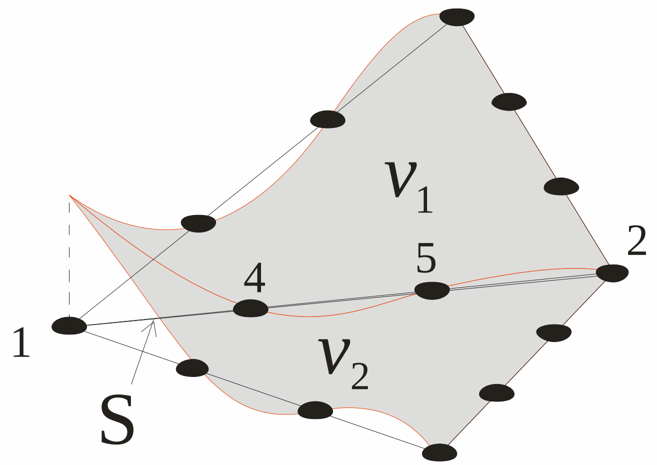


Introducción al Método de los Elementos Finitos

Parte 5

Algunas aplicaciones del MEF a problemas elípticos

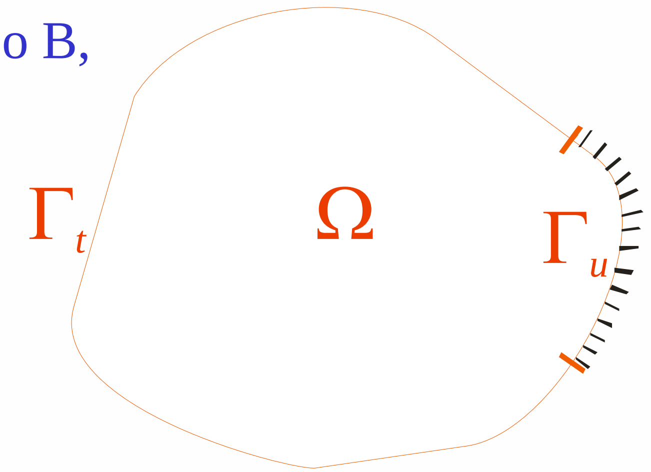
Alberto Cardona, Víctor Fachinotti

Cimec-Intec (UNL/Conicet), Santa Fe, Argentina

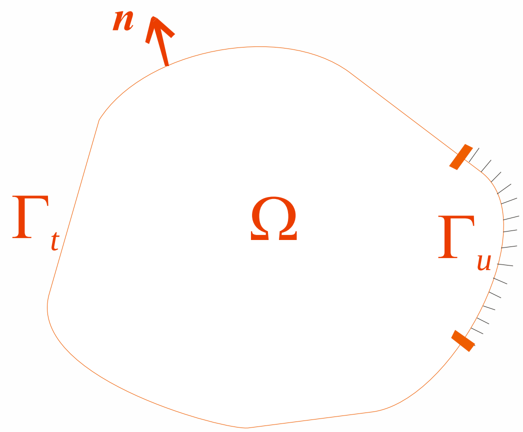
Algunas aplicaciones del MEF a problemas elípticos

Problema de Elasticidad

- Consideremos un cuerpo elástico, isótropo y homogéneo B, que ocupa el dominio acotado $\Omega \in \mathbb{R}^3$, con frontera $\Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_u$ tal que $\Gamma_t \cap \Gamma_u = \varnothing$ y área $\Gamma_u > 0$.
- El cuerpo B está sometido a una fuerza volumétrica $\boldsymbol{f}$, y a una fuerza superficial $\boldsymbol{t}$ aplicada sobre Γ_t.
- Se supone B fijo a lo largo de Γ_u.
- Se busca determinar
  - desplazamientos $\boldsymbol{u}$.
  - deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$, dependientes de los desplazamientos de acuerdo a la cinemática de la deformación.
  - tensiones $\boldsymbol{\sigma}$, dependientes de las deformaciones de acuerdo a la ley constitutiva del material.



Problema de Elasticidad



$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} & \text{en } \Omega \quad \text{Ecuación de equilibrio} \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} & \text{sobre } \Gamma_u \quad \text{CB Dirichlet (despl. impuesto)} \\ \boldsymbol{\sigma n} = \boldsymbol{t} & \text{sobre } \Gamma_t \quad \text{CB Neumann (tracción impuesta)} \end{cases}$$

- Ecuaciones de clausura
  - <u>Cinemáticas:</u> asumiendo pequeñas deformaciones:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

  - <u>Constitutivas</u>: asumiendo comportamiento elástico lineal (ley de Hooke):

$$\sigma_{ij} = \lambda \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{kk}\, \delta_{ij} + \mu\, \varepsilon_{ij}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+, \text{ ctes. de Lamé.}$$

$$\text{con } \lambda = \frac{E}{1+\nu}, \; \mu = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \begin{vmatrix} E: \text{módulo de Elasticidad} \\ \nu: \text{coeficiente de Poisson} \end{vmatrix}$$

- **<u>Nota:</u>** en adelante, usaremos las siguientes convenciones de notación:

  - derivada parcial: $u_{i,j} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$ - sumatoria: $\sigma_{ij} n_j = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j$

Forma variacional del problema de Elasticidad

- Dado $\quad (D) \quad \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad i,j = 1,2,3$

  se llega a $\quad (V) \quad \text{Hallar } \boldsymbol{u} \in \mathrm{V} \,/\, \mathrm{a}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \mathrm{L}(\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{V}$

  $$\text{con } \mathrm{V} = \left\{ \boldsymbol{v} : \boldsymbol{v} \in \left[\mathrm{H}^1(\Omega) \right]^3 \text{ y } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \text{ en } \Gamma_u \right\}$$

  haciendo

$$\int_\Omega \sigma_{ij,j} v_i dx + \int_\Omega f_i v_i dx = 0$$

T. de Green

$$\overbrace{-\int_\Omega \sigma_{ij} v_{i,j}\, dx + \int_\Gamma \sigma_{ij} n_j v_i ds}^{\text{T. de Green}} + \int_\Omega f_i v_i dx = 0$$

CB

$$-\int_\Omega \frac{\sigma_{ij} v_{i,j} + \sigma_{ji} v_{j,i}}{2} dx + \int_{\Gamma_t} t_i v_i ds + \int_\Omega f_i v_i dx = 0$$

Simetría de σ

Cinemática de pequeñas deformaciones

$$-\int_\Omega \sigma_{ij} \underbrace{\frac{v_{i,j} + v_{j,i}}{2}} dx + \int_{\Gamma_t} t_i v_i ds + \int_\Omega f_i v_i dx = 0$$

$$-\int_\Omega \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v}) dx + \int_{\Gamma_t} t_i v_i ds + \int_\Omega f_i v_i dx = 0$$

Ley de Hooke

$$\underbrace{-\int_\Omega \left[\lambda u_{i,i} \delta_{ij} + \mu \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) \right] \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v}) dx}_{\mathrm{a}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})} + \underbrace{\int_{\Gamma_t} t_i v_i ds + \int_\Omega f_i v_i dx}_{\mathrm{L}(\boldsymbol{v})} = 0$$

Forma variacional del problema de Elasticidad (cont.)

- Se puede demostrar que la forma lineal $\mathrm{L}(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega f_i v_i dx + \int_{\Gamma_t} t_i v_i ds$ es continua, i.e., $\mathrm{L}(\boldsymbol{v}) \leq \lambda \|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{V}}, \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{V}, \lambda \in \mathbb{R}^+$.
- Se puede demostrar que la forma bilineal
$$\mathrm{a}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \left[\lambda u_{i,i}\delta_{ij} + \mu\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})\right]\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})dx = \int_\Omega \left[\lambda \operatorname{div}\boldsymbol{u} \operatorname{div}\boldsymbol{v} + \mu\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\right]dx$$
  - es simétrica, i.e., $\mathrm{a}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \mathrm{a}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}), \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathrm{V}$.
  - continua, i.e., $|\mathrm{a}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})| \leq \gamma \|\boldsymbol{u}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}, \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathrm{V}, \gamma \in \mathbb{R}^+$.
  - V-elíptica, i.e., $\mathrm{a}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \geq \alpha \|\boldsymbol{v}\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)}, \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{V}, \alpha \in \mathbb{R}^+$, con $\|\boldsymbol{v}\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)} = \sum_{i-1}^{3} \|v_i\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$.

Demo.: $\mathrm{a}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = \lambda \int_\Omega \left(\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right)^2 dx + \mu \int_\Omega \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\, dx$

$$\geq \boxed{\mu \int_\Omega \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\, dx \geq \mu\, c \|\boldsymbol{v}\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)}, \quad c \in \mathbb{R}^+.}$$

Desigualdad de Korn

MEF aplicado al problema de Elasticidad

- Consideremos el problema de Elasticidad en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.
- Sea $T_h=\{K\}$ una malla de tetraedros de Ω. Definimos el espacio de EF

$$V_h = \left\{ \boldsymbol{v} : \boldsymbol{v} \in V \text{ y } \boldsymbol{v}|_K \in \left[P_1(K) \right]^3, \forall K \in T_h \right\}$$

- El MEF aplicado al problema de Elasticidad consiste en

$$\text{Hallar } \boldsymbol{u}_h \in V_h \,/\, a(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in V_h$$

- La solución $\boldsymbol{u}_h \in V_h$ satisface

$$\left\| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h \right\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \left| \boldsymbol{u} \right|_{H^2(\Omega)}$$

Problema de Stokes

- Consideremos las ecuaciones de Stokes para el flujo estacionario de un fluido Newtoniano incompresible encerrado en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, sometido a una fuerza volumétrica $\boldsymbol{f}$:

$\sigma_{ij,j} + f_i = 0$	en Ω,	Balance de cant. de movto.	$\boldsymbol{u}$: velocidad
$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) - p\delta_{ij}$	en Ω,	Ley const. de fluido Newtoniano	$\boldsymbol{\sigma}$: tensión
$u_{i,i} = 0$	en Ω,	Condición de incompresibilidad	p: presión
$u_i = 0$	sobre Γ,	CB Dirichlet	μ: viscosidad

$$-\mu\Delta u_i + p_{,i} = f_i \quad \text{en } \Omega, \quad \text{Balance de cant. de movto. p/fluido Newtoniano}$$

- Definimos el espacio de funciones de prueba

$$\mathrm{V} = \left\{ \boldsymbol{v} : \boldsymbol{v} \in \left[\mathrm{H}_0^1(\Omega) \right]^3 \text{ y } \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \text{ en } \Omega \right\}$$

- Luego, podemos llevar el problema de Stokes a la forma variacional

$$(V) \qquad \text{Hallar } \boldsymbol{u} \in \mathrm{V} \,/\, \mathrm{a}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \mathrm{L}(\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{V}$$

Forma variacional del problema de Stokes

- Para llevar el problema de Stokes a la forma variacional hacemos

$$f_i = -\Delta u_i + p_{,i}$$

$$\int_\Omega f_i v_i dx = -\mu \int_\Omega \Delta u_i v_i dx + \int_\Omega p_{,i} v_i dx$$

$$\int_\Omega f_i v_i dx = \mu \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx - \underbrace{\mu \int_\Gamma \frac{\partial u_i}{\partial n} v_i ds}_{=0} - \underbrace{\int_\Omega p v_{i,i} dx}_{=0} + \underbrace{\int_\Gamma p n_i v_i ds}_{=0}$$

$$\underbrace{\int_\Omega f_i v_i dx}_{\mathrm{L}(\boldsymbol{v})} = \underbrace{\mu \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx}_{\mathrm{a}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}$$

- Dado que μ >0, se demuestra (ídem problema de Poisson) que a(**.**,**.**) es simétrica, contínua y V-elíptica.
- Se demuestra también (ídem problema de Poisson) que L(**.**) es continua.

- **Nota:** al adoptar un espacio de velocidades de divergencia nula, la formulación variacional no involucra la presión.

MEF aplicado al problema de Stokes

Consideremos el problema de Stokes en $\Omega\subset\mathbb{R}^2$. Luego:

$$\mathrm{V}=\left\{\boldsymbol{v}:\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)\in\left[\mathrm{H}_0^1(\Omega)\right]^2 \text{ y } \frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}=0 \text{ en } \Omega\right\}$$

- Si Ω es simplemente conexo (i.e., no contiene agujeros), div $\boldsymbol{v}$=0 en Ω si y solo si

  $$\boldsymbol{v}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)=\mathrm{rot}\,\varphi \text{ para alguna función } \varphi.$$

  φ : función de corriente del campo de velocidades $\boldsymbol{v}$.

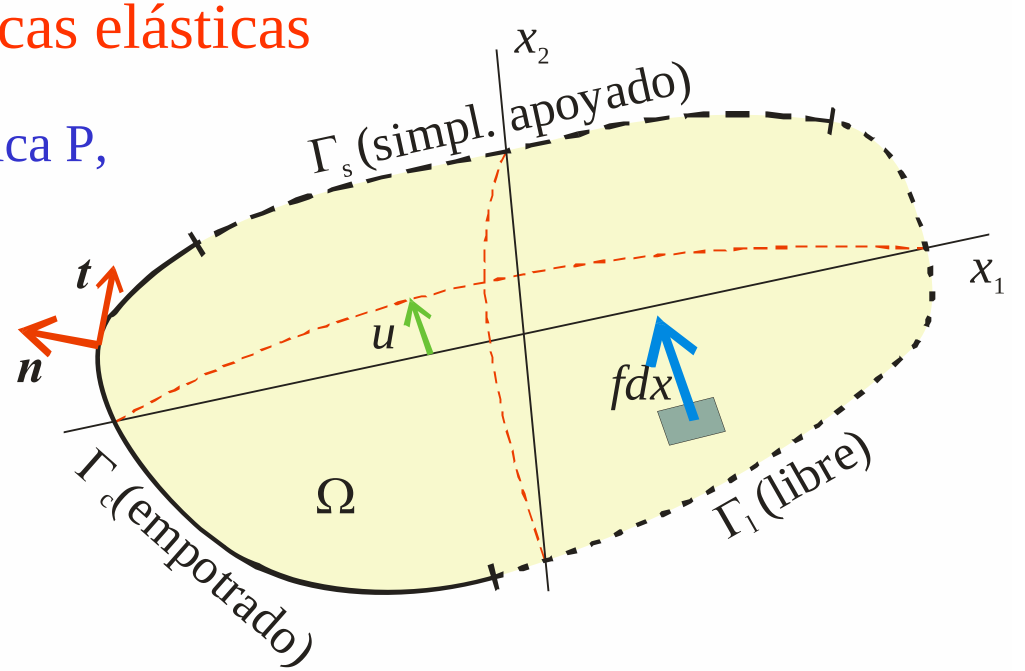
  o sea: $\boldsymbol{v}\in\mathrm{V}\Leftrightarrow\boldsymbol{v}=\mathrm{rot}\,\varphi,\ \varphi\in\mathrm{H}_0^2(\Omega).$

- Adoptamos luego un subespacio W_h de dimensión finita de $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$ (usamos por ej. el elemento finito C^1-continuo ya visto) y definimos $\mathrm{V}_h=\left\{\boldsymbol{v}:\boldsymbol{v}=\mathrm{rot}\,\varphi,\ \varphi\in\mathrm{W}_h\right\}$.

- Se formula el MEF remplazando V por $\mathrm{V}_h\subset\mathrm{V}$ en la formulación variacional. La solución $\boldsymbol{u}_h\in\mathrm{V}_h$ satisface

  $$\left\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\right\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}\le Ch^4\left|\boldsymbol{u}\right|_{\mathrm{H}^5(\Omega)}$$

Flexión de placas elásticas



- Consideremos una delgada placa elástica P, cuya superficie media está dada por el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, sujeta a una carga transversal $\boldsymbol{f}$.
- Se desea determinar
  - deflexión transversal u
  - momentos M_{ij}, $i,j=1,2$.
- El problema está gobernado por

$M_{ij,ij} = f$	en Ω	Ecuación de equilibrio
$u = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$	sobre Γ_c	CB empotrado
$u = M_{nn} = 0$	sobre Γ_s	CB simpl. apoyado
$M_{nn} = Q(\boldsymbol{M}) = 0$	sobre Γ_l	CB libre

$$Q(\boldsymbol{M}) = M_{ij,j} n_i + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t}$$ Fuerza de corte o transversal

Flexión de placas elásticas (cont.)

- Ecuaciones de clausura
  - Asumiendo pequeñas deflexiones y material elástico lineal, la ecuación constitutiva (ley de Hooke) toma la forma

$$\sigma_{ij} = \lambda \Delta u \delta_{ij} + \mu \chi_{ij}$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$	constantes
$\chi_{ij} = u_{,ij} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$	curvatura

  - Las constantes λ y μ dependen del módulo de elasticidad E y el coef. de Poisson ν, así como del espesor de la placa d, de acuerdo a

$$\lambda = \frac{Ed^3}{12(1+\nu)} \qquad \lambda = \frac{\nu E d^3}{12(1-\nu^2)}$$

Formulación variacional del problema de flexión de placas elásticas

1. Adoptamos el espacio $\mathrm{V} = \left\{ v : v \in \mathrm{H}^2(\Omega),\ v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ en } \Gamma_c,\ v = 0 \text{ en } \Gamma_s \right\}$
2. Hacemos

$$\int_\Omega f v dx = \int_\Omega M_{ij,ij} v dx$$

$$\int_\Omega f v dx = -\int_\Omega M_{ij,j} v_{,i} dx + \int_\Gamma M_{ij,j} n_i v ds$$

$$v_{,i} = \frac{\partial v}{\partial n} n_i + \frac{\partial v}{\partial t} t_i$$

$$\int_\Omega f v dx = \int_\Omega M_{ij} v_{,ij} dx - \int_\Gamma \underbrace{M_{ij} n_j v_{,i}} ds + \int_\Gamma M_{ij,j} n_i v ds$$

$$M_{ij} n_j v_{,i} = M_{ij} n_i n_j \frac{\partial v}{\partial n} + M_{ij} t_i n_j \frac{\partial v}{\partial t} = M_{nn} \frac{\partial v}{\partial n} + M_{nt} \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\int_\Omega f v dx = \int_\Omega M_{ij} \chi_{ij}(v) dx - \int_\Gamma M_{nn} \frac{\partial v}{\partial n} ds - \int_\Gamma M_{nt} \frac{\partial v}{\partial t} ds + \int_\Gamma M_{ij,j} n_i v ds$$

$$\int_\Omega f v dx = \int_\Omega M_{ij} \chi_{ij}(v) dx - \int_\Gamma M_{nn} \frac{\partial v}{\partial n} ds + \int_\Gamma \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} v ds + \int_\Gamma M_{ij,j} n_i v ds$$

Integración por partes (con Γ suave)

$$\int_\Omega f v dx = \int_\Omega M_{ij} \chi_{ij}(v) dx - \underbrace{\int_\Gamma M_{nn} \frac{\partial v}{\partial n} ds}_{=0} + \underbrace{\int_\Gamma \left(M_{ij,j} n_i + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \right) v ds}_{=0}$$

$$\underbrace{\int_\Omega f v dx}_{\mathrm{L}(v)} = \int_\Omega \left(\lambda \Delta u \delta_{ij} + \mu \chi_{ij} \right) \chi_{ij}(v) dx = \underbrace{\int_\Omega \left[\lambda \Delta u \Delta v + \mu \chi_{ij}(u) \chi_{ij}(v) \right] dx}_{\mathrm{a}(u,v)}$$

Formulación variacional del problema de flexión de placas elásticas (cont.)

- La forma variacional del problema de flexión de placas elásticas resulta

$$(V) \quad \text{Hallar } u \in \mathrm{V} / \mathrm{a}(u,v) = \mathrm{L}(v), \quad \forall v \in \mathrm{V}$$

con:

$$\mathrm{a}(u,v) = \int_\Omega \left[\lambda \Delta u \Delta v + \mu \chi_{ij}(u) \chi_{ij}(v) \right] dx$$

$$\mathrm{L}(v) = \int_\Omega fv\, dx$$

$$\mathrm{V} = \left\{ v : v \in \mathrm{H}^2(\Omega),\ v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ en } \Gamma_c,\ v = 0 \text{ en } \Gamma_s \right\}$$

  - La forma bilineal a(.,.) es en general simétrica y continua.
  - Además, a(.,.) es V-elíptica si Γ_c>0, i.e., si la placa está empoptrada a lo largo de una parte de su borde.
  - La forma lineal L(.) es continua.

- Ahora se puede formular el MEF para el problema de flexión de placas elásticas usando el elemento C^1-continuo ya descrito.